

École Doctorale Mathématiques, Sciences de l'Information et de l'Ingénieur  
Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection

## THÈSE

présentée par :

**Houssem HALALCHI**

soutenue publiquement le 13 Septembre 2012 pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Strasbourg**  
**Discipline : Signal, Image, Automatique et Robotique**  
**Spécialité : Automatique et Robotique**

## **Commande linéaire à paramètres variants des robots manipulateurs flexibles**

### **Membres du jury**

*Directeur de thèse* : Edouard LAROCHE, Professeur à l'Université de Strasbourg  
*Président* : Olivier SENAME, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble  
*Rapporteur externe* : Jamal DAAFOUZ, Professeur à l'Université de Lorraine  
*Rapporteur externe* : Didier HENRION, Directeur de recherche au LAAS-CNRS  
*Examineur* : Michel DE MATHELIN, Professeur à l'Université de Strasbourg  
*Examineur* : G. Iuliana BARA, Maître de conférences à l'Université de Strasbourg



*À mes parents avec amour et gratitude,*

*À ma famille,*



## Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer mes remerciements à M. Jamal Daafouz, Professeur à l'Université de Lorraine et au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), M. Didier Henrion, Directeur de recherche CNRS au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) et M. Olivier Sename, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG) et au laboratoire GIPSA-lab, de m'avoir fait l'honneur d'évaluer mon travail de thèse de doctorat.

Mes remerciements vont aussi à M. Michel de Mathelin, Professeur à l'Université de Strasbourg, pour m'avoir accueilli dans son équipe de recherche, l'équipe Automatique, Vision et Robotique (AVR) du Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection (LSIIT), avoir mis à ma disposition les moyens nécessaires à l'accomplissement de ce travail et avoir fait partie de mon jury de soutenance.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, M. Edouard Laroche, Professeur à l'Université de Strasbourg, pour m'avoir proposé de travailler sur un sujet de recherche intéressant, m'avoir fait profiter de ces larges connaissances et m'avoir laissé suffisamment de liberté pour explorer de nouvelles pistes de travail. Un grand merci également à Mme Iuliana Bara, Maître de conférences à l'Université de Strasbourg, d'avoir accepté de co-encadrer mon travail et de m'avoir consacré une partie importante de son temps.

Je suis reconnaissant envers l'ensemble des membres de l'équipe pour l'excellente ambiance de travail qu'ils contribuent à faire régner. Une mention spéciale aux doctorants anciens et actuels et aux stagiaires qui se sont succédé au cours de ces années. Nous avons passé des moments mémorables ensemble, dans le laboratoire et en dehors ! Je dédie spécialement ce mémoire à mes camarades de promotion : Fadi, Salih et Xavier et je souhaite bonne chance à nos successeurs : Antonio, Laure, Markus, Ryad et Nitish.

L'expérience de l'enseignement a été pour moi très enrichissante sur les plans scientifique et humain. Je dois beaucoup aux responsables pédagogiques et enseignants des formations où je suis intervenu, à l'école d'ingénieurs Télécom Physique Strasbourg (ex-ENSPS), à l'UFR de Physique et Ingénierie de l'Université de Strasbourg et depuis peu à l'INSA de Strasbourg. Je tiens en particulier à exprimer ma gratitude envers M. Jacques Gangloff, responsable des enseignements d'automatique et de robotique à Télécom Physique Strasbourg, pour la confiance qu'il m'a témoignée en m'attribuant des cours de très grande qualité. Merci à Loïc Cuvillon, Florent Nageotte, Bernard Bayle, Nadia Bahlouli, Christophe Doignon, Pierre Renaud et mes amis moniteurs Bérengère, Salih et Lennart. Travailler à leurs côtés était fort agréable.

Je voudrais également adresser mes sincères remerciements à Mme Peggy Rupp, secrétaire-gestionnaire du laboratoire LSIIT pour son aide précieuse sur les aspects administratifs liés à mon activité de recherche.

Je tiens enfin à saluer la grande gentillesse et le soutien de Mme Joana et M. Eric Ostertag, ainsi que la courtoisie des membres du personnel de l'IRCAD avec qui j'ai eu le plaisir d'interagir en diverses occasions.



# Table des matières

<b>Notations et acronymes</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>Chapitre 1 Problématique et objectifs</b>	<b>7</b>
1.1 Robots manipulateurs flexibles : motivation et applications . . . . .	7
1.1.1 Utilisation d'éléments de transmission compliants . . . . .	7
1.1.2 Utilisation de matériaux légers . . . . .	8
1.1.3 Utilisation de segments de grande longueur . . . . .	8
1.1.4 Instrumentation utilisée : capteurs, actionneurs et commande . . . . .	11
1.2 Eléments de modélisation des manipulateurs flexibles . . . . .	12
1.2.1 Flexibilité d'articulation . . . . .	12
1.2.2 Flexibilité de segment . . . . .	14
1.3 Travaux antérieurs sur la commande des manipulateurs flexibles . . . . .	22
1.3.1 Manipulateurs à articulations flexibles . . . . .	22
1.3.2 Manipulateurs à segments flexibles . . . . .	25
1.4 Méthodologie de travail proposée . . . . .	28
<b>Chapitre 2 Modélisation et commande robuste des systèmes multivariables</b>	<b>29</b>
2.1 Systèmes incertains . . . . .	30
2.1.1 Système incertain non-linéaire . . . . .	30
2.1.2 Modèle linéaire dépendant des paramètres . . . . .	30
2.2 Systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) . . . . .	34
2.2.1 Eléments d'évolution historique . . . . .	35
2.2.2 Modélisation LPV . . . . .	35
2.3 Optimisation convexe, inégalités matricielles linéaires (LMI) . . . . .	40
2.3.1 Convexité . . . . .	40
2.3.2 Formulation des problèmes d'optimisation convexe . . . . .	41
2.3.3 Programmation semi-définie (SDP) . . . . .	41

2.3.4	Programmation semi-définie robuste . . . . .	42
2.4	Représentations convexes et relaxations convexes . . . . .	42
2.4.1	Domaine de faisabilité d'une LMI . . . . .	42
2.4.2	Relaxations convexes . . . . .	43
2.4.3	Problèmes convexes équivalents . . . . .	49
2.5	Analyse de systèmes asservis, synthèse de correcteurs . . . . .	50
2.5.1	Normes matricielles . . . . .	50
2.5.2	Notions fondamentales d'analyse de systèmes . . . . .	52
2.5.3	Formulation SDP des problèmes d'analyse . . . . .	54
2.5.4	Synthèse de correcteurs . . . . .	64
<b>Chapitre 3 Commande basée sur un modèle LPV rationnel</b>		<b>69</b>
3.1	Modèle dynamique de robot manipulateur . . . . .	69
3.1.1	Cas des manipulateurs rigides . . . . .	70
3.1.2	Cas des manipulateurs flexibles . . . . .	72
3.1.3	Représentation d'état non-linéaire . . . . .	75
3.2	Modèle LPV rationnel de robot manipulateur . . . . .	75
3.2.1	Modélisation quasi-LPV par séquençage virtuel . . . . .	75
3.2.2	Cas d'étude . . . . .	76
3.2.3	Modélisation LFR . . . . .	79
3.2.4	Commande basée sur le modèle LPV rationnel . . . . .	81
3.3	Commande utilisant un modèle LPV singulier . . . . .	82
3.3.1	Modélisation LPV singulière (descripteur) . . . . .	82
3.3.2	Commande avec garantie de performance en gain $\mathcal{L}_2$ . . . . .	86
3.3.3	Résultats de simulation . . . . .	88
3.4	Commande basée sur des conditions LMI étendues . . . . .	91
3.4.1	Commande par retour d'état LPV . . . . .	92
3.4.2	Retour d'état avec action intégrale . . . . .	96
3.4.3	Retour d'état avec taux de convergence exponentielle . . . . .	97
3.4.4	Correcteur par retour de sortie dynamique avec garantie de performance en gain $\mathcal{L}_2$ . . . . .	98
3.4.5	Résultats de simulation . . . . .	101
3.5	Comparaison avec la méthode d'inversion de modèle dynamique . . . . .	104
3.5.1	Inversion de modèle dynamique . . . . .	104
3.5.2	Extension aux manipulateurs flexibles . . . . .	105
3.5.3	Résultats de tests comparatifs . . . . .	107
3.6	Conclusion . . . . .	108

<b>Chapitre 4 Analyse et commande basées sur des relaxations de problèmes polynomiaux</b>	<b>111</b>
4.1 Description du manipulateur flexible considéré . . . . .	112
4.1.1 Modèle géométrique . . . . .	112
4.1.2 Modèle cinématique . . . . .	113
4.2 Modèle LPV polynomial obtenu par identification . . . . .	114
4.2.1 Modèle non-linéaire . . . . .	114
4.2.2 Structure du modèle LPV . . . . .	115
4.2.3 Méthode d'identification . . . . .	117
4.3 Commande dans l'espace opérationnel . . . . .	117
4.3.1 Modèle augmenté pour l'asservissement opérationnel . . . . .	118
4.3.2 Modélisation de l'espace de travail . . . . .	119
4.3.3 Représentation factorisée de l'espace de travail . . . . .	119
4.4 Analyse de robustesse avec les relaxations SOS matricielles . . . . .	124
4.4.1 Limites de la scalarisation de contraintes matricielles . . . . .	124
4.4.2 Version matricielle de la S-procédure . . . . .	125
4.4.3 Synthèse de correcteur nominal . . . . .	128
4.4.4 Analyse de robustesse en performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	129
4.4.5 Application au modèle de robot flexible . . . . .	130
4.5 Synthèse de correcteurs LPV avec les relaxations SOS matricielles . . . . .	133
4.5.1 Synthèse de correcteurs LPV . . . . .	134
4.5.2 Application au modèle de robot flexible . . . . .	138
4.6 Conclusion . . . . .	145
<b>Conclusion générale</b>	<b>151</b>
<b>Liste des publications</b>	<b>153</b>
<b>Annexe A Eléments d'algèbre linéaire</b>	<b>155</b>
A.1 Valeurs propres . . . . .	155
A.2 Valeurs singulières . . . . .	155
A.3 Rang et noyau d'une matrice . . . . .	155
A.4 Produit de Kronecker . . . . .	156
<b>Annexe B Lemmes usuels en commande robuste</b>	<b>157</b>
B.1 Lemme du complément de Schur . . . . .	157
B.2 Lemme de projection . . . . .	157
B.3 Lemme de Finsler . . . . .	158

**Bibliographie**

**159**



# Notations et acronymes

## Notations

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	Corps des nombres réel, complexes
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	Espace des vecteurs réels, complexes à $n$ composantes
$\mathbb{R}^{p \times m}, \mathbb{C}^{p \times m}$	Espace vectoriel des matrices réelles, complexes de taille $p \times m$
$\min E, \max E$	Minimum (plus petit élément), maximum (plus grand élément) de $E$
$\inf E, \sup E$	Borne inférieure, borne supérieure de $E$
$\text{Card } E$	Cardinal (nombre d'éléments) de $E$
$ x ,  z $	Valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$ , module de $z \in \mathbb{C}$
$\text{Re}(z), \text{Im}(z)$	Partie réelle, partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$
$0_{p \times m}, 0_n$	Matrice nulle de dimension $p \times m$ , matrice nulle carrée de dimension $n$
$I_n$	Matrice identité de dimension $n$
$\mathcal{R}_n$	Ensemble des polynômes à $n$ variables à coefficients réels
$\Sigma_n$	Ensemble des polynômes SOS, c.à.d. ensemble des éléments de $\mathcal{R}_n$ admettant une décomposition en sommes de carrés
$M^T$	Matrice transposée de $M \in \mathbb{R}^{p \times m}$
$M^H$	Matrice adjointe (transposée conjuguée) de $M \in \mathbb{C}^{p \times m}$
$M^{-1}$	Matrice inverse de $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$
$M \succ 0$ ( $\succcurlyeq 0$ )	Matrice (semi-)définie positive, où $M = M^T \in \mathbb{R}^{p \times m}$
$M \prec 0$ ( $\preceq 0$ )	Matrice (semi-)définie négative, où $M = M^T \in \mathbb{R}^{p \times m}$
$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$	Dérivée partielle de la fonction $f$ par rapport à la variable $x_i$
$\frac{\partial^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i^k}, i = 1, \dots, n$	$k^{\text{ème}}$ dérivée partielle de la fonction $f$ par rapport à la variable $x_i$
$\sigma_i(M), i = 1, \dots, n$	Valeurs singulières de la matrice $M$
$\bar{\sigma}(M)$	Plus grande valeur singulière de la matrice $M$

---

## Acronymes

CAO	<i>Conception assistée par ordinateur</i>
LFR	<i>Linear Fractional Representation</i> : Représentation linéaire fractionnaire
LFT	<i>Linear Fractional Transformation</i> : Transformation linéaire fractionnaire
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> : Inégalité matricielle linéaire
LPV	<i>Linear Parameter Varying</i> : Linéaire à paramètres variants
LSIIT	<i>Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection</i>
LTI	<i>Linear Time Invariant</i> : Linéaire et invariant dans le temps
LTV	<i>Linear Time Varying</i> : Linéaire et variant dans le temps
LWR	<i>Lightweight Robot</i> : Robots légers flexibles développés par le DLR
PD-LMI	<i>Parameter-dependent Linear Matrix Inequality</i> : LMI dépendant des paramètres
PDLF	<i>Parameter-dependent Lyapunov Function</i> : Fonction de Lyapunov dépendant des paramètres
SDP	<i>Semidefinite Programming</i> : Programmation semi-définie
SOSP	<i>Sum of Squares Programming/Program</i> : Programmation/programme en sommes de carrés
SOS	<i>Sum of Squares</i> : Sommes de carrés



# Introduction

Une tendance actuelle en robotique est la réduction du poids et de l'encombrement des robots manipulateurs. Cette réduction est motivée par la volonté de satisfaire plusieurs objectifs, susceptibles d'améliorer les performances de l'accomplissement des tâches assignées pour le robot ainsi que la qualité de l'interaction avec l'environnement matériel et humain. En particulier, une conception et une fabrication de la structure à base de matériaux légers, ainsi qu'une utilisation d'éléments de transmission déformables permet de satisfaire les caractéristiques suivantes :

- Une moindre consommation d'énergie, permise par la réduction des masses distantes par rapport à la base du robot, qui constitue l'élément qui concentre la plus grande part de l'inertie. Cette réduction de consommation a une importance critique dans les applications aérospatiales.
- Une plus grande sécurité de fonctionnement, réalisée par un découplage inertiel entre les segments et la base du robot. Ce découplage conduit à une réduction des énergies cinétiques mises en jeu lors de collisions accidentelles avec l'environnement.
- Une plus grande modularité des différents éléments constituant le robot. Ce dernier pourra ainsi être modifié et adapté suivant la tâche à accomplir. De plus, la stérilisation des éléments du robot s'en trouve ainsi facilitée.

L'utilisation de matériaux légers et d'éléments compliant de transmission de mouvement produit cependant des vibrations dynamiques et des déformations statiques qui peuvent réduire considérablement la performance souhaitée lors de l'accomplissement des tâches si les phénomènes de déformation ne sont pas explicitement pris en compte lors de la conception mécanique et de la synthèse de lois de commande. Des lois de commande efficaces nécessitent la disponibilité de capteurs dédiés pour la mesure des déformations et des forces généralisées du robot.

Ce travail de thèse est consacré à ce dernier point : la synthèse de lois de commande performantes et robustes pour l'asservissement des robots manipulateurs flexibles. Nous avons en particulier considéré le cas difficile des robots à segments flexibles, qui présentent des déformations distribuées le long de leur structure mécanique. Ces systèmes présentent un caractère de sous-actionnement important qui rend difficile leur contrôle. De surcroît, des méthodes habituellement utilisées pour l'asservissement opérationnel (i.e. de l'organe terminal) des robots rigides ne sont pas utilisables en l'état, car elles conduiraient à des instabilités internes du système.

Afin de traiter le problème de suivi de trajectoire pour les robots à segments flexibles, tant au niveau articulaire qu'au niveau opérationnel, nous avons adopté au cours de cette thèse le cadre de travail de la commande robuste et des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV).

Se basant sur une modélisation adéquate sous forme de représentation d'état LPV du système, ce cadre permet la synthèse de lois de commande avec des garanties préalables de performance et de robustesse, d'une manière relativement simple en comparaison avec les résultats disponibles dans la littérature scientifique.

Pour cette raison, l'intérêt de la communauté scientifique pour l'application des techniques LPV en robotique est croissant, depuis les travaux pionniers d'Adams [Adams96], qui ont traité des modèles LPV simplifiés. Des efforts conséquents ont été consacrés à l'obtention de modèles LPV numériquement traitables de robots manipulateurs. L'approche de modélisation quasi-LPV de systèmes non-linéaires conduisant potentiellement à un grand nombre de paramètres, des techniques de réduction de la dimension de l'espace paramétrique ont été développées dans [Kwiatkowski08]. Des résultats expérimentaux basés sur l'utilisation de ces techniques sont relevés dans [Hashemi12]. Cependant, la plupart des contributions référencées se limitent uniquement au cas des robots rigides. Nous avons souhaité remédier à cette limitation en traitant les problèmes de modélisation et de commande LPV des robots flexibles, qui présentent des difficultés supplémentaires liées au caractère sous-actionné et potentiellement non co-localisé de leur commande. Nous avons tenu à obtenir des modèles LPV les plus précis possibles, en conservant les termes non-linéaires des modèles obtenus par les lois de la physique.

Ce mémoire de thèse est divisé suivant une approche thématique en quatre chapitres.

1. Le premier introduit les systèmes étudiés au cours de ce travail. Un accent y est mis sur la modélisation des éléments déformables, la modélisation dynamique de l'ensemble du système, les problèmes de commande qui apparaissent et les méthodes de synthèse de correcteurs proposées dans la littérature scientifique.
2. Dans le second chapitre, nous exposerons des résultats de base sur la modélisation, l'analyse et la commande robuste des systèmes asservis. Un intérêt particulier est porté à la formulation convexe de ces problèmes à l'aide de la programmation semi-définie (SDP). Une présentation de méthodes de relaxations convexes, ainsi que de résultats d'analyse de systèmes non-linéaires à base de contraintes LMI est proposée.
3. Le troisième chapitre rassemble une partie des contributions de ce travail de recherche concernant la modélisation quasi-LPV partant du modèle non-linéaire du système, ainsi que la synthèse de correcteurs LPV basée sur un modèle LPV du système ayant une dépendance paramétrique rationnelle. Deux méthodes de synthèse de correcteurs LPV articulaires avec garantie de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  sont en particulier proposées : l'exploitation d'une modélisation équivalente sous forme de système LPV descripteur singulier et l'utilisation de conditions LMI étendues impliquant des variables matricielles structurées.
4. Le quatrième chapitre traite de l'analyse et de la commande LPV basées sur des relaxations matricielles polynomiales. L'analyse sur des ensembles paramétriques délimités par des contraintes polynomiales est rendue possible par ce type de formulation, permettant de réduire le conservatisme des méthodes polytopiques plus couramment utilisées. Des résultats originaux et prometteurs sur l'utilisation des relaxations en sommes de carrés matricielles en robotique sont proposés.

# Chapitre 1

## Problématique et objectifs

### Sommaire

---

<b>1.1 Robots manipulateurs flexibles : motivation et applications . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1.1 Utilisation d'éléments de transmission compliants . . . . .	7
1.1.2 Utilisation de matériaux légers . . . . .	8
1.1.3 Utilisation de segments de grande longueur . . . . .	8
1.1.4 Instrumentation utilisée : capteurs, actionneurs et commande . . . . .	11
<b>1.2 Eléments de modélisation des manipulateurs flexibles . . . . .</b>	<b>12</b>
1.2.1 Flexibilité d'articulation . . . . .	12
1.2.2 Flexibilité de segment . . . . .	14
<b>1.3 Travaux antérieurs sur la commande des manipulateurs flexibles . .</b>	<b>22</b>
1.3.1 Manipulateurs à articulations flexibles . . . . .	22
1.3.2 Manipulateurs à segments flexibles . . . . .	25
<b>1.4 Méthodologie de travail proposée . . . . .</b>	<b>28</b>

---

### 1.1 Robots manipulateurs flexibles : motivation et applications

La commande des robots manipulateurs est un vaste domaine de recherche, qui a suscité un nombre important de travaux depuis plusieurs décennies, tant sur le plan théorique que celui des applications [CanudasdeWit96]. Dans la plupart des approches proposées, la structure mécanique de ces systèmes est supposée être parfaitement rigide. Les lois de commande sont alors synthétisées suivant cette hypothèse. La rigidité de la structure peut être renforcée en amont par un choix approprié des matériaux constitutifs, ou en aval par un traitement rigidifiant de la structure existante. Cependant, ce renforcement rigidifiant n'est pas toujours possible et les déformations statiques et dynamiques demeurent alors importantes. Les robots légers utilisés dans les applications aérospatiales [Hirzinger04] et médicales [Hagn08] présentent typiquement des phénomènes de flexibilité.

#### 1.1.1 Utilisation d'éléments de transmission compliants

Les éléments de transmission compliants tels que les courroies, les arbres longs, les câbles, les engrenages à onde de déformation (utilisés dans les actionneurs de technologie *Harmonic Drive*) et les engrenages cycloïdaux sont utilisés afin de rapprocher l'actionnement de l'ensemble

du robot le plus possible de la base, ce qui améliore l'efficacité énergétique en raison de la réduction de la masse déportée ainsi réalisée. Les éléments de transmission compliants permettent également un découplage inertiel entre chaque actionneur et le segment correspondant, réduisant ainsi l'énergie cinétique mise en jeu lors des collisions avec l'environnement.

### 1.1.2 Utilisation de matériaux légers

Dans les applications robotiques d'assistance au geste chirurgical à titre d'exemple, des matériaux légers telle que la fibre de carbone peuvent être utilisés en grande proportion dans la constitution de la structure du robot, afin d'améliorer la sécurité du praticien et du patient. De plus, l'utilisation de ces matériaux autorise un rapport charge utile/poids du robot élevé. La réduction des masses mises en jeu permet également une manipulation directe du robot sans avoir recours à une interface de manipulation entre le chirurgien et le patient (schéma de téléopération maître-esclave). De plus, la structure légère du robot permet un moindre encombrement de l'environnement et une consommation d'énergie réduite. Différentes stratégies visant une diminution plus importante de l'inertie des robots ont été rapportées dans la littérature scientifique. Dans [Hagn08], il est établi qu'un asservissement de couple des moteurs articulaires des robots légers conçus au DLR (agence spatiale allemande) permet de diviser l'inertie apparente du moteur par un facteur de 5. L'inertie des segments, quant à elle, est réduite par un choix approprié des matériaux. La Figure 1.2 représente le robot médical générique MIRO, développé par le DLR, équipé d'instruments endoscopiques et effectuant une tâche de chirurgie cardiaque.

Dans le robot à 8 degrés de liberté Dexter, fabriqué par la société Scienza Machinale [De Luca08], les moteurs qui commandent les articulations 3 à 8 sont placés au niveau du deuxième segment. La transmission du mouvement vers les articulations suivantes a lieu par l'intermédiaire de câbles en acier et de poulies. Une photographie de ce robot est affichée dans la Figure 1.3.

La Figure 1.4 représente une photographie du prototype de robot médical développé pour le laboratoire LSIIT de Strasbourg par la société Sintors, actionné à l'aide de moteurs de type *DC brushless* et de réducteurs de type *Harmonic Drive*, qui constituent une source de flexibilité du système.

Les robots légers de la série LWR (pour *lightweight robot*) développés par le DLR associent les deux sources de flexibilité : bras de structure légère fabriqués en fibre de carbone et éléments de transmission compliants de type *Harmonic Drive*. Une vue CAO du robot LWR de la troisième génération est affichée sur la Figure 1.1. Le rapport de la charge utile par rapport aux poids du robot est excellent : il atteint 7 kg/ 14 kg.

### 1.1.3 Utilisation de segments de grande longueur

Hormis l'usage de matériaux constitutifs de poids léger et d'éléments de transmission compliants, une autre source de flexibilité est le caractère long et fin des segments du robot, qui seront considérées comme des poutres d'Euler-Bernoulli de rapport longueur/section élevé. Ce type de conception mécanique est rencontré parmi les robots effectuant des tâches de manipulation dans l'espace, tel que le robot Canadarm conçu par l'agence spatiale canadienne (CSA) afin d'assurer la maintenance de la station spatiale internationale. En effet, ce robot est constitué de trois bras dont le premier (rattaché à la base) a une longueur de 17 m et les deux suivants ont une longueur de 3.5 m (voir Figure 1.5).

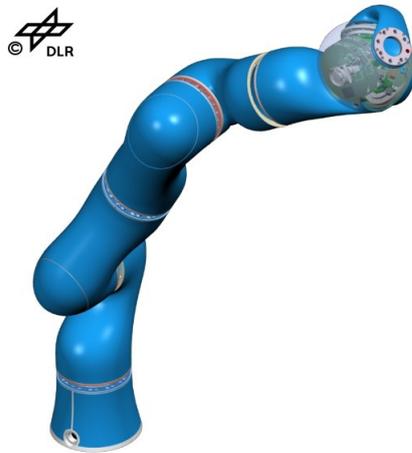


FIGURE 1.1 – Robot léger LWR III conçu par le DLR



FIGURE 1.2 – Robot MIRO du DLR effectuant une tâche de chirurgie cardiaque

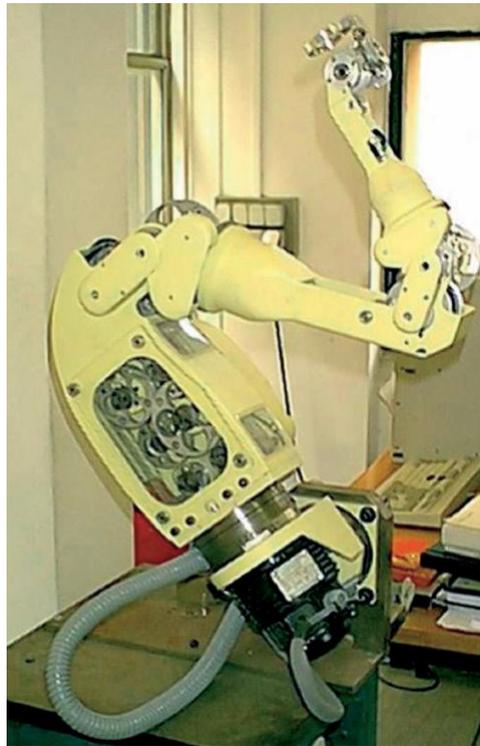


FIGURE 1.3 – Robot Dexter conçu par Scienza Machinale

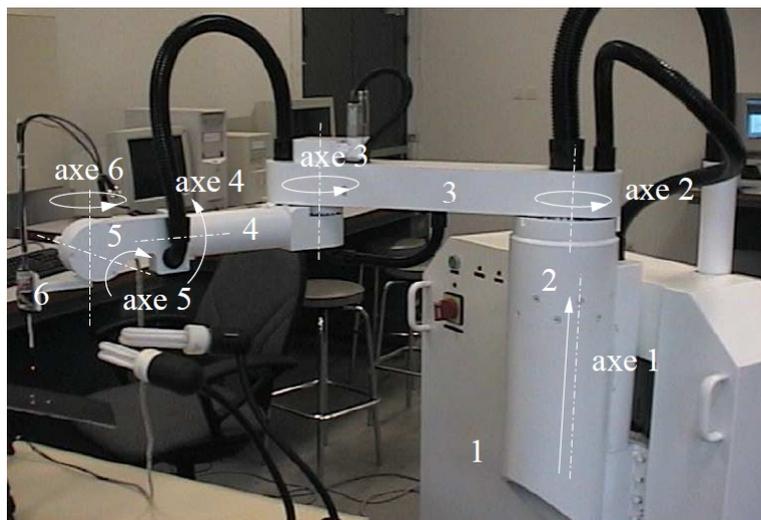


FIGURE 1.4 – Robot Sintors du LSIIT utilisé pour la compensation du mouvement cardiaque



FIGURE 1.5 – Robot spatial Canadarm à longs segments conçu par la CSA

#### 1.1.4 Instrumentation utilisée : capteurs, actionneurs et commande

Les robots flexibles nécessitent typiquement un nombre plus important de capteurs que leurs homologues rigides. Dans le cas des transmissions à l'aide d'éléments compliant, une mesure de la position angulaire, qui peut être fournie par un capteur à effet hall (pour des moteurs synchrones de type *DC-brushless*) ou par un codeur optique, est effectuée de part et d'autre de l'élément compliant. Afin de réaliser un asservissement des couples articulaires, une mesure du couple est effectuée à l'aide de jauges de contraintes. Dans un but de sécuriser l'interaction du robot avec l'environnement par l'application d'un asservissement d'impédance, des capteurs de force-couple à 6 degrés de liberté sont montés au niveau de l'organe terminal du robot. L'asservissement d'impédance consiste typiquement à imposer au transfert entre la force et le déplacement de l'organe terminal dans le repère cartésien un comportement dynamique du second ordre avec une inertie, un amortissement et une raideur spécifiée [Albu-Schäffer02]. La mesure de la déformation distribuée le long de la structure mécanique est plus difficile à réaliser, car elle présente un caractère spatial continu. Des capteurs de déformations, tels que des jauges de contrainte, des accéléromètres ou des capteurs optiques peuvent être placés en des points caractéristiques du segment flexible [De Luca90]. Un point d'intérêt parmi les plus importants est l'organe terminal qui porte l'outil du robot. En effet, un des objectifs essentiels des lois de commande à concevoir est l'atténuation des vibrations transitoires au niveau de ce point, afin de maintenir de bonnes performances dans l'accomplissement de la tâche assignée au robot.

En conclusion, nous tenons à souligner que les flexibilités résultent de la satisfaction de contraintes de sécurité et d'efficacité énergétique des robots manipulateurs. Cependant, ces phénomènes de déformation vibratoire nécessitent une modélisation, une instrumentation et une commande plus complexes que celles utilisées pour leurs homologues rigides. Un bon compro-

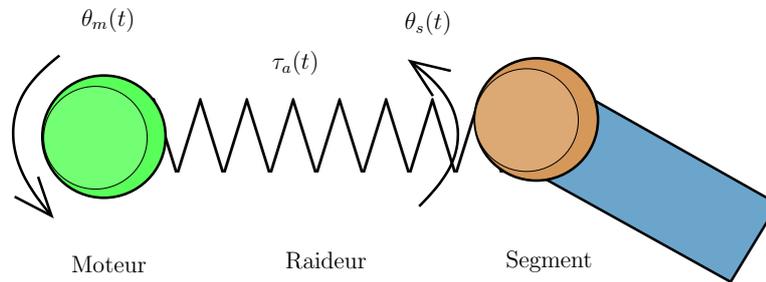


FIGURE 1.6 – Schéma simplifié d'une flexibilité concentrée dans une articulation

mis est donc à trouver dans la satisfaction des deux classes de spécifications.

Les flexibilités localisées et distribuées induisent une déflexion de l'organe terminal, c.à.d. une différence entre la position réelle de ce dernier et la position théorique rigide obtenue connaissant la mesure des positions angulaires des articulations et la géométrie du robot. On peut ainsi dire que le modèle géométrique *rigide*, qui lie la position des moteurs articulaires à la position cartésienne de l'organe terminal, n'est plus vérifié. Toutefois, un modèle géométrique *flexible* peut être défini, moyennant l'introduction de nouvelles coordonnées généralisées.

## 1.2 Eléments de modélisation des manipulateurs flexibles

### 1.2.1 Flexibilité d'articulation

#### 1.2.1.1 Modélisation sous forme d'élasticité localisée

La flexibilité d'articulation peut être modélisée par une raideur linéaire qui représente une déformation élastique en torsion affectant l'axe du moteur qui actionne l'articulation. Cette modélisation a donné lieu au terme de robot à *articulations élastiques* utilisé dans la littérature scientifique [CanudasdeWit96]. Une vue schématique d'une articulation élastique est donnée dans la Figure 1.6, où le moteur de position angulaire  $\theta_m(t)$  actionne le segment de position angulaire  $\theta_s(t)$  à travers l'articulation qui délivre un couple de raideur égal à :

$$\tau_a(t) = k_a(\theta_m(t) - \theta_s(t)) \quad (1.1)$$

où  $k_a$  désigne la raideur équivalente de l'articulation. Une grande valeur de  $k_a$  correspond à une faible flexibilité (ou à une forte raideur). A titre d'exemple, pour le robot Dexter, les raideurs articulaires sont entre 120 et 6300 Nm/rad. Pour le robot LWR III, elles sont entre 6000 et 15000 Nm/rad suivant l'articulation considérée.

Pour chaque moteur, deux coordonnées généralisées  $\theta_m(t)$  et  $\theta_s(t)$ , représentant les positions angulaires de part et d'autre de l'articulation flexible, sont donc utilisées pour décrire le mouvement. Par conséquent, la modélisation des robots à articulations flexibles nécessite deux

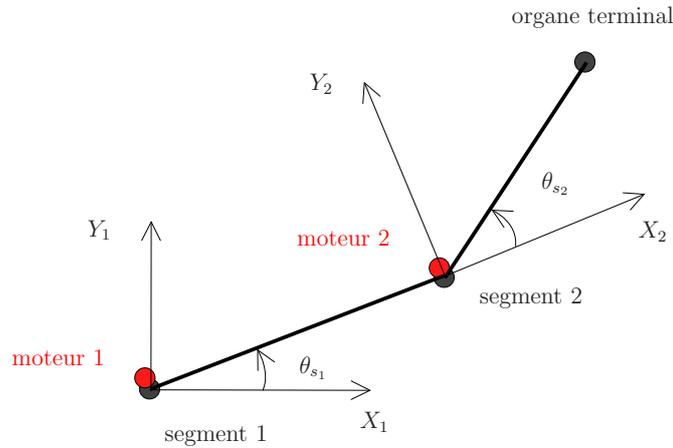


FIGURE 1.7 – Schéma d'un manipulateur à articulations flexibles à plusieurs segments

fois plus de coordonnées généralisées que celle de leurs homologues rigides. La moitié d'entre elles ne sont pas actionnées, ce qui peut compliquer le problème de suivi précis de trajectoires de référence. Toutefois, le couple moteur et le couple résistant dû à la flexibilité agissent sur le même axe de rotation (on dit qu'ils sont physiquement *co-localisés*), ce qui peut simplifier le rejet des vibrations transitoires et permettre un meilleur contrôle de l'ensemble du robot en comparaison avec les robots à flexibilité distribuée le long des segments, comme cela a été noté dans [De Luca08].

### 1.2.1.2 Modélisation dynamique

Le schéma simplifié d'un manipulateur à articulations flexibles à plusieurs segments est représenté sur la Figure 1.7. Pour l'obtention des équations du mouvement, le formalisme d'Euler-Lagrange nécessite le calcul préalable des énergies cinétique  $\mathcal{T}$  et potentielle  $\mathcal{U}$  du robot, dont la différence forme le lagrangien du système  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ . Définissons le nouveau vecteur de coordonnées généralisées  $q(t) = [\theta_m^T(t) \theta_s^T(t)]^T$  qui est constitué des positions angulaires des moteurs  $\theta_{m_i}(t)$  et des positions angulaires des segments  $\theta_{s_i}(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , où  $n$  est le nombre de segments du robot.

#### Energie cinétique du robot

L'énergie cinétique dépend essentiellement des modèles géométrique et cinématique du robot. Etant donné que les positions angulaires des segments  $\theta_{s_i}(t)$  sont situées au-delà des flexibilités, l'énergie cinétique ne dépend que de ces variables et leurs dérivées temporelles.

L'énergie cinétique est la somme des contributions des segments et des moteurs du robot, qui sont supposées tourner autour de leur centre de masse :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_s + \mathcal{T}_m = \frac{1}{2} \dot{\theta}_s^T (M_s(\theta_s) + M_m(\theta_s)) \dot{\theta}_s = \frac{1}{2} \dot{\theta}_s^T (M(\theta_s)) \dot{\theta}_s \quad (1.2)$$

où la matrice d'inertie  $M(\theta_s)$  est une matrice symétrique définie positive.  $M_s(\theta_s)$  et  $M_m(\theta_s)$  sont les inerties des segments et des moteurs respectivement. Les deux termes  $\mathcal{T}_s$  et  $\mathcal{T}_m$  de la somme

contiennent des éléments de translation et de rotation.

### Energie potentielle du robot

L'énergie potentielle du robot est la contribution des termes gravitationnels et élastiques :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_g(\theta_s) + \mathcal{U}_e(\theta_m, \theta_s) \quad (1.3)$$

Le terme gravitationnel  $\mathcal{U}_g(\theta_s)$  dépend de la position du centre de masse du segment qui peut être exprimée à l'aide des coordonnées  $\theta_{s_i}$ . Le terme élastique fait intervenir les deux type de coordonnées généralisées :

$$\mathcal{U}_e(\theta_m, \theta_s) = \frac{1}{2}(\theta_s - \theta_m)^T K_a(\theta_s - \theta_m) \quad (1.4)$$

où  $K_a$  est une matrice de raideur associée aux flexibilités articulaires, diagonale définie positive.

#### 1.2.1.3 Equations d'Euler-Lagrange

Les équations différentielles du mouvement sont obtenues par les équations d'Euler-Lagrange, qui admettent l'écriture vectorielle suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = u(t) \quad (1.5)$$

où  $u(t) \in \mathbb{R}^{2n}$  est le vecteur des forces extérieures qui agissent sur les coordonnées généralisées  $q$ .

Sachant que seules les coordonnées généralisées côté moteur, constituant le vecteur  $\theta_m$ , sont actionnées, et en supposant la présence de frottements visqueux non négligeables dans la transmission élastique, les équations du mouvement du robot admettent la forme partitionnée suivante, entre les dynamiques des segments et celles de moteurs :

$$\begin{cases} M(\theta_s)\ddot{\theta}_s + C(\theta_s, \dot{\theta}_s)\dot{\theta}_s + g(\theta_s) + D_a(\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_m) + K_a(\theta_s - \theta_m) & = 0 \\ B\ddot{\theta}_m + D_a(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_s) + K_a(\theta_m - \theta_s) & = \tau \end{cases} \quad (1.6)$$

$M(\theta_s)$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont les matrices d'inertie des segments et des moteurs respectivement.  $D_a$  est une matrice de dissipation diagonale définie positive,  $g(q) = \frac{\partial \mathcal{U}_g(q)}{\partial q}$  est le vecteur des couples gravitationnels et  $C(\theta_s, \dot{\theta}_s)\dot{\theta}_s$  est le vecteur des couples de Coriolis et centrifuges.

### 1.2.2 Flexibilité de segment

Les flexibilités distribuées le long de la structure mécanique sont appelées flexibilités de segment. Elles sont causées par l'utilisation de matériaux légers et le caractère long et fin des segments du robot. La rigidité parfaite d'une structure mécanique est toutefois une hypothèse idéale, sachant que tous les matériaux ont des fréquences de résonances naturelles, qui peuvent être excités par des forces généralisées dans la même plage de fréquence, des mouvements rapides ou un rapport charge utile/poids du robot élevé.

### 1.2.2.1 Commande non co-localisée

A la différence de la flexibilité d'articulation, dans les segments flexibles, l'entrée de commande et les sorties typiques à contrôler (par exemple des positions de points choisis du segment ou l'amplitude des vibrations) ne sont pas co-localisées, ce qui crée des effets dynamiques indésirables, tels qu'un comportement de système à déphasage non-minimal, occasionnant une dégradation des performances de l'asservissement.

Nous souhaitons illustrer le problème de la co-localisation des capteurs et des actionneurs en discutant brièvement l'exemple simple suivant, exposé dans [Lee91]. Le lecteur intéressé est invité à consulter cette référence pour plus de détails.

**Exemple 1.1.** Soit le système tournant schématisé dans la Figure 1.8, constitué de trois masses séparées de deux ressorts. Seule la première masse est actionnée par un moteur qui délivre un couple  $T_m$ . Le mouvement de rotation est ensuite transmis sans dissipation aux deux autres masses à travers les raideurs de torsion  $K_1$  et  $K_2$  des ressorts.

Les équations de mouvement du système seront données par :

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = T_m - K_1(\theta_1 - \theta_2) \quad (1.7)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = K_1(\theta_1 - \theta_2) - K_2(\theta_2 - \theta_3) \quad (1.8)$$

$$J_3 \ddot{\theta}_3 = K_2(\theta_2 - \theta_3) \quad (1.9)$$

où  $\theta_i$  et  $J_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  représentent les angles de rotation des masses et leurs moments d'inerties, respectivement.

En considérant les trois positions angulaires  $\theta_i$  comme les sorties du système, et en prenant les valeurs numériques  $J_i = K_i = 1$  pour  $i = 1, \dots, 3$ , nous obtenons la matrice de transfert suivante :

$$G(s) = Y(s)T_m^{-1}(s) = \frac{1}{s^2(s^4 + 4s^2 + 3)} \begin{bmatrix} s^4 + 3s^2 + 1 \\ s^2 + 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

où  $s$  est la variable de Laplace,  $Y(s) = [Y_1(s) \ Y_2(s) \ Y_3(s)]^T$  est la transformée de Laplace des positions angulaires  $[\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$  et  $T_m(s)$  est la transformée de Laplace du couple d'entrée  $T_m(t)$ .

Les pôles du système sont les racines du dénominateur de  $G(s)$ . Il sont les mêmes pour les trois sorties et ils constituent les pulsations naturelles de la structure. Les zéros du système sont les racines du numérateur de chaque composante de la matrice de transfert  $G(s)$ . Si une partie de ces zéros se situent dans le demi-plan droit du lieu des racines, alors le système est dit à déphasage non-minimal et il ne peut pas être inversé dans le correcteur. Autrement dit les pôles du correcteur ne peuvent pas compenser les zéros instables du système car cela génère un correcteur instable.

Il a été montré dans [Lee91] que ce système, bien que n'ayant pas de zéro à partie réelle strictement positive, se comporte comme un système à déphasage non-minimal dans le cas non

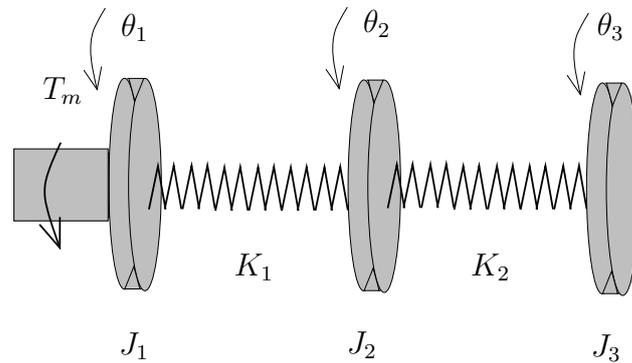


FIGURE 1.8 – Schéma du système tournant à trois masses

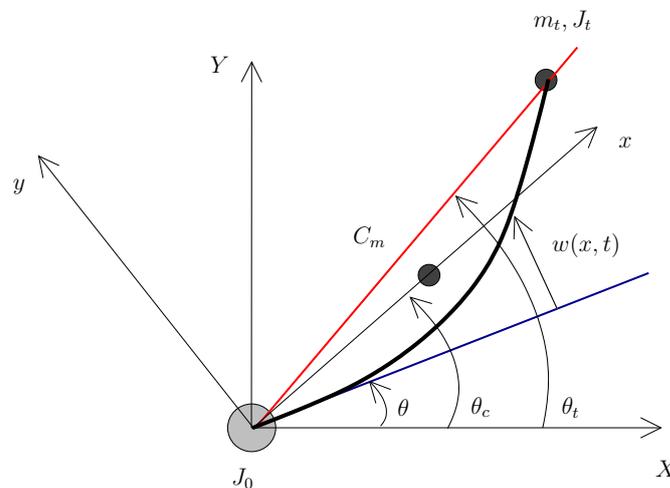


FIGURE 1.9 – Schéma d'un segment flexible

co-localisé (sorties  $\theta_2$  et  $\theta_3$ ). Alors que dans le cas co-localisé (sortie  $\theta_1$ ), un correcteur à avance de phase stabilise le système asservi de manière robuste, dans le cas non co-localisé, des correcteurs d'ordre plus élevé, tels que des correcteurs LQG (linéaires quadratiques gaussiens) sont nécessaires. Le placement des capteurs et des actionneurs dans le système est donc un élément important à prendre en compte lors de la synthèse de la loi de commande.

### Variables mesurées dans les segments flexibles

La Figure 1.9 représente un segment flexible qui subit une déformation notée  $w(x, t)$ , distribuée le long de la structure et variable dans le temps. Une mesure de cette déformation pour toute position  $x$  est bien entendu difficile à réaliser au cours du fonctionnement normal du segment. Une alternative consiste à considérer la sortie comme des positions angulaires en des positions spécifiques du segment. Cette approche a été utilisée pour la commande de manipulateurs à segments flexibles au niveau articulaire dans [De Luca90] et [Benosman02] entre autres. Dans la Figure 1.9, trois positions angulaires sont considérées :

- La position angulaire  $\theta_c$  mesurée par les codeurs placés au niveau des moteurs articulaires.
- La position angulaire  $\theta$  obtenue à l'aide de la droite qui relie le centre du moteur au centre de masse  $C_m$ . Cette position est difficile à mesurer, mais sa connaissance simplifie les calculs des énergies potentielles gravitationnelles des segments.
- La position angulaire  $\theta_t$  obtenue à l'aide de la droite qui relie le centre du moteur à l'extrémité du segment. Cette position est mesurée en utilisant par exemple un capteur optique et peut être utilisée dans le but d'asservir directement la position de l'extrémité (ou position terminale) du segment qui porte éventuellement une charge de masse  $m_t$  et d'inertie  $J_t$ .

L'actionnement du système ayant lieu au niveau du moteur  $J_0$  uniquement, seul l'asservissement de la position  $\theta_c$  donnée par le codeur est un problème de commande co-localisé. Il est considéré de ce fait comme un problème de commande relativement simple, à l'inverse de l'asservissement direct de la position terminale qui constitue un problème de commande non co-localisé et présente un comportement dynamique de système à déphasage non-minimal.

### 1.2.2.2 Système sous-actionné

Nous avons vu dans la partie consacrée aux robots à articulations flexibles que ces systèmes sont modélisés en utilisant deux fois plus de coordonnées généralisées que leurs homologues rigides, dont seule la moitié (positions angulaires côté moteur) sont actionnées. Pour les robots à segments flexibles, se pose le problème du choix des coordonnées généralisées à utiliser pour décrire le mouvement dans son ensemble, avec ses composantes de rotation par rapport à l'axe du moteur  $J_0$  et de flexion suivant l'axe  $x$ .

Une modélisation de la déformation  $w(x, t)$  par l'approche des modes supposés permet de séparer les dépendances temporelle et spatiale, donnant lieu à un modèle de nombre de coordonnées généralisées (ou de degrés de liberté théoriques) infini :

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(t) \phi_k(x) \quad (1.11)$$

où  $\phi_k(x)$  est une fonction qui donne la forme spatiale de la déformation et  $\delta_k(t)$  est l'amplitude de la déformation occasionnée par le  $k^{\text{ème}}$  mode flexible.

Ce modèle de dimension infinie est tronqué à un ordre  $n_d$  jugé suffisamment précis. En plus de la position angulaire  $\theta$  du moteur, le vecteur de coordonnées généralisées contiendra les amplitudes instantanées des modes flexibles pris en compte :  $q = [\theta \ \delta_1 \ \dots \ \delta_{n_d}]^T$ . Pour chaque segment flexible, il y a donc  $n_d$  coordonnées généralisées non actionnées. Ceci indique un caractère sous-actionné plus important en comparaison avec les articulations flexibles. Notons que d'autres méthodes de modélisation de la déformation ont été proposées telles que la méthode des éléments finis [Tokhi99] et la méthode basée sur la théorie des graphes [Shi02b].

### 1.2.2.3 Fréquences de vibration des modes flexibles

Chaque mode flexible du segment est caractérisé par une fréquence de vibration. D'une manière similaire à une masse ponctuelle actionnée à travers la raideur d'un ressort, la pulsation naturelle du premier mode de vibration est donnée par la formule :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_e}{I_e}} \quad (1.12)$$

où  $k_e$  désigne la raideur équivalente du segment et  $I_e$  son inertie équivalente.

La caractérisation des constantes  $k_e$  et  $I_e$ , ainsi que les fréquences de vibration des modes d'ordre supérieur, sont obtenues par le biais de la résolution de l'équation à dérivées partielles (EDP) régissant le comportement de la déformation :

$$\lambda(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1.13)$$

où  $\lambda(x)$  est la densité de masse linéique à la position  $x$  du segment,  $E$  est le module d'élasticité en flexion du matériau et  $I(x)$  est le moment d'inertie élémentaire de la section du segment à la position  $x$ . L'absence de second membre dans l'équation (1.13) indique que les déformations ne sont pas actionnées directement par une force extérieure. La solution de cette EDP est obtenue en utilisant la connaissance des conditions aux limites spatiales, correspondant à  $x = 0$  (origine confondue avec l'axe du moteur) et  $x = l$  (extrémité du segment).

Une atténuation rapide des modes flexibles d'ordre supérieur à 1 se produit généralement en pratique, ce qui permet de restreindre le nombre de modes considérées à une valeur relativement faible  $n_d = 2$  ou 3. La fréquence du premier mode flexible est celle qui caractérise le plus la rigidité/flexibilité du segment. Ainsi, le segment est considéré flexible seulement lorsque cette fréquence se situe dans la bande passante du correcteur. Il est d'usage de considérer qu'un correcteur articulaire de type proportionnel et dérivé assure de bonnes performances de suivi de trajectoires de référence lorsque  $\omega_1$  est au moins trois fois supérieure à la plus grande pulsation des pôles du système bouclé (voir [De Luca08] et la référence [Book75]).

### 1.2.2.4 Robots à plusieurs segments flexibles

Le schéma d'un manipulateur à deux segments flexibles est donné dans la Figure 1.10. Les propriétés de la structure mécanique (fréquences de vibration, sous-actionnement, caractère non co-localisé) sont similaires à celles données dans le cas d'un seul segment flexible. Le mouvement est transmis vers les segments distants non rattachés à la base à travers les segments précédents dans la chaîne cinématique.

#### 1.2.2.4.1 Description géométrique et cinématique

La description géométrique et cinématique des robots à plusieurs segments flexibles est plus complexe que celles des robots à articulations flexibles. En effet, pour ces derniers, la description peut être effectuée d'une manière entièrement similaire au cas rigide en considérant les positions articulaires mesurées au-delà des éléments compliants. Pour les robots à segments flexibles, en

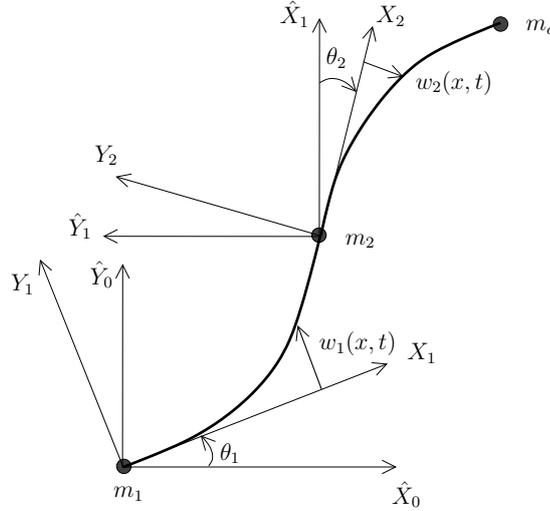


FIGURE 1.10 – Schéma d'un robot à deux segments flexibles

revanche, la modification de la géométrie liée à la déformation de structure se propage le long des segments et son effet augmente lorsque l'on s'éloigne de la base du robot qui porte le repère absolu  $(\hat{X}_0, \hat{Y}_0)$ .

Une écriture adéquate des modèles géométrique et cinématique permet le calcul des énergies cinétique et potentielle du robot, qui peuvent ensuite être utilisées pour l'obtention du modèle dynamique en utilisant les équations d'Euler-Lagrange. En plus des coordonnées rigides constituées des positions angulaires mesurées  $\theta_i(t)$ , les amplitudes instantanées des déformations  $\delta_{ij}(t)$  sont considérées comme des coordonnées généralisées, où  $i$  est l'indice du segment et  $j$  celui du mode flexible.

Une approche récursive pour l'expression des positions et vitesses en tout point du robot dans le repère absolu  $(\hat{X}_0, \hat{Y}_0)$  a été proposée dans [Book84], puis reprise dans [De Luca91]. Afin d'exposer les principaux éléments de cette approche, introduisons les notations suivantes :

${}^i p_i(x_i) = \begin{bmatrix} x_i \\ w_i(x_i) \end{bmatrix}$  : vecteur de position d'un point du segment  $i$  exprimé dans le repère  $(X_i, Y_i)$ .

$p_i(x_i)$  : vecteur de position du même point dans le repère absolu  $(\hat{X}_0, \hat{Y}_0)$ .

${}^i r_{i+1} = {}^i p_i(l_i)$  : vecteur de position de l'extrémité du segment  $i$  exprimée dans le repère  $(X_i, Y_i)$ .

$r_i$  : vecteur de position du même point exprimée dans le repère absolu  $(\hat{X}_0, \hat{Y}_0)$ .

Définissons également la variable  $z_i$  qui représente l'arc tangente de l'angle de rotation dû à la déformation à l'extrémité du segment  $i$ .

$$z_i = \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \Big|_{x_i=l_i} \quad (1.14)$$

L'approximation linéaire  $\tan(z_i) = z_i$  est valable pour de faibles déformations.

Des matrices de rotation rigide et flexible sont exprimées par :

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_i = \begin{bmatrix} 1 & -z_i \\ z_i & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

La composition des deux transformations donne lieu à la matrice de transformation résultante suivante :

$$W_i = W_{i-1}E_{i-1}A_i = \hat{W}_{i-1}A_i \quad \text{avec l'initialisation} \quad \hat{W}_0 = I \quad (1.16)$$

Pour exprimer la position d'un point appartenant au segment  $i$  dans le repère absolu  $(\hat{X}_0, \hat{Y}_0)$ , les formules de passage suivantes sont utilisées :

$$p_i = r_i + W_i^i \dot{p}_i \quad (1.17)$$

$$r_{i+1} = r_i + W_i^i r_{i+1} \quad (1.18)$$

Les vitesses absolues sont données par la transformation suivante :

$$\dot{p}_i = \dot{r}_i + \dot{W}_i^i p_i + W_i^i \dot{p}_i \quad (1.19)$$

Un calcul manuel de ces grandeurs cinématiques serait long et ardu. Ce calcul se fait en pratique au moyen d'une programmation dans un logiciel de calcul symbolique tel que Maple.

### Energie cinétique

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}_{m_i} + \sum_{i=1}^n \mathcal{T}_{s_i} + \mathcal{T}_c \quad (1.20)$$

Les trois termes de la somme représentent les contributions des moteurs, des segments et de la charge montée à l'extrémité du dernier segment en partant de la base. Ces contributions sont déterminées de la manière suivante.

Pour chacun des moteurs articulaires, l'énergie cinétique est donnée par la somme de termes de translation et de rotation :

$$\mathcal{T}_{m_i} = \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^T \dot{r}_i + \frac{1}{2} J_i \dot{\alpha}_i^2 \quad (1.21)$$

où  $m_i$  représente la masse du moteur  $i$ ,  $J_i$  son moment d'inertie et  $\dot{\alpha}_i$  sa vitesse absolue obtenue par :

$$\dot{\alpha}_i = \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j + \sum_{k=1}^{i-1} \dot{z}_k \quad (1.22)$$

Pour les segments, l'énergie cinétique est donnée par la formule :

$$\mathcal{T}_{s_i} = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \lambda_i(x_i) \dot{p}_i^T(x_i) \dot{p}_i(x_i) dx_i \quad (1.23)$$

où  $\lambda_i(x_i)$  est la masse linéique du segment de longueur  $l_i$ .

Enfin, l'énergie cinétique de la charge est donnée par :

$$\mathcal{T}_c = \frac{1}{2} m_c \dot{r}_{n+1}^T \dot{r}_{n+1} + \frac{1}{2} J_c (\dot{\alpha} + \dot{z})^2 \quad (1.24)$$

où  $m_c$  est la masse de la charge et  $J_c$  son moment d'inertie.

### Energie potentielle

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_e + \mathcal{U}_g \quad (1.25)$$

La partie liée à la déformation élastique est donnée par :

$$\mathcal{U}_e = \sum_{i=1}^n \mathcal{U}_{e_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (EI)_i(x_i) \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i \quad (1.26)$$

La contribution de la gravité est donnée par :

$$\mathcal{U}_g = \sum_{i=1}^n \mathcal{U}_{g_{m_i}} + \sum_{i=1}^n \mathcal{U}_{g_{s_i}} + \mathcal{U}_{g_c} \quad (1.27)$$

Les contributions respectives des moteurs, des segments et de la charge sont données par :

$$\mathcal{U}_{g_{m_i}} = -m_{m_i} g_0^T r_i \quad (1.28)$$

$$\mathcal{U}_{g_{s_i}} = -g_0^T \int_0^{l_i} \rho_i(x_i) p_i(x_i) dx_i \quad (1.29)$$

$$\mathcal{U}_{g_c} = -m_p g_0^T r_{n+1} \quad (1.30)$$

où  $g_0$  est un vecteur qui contient l'accélération de la pesanteur dans tous ses éléments.

#### 1.2.2.4.2 Modèle dynamique : équations d'Euler-Lagrange

Dans le cas des robots à plusieurs segments, la méthode des modes supposés de modélisation des déformations donnée dans (1.11) devient :

$$w_i(x, t) = \sum_{j=1}^{n_d} \delta_{ij}(t) \phi_{ij}(x) \quad (1.31)$$

$\delta_{ij}(t)$  et  $\phi_{ij}(x)$  sont respectivement l'amplitude instantanée et la fonction de forme du mode flexible  $j$  du segment  $i$ .  $n_d$  modes flexibles par segment sont pris en compte.

Le lagrangien étant défini par :  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ , les équations d'Euler-Lagrange du système sont données ci-dessous :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = u_i(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (1.32)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\delta}_{ij}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_{ij}} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n_d \quad (1.33)$$

où  $u_i(t)$  est le couple extérieur (commande et frottement) qui agit sur la position angulaire  $\theta_i$ .

Ces équations conduisent au modèle dynamique du robot, obtenu sous la forme matricielle partitionnée suivante, décrivant un comportement non-linéaire du second ordre :

$$\begin{bmatrix} M_{\theta\theta}(q) & M_{\theta\delta}(q) \\ M_{\delta\theta}(q) & M_{\delta\delta}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\theta(q, \dot{q}) + g_\theta(q) \\ c_\delta(q, \dot{q}) + g_\delta(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

$q(t) = [\theta^T(t) \ \delta^T(t)]^T = [\theta_1(t) \dots \theta_n(t) \ \delta_{11}(t) \dots \delta_{nn_d}(t)]^T$ , avec  $\theta(t) = [\theta_1(t) \dots \theta_n(t)]^T$  et  $\delta(t) = [\delta_{11}(t) \dots \delta_{nn_d}(t)]^T$ , est le vecteur des coordonnées généralisées.  $M_{xy}$  avec  $x, y \in \{\theta, \delta\}$  sont les sous-matrices de la partition rigide/flexible de la matrice d'inertie  $M(q)$ .  $D_\delta$  et  $K_\delta$  sont les matrices d'amortissement et de raideur affectant les variables de déformation.  $c_\theta$  and  $c_\delta$  sont les vecteurs des couples de Coriolis et centripètes,  $g_\theta$  et  $g_\delta$  sont les vecteurs de couples gravitationnels.  $\tau(t)$  est le vecteur de couples de commande fournis par les moteurs au niveau des articulations.

Notons enfin que dans le cas particulier d'un manipulateur à un seul segment flexible, le modèle (1.34) est linéaire.

### 1.3 Travaux antérieurs sur la commande des manipulateurs flexibles

La commande des robots flexibles a fait l'objet d'un grand nombre de contributions scientifiques. Nous avons choisi de détailler les problèmes de suivi de trajectoire qui nous paraissent particulièrement intéressants.

#### 1.3.1 Manipulateurs à articulations flexibles

Pour les manipulateurs à articulations flexibles, le suivi d'une trajectoire  $F^*(t)$  assignée à l'organe terminal du robot, peut être traité de manière équivalente par un asservissement au niveau articulaire impliquant les variables  $\theta_s^*(t)$ , qui représente le mouvement des segments au-delà des éléments flexibles qui les séparent des moteurs.

##### 1.3.1.1 Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse consiste à calculer les couples articulaires nécessaires au suivi d'une trajectoire de référence de la sortie du système. En examinant la forme donnée dans (1.6) pour le modèle dynamique d'un robot à segments flexibles, on remarque que l'action du vecteur des couples d'entrée  $\tau(t)$  se fait sur les positions des moteurs  $\theta_m(t)$ . Afin de déterminer le couple nominal  $\tau^*(t)$  permettant de réaliser une trajectoire de référence  $\theta_s^*(t)$ , il est donc nécessaire d'exprimer cette trajectoire dans les coordonnées  $\theta_m^*(t)$ .

Pour une trajectoire donnée  $\theta_s^*(t)$  des angles des segments, l'équation des moteurs dans (1.6) s'écrit :

$$B\ddot{\theta}_m^*(t) + D_a(\dot{\theta}_m^*(t) - \dot{\theta}_s^*(t)) + K_a(\theta_m^*(t) - \theta_s^*(t)) = \tau^*(t) \quad (1.35)$$

Les trajectoires des moteurs  $\theta_m^*(t)$  et  $\dot{\theta}_m^*(t)$  ne sont pas disponibles à ce stade pour l'évaluation de  $\tau^*(t)$ . L'équation des segments dans (1.6) donne :

$$M(\theta_s^*(t))\ddot{\theta}_s^*(t) + n(\theta_s^*(t), \dot{\theta}_s^*(t)) + D_a\dot{\theta}_s^*(t) + K_a\theta_s^*(t) = D_a\dot{\theta}_m^*(t) + K_a\theta_m^*(t) \quad (1.36)$$

où  $n(\theta_s^*, \dot{\theta}_s^*)$  rassemble les termes non-linéaires de Coriolis et de gravité. La dérivation temporelle de l'équation (1.36) fait apparaître  $\ddot{\theta}_m^*(t)$  :

$$D_a\ddot{\theta}_m^* + K_a\dot{\theta}_m^* = M(\theta_s^*)\theta_s^{*[3]} + (\dot{M}(\theta_s^*) + D_a)\ddot{\theta}_s^* + \dot{n}(\theta_s^*, \dot{\theta}_s^*) + K_a\dot{\theta}_s^* \quad (1.37)$$

Partant d'une condition initiale  $\dot{\theta}_m^*(0)$ , la vitesse des moteurs  $\dot{\theta}_m^*(t)$  peut être considérée comme la solution de l'équation différentielle du premier ordre (1.37). L'accélération  $\ddot{\theta}_m^*(t)$  est obtenue par dérivation de la vitesse.

L'équation (1.35) avec les termes de raideur et de dissipation pris dans (1.36) donne :

$$\tau^*(t) = B\ddot{\theta}_m^*(t) + M(\theta_s^*)\ddot{\theta}_s^*(t) + n(\theta_s^*, \dot{\theta}_s^*) \quad (1.38)$$

Cette loi de commande basée sur le modèle inverse est une commande en boucle ouverte du système. Elle est donc dépourvue de toute robustesse. Ce défaut peut être corrigé par l'ajout d'un terme de rétroaction impliquant les sorties mesurées du système :

$$\begin{aligned} \tau_r(t) = & K_{p\theta_m}(\theta_m^*(t) - \theta_m(t)) + K_{d\theta_m}(\dot{\theta}_m^*(t) - \dot{\theta}_m(t)) \\ & + K_{p\theta_s}(\theta_s^*(t) - \theta_s(t)) + K_{d\theta_s}(\dot{\theta}_s^*(t) - \dot{\theta}_s(t)) \end{aligned} \quad (1.39)$$

Ici le couple  $\tau_r(t)$  est de nature proportionnelle et dérivée sur les positions articulaires côté segment et côté moteur. Il peut être vu comme un retour d'état statique, sachant que le vecteur d'état contient les coordonnées généralisées  $\theta_m(t)$ ,  $\theta_s(t)$  et leurs dérivées temporelles.

La couple de commande global est alors la somme des deux termes d'action directe (*feedforward*) et de rétroaction (*feedback*) :

$$\tau(t) = \tau^*(t) + \tau_r(t) \quad (1.40)$$

La mesure des positions angulaires des deux côtés de l'articulation flexible n'est pas toujours possible. En pratique, il est courant d'implémenter une commande par rétroaction impliquant les positions du moteur seulement (retour d'état partiel) :

$$\tau_r(t) = K_{p\theta_m}(\theta_m^*(t) - \theta_m(t)) + K_{d\theta_m}(\dot{\theta}_m^*(t) - \dot{\theta}_m(t)) \quad (1.41)$$

**Remarque 1.1.** L'implémentation de la loi de commande par inversion nécessite une trajectoire de référence  $\theta_m^*(t)$  lisse de classe  $\mathcal{C}^3$ , c.à.d. une trajectoire dérivable trois fois et de troisième dérivée continue.

**Remarque 1.2.** La loi de commande par inversion décrite ci-dessus assure une convergence asymptotique locale seulement de la sortie  $\theta_s(t)$  vers la référence  $\theta_s^*(t)$ . L'élargissement du domaine de convergence peut être réalisé par un bon réglage des gains de la rétroaction.

**Remarque 1.3.** Cette méthode de commande est aussi réalisable pour les robots à segments flexibles. Nous l'avons mise en œuvre avec un réglage des gains proportionnels et dérivés effectué à l'aide des techniques d'optimisation non-lisses qui permettent de spécifier des exigences de performance et de robustesse. Les résultats sont exposés dans le Chapitre 3 de ce mémoire.

### 1.3.1.2 Linéarisation par bouclage

Cette méthode consiste à appliquer une commande par retour d'état non-linéaire afin de rendre les dynamiques des erreurs de suivi de trajectoire complètement linéaires et découplées. Un réglage adéquat de ce correcteur peut également imposer des exigences de convergence exponentielle ou de placement de pôles au système découplé. La méthode de commande de systèmes non-linéaires basée sur une linéarisation par bouclage (*feedback linearization*) est très couramment utilisée en robotique, où elle est souvent désignée sous le terme de commande par découplage non-linéaire.

La dérivation temporelle de l'équation des segments dans (1.6) donne la relation :

$$M(\theta_s)\theta_s^{[3]} + \dot{M}(\theta_s)\ddot{\theta}_s + \dot{n}(\theta_s, \dot{\theta}_s) + K_a\dot{\theta}_s + D_a\ddot{\theta}_s = K_a\dot{\theta}_m + D_a\ddot{\theta}_m \quad (1.42)$$

L'équation des moteurs dans (1.6) permet d'obtenir l'accélération angulaire côté moteurs :

$$\ddot{\theta}_m = B^{-1}(\tau - K_a(\theta_m - \theta_s) - D_a(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_s)) \quad (1.43)$$

En remplaçant (1.43) dans (1.42), on obtient la formule d'évolution du couple  $\tau$  au cours du mouvement :

$$\tau = BD_a^{-1} \left( M(\theta_s)\theta_s^{[3]} + \dot{M}(\theta_s) + \dot{n}(\theta_s, \dot{\theta}_s) + K_a(\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_m) + D_a\ddot{\theta}_s \right) + K_a(\theta_m - \theta_s) - D_a(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_s) \quad (1.44)$$

Afin de modifier la dynamique du système, il est courant d'utiliser une commande auxiliaire  $\nu$  qui remplace  $\theta_s^{[3]}$  dans (1.44). Nous pouvons prendre cette variable sous la forme suivante :

$$\nu = \theta_s^{*[3]} + K_2(\ddot{\theta}_s^* - \ddot{\theta}_s) + K_1(\dot{\theta}_s^* - \dot{\theta}_s) + K_0(\theta_s^* - \theta_s) - M^{-1}(\theta_s)D_aB^{-1}K_a(\theta_s - \theta_m) - M^{-1}(\theta_s)D_aB^{-1}D_a(\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_m) \quad (1.45)$$

où  $\theta_s^*(t)$  est la trajectoire de référence des positions angulaires des segments et les  $K_j$ ,  $j = 0, 1, 2$  sont des matrices diagonales à déterminer. Le système bouclé est alors découplé et l'évolution des erreurs de suivi  $e_i = \theta_{s_i}^* - \theta_{s_i}$  au niveau de chaque segment admet l'équation :

$$e_i^{[3]} + k_{2i}\ddot{e}_i + k_{1i}\dot{e}_i + k_{0i}e_i = 0 \quad (1.46)$$

où  $k_{ji}$  désigne le  $i^{\text{ème}}$  élément diagonal de la matrice  $K_j$ .

La transformée de Laplace de (1.46) donne :

$$s^3 + k_{2i}s^2 + k_{1i}s + k_{0i} = 0 \quad (1.47)$$

Si les coefficients  $k_{2i}$ ,  $k_{1i}$  et  $k_{0i}$  sont choisis tels que les solutions de (1.47) sont à partie réelle strictement négative (on dit que le polynôme est *Hurwitz*), alors l'annulation asymptotique exponentielle de l'erreur de suivi  $e_i(t)$  est garantie.

**Remarque 1.4.** La loi de commande synthétisée fait intervenir les positions et variables angulaires des deux côtés de l'articulation flexible  $\theta_m, \theta_s, \dot{\theta}_m, \dot{\theta}_s$ , en plus de l'accélération côté segment  $\theta_s$ . Cette dernière variable n'est pas toujours facile à mesurer ou à obtenir de manière précise par dérivations successives. Ce problème peut être évité par l'utilisation d'un asservissement du couple articulaire  $\theta_a = K_a(\theta_m - \theta_s)$ . Des asservissements de couple articulaires utilisant des mesures de couple à l'aide de capteurs dédiés sont installés dans les robots de la série LWR conçus par le DLR [Albu-Schäffer07].

**Remarque 1.5.** Les dynamiques des variables  $\theta_m$  des moteurs sont rendues non observables (variables internes) par la linéarisation. Elles sont toutefois stables. A cause de la présence de frottement visqueux dans l'articulation, le système est linéarisé et découplé au sens entrée-sortie  $\theta^*(t) \rightarrow \theta(t)$ , pas au sens de l'ensemble des variables d'état.

Notons enfin que les systèmes d'actionnement à raideur variable font l'objet d'un intérêt croissant de la part de la communauté scientifique à cause de l'amélioration des contraintes de sécurité et de performance que ces dispositifs permettent [Albu-Schäffer10, De Luca09].

### 1.3.2 Manipulateurs à segments flexibles

Contrairement aux manipulateurs à articulations flexibles, pour les manipulateurs à segments flexibles, les problèmes de suivi de trajectoires au niveau articulaire ou au niveau opérationnel sont de nature différente, les premiers étant généralement considérés plus simples.

#### 1.3.2.1 Commande dans l'espace articulaire

##### Linéarisation par bouclage

Considérons le modèle dynamique de manipulateurs à segments flexibles donné dans (1.34). Parmi les coordonnées généralisées des vecteurs  $\theta(t)$  (rigides) et  $\delta(t)$  (flexibles), l'objectif est d'assigner une trajectoire de référence  $\theta^*(t)$  aux coordonnées rigides. L'équation libre dans (1.34) permet de déduire les accélérations des variables de déformation :

$$\ddot{\delta} = -M_{\delta\delta}^{-1}(M_{\theta\delta}^T\ddot{\theta} + c_\delta + g_\delta + D\dot{\delta} + K\delta) \quad (1.48)$$

En remplaçant  $\ddot{\delta}$  dans l'équation actionnée dans (1.34), nous obtenons :

$$\tau = (M_{\theta\theta} - M_{\theta\delta}M_{\delta\delta}^{-1}M_{\theta\delta}^T)\ddot{\theta} + c_\theta + g_\theta - M_{\theta\delta}M_{\delta\delta}^{-1}(c_\delta + g_\delta + D\dot{\delta} + K\delta) \quad (1.49)$$

Comme pour les robots à segments flexibles, il est possible de remplacer l'accélération  $\ddot{\theta}$  par une commande auxiliaire  $\nu$  permettant un suivi de trajectoires de référence avec un découplage et des performances spécifiées. Nous pouvons par exemple lui donner la forme proportionnelle et dérivée suivante :

$$\nu = \ddot{\theta}^*(t) + K_d(\dot{\theta}^*(t) - \dot{\theta}(t)) + K_p(\theta^*(t) - \theta(t)) \quad (1.50)$$

Le couple de commande  $\tau(t)$  résultant est remplacé dans l'équation actionnée dans (1.34) :

$$M_{\theta\theta}\ddot{\theta} + M_{\theta\delta}\ddot{\delta} + c_\theta + g_\theta = 0 \quad (1.51)$$

L'évolution de l'erreur de suivi de trajectoire  $e(t) = \theta^*(t) - \theta(t)$  obéira alors à l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\ddot{e}(t) + K_d\dot{e}(t) + K_p e(t) = 0 \quad (1.52)$$

Des matrices de gain diagonales à éléments positifs  $K_p$  et  $K_d$  garantissent le découplage des deux articulations et l'annulation asymptotique de l'erreur de suivi  $e(t)$ .

**Remarque 1.6.** La méthode de commande effectuant une linéarisation par bouclage présentée ci-dessus est une commande non-linéaire par retour d'état complet. Elle suppose la mesure des variables de déformation  $\delta(t)$  et leurs dérivées temporelles  $\dot{\delta}(t)$ , ce qui est rarement possible en pratique. Si la mesure n'est pas disponible, une solution pratique consiste à utiliser le schéma de commande à deux degrés de liberté (feedforward-feedback) présenté dans le paragraphe 1.3.1.1. Le terme de feedforward compenserait les non-linéarités dans des conditions de suivi nominal alors que le terme de feedback améliorerait la qualité du suivi de trajectoire.

**Remarque 1.7.** L'équation suivante représente les dynamiques internes du système, rendues non observables par le bouclage linéarisant :

$$\ddot{\delta} = -M_{\delta\delta}^{-1}(M_{\theta\delta}^T\nu + c_\delta + g_\delta + D\dot{\delta} + K\delta) \quad (1.53)$$

Les dynamiques des zéros de ces états sont obtenus en considérant une sortie mesurée nulle  $\theta = 0$  :

$$\ddot{\delta} = -M_{\delta\delta}^{-1}(c_\delta + g_\delta + D\dot{\delta} + K\delta) \quad (1.54)$$

Ces dynamiques sont à l'origine du comportement de type déphasage non-minimal présenté par certains systèmes (ce n'est pas le cas ici). La stabilité des dynamiques des zéros est une condition nécessaire à la stabilité du système bouclé.

### Commande à deux échelles temporelles

Dans cette approche de commande, le système (1.34) est considéré comme une association de deux sous-systèmes :

- Un sous-système rapide : constitué par l'évolution des coordonnées flexibles  $\delta(t)$ .
- Un sous-système lent : constitué par l'évolution des coordonnées rigides  $\theta(t)$ .

Sous l'hypothèse d'une séparation suffisante de ces deux échelles de temps, une commande composite peut être synthétisée. Elle sera constituée des contributions des deux types de dynamiques du système :

$$\tau(t) = \tau_l(t) + \tau_r(t) \quad (1.55)$$

Afin de calculer chacune des contributions, faisons sortir les accélérations des coordonnées généralisées dans le modèle (1.34) :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_{\theta\theta} & H_{\theta\delta} \\ H_{\delta\theta} & H_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta + g_\theta - \tau(t) \\ D\dot{\delta} + K\delta + c_\delta + g_\delta \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

où les  $H_{xy}$  avec  $x, y \in \{\theta, \delta\}$  sont les sous-matrices de la partition rigide/flexible de l'inverse de la matrice d'inertie :  $H(q) = M^{-1}(q)$ .

Les dynamiques rigides et flexibles peuvent alors s'écrire en tant que :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -M_{\theta\theta}(c_\theta + g_\theta - \tau(t)) - M_{\theta\delta}(D\dot{\delta} + K\delta + c_\delta + g_\delta) \\ \ddot{\delta} = -M_{\theta\delta}^T(c_\theta + g_\theta - \tau(t)) - M_{\delta\delta}(D\dot{\delta} + K\delta + c_\delta + g_\delta) \end{cases} \quad (1.57)$$

Les éléments de la matrice de raideur  $K$  caractérisent l'ampleur de la flexibilité. De ce fait, cette matrice peut être réécrite de la manière :  $K = k_m \bar{K}$ , où  $k_m = \frac{1}{\varepsilon^2}$  est le plus petit élément de  $K$ . Nous pouvons ainsi définir la nouvelle variable  $z = K\delta = k_m \bar{K}\delta = \frac{1}{\varepsilon^2} \bar{K}\delta$ . Les équations (1.57) deviennent :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -M_{\theta\theta}(c_\theta + g_\theta - \tau(t)) - M_{\theta\delta}(D\varepsilon^2 \bar{K}\dot{z} + z + c_\delta + g_\delta) \\ \varepsilon^2 \ddot{z} = -\bar{K}M_{\theta\delta}^T(c_\theta + g_\theta - \tau(t)) - \bar{K}M_{\delta\delta}(D\dot{\delta} - \delta + c_\delta + g_\delta) \end{cases} \quad (1.58)$$

Une petite valeur de  $\varepsilon$  indique une raideur de grande valeur mais finie. Dans ce cas, nous aurons une bonne séparation des échelles temporelles lente et rapide. Une valeur nulle  $\varepsilon = 0$  est obtenue dans le cas rigide (raideur infinie).

Par l'intermédiaire de la nouvelle variable temporelle  $T = \frac{t}{\varepsilon}$ , la méthode consiste à synthétiser une commande *lente*  $\tau_l(t)$  (par exemple par inversion de modèle) pour le premier sous-système et une commande *rapide*  $\tau_r(t)$  (par exemple par placement de pôles) pour le second. Cette méthode a également été utilisée pour l'asservissement visuel de la position terminale de robots flexibles dans [Bascetta06].

Beaucoup d'autres travaux existent dans littérature sur la commande des robots à segments flexibles dans le domaine articulaire. Dans [Arteaga00], une approche de commande robuste est utilisée pour augmenter l'amortissement du système. Dans [Martins05], une commande composite constituée d'un terme de correction proportionnelle et dérivée sur les positions articulaires et d'un terme impliquant une mesure de flexion est proposée. Un état de l'art étendu sur l'utilisation des méthodes de commande robuste pour l'asservissement des robots manipulateurs, qui inclut le cas des robots à articulations flexibles, avait été effectué dans [Sage99]. Un état de l'art étendu sur la modélisation dynamique et la commande des robots manipulateurs flexibles, notamment en utilisant les méthodes de commande robuste et adaptative a été proposé dans [Dwivedy06].

### 1.3.2.2 Commande dans l'espace opérationnel

Pour la commande directe dans l'espace opérationnel,  $n$  variables articulaires suffisent à asservir les trajectoires de  $n$  coordonnées opérationnelles. Contrairement au cas des robots rigides et des robots à articulations flexibles, une commande par linéarisation par bouclage n'est pas envisageable car le transfert entre les entrées et les sorties du problème de commande est à déphasage non-minimal à cause de l'instabilité des dynamiques des zéros des états non observables. Parmi les méthodes proposées dans la littérature pour contourner ce problème, il y a l'utilisation du modèle inverse permettant de réaliser une trajectoire de référence exprimée dans les coordonnées  $(y_d, \delta_d)$ . Il est également possible de faire une inversion dans le domaine fréquentiel, en considérant les signaux d'entrée et de sortie comme des signaux périodiques [De Luca96]. Une méthode d'inversion de modèle non-linéaire à déphasage non-minimal, qui stabilise les dynamiques des zéros non observables, a été proposée dans [Benosman01] et [Benosman03]. Elle est basée sur l'hypothèse d'un caractère lisse des trajectoires de référence, ainsi que sur la prise en compte de conditions aux limites appropriées.

## 1.4 Méthodologie de travail proposée

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés aux problèmes de poursuite de trajectoire au niveaux articulaire et opérationnel. Nous avons choisi le cadre de travail de la commande robuste et des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV). Les non-linéarités du modèle sont reformulées en tant que paramètres variants, ce qui réduit fortement le nombre de linéarisations et d'approximations dans les modèles utilisés. Nous supposons aussi tout au long de ce travail que les coordonnées flexibles constituées des variables de déformations et leurs dérivées ne sont pas disponibles à la mesure, ce qui conduit typiquement à des problèmes de commande par retour de sortie, réputés plus difficiles à résoudre que les problèmes de commande par retour d'état. Les conditions de synthèse ou d'analyse de performance et de robustesse utilisant des modèles LPV conduisent à des conditions de type PD-LMI (inégalités matricielles linéaires dépendant des paramètres), associées à des objectifs d'optimisation linéaires représentant typiquement la performance de type  $\mathcal{H}_\infty$  des systèmes considérés. Un problème important ayant retenu notre attention consiste en la complexité numérique des problèmes d'analyse et synthèse, occasionnée par le type de dépendance paramétriques des PD-LMI utilisées. Dans la première partie de notre travail, nous avons cherché à simplifier cette dépendance paramétrique en la réduisant à une dépendance affine. Nous avons dans ce but fait appel à la représentation d'un modèle LPV rationnel sous forme de modèle singulier, ainsi qu'à une compensation des termes rationnels à l'aide de la prise en compte de la structure. Dans un second temps nous avons exploré la possibilité d'utiliser directement un modèle LPV polynomial voire rationnel, en utilisant des relaxations convexes appropriées. Les deux types d'approches ont donné de bons résultats en simulation et mériteraient des études plus approfondies en vue de leur application à des classes de modèles de plus grande taille ou de plus grande complexité.

## Chapitre 2

# Modélisation et commande robuste des systèmes multivariables

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Systèmes incertains</b>	<b>30</b>
2.1.1	Système incertain non-linéaire	30
2.1.2	Modèle linéaire dépendant des paramètres	30
<b>2.2</b>	<b>Systèmes linéaires à paramètres variants (LPV)</b>	<b>34</b>
2.2.1	Éléments d'évolution historique	35
2.2.2	Modélisation LPV	35
<b>2.3</b>	<b>Optimisation convexe, inégalités matricielles linéaires (LMI)</b>	<b>40</b>
2.3.1	Convexité	40
2.3.2	Formulation des problèmes d'optimisation convexe	41
2.3.3	Programmation semi-définie (SDP)	41
2.3.4	Programmation semi-définie robuste	42
<b>2.4</b>	<b>Représentations convexes et relaxations convexes</b>	<b>42</b>
2.4.1	Domaine de faisabilité d'une LMI	42
2.4.2	Relaxations convexes	43
2.4.3	Problèmes convexes équivalents	49
<b>2.5</b>	<b>Analyse de systèmes asservis, synthèse de correcteurs</b>	<b>50</b>
2.5.1	Normes matricielles	50
2.5.2	Notions fondamentales d'analyse de systèmes	52
2.5.3	Formulation SDP des problèmes d'analyse	54
2.5.4	Synthèse de correcteurs	64

---

Afin d'analyser ou de corriger le comportement d'un système physique, il est généralement nécessaire de procéder au préalable à une étape de modélisation mathématique qui soit la plus précise et la plus complète possible. Il faut cependant garder à l'esprit que le modèle mathématique constitue nécessairement une approximation du comportement du système. Par exemple, il est courant de négliger les dynamiques de certains capteurs, certains phénomènes qui apparaissent dans les hautes fréquences, certaines non-linéarités et des effets mal connus.

Un correcteur synthétisé en se basant sur un modèle mathématique est destiné *in fine* à être implémenté directement sur le système physique. Si ce dernier possède des plages de variations importantes par rapport à son fonctionnement nominal ou s'il est sujet à des perturbations

extérieures, des instabilités du système ou des dégradations de ces performances peuvent apparaître dans le cas où ces phénomènes ne sont pas prévus lors de la synthèse du correcteur. En revanche, l'asservissement est d'autant plus efficace que des caractérisations des incertitudes sont dans une certaine mesure réalisées dans l'étape de modélisation à des fins de synthèse de correcteurs. Dans les sections suivantes, nous exposerons les principales méthodes de prise en compte des incertitudes de modèle, ainsi que les méthodes d'analyse et de synthèse appropriées dans chaque cas.

## 2.1 Systèmes incertains

### 2.1.1 Système incertain non-linéaire

Un système dynamique à temps continu est généralement décrit par un modèle non-linéaire, prenant la forme d'équations différentielles non-linéaires. Des incertitudes paramétriques correspondant à une structure de modèle connue (ordre et type de non-linéarité de l'équation différentielle) peuvent affecter le système. Suivant la nature de l'évolution temporelle de l'incertitude, deux cas de figure peuvent se présenter :

1. Le paramètre incertain a une évolution lente dans le temps. C'est le cas par exemple d'un facteur de frottement visqueux mal connu d'un moteur. On parle alors d'*incertitude invariante dans le temps*.
2. Le paramètre incertain évolue au cours du fonctionnement du système. C'est le cas par exemple de la masse d'un avion en plein vol à cause de la consommation de carburant. On parle alors d'*incertitude variant dans le temps*.

L'équation d'état non-linéaire d'un système incertain est donnée par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \theta(t)) \quad (2.1a)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), \theta(t)) \quad (2.1b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des entrées du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur des sorties mesurées et  $\theta(t) \in \mathbb{R}^l$  est le vecteur des paramètres incertains. Les paramètres et leurs dérivées temporelles sont généralement supposés appartenir à des sous-ensemble bornés de  $\mathbb{R}^l$ , autrement dit  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$  et  $\dot{\theta} \in \Omega \subset \mathbb{R}^l$ .

L'équation d'état (2.1a) rassemble les équations dynamiques du système, tandis que l'équation de sortie (ou de mesure) (2.1b) donne les variables mesurées du système.

### 2.1.2 Modèle linéaire dépendant des paramètres

#### 2.1.2.1 Problème standard

Afin de simplifier l'analyse, la commande, ou l'estimation d'état du modèle incertain (2.7) et par conséquent faciliter l'analyse et la synthèse de correcteurs, il est courant de considérer un modèle linéaire dépendant des paramètres au lieu d'un modèle non-linéaire. Le vecteur de paramètres incertains  $\theta(t)$  décrirait alors à la fois des incertitudes de modèle et des comportements dynamiques négligés.

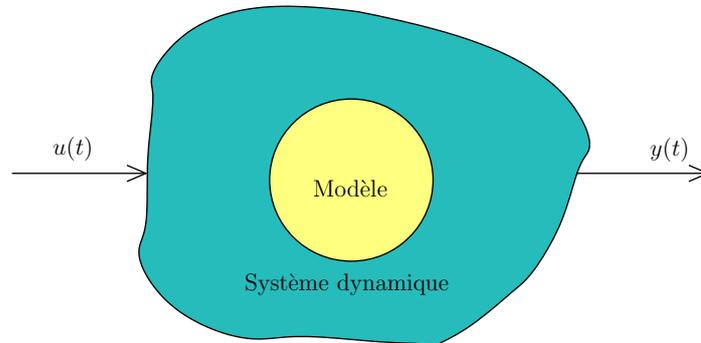


FIGURE 2.1 – Modélisation d'un système dynamique

$$P(s, \theta) : \begin{cases} \dot{x} = A(\theta(t))x + B_2(\theta(t))u(t) + B_1(\theta(t))w(t) \\ y = C_2(\theta(t))x + D_{22}(\theta(t))u(t) + D_{21}(\theta(t))w(t) \\ z = C_1(\theta(t))x + D_{12}(\theta(t))u(t) + D_{11}(\theta(t))w(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Cette représentation généralisée (ou augmentée) du système contient deux canaux d'entrées-sorties :

- Le canal de commande, de vecteur d'entrées  $u(t)$  et de vecteur de sorties  $y(t)$  tel que définis plus haut. Ce canal permet, grâce à l'apport d'un correcteur  $K(s)$ , de définir la commande appropriée permettant d'atteindre le comportement désiré pour le système asservi.
- Le canal de performance, de vecteur d'entrée  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  appelées *entrées extérieures* et de vecteur de sorties  $z(t) \in \mathbb{R}^s$  appelées *sorties contrôlées*.

Une telle représentation généralisée, ainsi que les problèmes d'analyse et de synthèse associés, sont désignés sous le terme de *problème standard* de la commande robuste, représenté dans la Figure 2.2. Il est à noter qu'un correcteur robuste  $K(s)$  ne dépend pas explicitement des paramètres incertains, dont la mesure n'est généralement pas disponible. Ceci constitue une différence notable entre les systèmes à incertitudes paramétriques et les systèmes linéaires à paramètres variants (LPV).

### 2.1.2.2 Dépendance paramétrique

Les matrices d'état du modèle  $P(s, \theta)$  données dans (2.2) dépendent donc d'un vecteur de paramètres incertains  $\theta(t)$ . Le type de cette dépendance paramétrique est important en vue de l'analyse de stabilité et de performance ainsi que de la synthèse de correcteurs. Les types de dépendance paramétrique les plus couramment rencontrés sont les dépendances affine, polytopique, polynomiale et rationnelle. Considérons la forme matricielle suivante de l'équation (2.2).

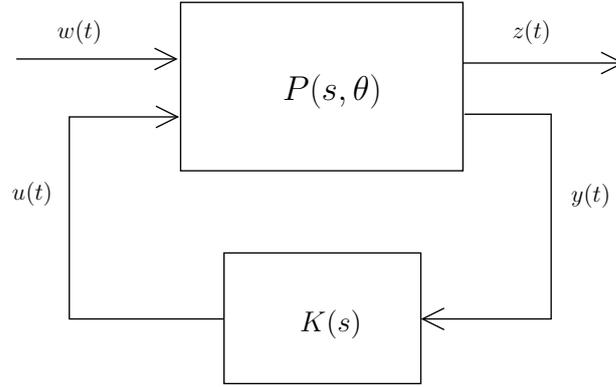


FIGURE 2.2 – Problème standard de la commande robuste

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A(\theta) & B_1(\theta) & B_2(\theta) \\ C_1(\theta) & D_{11}(\theta) & D_{12}(\theta) \\ C_2(\theta) & D_{21}(\theta) & D_{22}(\theta) \end{bmatrix}}_{M(\theta)} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

### Système incertain polytopique

Dans ce cas l'espace paramétrique est représenté par un polytope convexe, c'est à dire un ensemble convexe délimité par un nombre fini de sommets  $\theta_i^\nu \in \Theta^\nu$ ,  $i = 1..n_\nu$ . La valeur du paramètre à l'instant  $t$  est exprimée comme la combinaison convexe des sommets du polytope :  $\theta(t) = \sum_{i=1}^{n_\nu} \xi_i(t)\theta_i^\nu$ , où les coordonnées barycentriques  $\xi_i$  vérifient :  $0 \leq \xi_i(t) \leq 1, \forall i$  et  $\sum_{i=1}^{n_\nu} \xi_i(t) = 1$ . Cela conduit à une représentation polytopique du modèle incertain :

$$M(\theta(t)) = \sum_{i=1}^{n_\nu} \xi_i(t)M(\theta_i^\nu) \quad (2.4)$$

Dans le cas particulier où les paramètres scalaires sont indépendants les un des autres et vérifient des conditions de bornes minimale et maximale  $\theta_k \in [\underline{\theta}_k, \bar{\theta}_k]$ ,  $k = 1..l$ , l'ensemble paramétrique est un *hyperrectangle* délimité par ces bornes. Le nombre de sommets est alors  $n_\nu = 2^l$ .

### Système incertain affine

La dépendance des matrices d'état est linéaire en fonction des paramètres incertains :

$$M(\theta(t)) = M_0 + \sum_{k=1}^l \theta_k(t)M_k \quad (2.5)$$

où les matrices  $M_k, k = 0..l$  sont constantes. Notons que dans le cas de l'hyperrectangle, les représentations affine et polytopiques sont équivalentes et le passage de l'un à l'autre se fait de manière unique.

### Système incertain polynomial ou rationnel

Les matrices d'état sont des polynômes ou des fractions rationnelles multivariées des paramètres incertains :

$$M(\theta(t)) = \sum_{j=1}^r \phi_j(\theta_1(t), \dots, \theta_l(t)) M_j \quad (2.6)$$

où les matrices  $M_j, k = 1..r$  sont constantes et les  $\phi_j$  sont des fonctions scalaires polynomiales ou rationnelles.

### Représentation linéaire fractionnaire (LFR)

La représentation sous forme LFR (pour *Linear Fractional Representation*) utilise un outil mathématique qu'on appelle *produit de Redheffer*. Cette représentation est caractérisée par la rétroaction d'un système linéaire et invariant dans le temps (LTI)  $\Sigma(s)$  avec un bloc dépendant des paramètres qu'on appelle *matrice d'incertitude*  $\Delta(\theta)$ . La représentation d'état généralisée d'un tel système est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z_d(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_d & B_1 & B_2 \\ C_d & D_d & D_{d1} & D_{d2} \\ C_1 & D_{1d} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{2d} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}}_{\Sigma(s)} \begin{bmatrix} x(t) \\ w_d(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.7a)$$

$$w_d(t) = \Delta(\theta)z_d(t) \quad (2.7b)$$

Cette représentation est équivalente à la représentation d'état dépendant des paramètres donnée dans (2.3), où les matrices d'état sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} A(\theta) &= A + B_d \Delta(\theta) (I - D_d \Delta(\theta))^{-1} C_d \\ B_1(\theta) &= B_1 + B_d \Delta(\theta) (I - D_d \Delta(\theta))^{-1} D_{d1} \\ B_2(\theta) &= B_2 + B_d \Delta(\theta) (I - D_d \Delta(\theta))^{-1} D_{d2} \\ C_1(\theta) &= C_1 + D_{1d} \Delta(\theta) (I - D_d \Delta(\theta))^{-1} C_d \\ C_2(\theta) &= C_2 + D_{2d} \Delta(\theta) (I - D_d \Delta(\theta))^{-1} C_d \\ D_{11}(\theta) &= D_{11} + D_{1d} \Delta(\theta) (I - D_d \Delta(\theta))^{-1} D_{d1} \\ D_{12}(\theta) &= D_{12} + D_{1d} \Delta(\theta) (I - D_d \Delta(\theta))^{-1} D_{d2} \\ D_{21}(\theta) &= D_{21} + D_{2d} \Delta(\theta) (I - D_d \Delta(\theta))^{-1} D_{d1} \\ D_{22}(\theta) &= D_{22} + D_{2d} \Delta(\theta) (I - D_d \Delta(\theta))^{-1} D_{d2} \end{aligned}$$

Le schéma-bloc de la représentation LFR d'un système incertain est donné dans la Figure 2.3. Cette forme est assez générale et permet de représenter de manière compacte des systèmes incertains à dépendance paramétrique affine, polynomiale ou rationnelle. La représentation LFR est dite bien posée si et seulement si  $(I - D_d \Delta(\theta))^{-1} \neq 0, \forall \theta \in \Theta$ .

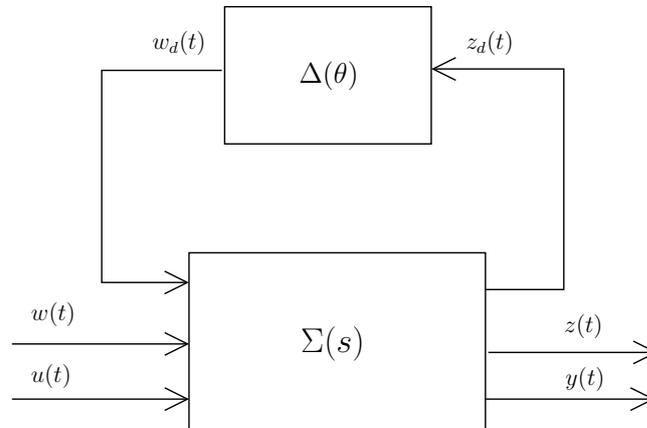


FIGURE 2.3 – Représentation LFR d'un système incertain

## 2.2 Systèmes linéaires à paramètres variants (LPV)

Les systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) possèdent une représentation similaire à celle des systèmes incertains dépendant des paramètres, à la différence notable que, bien que les trajectoires des paramètres soient inconnues *a priori*, la mesure des paramètres est disponible à chaque instant  $t$ . Afin de pouvoir distinguer les paramètres dans le cas incertain et dans le cas LPV, nous adopterons par la suite la notation  $\rho(t)$  au lieu de  $\theta(t)$  dans le cas LPV. Du fait de la disponibilité de sa mesure, la valeur du paramètre  $\rho(t)$  peut être utilisée dans le correcteur qui devient donc lui-même un système LPV, comme illustré dans la Figure 2.4.

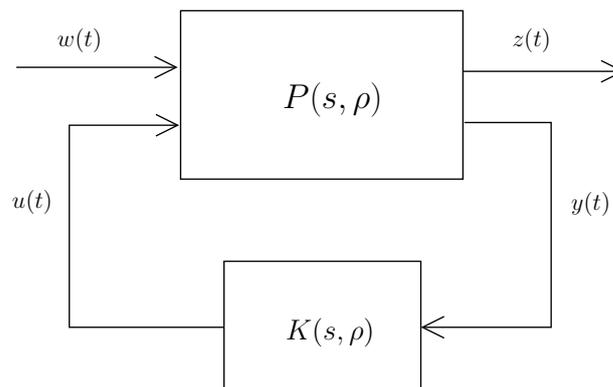


FIGURE 2.4 – Schéma de principe de la commande LPV

Historiquement, la commande LPV est apparue comme une généralisation de la commande par séquençage de gain (*gain scheduling*) dont le principe est le suivant. Étant donné un modèle non-linéaire supposé refléter de manière précise un système physique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.8)$$

En adoptant la notation  $\Gamma(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f(x(t), u(t)) \\ g(x(t), u(t)) \end{bmatrix}$ , l'approche initiale de la commande par séquençement de gain consistait à synthétiser un correcteur LTI  $K_i(s)$  pour chaque système  $\Gamma(x_i, u_i)$  correspondant au comportement linéaire local du système autour du point de fonctionnement donné par la paire  $(x_i, u_i)$ . Le correcteur final à appliquer résulte alors de l'interpolation des différents correcteurs locaux entre deux points de fonctionnement consécutifs. Les systèmes LPV peuvent être assimilés à des systèmes à gain séquençé par un signal dérivable  $\rho(t)$ .

### 2.2.1 Éléments d'évolution historique

L'article de Rugh et Shamma [Rugh00] était l'un des premiers à faire un état de l'art étendu sur les méthodes de modélisation, d'analyse et de commande des systèmes à gain séquençé et des systèmes LPV, développés pour la plupart durant la décennie précédente. Un panorama historique de l'évolution de ce domaine de recherche est tracé et les domaines d'application de la commande par séquençement de gain (qui a évolué par la suite vers la commande LPV) y sont exposés. Il y est mentionné que les premières applications, datant de la décennie 1950, étaient réservées au domaine militaire en raison du coût élevé de la mise en œuvre de ces lois de commande, ainsi que de l'importance du respect des critères de performance. Dans les applications commerciales, la commande à séquençement de gain a été utilisée pour le contrôle des moteurs de véhicules automobiles depuis 1970.

Sur le plan scientifique, les premières publications sur la commande par séquençement de gain datent de la décennie 1980. L'évolution vers la commande LPV s'est produite dans la décennie 1990 et nous assistons depuis 2000 à une explosion du nombre de publications portant sur des aspects théoriques et applicatifs des systèmes LPV, de leur analyse et de leur commande. Ce développement est dû à l'augmentation de la capacité de calcul des processeurs intégrés, ainsi qu'aux avancées récentes de l'optimisation convexe, en particulier la programmation semi-définie (SDP pour *semidefinite programming*) et les algorithmes numériques permettant la résolution efficace de cette classe de problèmes, telles que les méthodes du point intérieur, du sous-gradient et de l'ellipsoïde [Boyd04].

### 2.2.2 Modélisation LPV

Les lois de commande de type LPV sont destinées à être implémentées sur les systèmes physique (bien entendu non-linéaire) à asservir. Cependant, il est nécessaire dans l'étape de synthèse de correcteur de disposer d'un modèle LPV du système car le modèle non-linéaire n'est pas utilisable dans l'état. Sous l'hypothèse de mesurabilité du vecteur de paramètres, un modèle LPV a une structure similaire à celle d'un modèle incertain (2.2) :

$$P(s, \rho) : \begin{cases} \dot{x} &= A(\rho)x + B_2(\rho)u(t) + B_1(\rho)w(t) \\ y &= C_2(\rho)x + D_{22}(\rho)u(t) + D_{21}(\rho)w(t) \\ z &= C_1(\rho)x + D_{12}(\rho)u(t) + D_{11}(\rho)w(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $\rho \in \mathcal{S}_\rho$  et  $\dot{\rho} \in \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$ . Les domaines paramétriques  $\mathcal{S}_\rho$  et  $\mathcal{S}_{\dot{\rho}}$  sont des sous-ensembles bornés de  $\mathbb{R}^l$ .

Deux grandes catégories d'approches sont possibles, selon le point de départ de la modélisation :

1. Une modélisation LPV basée sur une connaissance précise du modèle non-linéaire.
2. Une identification directe du modèle LPV à partir des données expérimentales.

Chaque méthode possède des avantages et des inconvénients et sera préférée dans un cas ou un autre. Dans la première méthode, le modèle LPV obtenu est assez proche de la description physique du système, et les phénomènes non-linéaires seront pris en compte de manière plus complète. Cependant, la connaissance approfondie du modèle non-linéaire nécessite une étape d'estimation des paramètres qui peut s'avérer longue et fastidieuse, surtout pour des systèmes complexes. La seconde méthode permet de pallier cet inconvénient en donnant lieu à un modèle LPV à partir d'une seule (approches globales) ou plusieurs exécutions (approches locales) successives de l'algorithme d'identification sur un jeu de données expérimentales. Le problème du choix de signaux d'entrée et de paramètres suffisamment excitants est particulièrement important dans les approches globales. Le lecteur est invité à consulter [Tóth10] pour une vue d'ensemble récente concernant la modélisation et l'identification des systèmes LPV.

### 2.2.2.1 Modélisation LPV basée sur la connaissance d'un modèle non-linéaire

Cette approche présente des similitudes avec la méthode de séquençement de gain. Elle utilise des linéarisations locales des équations du système autour d'une famille de points d'équilibre.

#### Linéarisation jacobienne

Cette méthode de modélisation repose sur un développement du premier ordre des équations différentielles (2.8) décrivant le système autour d'une trajectoire d'équilibre paramétrée par le couple  $(x_0, u_0)$  des vecteurs d'état et de commande vérifiant :  $f(x_0, u_0) = 0$ . Le développement est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} (u - u_0) \\ y(t) = g(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} (x - x_0) + \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} (u - u_0) \end{cases} \quad (2.10)$$

En adoptant les notations :  $\delta_x(t) = x(t) - x_0$ ,  $\delta_u(t) = u(t) - u_0$  et  $\delta_y(t) = y(t) - g(x_0, u_0)$ , (2.10) donne lieu au modèle LPV suivant, avec  $\rho = [x_0^T \ u_0^T]^T$  :

$$\begin{cases} \dot{\delta}_x(t) = A(\rho)\delta_x(t) + B(\rho)\delta_u(t) \\ \delta_y(t) = C(\rho)\delta_x(t) + D(\rho)\delta_u(t) \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\text{où } A(\rho) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}, B(\rho) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}, C(\rho) = \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \text{ et } D(\rho) = \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}.$$

La dépendance des matrices d'état résultantes en fonction du vecteur de paramètres  $\rho$  est en général non-linéaire. Une approximation polynomiale ou rationnelle sera par conséquent nécessaire afin de se ramener à un type de dépendance paramétrique numériquement exploitable pour l'analyse et la synthèse de correcteurs. Notons enfin que dans le cas général où  $(x_0, u_0)$  n'est pas un point d'équilibre, la représentation d'état résultante d'une linéarisation jacobienne est affine (contient le terme constant  $f(x_0, u_0)$ ) et ne suit donc pas la forme LPV habituelle des équations (2.9), ce qui constitue une limitation de cette méthode de modélisation.

### Linéarisation basée sur la vitesse

Cette approche, proposée dans [Leith98], a l'avantage de lever la limitation principale de l'approche précédente, en permettant une linéarisation autour d'un point de fonctionnement quelconque  $(x_1, u_1)$ , qui n'est pas nécessairement un point d'équilibre. Considérons la dérivation temporelle des équations du système non-linéaire données en (2.8) :

$$\begin{cases} w(t) = \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_1 \\ u=u_1}} w(t) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_1 \\ u=u_1}} \dot{u}(t) \\ \dot{y}(t) = \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_1 \\ u=u_1}} w(t) + \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_1 \\ u=u_1}} \dot{u}(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

En notant  $\hat{x}(t)$  la solution approchée locale de (2.12) au voisinage de  $(x_1, u_1)$ , nous avons :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{w}(t) \\ \dot{\hat{w}}(t) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_1 \\ u=u_1}} \hat{w}(t) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_1 \\ u=u_1}} \dot{u}(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) = \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_1 \\ u=u_1}} \hat{w}(t) + \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_1 \\ u=u_1}} \dot{u}(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

Ceci donne lieu au modèle LPV suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A(\rho)\tilde{x}(t) + B(\rho)\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $\tilde{x}(t) = [\hat{x}^T(t) \hat{x}^T(t) \hat{y}^T(t)]^T$ ,  $\tilde{u}(t) = \dot{u}(t)$ ,  $\tilde{y}(t) = y(t)$  et  $\rho = [x_1^T \ u_1^T]^T$ .

Les matrices d'état sont données par :

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} 0_n & I_n & 0_{n \times q} \\ 0_n & \nabla_x f(x_1, u_1) & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & \nabla_x g(x_1, u_1) & 0_q \end{bmatrix}, B(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ \nabla_u f(x_1, u_1) \\ \nabla_u g(x_1, u_1) \end{bmatrix} \text{ et } C = [0_{p \times n} \ 0_{p \times n} \ I_p],$$

avec les notations suivantes :

$$\nabla_x f(x_1, u_1) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_1 \\ u=u_1}}, \nabla_u f(x_1, u_1) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_1 \\ u=u_1}}, \nabla_x g(x_1, u_1) = \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_1 \\ u=u_1}}$$

et  $\nabla_u g(x_1, u_1) = \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_1 \\ u=u_1}}$ .

Cette méthode s'accompagne cependant d'une augmentation de la taille du vecteur d'état du système qui passe ainsi de  $n$  à  $2n + q$ ,  $q$  étant le nombre de sorties mesurées.

### Transformation d'état

Cette méthode est utilisée pour les systèmes non-linéaires en fonction des états mesurés. Elle a été proposée par Shamma et Cloutier dans [Shamma93] puis appliquée dans le domaine aérospatial, notamment dans [Marcos01].

Soit le modèle non-linéaire suivant, partitionné suivant les états mesurés  $z(t)$  et les états non mesurés  $w(t)$  :  $x(t) = [z^T(t) \ w^T(t)]^T$ .

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) \end{bmatrix} u \quad (2.15)$$

L'état d'équilibre  $\dot{x} = 0$  est caractérisé par des fonctions  $w_e(z)$  et  $u_e(z)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  assurant :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w_e(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) \end{bmatrix} u_e(z) \quad (2.16)$$

Le modèle admet alors la représentation d'état LPV suivante, avec  $\rho = z$  :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A(\rho)\tilde{x}(t) + B(\rho)\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ w - w_e(z) \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{u}(t) = u(t) - u_e(z)$ ,  $\tilde{y}(t) = z(t)$ .

Les matrices d'état sont données par :

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & A_{12}(z) \\ 0 & A_{22}(z) - \frac{\partial w_e(z)}{\partial z} A_{12}(z) \end{bmatrix}, B(\rho) = \begin{bmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) - \frac{\partial w_e(z)}{\partial z} A_{12}(z) \end{bmatrix} \text{ et } C = [I \ 0].$$

### Substitution de fonctions

De même que les modèles obtenus par transformation d'état, le vecteur d'état est partitionné de la manière suivante :  $x(t) = [z^T(t) \ w^T(t)]^T$ , où les états composant le vecteur  $z(t)$  sont mesurés. Les modèles non-linéaires considérés prennent alors la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = A(z)x + B(z)u + f(z) \quad (2.18)$$

Prenons un point d'équilibre  $(x_e, u_e) = (z_e, w_e, u_e)$  qui vérifie  $\dot{x} = 0$ . L'éloignement par rapport à ce point est donné par :  $\tilde{z} = z - z_e$ ,  $\tilde{w} = w - w_e$  et  $\tilde{u} = u - u_e$ . En utilisant ces nouvelles variables dans (2.18), nous aurons :

$$\dot{\tilde{x}} = A(z)\tilde{x} + B(z)\tilde{u} + \tilde{f}(z) \quad (2.19)$$

où  $\tilde{f}(z) = A(z)x_e + B(z)u_e + f(z)$ . S'il est possible de reformuler  $\tilde{f}(z)$  sous la forme  $\tilde{f}(z) = F(\rho)\tilde{z}$  où  $\rho = z$ , le modèle (2.19) admet la forme LPV suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= (A(\rho) + [F(\rho) \ 0])\tilde{x}(t) + B(\rho)\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{z}(t) \end{cases} \quad (2.20)$$

### Séquencement virtuel

Cette approche consiste à effectuer des changements de variables au niveau du modèle non-linéaire (2.8). Chaque non-linéarité lisse est reformulée en tant que paramètre variant dont l'utilisateur connaît l'ensemble d'appartenance, ainsi que celui de sa dérivée temporelle. Par exemple, le terme  $\cos(x)x$  peut être réécrit en tant que :  $\rho x$  avec  $\rho = \cos(x)$ . Cette approche est utilisable en pratique pour les systèmes ayant un nombre limité de termes non-linéaires différents. La méthode de séquencement virtuel a été adoptée dans la modélisation effectuée dans notre travail pour l'asservissement de manipulateurs flexibles, car elle présente l'avantage de conserver de manière simple les non-linéarités du modèle. Le choix des paramètres variants n'est pas unique en général. L'utilisateur peut veiller à avoir un nombre réduit de paramètres dans le but de simplifier le traitement numérique.

#### 2.2.2.2 Identification à partir de données expérimentales

L'identification expérimentale est une démarche qui consiste à utiliser des données issues d'expériences pratiques et des connaissances que l'utilisateur possède *a priori* sur le comportement du système afin de trouver un modèle dynamique qui décrive son comportement avec précision [Ljung99, Tóth10]. En plus de la précision, la facilité d'utilisation du modèle (déterminée par sa structure ou sa classe) et sa dimension modérée sont des critères souvent privilégiés. De ce fait, un élément important de la démarche consiste à bien choisir la structure du modèle à identifier. Les types de modèles les plus couramment rencontrés sont les modèles LTI (linéaires et invariants dans le temps), LTV (linéaires et variants dans le temps), LPV (linéaires à paramètres variants) et non-linéaires. Cette dernière catégorie est extrêmement vaste, englobe toutes les autres et contient comme classes particulières à titre d'exemple les systèmes affines en l'entrée, les systèmes à sortie non-linéaire, les systèmes à retard, les systèmes polynomiaux, les systèmes affines par morceaux, etc. La connaissance de propriétés de parcimonie (*sparsity* en anglais) peut être mise à profit afin de réduire le nombre de variables à identifier. Cette propriété consiste à tenir compte des paramètres du modèle qui sont fixés par les lois de la physique et dont la valeur est connue avec précision.

Un autre élément important est le choix pertinent du critère d'identification. Parmi les différentes possibilités pour le choix de fonctions objectif à optimiser, les critères à erreur de sortie sont parmi les plus utilisés, en particulier le critère de coût quadratique moyen de l'estimation.

## 2.3 Optimisation convexe, inégalités matricielles linéaires (LMI)

### 2.3.1 Convexité

#### 2.3.1.1 Ensemble convexe

Dans un espace vectoriel euclidien, un ensemble  $E$  est convexe si, chaque fois que l'on relie deux points appartenant à cet ensemble par un segment de droite  $\Delta$ , ce segment reste à l'intérieur de l'ensemble  $E$ .

**Définition 2.1.** Un ensemble  $E$  est convexe si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \xi \in [0, 1] \Rightarrow \xi x_1 + (1 - \xi)x_2 \in E \quad (2.21)$$

Les polytopes sont des ensembles convexes délimités par un nombre fini de points appelés *sommets*. Un type particulier de polytopes convexes est constitué par les hyperrectangles (généralisation du rectangle aux dimensions supérieures à 2).

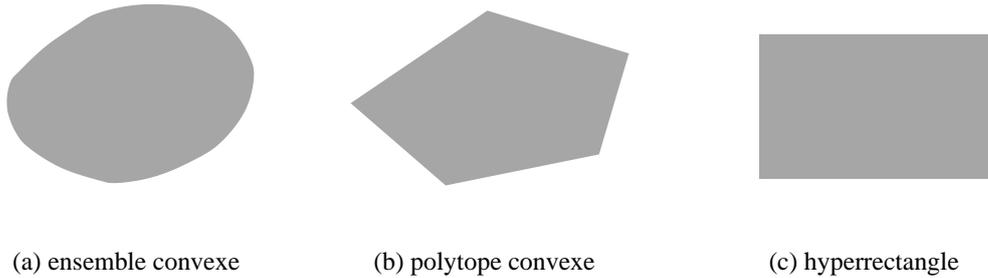


FIGURE 2.5 – Exemples d'ensembles convexes dans le plan (dimension 2)

#### 2.3.1.2 Fonction convexe

**Définition 2.2.** Une fonction  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si  $E$  est un ensemble convexe et de plus,

$$\forall x_1, x_2 \in E, \xi \in [0, 1] \Rightarrow f(\xi x_1 + (1 - \xi)x_2) \leq \xi f(x_1) + (1 - \xi)f(x_2) \quad (2.22)$$

La courbe  $f(x)$  entre deux points  $x_1$  et  $x_2$  vérifiant  $x_1 \leq x_2$  passe en dessous de la droite qui relie ces deux points. Par ailleurs, on dit que  $f$  est concave si  $-f$  est convexe.

#### 2.3.1.3 Enveloppe convexe

**Définition 2.3.** L'enveloppe convexe  $Co(A)$  d'un ensemble  $A$  de  $E$  est obtenu par l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de  $E$  qui incluent  $A$ . Autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des éléments de  $A$ .

### 2.3.2 Formulation des problèmes d'optimisation convexe

La théorie de l'automatique moderne, en particulier la commande robuste des systèmes multivariables, possède des liens étroits avec l'optimisation mathématique. Ces liens sont appelés à se renforcer dans le futur à la lumière des efforts de recherche actuels dans le domaine. Les classes de problèmes d'optimisation convexe les plus utilisés en automatique sont : l'optimisation linéaire (LP), quadratique (QP) et semi-définie (SDP). Cette classification est basée sur la dépendance de la fonction objectif (aussi appelée *fonction de coût*) et des contraintes de l'optimisation en fonction des variables de décision qui constituent les inconnues du problème [Boyd04].

Dans le cas général, un problème d'optimisation mathématique est formulé de la manière suivante :

$$\text{Minimiser } f_0(x) \quad (2.23a)$$

$$\text{sous } f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.23b)$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (2.23c)$$

où  $x$  est le vecteur des variables de décision (vecteur colonne),  $f_0(x)$  est une fonction objectif (scalaire), les  $f_i(x)$  sont les contraintes de type inégalité (scalaires) et les  $h_j(x)$  sont les contraintes de type égalité (scalaires). Dans le cas de l'optimisation convexe, les fonctions  $f_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, m$  sont convexes et les contraintes de type égalité sont affines, c.à.d.  $h_j(x) = a_j^T x = b_j$  ( $a_j$  vecteur colonne et  $b_j$  scalaire).

### 2.3.3 Programmation semi-définie (SDP)

La programmation semi-définie (SDP pour *semidefinite programming*) est une classe particulière, toutefois relativement large, de problèmes d'optimisation convexe. L'accroissement significatif de l'utilisation de la SDP en automatique provient du fait qu'un grand nombre de problèmes tels que l'analyse de stabilité, l'analyse de performance, de dissipativité, de robustesse ainsi que de synthèse de correcteurs peuvent être posés en utilisant ce formalisme. Grâce aux progrès formidables réalisés dans le domaine des algorithmes de résolution numérique, les SDP sont résolues de manière efficace pour des problèmes de taille modérée (de l'ordre des dizaines de variables d'état). Voici la structure générale d'un problème SDP :

$$\text{Minimiser } f_0(x) = c^T x \quad (2.24a)$$

$$\text{sous } F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_N F_N \preceq 0 \quad (2.24b)$$

$$Ax = b \quad (2.24c)$$

où  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$  est le vecteur des variables de décision, les  $F_i \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ ,  $i = 0, \dots, m$  sont des matrices symétriques indépendantes de  $x$ ;  $b$  et  $c$  sont des vecteurs colonne. La fonction objectif  $f_0(x)$  est linéaire en  $x$ . La contrainte de type inégalité dans (2.24b) est appelée inégalité matricielle linéaire ou affine (LMI pour *linear matrix inequality*). Cette contrainte inégalité consiste à imposer le caractère semi-défini négatif de la matrice  $F(x)$ , qui dépend de manière affine des variables de décision. Le programme d'optimisation SDP donné dans (2.24) admet l'interprétation géométrique suivante. Il faut trouver l'optimum  $x^*$  qui minimise la droite  $f_0(x) = c^T x$  dans l'intersection du cône convexe délimité par le domaine de faisabilité (ensemble des valeurs de  $x$  qui satisfont la contrainte) de la contrainte LMI  $F(x) \preceq 0$  et de l'hyperplan défini par la contrainte  $Ax = b$ .

### 2.3.4 Programmation semi-définie robuste

Dans le paragraphe précédent, les matrices symétriques  $F_i$  intervenant dans la contrainte LMI (2.24b) étaient supposées constantes. Ce type de formulation est utilisé en automatique pour résoudre des problèmes d'analyse de stabilité ou de performance *nominale* (au voisinage d'un point de fonctionnement fixé), dans lesquels les données du problème sont supposées constantes et parfaitement connues. Dans un programme SDP *robuste*, par contre, les matrices dépendent d'un vecteur de paramètres  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$ .

$$\text{Minimiser } f_0(x) = c^T x \quad (2.25a)$$

$$\text{sous } F(x, \theta) = F_0(\theta) + x_1 F_1(\theta) + \dots + x_N F_N(\theta) \preceq 0, \theta \in \Theta \quad (2.25b)$$

$$A(x) = b \quad (2.25c)$$

La contrainte (2.25b) est appelée *LMI dépendant des paramètres* et abrégée PD-LMI (pour *parameter-dependent LMI*). Son domaine de faisabilité est un cône convexe de dimension infinie à cause du caractère compact de l'ensemble paramétrique (il est de cardinal infini, le paramètre pouvant prendre une infinité de valeurs). Toutefois, si  $F(x, \theta)$  dépend de manière affine des paramètres  $\theta_i$  et si le domaine paramétrique  $\Theta$  est un polytope convexe, nous avons alors l'équivalence suivante :

$$F(x, \theta) \preceq 0, \forall \theta \in \Theta \iff F(x, \theta) \preceq 0, \forall \theta \in \Theta^\nu \quad (2.26)$$

Il est ainsi possible de réduire un problème d'optimisation convexe de dimension infinie en un problème d'optimisation convexe de dimension finie, obtenu en appliquant les contraintes sur les sommets du domaine paramétrique. Nous verrons par la suite que la formulation SDP robuste est extrêmement utile pour la résolution de problèmes d'analyse de stabilité robuste, d'analyse de performance robuste, de synthèse de correcteurs robustes et linéaires à paramètres variants (LPV).

## 2.4 Représentations convexes et relaxations convexes

Un grand nombre d'ensembles convexes (et de manière équivalente les contraintes définissant ces ensembles) peuvent être représentés comme étant le domaine de faisabilité d'une contrainte de type LMI. De plus, les ensembles convexes et non convexes admettent toujours une représentation LMI *liftée*, de dimension infinie dans le cas général, qui délimite un ensemble convexe dans un espace plus large que l'espace de départ. Des caractérisations convexes de faible dimension du problème original peuvent cependant être obtenues à l'aide de *relaxations* convexes appropriées.

### 2.4.1 Domaine de faisabilité d'une LMI

Afin d'appréhender les questions liées à la convexité d'un ensemble, considérons la définition suivante d'une contrainte LMI.

**Définition 2.4.** Étant donnée une matrice symétrique  $M(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  qui dépend de manière affine des variables de décision  $x$ , les propositions suivantes sont équivalentes.

1.  $M(x) \succeq 0$ .
2. Tous les mineurs principaux de la matrice  $M(x)$  sont positifs ou nuls.

Les mineurs principaux de rang  $k$  sont les déterminants des sous-matrices  $M_k$  de  $M$  obtenues en supprimant  $n - k$  lignes et les colonnes ayant les mêmes indices dans la matrice  $M$ . Pour une matrice symétrique de dimension  $n \times n$ , le nombre total de mineurs principaux est de  $2^n - 1$ . Cette définition permet de caractériser le domaine de faisabilité d'une LMI comme un ensemble convexe de la forme :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^m : f_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, 2^n - 1\} \quad (2.27)$$

où les  $f_i(x)$  sont les mineurs principaux de la matrice  $M(x)$ .

$E$  est un ensemble semi-algébrique, c.à.d. un ensemble délimité par des contraintes scalaires polynomiales. Considérons à titre d'illustration l'exemple suivant.

**Exemple 2.1.** Soit la matrice  $M(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 2x_1 \\ 2x_1 & x_2 \end{bmatrix}$ . La condition  $M(x) \succeq 0$  équivaut aux conditions :  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  (mineurs de rang 1) et  $x_1x_2 - 4x_1^2 \leq 0$  (mineur de rang 2 = déterminant de  $M(x)$ ). Le domaine de faisabilité est alors :  $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_2 - 4x_1 \leq 0\}$ . L'ensemble semi-algébrique convexe  $E$  est représenté dans la Figure 2.6.

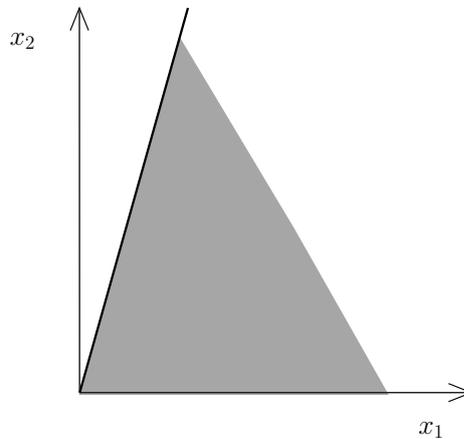


FIGURE 2.6 – Domaine de faisabilité de la LMI  $M(x) \succeq 0$

Il est intéressant de noter que les conditions LMI, bien que possédant le qualificatif *linéaire*, introduisent en réalité des contraintes scalaires non-linéaires, plus précisément polynomiales.

### 2.4.2 Relaxations convexes

Le principe des relaxations convexes consiste à résoudre un problème d'optimisation non-convexe en résolvant un problème convexe dont le domaine de faisabilité englobe celui du problème de départ. Cette démarche introduit un certain degré de conservatisme puisque la

résolution du problème issu de la relaxation convexe est une condition suffisante seulement à la résolution du problème non-convexe original. Dans le cas général il n'y a pas d'équivalence entre les deux problèmes, d'où la présence d'un écart appelé saut de relaxation (*relaxation gap*) entre les valeurs optimales des fonctions objectifs des problèmes original et relaxé. Parmi les méthodes de relaxations convexes proposées dans la littérature scientifique, nous exposerons brièvement ici quelques méthodes de relaxations LMI, c.à.d. des relaxations qui mènent à un ensemble convexe pouvant être décrit par des contraintes de type LMI.

#### 2.4.2.1 Introduction de nouvelles variables de décision (levage ou *lifting*)

Cette méthode de relaxation consiste à augmenter la dimension de l'espace d'optimisation original en introduisant de nouvelles variables de décision. Une telle opération est appelée *levage*. Le problème résultant est alors convexe dans le nouvel espace augmenté et peut donc être résolu. Le retour à l'espace original se fait par *projection* dans l'espace original, opération inverse du levage. Nous illustrons ce principe dans ce qui suit à travers deux exemples.

##### Exemple 2.2. Linéarisation des inégalités matricielles bilinéaires (BMI)

Considérons la contrainte matricielle suivante, connue sous le terme de BMI (pour bilinear matrix inequality) :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^N x_i F_i + \sum_{i,j=1}^N x_i x_j F_{ij} \preceq 0 \quad (2.28)$$

Cette contrainte a une dépendance quadratique en fonction des variables de décision contenues dans le vecteur  $x$ . Afin de linéariser cette dépendance fonctionnelle et de se ramener à une LMI, il est possible d'utiliser des variables de décision supplémentaires liées aux variables originales par un certain nombre de contraintes (généralement non convexes).

En introduisant les nouvelles variables de décision  $y_{ij}$ , la contrainte (2.28) peut être exprimée sous la forme :

$$F(x, y) = F_0 + \sum_{i=1}^N x_i F_i + \sum_{i,j=1}^N y_{ij} F_{ij} \preceq 0 \quad (2.29a)$$

$$y_{ij} = x_i x_j \quad (2.29b)$$

Les contraintes de type égalité dans (2.29b) sont non convexes. Elles peuvent cependant être relâchées en une contrainte LMI, ce qui donne lieu à la formulation suivante :

$$F(x, y) = F_0 + \sum_{i=1}^N x_i F_i + \sum_{i,j=1}^N y_{ij} F_{ij} \preceq 0 \quad (2.30a)$$

$$G(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ x^T & 1 \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (2.30b)$$

$y$  est la matrice symétrique de dimension  $N \times N$  qui contient les variables de décision additionnelles  $y_{ij}$  introduites lors le levage. Le retour à l'espace original en  $x$  (projection) est obtenu en appliquant la contrainte :  $\text{rang}(G(x, y)) = 1$ . Cette relaxation est utile pour la résolution de problèmes de synthèse de correcteurs d'ordre réduit incluant les correcteurs par retour de sortie

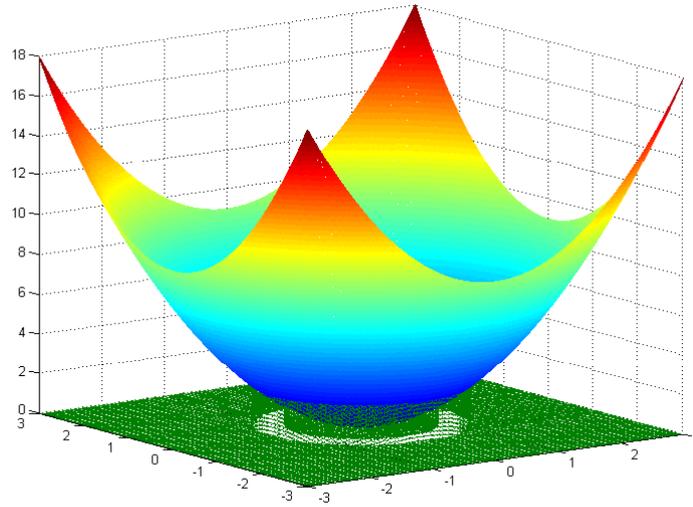


FIGURE 2.7 – Interprétation géométrique de la relaxation par levage

statique [Henrion01].

**Exemple 2.3** (Interprétation géométrique du levage [Parrilo06]). Soit l'ensemble non convexe défini par :  $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ . Il s'agit en fait de l'intersection de l'ensemble convexe  $D_2$  (disque centré de rayon 2) et de l'ensemble non convexe  $\mathbb{R}^2 - D_1$  (où  $D_1$  est le disque centré de rayon 1). En introduisant la nouvelle variable de décision  $x_3$ , nous pouvons définir les contraintes convexes suivantes :

$$x_1^2 + x_2^2 \leq x_3 \quad (2.31a)$$

$$1 \leq x_3 \leq 4 \quad (2.31b)$$

Ces contraintes convexes, définissant un paraboloides, constituent une relaxation par levage de l'ensemble non convexe original  $E$  (bande circulaire de rayon compris entre 1 et 2), que l'on peut retrouver par projection des contraintes (2.31) dans l'espace bidimensionnel original en  $x_1, x_2$  (voir Figure 2.7).

#### 2.4.2.2 Dualité lagrangienne

Afin d'étudier la relaxation basée sur la dualité lagrangienne, considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Minimiser } f_0(x) \quad (2.32a)$$

$$\text{sous } f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.32b)$$

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (2.32c)$$

Le lagrangien étant défini :  $L(x, z) = f_0(x) + \sum_j z_j g_j(x)$ , où les  $z_j \geq 0$  sont des multiplicateurs. Les contraintes  $f_i(x) \leq 0$  sont des contraintes relativement *faciles* à traiter (par exemple

convexes) et les  $g_j(x) \leq 0$  sont des fonctions *difficiles* à traiter (par exemple non convexes). La fonction duale de Lagrange est alors :  $f(z) = \inf_x L(x, z)$ . Cette fonction est toujours concave ( $-f(z)$  convexe) et donne lieu au problème dual suivant.

$$\text{Maximiser } f(z) \tag{2.33a}$$

$$\text{sous } z \geq 0 \tag{2.33b}$$

Si on note  $p^* = \inf f_0(x)$  la solution du problème primal (2.32) et  $d^* = \sup f(z)$  la solution du problème dual (2.33), on a généralement  $p^* \geq d^*$ . Cette relation est connue sous le nom de *dualité faible*. La différence  $p^* - d^*$  est appelée écart de relaxation (*relaxation gap*). La dualité stricte  $p^* = d^*$  peut être obtenue si des conditions supplémentaires, appelées qualifications de contraintes, sont satisfaites [Scherer06b].

### 2.4.2.3 Suppression de la contrainte de rang

Cette méthode de relaxation est utilisée pour des problèmes d'optimisation où une contrainte de rang matriciel constitue la seule source de non convexité. Ces contraintes de rang sont souvent rencontrées dans des problèmes de synthèse de correcteurs d'ordre réduit [Apkarian95]. La technique consiste à ignorer dans un premier temps la contrainte de rang et de résoudre le problème convexe restant. Le domaine de faisabilité résultant est ensuite restreint par l'intersection avec l'ensemble des solutions de la contrainte de rang. Cette méthode est parfois appelée *relaxation de Shor* dans la littérature scientifique [Boyd97].

### 2.4.2.4 Multiconvexité

Cette méthode de relaxation est appropriée aux LMI introduites dans (2.25b) dépendant des paramètres de manière polynomiale. Elle est valable si l'ensemble paramétrique  $\Theta$  est un hyperrectangle délimité par les valeurs min et max de chaque paramètre. Le concept de multiconvexité signifie la convexité de la dépendance fonctionnelle de  $F(x, \theta)$  en chaque paramètre scalaire  $\theta_i$ , les autres paramètres étant supposés constants. Le lemme suivant, établi dans [Apkarian97], introduit des conditions suffisantes de multiconvexité.

**Lemme 2.1.** *Soit la matrice  $F(x, \theta)$  dépendant des paramètres de manière polynomiale. On note  $d_i$  le degré partiel du paramètre scalaire  $\theta_i$  et  $d$  le degré total du polynôme. La contrainte  $F(x, \theta) \preceq 0, \forall \theta \in \Theta$  est satisfaite si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$1. \quad F(x, \theta) \preceq 0, \forall \theta \in \Theta^\nu \tag{2.34a}$$

$$2. \quad (-1)^m \frac{\partial^{2m} F(x, \theta)}{\partial \theta_{l_1}^2 \dots \partial \theta_{l_m}^2} \preceq 0, \forall \theta \in \Theta^\nu \tag{2.34b}$$

où  $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_m \leq L, 1 \leq m \leq \frac{d}{2}$   
 $\text{Card}\{l_j = k : j \in \{1, \dots, m\}\} \leq d_k, k = 1, 2, \dots, L$ .

A la différence des méthodes précédemment citées, la multiconvexité est donc une relaxation du caractère infini du problème PD-LMI, plus qu'une relaxation convexe à proprement parler.

### 2.4.2.5 Relaxation en somme de carrés (SOS)

Pour la résolution de problèmes incluant des contraintes de type PD-LMI, la relaxation en sommes de carrés (SOS pour *sum of squares*) est une alternative à la relaxation de multiconvexité. Pour les applications en automatique, la relaxation SOS a été largement explorée dans les travaux de thèse de P. Parrilo [Parrilo00] pour des polynômes scalaires multivariés. Elle a ensuite été étendue au cas matriciel par les travaux de Scherer et de ses collaborateurs [Scherer06a]. Les relaxations SOS matricielles sont particulièrement appropriées à l'analyse et à la synthèse de systèmes LPV. De plus, la combinaison de la relaxation SOS et de la dualité lagrangienne permet de considérer des ensembles paramétriques non convexes, décrits par des contraintes polynomiales, qu'on appelle *ensembles semi-algébriques*, ce qui constitue un avantage majeur par rapport à la multiconvexité car cette dernière se limite au cas de l'hyperrectangle. Les relaxations SOS sont à l'origine d'une partie des contributions de ce travail de thèse concernant l'analyse et la commande LPV/ $\mathcal{H}_\infty$  des manipulateurs flexibles. Les résultats sont exposés dans le Chapitre 4.

Discutons maintenant le problème de montrer la non négativité globale d'un polynôme  $f(x)$ . Il est évident que cette condition est satisfaite si  $f(x)$  s'écrit comme la somme de termes élevés au carré. Le même principe s'applique aux matrices dépendant de manière polynomiale des variables de décision (ou des paramètres incertains). Dans ce dernier cas la non négativité d'une matrice  $M(x)$  s'entend au sens de la semi-définie positivité matricielle, i.e.  $M(x) \succeq 0$ . Toute la difficulté de la relaxation consiste à montrer l'existence potentielle d'une décomposition en sommes de carrés du polynôme considéré.

#### Décomposition scalaire

Une décomposition en sommes de carrés du polynôme scalaire multivarié  $f(x) = f(x_1, \dots, x_N)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  est donnée par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^m (f_k(x))^2 \quad (2.35)$$

où les  $f_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, m$  sont des polynômes. Nous pouvons remarquer que si  $f(x)$  est de degré  $d$ , alors les polynômes  $f_k(x)$  de la décomposition SOS sont de degré inférieur ou égal à  $\frac{d}{2}$ . Si l'existence d'une décomposition en sommes de carrés est une condition suffisante de non négativité globale d'un polynôme, cette condition n'est pas nécessaire dans le cas général. Autrement dit, il existe des polynômes globalement positifs qui n'admettent pas de décomposition SOS. Un contre-exemple célèbre est le polynôme de Motzkin [Parrilo00] [Motzkin67], défini par :

$$M(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 + x_3^6 - 3x_1^2 x_2^2 x_3^2 \quad (2.36)$$

Un autre exemple de polynôme globalement non négatif mais n'admettant pas de décomposition SOS est celui de Robinson [Robinson73] :

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2(x_1 - x_4)^2 + x_2^2(x_2 - x_4)^2 + x_3^2(x_3 - x_4)^2 + 2x_1 x_2 x_3(x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4) \quad (2.37)$$

En effet, ces polynômes, bien qu'étant globalement non négatifs, n'admettent aucune décomposition en sommes de carrés. Toutefois, l'équivalence entre la non négativité globale et

l'existence d'une décomposition SOS est obtenue dans les trois cas suivants : les polynômes à deux variables, les formes quadratiques (polynômes homogènes de degré 2), ainsi que les polynômes de degré 4 en 3 variables.

### Décomposition matricielle (factorisation spectrale)

La décomposition spectrale d'une matrice symétrique  $S(x)$  dépendant de manière polynomiale des variables de décision  $x_i, i = 1, \dots, N$  est donnée par :

$$S(x) = H(x)^T Q H(x) \quad (2.38)$$

Le choix de la matrice à termes monomiaux  $H(x)$ , qui a typiquement plus de lignes que de colonnes, est effectué par l'utilisateur. Si  $d$  est le degré du polynôme matriciel  $S(x)$ , alors  $H(x)$  doit être de degré  $\frac{d}{2}$ . Pour une matrice  $H(x)$  donnée, la semi-définie positivité de la matrice symétrique constante  $Q$  implique la semi-définie positivité globale de la matrice polynomiale  $S(x)$ . Autrement dit :

$$Q \succeq 0 \Rightarrow S(x) \succeq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N \quad (2.39)$$

### Positivité sur une région spécifique

Au lieu d'essayer d'imposer la positivité globale d'une matrice  $S(x)$ , il est souvent intéressant d'exiger la satisfaction de la contrainte de positivité sur un domaine spécifique  $E \subset \mathbb{R}^N$  uniquement. Ce type d'exigence apparaît typiquement dans des problèmes d'analyse et de synthèse de correcteurs pour les systèmes LPV polynomiaux ou rationnels, donnant lieu à des contraintes de type PD-LMI ayant le même type de dépendance paramétrique.

Considérons la factorisation spectrale de la matrice  $F(x, \theta) = H^T(\theta)Q(x)H(\theta)$  suivant la variable  $\theta$ . La contrainte PD-LMI  $F(x, \theta) \preceq 0$ , telle que décrite dans (2.25b), doit être satisfaite sur l'ensemble paramétrique  $\Theta$ . On suppose que  $\Theta$  est un ensemble semi-algébrique, c.à.d. qu'il est le domaine de faisabilité d'une collection de contraintes polynomiales scalaires :

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^l : g_j(\theta) \leq 0, j = 1, \dots, n_p\} \quad (2.40)$$

où  $n_p$  est le nombre de contraintes polynomiales. Suivant la S-procédure [Boyd94], qui peut aussi être vue comme une relaxation lagrangienne de la contrainte quadratique équivalente  $z^T F(x, \theta) z \leq 0, \forall z \in \mathbb{R}^{n_f}$ , nous avons le résultat suivant :

$$F'(x, \theta) = F(x, \theta) - \sum_{j=1}^{n_p} Z_j g_j(\theta) \preceq 0, \forall \theta \in \mathbb{R}^l \implies F(x, \theta) \preceq 0, \forall \theta \in \Theta \quad (2.41)$$

où les matrices symétriques semi-définies positives  $Z_j \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$  sont appelées *multiplicateurs*. En appliquant la relaxation SOS à l'équation (2.41), nous obtenons la relation suivante :

$$-F'(x, \theta) \text{ est SOS en } \theta \implies F(x, \theta) \preceq 0, \forall \theta \in \Theta \quad (2.42)$$

Rappelons que  $-F'(x, \theta)$  est SOS en  $\theta$  veut dire qu'elle admet la factorisation en sommes de carrés :  $-F'(x, \theta) = H^T(\theta)Q'(x)H(\theta)$  avec  $Q'(x) \succeq 0$ . La décomposition matricielle en sommes

de carrés peut donc s'exprimer en tant que contrainte de type LMI.

Techniquement, pour des multiplicateurs  $Z_j$  constants, il est possible d'adopter la démarche de calcul suivante. Il faut d'abord décomposer chaque région  $G_j$  délimitée par la contrainte polynomiale  $g_j(\theta) \leq 0$  :  $g_j(\theta) = H_1^T(\theta)\tilde{G}_jH_1(\theta)$ , où  $H(\theta) = H_1(\theta) \otimes I_{n_f}$ ,  $\otimes$  représente le produit de Kronecker des matrices. Chacun des termes  $Z_jg_j(\theta)$  admet alors la décomposition  $Z_jg_j(\theta) = H^T(\theta)(\tilde{G}_j \otimes Z_j)H(\theta)$ . Si  $F(x, \theta)$  est factorisée de la manière suivante :  $F(x, \theta) = H^T(\theta)Q(x)H(\theta)$ , nous obtenons la factorisation  $-F'(x, \theta) = H^T(\theta)(-Q(x) + \sum_j^{n_p}(\tilde{G}_j \otimes Z_j))H(\theta) = H^T(\theta)Q'(x)H(\theta)$ , où  $Q'(x) = -Q(x) + \sum_j^{n_p}(\tilde{G}_j \otimes Z_j)$ . L'hypothèse dans (2.42) est vérifiée si la LMI  $Q'(x) \succeq 0$  est satisfaite.

### 2.4.3 Problèmes convexes équivalents

Nous présentons ci-après deux approches permettant de transformer un problème convexe en un autre problèmes convexe équivalent. Le choix entre une formulation SDP et une autre peut être guidé par des considérations pratiques, telles que la facilité de la résolution numérique.

#### 2.4.3.1 Suppression de contraintes égalité

Réécrivons le problème SDP (2.24) qui contient les contraintes de type égalité  $Ax = b$ .

$$\text{Minimiser } f_0(x) = c^T x \quad (2.43a)$$

$$\text{sous } F(x) = F_0 + x_1F_1 + \dots + x_NF_N \preceq 0 \quad (2.43b)$$

$$Ax = b \quad (2.43c)$$

En introduisant la matrice symétrique  $G \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et le vecteur de nouvelles variables de décision  $z \in \mathbb{R}^N$  qui satisfont l'équivalence :

$$Ax = b \iff x = Gz + x_0 \quad (2.44)$$

nous obtenons le nouveau problème SDP suivant, qui ne contient pas de contraintes égalité.

$$\text{Minimiser } f_0(Gz + x_0) \quad (2.45a)$$

$$\text{sous } F(Gz + x_0) \preceq 0 \quad (2.45b)$$

#### 2.4.3.2 Introduction de variables faibles

L'introduction de variables de décision supplémentaires appelées variables faibles (*slack variables*) permet de rajouter des degrés de liberté dans le but de faciliter la résolution numérique du problème d'optimisation. Une des applications de cette démarche avait pour but de reformuler des contraintes de type inégalité dans l'espace original en des contraintes de types égalité et inégalité dans un nouvel espace de plus grande dimension.

Ainsi, les deux programmes linéaires suivants sont équivalents :

**Programme linéaire original**

$$\text{Minimiser } f_0(x) = c^T x \quad (2.46a)$$

$$\text{sous } a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.46b)$$

**Programme linéaire étendu**

$$\text{Minimiser } f_0(x) = c^T x \quad (2.47a)$$

$$\text{sous } s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.47b)$$

$$a_i^T x + s_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.47c)$$

Les variables faibles ont été par la suite largement utilisées en commande robuste dans des applications d'analyse et de commande et d'estimation. Les conditions LMI impliquant ces nouvelles variables de décision sont appelées LMI étendues, augmentées, ou dilatées. Elles ont été utilisées dans des conditions d'analyse de stabilité avec des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres (PDLF). Un découplage entre les matrices d'état et les matrices de Lyapunov est assuré, ce qui permet de réduire le conservatisme de ces conditions. Dans [deOliveira99], cette réduction de conservatisme permet d'élargir l'ensemble paramétrique pour lequel la stabilité robuste d'un système à temps discret est assurée. Pour les systèmes à temps continu, diverses conditions d'analyse et de synthèse ont été établies dans [Apkarian01]. Dans [Sato07], les variables faibles sont utilisées pour l'analyse de stabilité et de performance  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  de systèmes incertains à dépendance paramétrique polynomiale. Il a été établi que l'approche exposée dans ce travail n'est pas plus conservative qu'une relaxation en sommes de carrés (SOS).

**2.5 Analyse de systèmes asservis, synthèse de correcteurs**

Dans cette section, nous présentons les problèmes classiques d'analyse de stabilité, de performance et de robustesse pour les systèmes dynamiques. Un intérêt particulier est porté à la formulation de ces problèmes sous forme de programmes SDP.

**2.5.1 Normes matricielles**

Nous commencerons cette partie en présentant des définitions de normes matricielles qui nous seront utiles pour l'analyse de performance des systèmes.

**Norme euclidienne** La norme euclidienne d'un vecteur  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est la racine carrée de la somme carrée de toutes ses composantes scalaires  $x_i$  :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (2.48)$$

**Norme  $\mathcal{L}_2$**  Si  $x(t)$  est de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , alors sa norme  $\mathcal{L}_2$  est définie par :

$$\|x\|_2 = \left( \int_0^{+\infty} \|x(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.49)$$

La norme  $\mathcal{L}_2$  peut être considérée comme l'énergie du signal et admet à ce titre la définition fréquentielle suivante :

$$\|x\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(j\omega)\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.50)$$

où  $X(j\omega)$  est la transformée de Fourier bilatérale du signal  $x(t)$ .

La définition donnée en (2.49) est généralisable à des normes  $\mathcal{L}_p$ ,  $p \geq 1$  quelconques d'un signal  $x(t)$  qui seront déterminées par :

$$\|x\|_p = \left( \int_0^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^p \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.51)$$

**Norme  $\mathcal{L}_\infty$**  La norme  $\mathcal{L}_\infty$  d'un signal  $x(t)$  est définie par :

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |x_i(t)|, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.52)$$

**Norme  $\mathcal{H}_2$**  La norme  $\mathcal{H}_2$  d'une fonction de transfert  $G(s)$  strictement propre est définie par :

$$\|G\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr} [G^*(j\omega)G(j\omega)] d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.53)$$

**Norme  $\mathcal{H}_\infty$**  La norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'une fonction de transfert  $G(s)$  stable est définie par :

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (2.54)$$

où  $\bar{\sigma}(A)$  désigne la valeur singulière maximale de la matrice  $A$ .

**Gain  $\mathcal{L}_2$**  Cette norme est induite sur les systèmes par la norme  $\mathcal{L}_2$  sur les signaux. Pour un système non-linéaire  $\Sigma$  d'entrées  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  et de sorties  $z(t) \in \mathbb{R}^s$ , elle admet la définition temporelle suivante :

$$\|\Sigma\|_{\mathcal{L}_2} = \sup_{w \in \mathbb{R}^r, w \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \quad (2.55)$$

Le gain  $\mathcal{L}_2$  d'un système LTI de fonction de transfert  $G(s)$  est égal à sa norme  $\mathcal{H}_\infty$  :

$$\|G\|_{\mathcal{L}_2} = \sup_{\|W\|_2 < \infty, w \neq 0} \frac{\|GW\|_2}{\|W\|_2} = \|G\|_\infty \quad (2.56)$$

## 2.5.2 Notions fondamentales d'analyse de systèmes

### 2.5.2.1 Stabilité

Dans ce paragraphe, nous rappelons des définitions de base concernant la stabilité d'un système non-linéaire [Slotine91]. A cette fin, commençons par introduire le système régi par l'équation d'état non-linéaire suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.57)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  et le vecteur d'entrées.

#### Stabilité au sens de Lyapunov

**Définition 2.5** (stabilité).  $x = x_e$  est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov du système (2.57) si,  $\forall R > 0, \exists r > 0$  tels que :

$$\|x(0) - x_e\| < r \implies \|x(t) - x_e\| < R, \quad \forall t > 0 \quad (2.58)$$

**Définition 2.6** (stabilité asymptotique).  $x = x_e$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable au sens de Lyapunov du système (2.57) s'il est stable, et si de plus,  $\exists r > 0$  tel que :

$$\|x(0) - x_e\| < r \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e \quad (2.59)$$

**Définition 2.7** (stabilité exponentielle).  $x = x_e$  est un point d'équilibre exponentiellement stable au sens de Lyapunov du système (2.57) si  $\exists \alpha > 0, \exists \lambda > 0, \exists r > 0$  tels que :

$$\|x(0) - x_e\| < r \implies \|x(t) - x_e\| < \alpha \|x(0) - x_e\| \exp(-\lambda t), \forall t > 0 \quad (2.60)$$

Ces notions de stabilité sont dites *locales* car elles sont valables pour une condition initiale  $x(0)$  située dans un voisinage du point d'équilibre  $x_e$ . L'ensemble  $D_a$  des conditions initiales satisfaisant  $\|x(0) - x_e\| < r, r > 0$ , est appelé *région d'attraction* du point d'équilibre  $x_e$ . Les conditions de stabilité deviennent *globales* si elles sont valables quelle que soit la condition initiale  $x(0)$ . Dans ce cas, nous avons  $D_a = \mathbb{R}^n$ . Il est à noter que pour un système LTI, la stabilité asymptotique est toujours globale et exponentielle.

**Définition 2.8** (fonction de Lyapunov). Si une fonction  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $x$  est une solution de (2.57), satisfait les conditions suivantes :

$$1) \quad V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.61)$$

$$2) \quad \dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.62)$$

alors  $V(x)$  est une fonction de Lyapunov du système (2.57) qui est alors globalement asymptotiquement stable. Si  $x \neq x_e$ , l'inégalité devient stricte dans la première condition.

**Remarque 2.1.** La fonction de Lyapunov  $V(x)$  est souvent prise comme une fonction quadratique des variables d'état :  $V(x) = (x - x_e)^T P (x - x_e)$ , où  $P = P^T \succ 0$ . Ce choix facilite la résolution numérique du problème d'analyse de stabilité qui pourra s'exprimer comme une contrainte LMI. On suppose dorénavant que le point d'équilibre se situe à l'origine, c.à.d.  $x_e = 0$ , ce qui peut être obtenu à travers la transformation d'état linéaire  $z = x - x_e$ .

### 2.5.2.2 Performance

Une fois la stabilité interne d'un système dynamique assurée, une seconde exigence couramment requise est celle de la performance. Dans le cas des systèmes monovariables (SISO), les propriétés de performance peuvent être aisément visualisées dans le domaine temporel à l'aide du tracé de la réponse indicielle. Si le système est linéaire, une analyse fréquentielle est aussi possible à l'aide du diagramme de Bode.

#### Système monovariante (SISO)

L'analyse des systèmes dynamiques dans le domaine temporel est possible pour tous les systèmes non-linéaires. Elle constitue de ce fait un outil puissant de la compréhension du comportement et de la commande des systèmes dans l'espace d'état. En particulier, la réponse indicielle d'un système donne des indications sur les performances réalisées par ce système. La rapidité est donnée par le temps de réponse des états ou de la sortie mesurée et la précision du système est déduite de l'écart en régime permanent avec la sortie de référence. D'autres caractéristiques importantes peuvent attirer l'attention telles que la présence d'oscillations et l'amplitude du dépassement.

Pour les systèmes linéaires, l'analyse fréquentielle permet de visualiser de manière simple les propriétés du système dynamique. Le lieu des racines, par exemple, permet de voir la distribution des modes du système, afin de préparer potentiellement une compensation ou un déplacement des pôles lents ou peu amortis. Le diagramme de Bode permet d'obtenir plusieurs caractéristiques du système tels que sa bande passante, ses marges de stabilité et sa précision statique.

#### Système multivariable (MIMO)

Pour les systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties, l'analyse temporelle permet de visualiser, en plus des caractéristiques citées précédemment pour un système SISO, des informations sur le couplage entre les différentes entrées et sorties.

Si une loi de commande découplante (ou diagonalisante) est appliquée, le système multivariable est décomposé en plusieurs sous-systèmes monovariants n'ayant pas d'interactions entre eux. La qualité du découplage, à elle seule, peut être considérée comme un critère de performance d'un système asservi multivariable. Pour un système non-linéaire, le découplage et la linéarisation peuvent être réalisés par une commande par inversion de modèle (*feedback linearization* en anglais), qui est aussi appelée en robotique commande par découplage non-linéaire.

#### Performance $\mathcal{H}_2$

Les spécifications de performance  $\mathcal{H}_2$  sont typiquement utilisés pour minimiser l'effet de bruit additif affectant le système. Dans ce cas, un objectif primordial de l'analyse est de déterminer une borne supérieure de l'énergie du bruit. Une synthèse de correcteur avec garantie de performance  $\mathcal{H}_2$  permet de respecter ce type de contrainte en amont au niveau de la synthèse de correcteur. Une analyse de la boucle fermée peut être effectuée par la suite sur la boucle fermée, permettant éventuellement de trouver une meilleure borne. Le niveau de performance peut être adapté suivant les différents signaux en jeu et les fréquences du système en utilisant des filtres

de pondération.

### Performance $\mathcal{H}_\infty$

Une limitation importante de la performance  $\mathcal{H}_2$  est qu'elle considère l'énergie totale des signaux de perturbation et de mesure, sans s'intéresser aux valeurs maximales (domaine temporel) ou aux résonances (domaines fréquentiel) à un instant ou une fréquence données. Cette limitation est levée par la performance  $\mathcal{H}_\infty$ , qui est donc particulièrement appropriée pour caractériser les systèmes résonants tels que les structures flexibles et l'atténuation de leurs vibrations. De même que pour la performance  $\mathcal{H}_2$ , des filtres de pondération peuvent être utilisés afin d'adapter le niveau de performance estimé (analyse) ou imposé (synthèse) par rapport aux amplitudes et fréquences des signaux d'intérêt.

#### 2.5.2.3 Robustesse

L'exigence de robustesse par rapport aux incertitudes paramétriques peut être satisfaite par une description adéquate du système sous une forme dépendant des paramètres. Pour les autres types d'incertitudes, dites incertitudes non structurées, leur traitement est possible via une atténuation du gain de boucle (généralisation de la fonction de transfert en boucle ouverte au cas MIMO) dans les hautes fréquences. Comme une partie importante des dynamiques non modélisées se situe dans ces plages de fréquences, le correcteur doit tenter de les atténuer le plus possible pour ne pas en subir les effets indésirables (diminution des performances du système voire instabilité).

En résumé, nous noterons qu'une bonne performance du système (rapidité, précision...) correspond à un gain de boucle (donc du correcteur) élevé dans les basses fréquences, alors qu'une bonne robustesse correspond à un gain de boucle faible dans les hautes fréquences. Ces deux spécifications peuvent paraître contradictoires entre les deux bandes de fréquence. On parle pour cette raison de *compromis performance-robustesse*.

### 2.5.3 Formulation SDP des problèmes d'analyse

Les problèmes d'analyse de stabilité, de performance ou de robustesse d'un système dynamique peuvent souvent s'exprimer comme des problèmes de résolution de SDP. Beaucoup d'efforts de recherche ont été fait dans ce sens durant les deux dernières décennies (voir par exemple [Apkarian95, Scherer97]).

Dans les paragraphes suivants, nous exposerons des résultats d'analyse exprimés sous forme SDP pour les systèmes linéaires et invariants dans le temps (LTI), linéaires à paramètres variants (LPV) et enfin pour certaines classes de systèmes non-linéaires : les systèmes linéaires à retard, les systèmes polynomiaux, les systèmes hybrides et les systèmes flous.

#### 2.5.3.1 Systèmes LTI

Soit un système LTI autonome (sans entrée extérieure) régi par l'équation d'état linéaire suivante :

$$\dot{x} = Ax \tag{2.63}$$

Ce système est dit *linéaire et invariant dans le temps* (LTI) si la matrice d'état  $A$  est constante.

**Critère d'Hurwitz** Le système LTI (2.63) est stable si la matrice  $A$  est *Hurwitz*, c.à.d. si toutes ces valeurs propres sont strictement négatives. L'ensemble des valeurs propres d'une matrice  $A$  est appelé *spectre* de  $A$  et est noté  $Sp(A)$ . Graphiquement, le spectre d'une matrice d'état d'un système stable se situe dans le demi-plan gauche.

**Abscisse spectrale** L'abscisse spectrale d'une matrice  $A$  est la plus grande partie réelle des valeurs propres de  $A$  :

$$\alpha(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} Re(\lambda) \quad (2.64)$$

Le système (2.63) est donc stable si et seulement si  $\alpha(A) < 0$ .

**Inégalité de Lyapunov** Cette condition permet de formuler l'analyse de stabilité en tant que problème de faisabilité de contraintes LMI, comme indiqué dans le théorème suivant :

**Théorème 2.1** (stabilité d'un système LTI). *Le système LTI (2.63) est stable si et seulement s'il existe une matrice symétrique  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , telle que :*

$$P \succ 0 \quad (2.65)$$

$$A^T P + P A \prec 0 \quad (2.66)$$

**Preuve .** En appliquant les critères de stabilité de Lyapunov donnés dans la Définition 2.8 avec une fonction de Lyapunov quadratique  $V(x) = x^T P x$  avec  $P = P^T$ , nous avons :

$$1. V(x) > 0, \forall x \neq x_e \iff P \succ 0.$$

$$2. \frac{dV(x)}{dt} = \frac{d}{dt}(x^T P x) = x^T (A^T P + P A)x. \text{ D'où : } \frac{dV(x)}{dt} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \iff A^T P + P A \prec 0.$$

Clairement, les conditions de stabilité de (2.65) et (2.66) sont des contraintes LMI. Les variables de décision sont regroupées dans la matrice symétrique  $P$ .

Considérons maintenant que le système LTI (2.63) n'est plus autonome mais qu'il est muni d'un canal de performance d'entrées  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  et de sorties  $z(t) \in \mathbb{R}^s$ . Ce système admet la représentation d'état  $G(s) = \{A, B, C, D\}$ , qui représente les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bw \\ z &= Cx + Dw \end{cases} \quad (2.67)$$

### Lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP)

Le lemme de KYP permet de transformer des conditions d'analyse de dimension infinie paramétrées par la variable fréquentielle  $\omega$  en des conditions LMI de dimension finie.

**Théorème 2.2** (KYP [Rantzer96]). *Soient les matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  et  $M = M^T \in \mathbb{R}^{(n+r) \times (n+r)}$ , avec  $\det(j\omega - A) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ . Si la paire  $(A, B)$  est commandable alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

$$1. \begin{bmatrix} (j\omega - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} (j\omega - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} \preceq 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad (2.68a)$$

$$2. \exists P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ telle que : } M + \begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (2.68b)$$

**Lemme borné réel (BRL)**

Ce lemme constitue un cas particulier du lemme de KYP qui permet d'analyser la performance  $\mathcal{H}_\infty$  d'un système dynamique. Le lemme borné réel a été à l'origine de nombreuses contributions théoriques, numériques et applicatives sur le thème de l'analyse de performance et de la synthèse de correcteurs avec garantie de performance  $\mathcal{H}_\infty$ . Il est à la base de la méthode de synthèse utilisant des LMI de la fonction `hinfsyn` de MATLAB [Gahinet94]. Proposé à l'origine pour l'analyse de performance des systèmes LTI, il donné lieu à de nombreuses extensions pour les systèmes LTV, LPV et non-linéaires à temps continu et à temps discret.

Nous noterons  $\mathcal{RH}_\infty$  est l'ensemble des fonctions de transfert réelles stables et rappellerons qu'une fonction de transfert  $G(s)$  peut s'exprimer en fonction de sa réalisation dans l'espace d'état de la manière suivante :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.69)$$

**Théorème 2.3 (BRL).** Soient un nombre réel  $\gamma > 0$  et une fonction de transfert  $G(s) = \{A, B, C, D\} \in \mathcal{RH}_\infty$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$1. \quad \|G(s)\|_\infty < \gamma \quad (2.70a)$$

$$2. \quad \exists P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ telle que : } \begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I_s \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.70b)$$

$$3. \quad \exists P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ telle que : } \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I_s & D^T \\ C & D & -\gamma I_s \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.70c)$$

**Preuve .** L'équivalence entre 1. et 2. est obtenue en appliquant le lemme de KYP avec la matrice symétrique  $M = \begin{bmatrix} C^T C & C^T \\ D^T C & D^T D - \gamma^2 I_s \end{bmatrix}$ . En effet, la relation (2.68a) avec  $s = j\omega$  donne :

$$[(sI - A)^{-1}B]^* C^T C [(sI - A)^{-1}B] + D^T C (sI - A)^{-1} B + [(sI - A)^{-1}B]^* C^T D + D^T D - \gamma^2 I \prec 0$$

Ceci équivaut à :  $G^*(s)G(s) \prec \gamma^2 I$ , autrement dit toutes les valeurs propres de  $G^*(s)G(s)$  sont inférieures à  $\gamma^2$ . Cela est vérifié si et seulement si toutes les valeurs singulières  $\sigma_i(G)$  sont inférieurs à  $\gamma$ , ce qui, en retour, équivaut à  $\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) < \gamma$ . L'équivalence entre 2. et 3. est obtenue en appliquant le lemme complément de Schur.

**2.5.3.2 Systèmes LPV**

Soit un système LPV autonome régi par l'équation d'état linéaire suivante :

$$\dot{x} = A(\rho)x \quad (2.71)$$

La matrice d'état  $A(\rho)$  dépend de paramètres variant dans le temps, mesurables en temps réel et bornés, regroupés dans le vecteur  $\rho$  satisfaisant  $\rho \in \mathcal{S}_\rho$  et  $\dot{\rho} \in \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$ .

Pour un système LPV, le critère de stabilité de Lyapunov a deux variantes, suivant que la fonction de Lyapunov  $V(x)$  dépende des paramètres ou pas. Ces deux variantes sont désignées

sous les termes de stabilité dépendant des paramètres et de stabilité quadratique respectivement.

### Stabilité quadratique

L'analyse de stabilité revient dans ce cas à chercher une fonction de Lyapunov  $V(x)$  indépendante du vecteur de paramètres variants  $\rho$ . Si la fonction de Lyapunov est quadratique, l'objectif est de trouver une matrice  $P$  constante vérifiant des LMI similaires à (2.65)-(2.66), où cependant la matrice d'état  $A$  n'est plus constante mais dépend des paramètres. De plus la condition de stabilité du Théorème 2.1 devient suffisante seulement pour un système LPV, du fait de la restriction de la recherche de fonction de Lyapunov aux seules fonctions quadratiques en fonction de l'état du type :  $V(x) = x^T P x$ , où  $P$  est une matrice constante.

**Théorème 2.4** (stabilité quadratique). *Le système LPV (2.71) est stable s'il existe une matrice symétrique  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , telle que  $\forall \rho \in \mathcal{S}_\rho$  :*

$$P \succ 0 \quad (2.72)$$

$$A(\rho)^T P + P A(\rho) \prec 0 \quad (2.73)$$

Les conditions de stabilité quadratique d'un système LPV ne font pas apparaître explicitement la dérivée temporelle  $\dot{\rho}$  des paramètres. Ces conditions sont donc valables pour des dérivées paramétriques arbitraires. Cela induit un certain conservatisme de l'approche quadratique car pour les systèmes physiques, les dérivées des paramètres sont généralement bornées.

### Stabilité dépendant des paramètres

Au lieu de chercher une fonction de Lyapunov fixée pour tout l'espace de travail défini par l'ensemble paramétrique, dans cette approche la fonction de Lyapunov recherchée est quadratique par rapport à l'état  $x$ , mais dépend en plus des paramètres variants :  $V(x, \rho) = x^T P(\rho)x$ .

**Théorème 2.5** (stabilité quadratique dépendant des paramètres). *Le système LPV (2.71) est stable s'il existe une matrice symétrique  $P(\rho) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , telle que  $\forall (\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$  :*

$$P(\rho) \succ 0 \quad (2.74)$$

$$A(\rho)^T P(\rho) + P(\rho) A(\rho) + \frac{d}{dt} P(\rho) \prec 0 \quad (2.75)$$

**Théorème du faible gain** Ce théorème permet d'analyser la stabilité d'un système LPV à dépendance paramétrique de type LFR, similaire à celle illustrée dans la figure 2.3 pour les systèmes incertains. Il utilise les normes  $\mathcal{H}_\infty$  de la matrice paramétrique potentiellement dynamique  $\Delta(s, \rho)$  et de la fonction de transfert  $G_d(s)$  entre les entrées  $w_d(t)$  et sorties  $z_d(t)$  du système qui interagissent avec l'incertitude.

**Théorème 2.6** (faible gain [Zhou96]). *Supposons que  $G_d(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ . Alors l'interconnexion de la figure 2.3 est bien posée et sa stabilité interne est garantie  $\forall \Delta(s, \rho) \in \mathcal{RH}_\infty$ . De plus :*

$$\|\Delta(s, \rho)\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma} \iff \|G_d(s)\|_\infty < \gamma \quad (2.76)$$

$$\|\Delta(s, \rho)\|_\infty < \frac{1}{\gamma} \iff \|G_d(s)\|_\infty \leq \gamma \quad (2.77)$$

Grâce au théorème du faible gain, les outils d'analyse de performance  $\mathcal{H}_\infty$  admettant une formulation SDP peuvent être utilisés pour estimer la marge de stabilité robuste d'un système LTI incertain ou l'espace paramétrique préservant la stabilité d'un système LPV.

### 2.5.3.3 Systèmes non-linéaires

L'analyse de systèmes non-linéaires dans le cadre SDP peut s'effectuer au moyen d'une modélisation LPV préalable. Cette démarche est désignée sous le terme d'*approche quasi-LPV* et est particulièrement adaptée aux systèmes à non-linéarités différentiables. Elle a été adoptée pour le cadre applicatif imparti à cette thèse.

Les techniques d'optimisation SDP ont été largement exploitées pour l'analyse de systèmes linéaires. Des résultats théoriques conséquents sont maintenant disponibles pour des classes particulières de systèmes non-linéaires, notamment : les sommes pondérées de sous-systèmes linéaires (tels que les systèmes flous), les systèmes hybrides (en particulier les systèmes à commutation), les systèmes polynomiaux et rationnels, ainsi que les systèmes linéaires à retard. Nous donnerons dans ce qui suit des conditions d'analyse sous forme SDP pour ces classes de système. Les développements présentés sont tirés pour l'essentiel de [Pettersson97, Daafouz02, Prajna04b, Gu03].

**2.5.3.3.1 Systèmes linéaires à retard** Considérons le système linéaire à retard suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)) \\ x(\theta) &= \phi(\theta), \forall \theta \in [-s, 0], s > 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $\tau(t)$  est le retard du système qui vérifie :  $0 \leq \tau(t) \leq s, \forall t \geq 0$ .  $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\phi(\theta)$  une condition initiale.

Les conditions de stabilité suivantes découlent du théorème de Lyapunov-Razoumikhine [Gu03] avec la S-procédure :

**Théorème 2.7** (Stabilité indépendante du retard). *Le système à retard (2.78) est asymptotiquement stable pour tout retard  $\tau > 0$  si  $\exists P = P^T \succ 0$  et un scalaire  $\alpha > 0$  tels que :*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \alpha P & PA_h \\ A_h^T P & -\alpha P \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.79)$$

L'inégalité (2.79) est en réalité une contrainte de type BMI quasi-convexe (convexe pour  $\alpha$  fixé), mais elle est toutefois linéarisable par l'intermédiaire du changement de variable  $Q = \alpha P$ .

Les conditions précédentes sont indépendantes du retard, et de ce fait, exigent la stabilité du système pour n'importe quel retard positif  $\tau > 0$ , ce qui peut être difficile à réaliser. Il serait donc intéressant d'assurer la stabilité asymptotique connaissant une borne supérieure  $\bar{\tau}$  pour le retard temporel  $\tau$ . Le théorème suivant donne des conditions suffisantes de stabilité dépendant du retard.

**Théorème 2.8** (Stabilité dépendant du retard). *Le système à retard (2.78) est asymptotiquement stable pour tout retard  $0 < \tau < \bar{\tau}$  si une des conditions suivantes est satisfaite :*

a)  $\exists X \succ 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$  tels que :

$$\begin{bmatrix} \Omega & XA_dA & XA_dA_d \\ A^T A_d^T X & \beta_1^{-1} X & 0 \\ A_d^T A_d^T X & 0 & \beta_2^{-1} X \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.80)$$

où  $\Omega = -\bar{\tau}^{-1}[(A + A_d)^T X + X(A_d + A)] - (\beta_1^{-1} + \beta_2^{-1})X$ .

b)  $\exists P \succ 0, P_1 \succ 0, P_2 \succ 0$  tels que :

$$\begin{bmatrix} H & \bar{\tau}PA^T & \bar{\tau}PA_d^T \\ \bar{\tau}AP & -\bar{\tau}P_1 & 0 \\ \bar{\tau}A_dP & 0 & -\bar{\tau}P_1 \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.81)$$

où  $H = P(A + A_d)^T + (A_d + A)P + \bar{\tau}A_d(P_1 + P_2)A_d^T$ .

c)  $\exists X \succ 0, U \succ 0, V \succ 0$  et  $W$  tels que :

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & -WA_d & A^T A_d^T V & \bar{\tau}(W + X) \\ -A_d^T W & -U & A_d^T A_d^T V & 0 \\ VA_dA & VA_dA_d & -V & 0 \\ \bar{\tau}(W^T + X) & 0 & 0 & -V \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.82)$$

où  $\Omega_1 = (A + A_d)^T X + X(A_d + A) + WA_d + A_d^T W^T + U$ .

Les conditions (2.81) et (2.82) sont des LMI. L'inégalité (2.80) est une BMI quasi-convexe linéarisable par l'intermédiaire des changements de variables :  $Y_1 = \beta_1^{-1}X$  et  $Y_2 = \beta_2^{-1}X$ . Le lecteur intéressé est invité à consulter [Zhang01] et les références citées dans cet article pour une démonstration de ce théorème. Cet article effectue aussi une analogie de l'analyse de stabilité d'un système à retard avec l'analyse de stabilité robuste d'un système sans retard en faisant appel à une version du théorème du faible gain impliquant des variables de *scaling*.

**2.5.3.3.2 Systèmes polynomiaux** Dans ce paragraphe, nous utiliserons les notations suivantes :  $\mathcal{R}_n$  désigne l'ensemble des polynômes à  $n$  variables à coefficients réels,  $\mathcal{R}_n^k$  désigne l'ensemble des vecteurs colonnes de longueur  $k$  dont les éléments appartiennent à  $\mathcal{R}_n$  et  $\Sigma_n$  est l'ensemble de éléments de  $\mathcal{R}_n$  admettant une décomposition en sommes de carrés. Les éléments de  $\Sigma_n$  sont qualifiés de *polynômes SOS*.

Considérons la classe des systèmes non-linéaires régis par des équations d'état polynomiales :

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (2.83)$$

où  $f \in \mathcal{R}_n^n$ .

L'analyse de stabilité du système non-linéaire polynomial (2.83) peut s'effectuer à l'aide de la relaxation en sommes de carrés (SOS) de contraintes polynomiales introduite précédemment. Les résultats d'analyse et de commande utilisant les relaxations SOS sont principalement basées sur un théorème important en géométrie algébrique réelle connu sous le nom de *Positivstellensatz* (voir [Parrilo04, Bochnak98]) et d'une de ces conséquences que constitue la version généralisée de la S-procédure. Ce dernier résultat est particulièrement intéressant pour l'analyse

locale, notamment la caractérisation des régions d'attraction ainsi que la recherche de fonctions de Lyapunov de commande (CLF pour *Control Lyapunov function*).

### Stabilité globale

Le système (2.83) est (globalement asymptotiquement) stable au sens de Lyapunov s'il existe une fonction réelle  $V(x)$  satisfaisant les conditions :

$$1) \quad V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.84)$$

$$2) \quad \dot{V}(x) = \nabla_x^T V(x) f(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.85)$$

où  $\nabla_x V(x) = \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]^T$ . Dans ces conditions l'égalité est obtenue seulement au point d'équilibre  $x_e$  (qui est considéré nul sans perte de généralité).

Dans le cas général, la recherche d'une fonction  $V(x)$  vérifiant les conditions (2.84)-(2.85) n'est pas numériquement traitable. Toutefois, la restriction de la recherche à l'ensemble  $\Sigma_n$  des polynômes SOS permet de formuler le problème d'analyse de stabilité sous la forme du SOSP (*SOS program*) suivant :

$$1) \quad V(x) \in \Sigma_n \quad (2.86)$$

$$2) \quad -\dot{V}(x) \in \Sigma_n \quad (2.87)$$

Le programme SOSP (2.86)-(2.87) est équivalent à un programme SDP défini de la manière suivante. Le nouvel objectif est de trouver des matrices symétriques  $P \succeq 0$  et  $Q \succeq 0$  indépendantes de  $x$  vérifiant les décompositions :

$$V(x) = H_1^T(x) P H_1(x) \quad (2.88)$$

$$-\dot{V}(x) = H_2^T(x) Q H_2(x) \quad (2.89)$$

où  $H_1(x)$  et  $H_2(x)$  sont des vecteurs colonnes dont les éléments sont des fonctions monomiales des variables d'état  $x_i, i = 1, \dots, n$ .

### Estimation du domaine d'attraction

Le domaine d'attraction  $\Lambda$  du système non-linéaire (2.83) vers le point d'équilibre  $x_e = 0$  est l'ensemble des valeurs possibles de la condition initiale du vecteur d'état  $x(0)$  qui convergent asymptotiquement vers  $x_e$ .

$$\Lambda = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : x(0) = x_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e\} \quad (2.90)$$

On voit bien que la solution de l'équation d'état non-linéaire (2.83) dépend de la valeur initiale  $x_0$  du vecteur d'état. Cette solution pourra donc être notée  $x(x_0, t)$ . Afin de caractériser la "largeur" de l'ensemble  $\Lambda$ , assurant la convergence asymptotique locale du système (2.83), considérons le lemme suivant [Topcu10, Vidyasagar93].

**Lemme 2.2.** Soient un scalaire  $\gamma > 0$ , une fonction  $V \in \mathcal{C}^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $V(0) = 0$  et  $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ , tels que :

$$1) \quad \Lambda_{V,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \gamma\} \text{ est un ensemble borné.} \quad (2.91)$$

$$2) \quad \Lambda_{V,\gamma} - \{0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla_x^T V(x) f(x) < 0\} \quad (2.92)$$

Alors, la solution  $x(x_0, t)$  de (2.83) existe, appartient à  $\Lambda_{V,\gamma}$  et vérifie :  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(x_0, t) = x_e, \forall t > 0$ .

Les conditions d'analyse de stabilité locale données dans ce lemme peuvent être exprimées sous forme SDP par le biais du théorème suivant, appelé S-procédure généralisée, suivi d'une relaxation en sommes de carrés (SOS)[Tan08].

**Théorème 2.9** (S-procédure généralisée). Soit le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ . Considérons la contrainte suivante :

$$g_0(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \text{ vérifiant : } g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0 \quad (2.93)$$

où les  $g_i$  sont des polynômes réels. Les contraintes (2.93) sont satisfaites s'il existe des polynômes semi-définis positifs à valeurs réelles  $s_1(x), \dots, s_m(x)$ , tels que :

$$g_0(x) - \sum_{i=1}^m s_i(x) g_i(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.94)$$

La contrainte (2.93) peut être exprimée en tant que contrainte d'inclusions d'ensembles :

$$D_1 \subset D_2, \text{ où } D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\} \text{ et } D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : g_0(x) \geq 0\} \quad (2.95)$$

La S-procédure a été à l'origine proposée pour des multiplicateurs constants  $s_i(x) = \tau_i$  et des fonctions  $g_i(x)$  quadratiques. Dans ce cas, la condition (2.94) conduit directement à une LMI [Boyd94]. L'application de la S-procédure généralisée aux conditions du lemme 2.2 conduit aux conditions du corollaire suivant.

**Corollaire 2.1.** La condition d'inclusion d'ensembles donnée dans (2.92) est satisfaite s'il existe des polynômes semi-définis positifs  $l(x), s(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$-(l(x) + \nabla_x^T V(x) f(x)) + s(x)(V(x) - \gamma) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.96)$$

L'estimation de la région d'attraction consiste à trouver le plus grand scalaire  $\gamma > 0$  vérifiant les conditions du lemme 2.2. La maximisation de l'objectif linéaire  $\gamma$ , associée à une relaxation SOS de la contrainte (2.96) donne lieu au problème d'optimisation suivant :

$$\text{Maximiser } \gamma \quad (2.97a)$$

$$\text{sous } s(x), l(x) \in \Sigma_n \quad (2.97b)$$

$$-(l(x) + \nabla_x^T V(x) f(x)) + s(x)(V(x) - \gamma) \in \Sigma_n \quad (2.97c)$$

Les polynômes  $s(x)$  et  $l(x)$  sont désignés sous le terme de *multiplicateurs SOS*. Au lieu de considérer le polynôme  $l(x)$  comme paramètre d'optimisation comme dans (2.97b), une autre possibilité est de le fixer au préalable de manière à garantir l'inégalité stricte dans (2.92). Il est possible par exemple de prendre  $l = \varepsilon > 0$ .

Le problème d'optimisation (2.97) appartient à la classe des problèmes SOSP. De tels problèmes sont toujours transformables en des problèmes SDP en utilisant des factorisations spectrales similaires à celles données dans (2.88)-(2.89). Bien que ce type de factorisation peut aisément se faire manuellement pour des systèmes de taille modérée, il existe des outils numériques permettant d'automatiser cette opération tels que la boîte à outils SOSTOOLS [Prajna04a]. La boîte à outils GloptiPoly [Henrion04] permet de traiter une large classe de problèmes d'optimisation polynomiaux, incluant les SOSP, en se basant sur la théorie des moments [Lasserre01]. Notons également la disponibilité de la boîte à outils SMRSOFT [Chesi11b] qui a été plus récemment développée pour l'optimisation polynomiale et l'analyse de systèmes dynamiques dans un formalisme SOSP. Ces logiciels sont associés à MATLAB et utilisent le solveur numérique SeDumi [Sturm99] de problèmes SDP.

### Elargissement du domaine d'attraction

Une démarche similaire peut être adoptée dans le but d'élargir le domaine d'attraction du point d'équilibre  $x_e$ , ce qui permet d'assurer une plus grande robustesse en stabilité. Pour aller dans cette direction, il est possible d'appliquer la commande par retour d'état non-linéaire  $u(x) = k(x)$ ,  $k(0) = 0$  au système non-linéaire, muni d'une entrée de commande  $u$  :

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x)u \quad (2.98)$$

Nous invitons le lecteur à consulter [Tan04, Jarvis-Wloszek05] pour une discussion détaillée concernant l'élargissement des domaines d'attraction de systèmes non-linéaires polynomiaux en utilisant des fonction de Lyapunov de commande (CLF). Notons également la publication de l'ouvrage récent [Chesi11a] sur l'étude des domaines d'attraction de points d'équilibre de systèmes non-linéaires en utilisant la programmation SOS.

**2.5.3.3.3 Systèmes hybrides** Les systèmes dynamiques hybrides sont caractérisés par l'interaction entre systèmes à temps continu et systèmes à événements discrets. Introduisons le modèle général suivant de systèmes hybrides :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, m) \\ m^+ &= \phi(x, m) \end{cases} \quad (2.99)$$

où :

$x \in \mathbb{R}^n$  est l'état continu,  $m \in \mathcal{M} = \{m_1, \dots, m_N\}$  état discret de cardinal  $N$  potentiellement infini.

$f : \mathbb{R}^n \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est un champ de vecteur décrivant la dynamique de l'état continu  $x(t)$ .

$\phi : \mathbb{R}^n \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$  est une fonction décrivant l'évolution de l'état discret  $m$ .

Chaque état discret  $m_i \in \mathcal{M}$  correspond à un champ de vecteur différent  $f(x, m_i)$ ,  $i \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}$ . Le système continu évolue alors suivant la loi  $\dot{x} = f(x, m_i)$ . Le changement de valeur de l'état discret  $m$  induit un changement du champ de vecteur  $f(x, m_i)$  qui est appelé commutation. Cette commutation est désignée sous le terme de saut si elle s'accompagne d'une

discontinuité de l'état continu  $x$ .

Introduisons l'espace d'état hybride  $H = \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  et un sous-ensemble  $\Omega \subset H$  appelé région hybride. Une approche possible pour l'analyse de stabilité consiste à diviser la région  $\Omega$  en une partition de sous-régions disjointes  $\Omega_k, k = 1, \dots, l$  :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_l \quad \text{avec} \quad \Omega_q \cap \Omega_r = \emptyset, \forall q \neq r \quad (2.100)$$

Dans [Pettersson02], des conditions d'analyse de stabilité exponentielle du vecteur d'état continu  $x$ , pouvant s'exprimer sous forme LMI, ont été proposées. En considérant la partition de l'espace d'état hybride introduite dans (2.100), ces conditions se basent sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux ayant pour expression :

$$\forall (x, m) \in \Omega_q : V_q(x) = x^T P_q x + 2p_q^T x + \alpha_q \quad (2.101)$$

où  $P_q = P_q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $p_q \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha_q \in \mathbb{R}$ .

Ceci conduit à une formulation LMI des problèmes d'analyse de stabilité pour des systèmes hybrides où le champ de vecteur  $f$  n'est pas nécessairement linéaire. En plus des conditions usuelles de stabilité au sens de Lyapunov à l'intérieur d'une région  $\Omega_k$ , la stabilité du système hybride est assurée lorsque la transition entre une région et une autre ne s'accompagne pas d'une croissance de la fonction de Lyapunov globale du système. Par ailleurs, les sous-régions peuvent être prises en compte de manière analytique en utilisant la S-procédure généralisée introduite précédemment. Ce théorème permet aisément de décrire des régions locales définies par des formes quadratiques, telles que des hyperplans et des ellipsoïdes, ainsi que des combinaisons (intersection et réunion) de ces ensembles.

**2.5.3.3.4 Somme pondérée de sous-systèmes linéaires** Les sommes pondérées de sous-systèmes linéaires sont une classe particulière relativement courante de systèmes non-linéaires. Les systèmes flous et les combinaisons de systèmes résultant de linéarisations locales d'un système non-linéaire appartiennent à cette classe de systèmes [Pettersson97].

Les systèmes considérés obéissent à l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = f(x(t)) = \sum_{i=1}^r w_i(x(t))(A_i x(t) + B_i) \quad (2.102)$$

où les  $w_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $i \in I_r = \{1, \dots, r\}$  sont des fonctions scalaires continues satisfaisant :  $w_i(x) \geq 0$ ,  $i \in I_r$ . Elles pondèrent les systèmes linéaires  $\Sigma_i : \dot{x} = A_i x(t) + B_i$ .

De même que pour les systèmes hybrides, l'analyse locale est possible grâce à la partition de l'espace d'état en régions. Ainsi, la région de support  $\Omega_i$  d'une fonction  $w_i$  est définie comme étant l'ensemble des valeurs du vecteur d'état  $x$  pour lesquels le sous-système linéaire  $\Sigma_i$  contribue au champ de vecteur  $f(x)$  :

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n : w_i(x) > 0\} \quad (2.103)$$

Toutefois, une différence majeure par rapport aux systèmes hybrides réside dans le recouvrement partiel des régions  $\Omega_i$ , un vecteur d'état  $x$  pouvant activer simultanément deux modèles

linéaires  $\Sigma_i$  dans des proportions différentes  $w_i(x)$ . La transition de l'état  $x$  entre deux régions voisines  $\Omega_r$  et  $\Omega_q$  se fait donc de manière continue et n'induit pas de sauts.

Le système (2.102) peut représenter un système d'inférence floue avec des  $r$  règles de type SI...-ALORS... données par :

$$\text{Règle } i : \quad \text{SI } x(t) \in \Omega_i \quad \text{ALORS } \dot{x} = A_i x(t) + B_i \quad (2.104)$$

où les régions  $\Omega_i$  sont des *ensembles flous* et  $w_i(x) \in [0, 1]$  est la *fonction d'appartenance* de l'état  $x$  à  $\Omega_i$ .

Pour cette classe de systèmes, l'analyse de stabilité peut également se faire par l'utilisation de fonction de Lyapunov locales  $V_q(x)$ , qui sont valables sur des régions  $\hat{\Omega}_j, j = 1, \dots, s$ . Ce partitionnement, qui est utilisé pour l'analyse de stabilité, est potentiellement différent du partitionnement en régions  $\Omega_i, i = 1, \dots, r$  associées aux modèles locaux  $\Sigma_i$ . De même que pour les systèmes hybrides, le choix de fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux, avec l'utilisation de la S-procédure, permet d'exprimer le problème d'analyse de stabilité sous forme de contrainte LMI.

## 2.5.4 Synthèse de correcteurs

Beaucoup de problèmes de synthèse de correcteurs pour les systèmes linéaires admettent des formulations convexes de type LMI-SDP. Nous présenterons ci-dessous quelques résultats basiques pour trois types de problèmes : la commande par retour d'état, la commande par retour de sortie statique et la commande par retour de sortie dynamique.

### 2.5.4.1 Correcteur par retour d'état

Soit le système linéaire régi par l'équation :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.105)$$

La loi de commande  $u(t) = Kx(t)$ , où  $K$  est une matrice de gain, est appelée commande par retour d'état. Le système bouclé par cette commande a pour équation d'état :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (2.106)$$

La condition de stabilité au sens de Lyapunov du système (2.106) s'écrit :

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P \prec 0 \quad (2.107)$$

où  $P = P^T \succ 0$ . La synthèse d'un retour d'état stabilisant se fait en multipliant à droite et à gauche l'inégalité (2.107) par l'inverse de la matrice de Lyapunov  $Q = P^{-1}$ , puis en effectuant le changement de variable linéarisant  $R = KQ$ . Le système (2.105) est stabilisable par un correcteur par retour d'état  $u(t) = Kx$  si  $\exists R$  et  $\exists Q = Q^T \succ 0$  vérifiant la LMI suivante :

$$AQ + BR + QA^T + R^T B^T \prec 0 \quad (2.108)$$

Le gain du correcteur par retour d'état est alors obtenu par la formule  $K = RQ^{-1}$ . Une approche similaire peut être utilisée si les matrices  $A$  et  $B$  dépendent des paramètres.

### 2.5.4.2 Correcteur par retour de sortie statique

Considérons maintenant le système linéaire, muni d'une sortie mesurée  $y(t)$  :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (2.109)$$

La loi de commande  $u(t) = Ky(t)$ , où  $K$  est une matrice de gain, est appelée commande par retour de sortie. Le système bouclé par cette commande a pour équation d'état :

$$\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) \quad (2.110)$$

Contrairement à la commande par retour d'état, il n'est pas possible de faire un changement de variable linéarisant permettant d'obtenir la matrice de gain  $K$ , les matrices n'étant pas carrées. L'utilisation de la pseudo-inverse conduit à des solutions inexactes mais optimales au sens des moindres carrés.

### 2.5.4.3 Correcteur par retour de sortie dynamique

Soit le modèle LPV suivant muni d'un canal de performance de vecteur d'entrées  $w(t)$  et de vecteur de sorties  $z(t)$  :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\rho)x(t) + B_1(\rho)w(t) + B_2(\rho)u(t) \\ z(t) &= C_1(\rho)x(t) + D_{11}(\rho)w(t) + D_{12}(\rho)u(t) \\ y(t) &= C_2(\rho)x(t) + D_{21}(\rho)w(t) \end{cases} \quad (2.111)$$

Le correcteur est recherché sous la forme d'un système LPV de représentation d'état suivante :

$$K(s, \rho) : \begin{cases} \dot{x}_K(t) &= A_K(\rho)x_K(t) + B_K(\rho)y(t) \\ u(t) &= C_K(\rho)x_K(t) + D_K(\rho)y(t) \end{cases} \quad (2.112)$$

### Caractérisation basique

Le théorème suivant, proposé dans [Apkarian98], permet la synthèse de correcteur par retour de sortie avec garantie de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  pour le système (2.111).

**Théorème 2.10.** *L'existence d'un correcteur LPV de représentation d'état (2.112) stabilisant le système bouclé et garantissant un indice de performance en gain  $\mathcal{L}_2$   $\gamma > 0$  est assurée s'il existe des matrices symétriques  $X(\rho)$ ,  $Y(\rho)$  et des matrices  $\hat{A}_K(\rho)$ ,  $\hat{B}_K(\rho)$ ,  $\hat{C}_K(\rho)$  et  $D_K(\rho)$ , telles que,  $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$  :*

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + XA + \hat{B}_K C_2 + (*) & * & * & * \\ \hat{A}_K + A + B_2 D_K C_2 & -\dot{Y} + AY + B_2 \hat{C}_K + (*) & * & * \\ (XB_1 + \hat{B}_K D_{21})^T & (B_1 + B_2 D_K D_{21})^T & -\gamma I & * \\ C_1 + D_{12} D_K C_2 & C_1 Y + D_{12} \hat{C}_K & D_{11} + D_{12} D_K D_{21} & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.113)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.114)$$

Toutes les matrices dans (2.113) et (2.114) dépendent potentiellement des paramètres. Cette dépendance a été omise afin de simplifier la notation.

Si les PD-LMI (2.113)-(2.114) sont faisables pour les matrices  $X(\rho)$ ,  $Y(\rho)$ ,  $\hat{A}_K(\rho)$ ,  $\hat{B}_K(\rho)$ ,  $\hat{C}_K(\rho)$  et  $D_K(\rho)$ , alors les matrices d'état du correcteur sont construites de la manière suivante :

1. Trouver des matrices  $N(\rho)$ ,  $M(\rho)$ , solutions du problème de factorisation :

$$I - X(\rho)Y(\rho) = N(\rho)M^T(\rho) \quad (2.115)$$

2. Calculer les matrices d'état  $A_K(\rho)$ ,  $B_K(\rho)$  et  $C_K(\rho)$  du correcteur suivant les formules :

$$A_K(\rho) = N^{-1}(X\dot{Y} + N\dot{M}^T + \hat{A}_K - X(A - B_2D_KC_2)Y - \hat{B}_KC_2Y - XB_2\hat{C}_K)M^{-T} \quad (2.116)$$

$$B_K(\rho) = N^{-1}(\hat{B}_K - XB_2D_K) \quad (2.117)$$

$$C_K(\rho) = (\hat{C}_K - D_KC_2Y) \quad (2.118)$$

**Preuve .** Ces conditions sont obtenues en appliquant directement le lemme borné réel (BRL) au système en boucle fermée constitué par le bouclage du système et du correcteur, suivi de transformations de projection permettant de linéariser la BMI résultante [Chilali96].

### Caractérisation projetée

Dans la méthode de synthèse par LMI projetées [Wu06], les matrices du correcteur n'apparaissent pas explicitement dans les conditions de synthèse. Les hypothèses suivantes doivent être vérifiées :

1. Le triplet  $(A(\rho), B_2(\rho), C_2(\rho))$  est stabilisable et détectable  $\forall \rho \in \mathcal{S}_\rho$ .
2. Les matrices  $[C_2(\rho) \ D_{21}(\rho)]$  et  $[B_2^T(\rho) \ D_{12}^T(\rho)]$  sont de plein rang colonnes sur  $\mathcal{S}_\rho$ .

**Théorème 2.11.** L'existence d'un correcteur LPV ayant pour représentation d'état qui assure la stabilité et un indice de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  du système bouclé en dessous d'un scalaire  $\gamma > 0$ , est garantie s'il existe des matrices  $R(\rho)$  et  $S(\rho)$  satisfaisant les contraintes matricielles suivantes :

$$N_R^T(\rho) \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & R(\rho) & & 0 \\ R(\rho) & -\dot{R}(\rho) & & 0 \\ & 0 & \gamma^{-1}I & 0 \\ & & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T(\rho) & C_1(\rho) \\ I & 0 \\ B_1^T(\rho) & D_{11}^T(\rho) \\ 0 & I \end{bmatrix} N_R(\rho) \prec 0 \quad (2.119)$$

$$N_S^T(\rho) \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & S(\rho) & & 0 \\ S(\rho) & \dot{S}(\rho) & & 0 \\ & 0 & \gamma^{-1}I & 0 \\ & & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\rho) & B_1(\rho) \\ I & 0 \\ B_1(\rho) & D_{11}(\rho) \\ 0 & I \end{bmatrix} N_S(\rho) \prec 0 \quad (2.120)$$

$$\begin{bmatrix} R(\rho) & I \\ I & S(\rho) \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (2.121)$$

avec  $N_R(\rho) = \ker[B_2^T(\rho) \ D_{12}^T(\rho)]$  et  $N_S(\rho) = \ker[C_2(\rho) \ D_{12}(\rho)]$ , où  $\ker(M)$  désigne une base du noyau de la matrice  $M$ .

---

**Preuve .** Ces conditions sont obtenues par l'application du lemme borné réel au système en boucle fermée, suivi de l'application du lemme de projection pour éliminer les matrices du correcteur. La reconstruction des matrices d'état du correcteur est effectuée suivant la procédure donnée dans [Wu06].

Il est à noter que d'autres descriptions projetées ont été proposées dans la littérature scientifique, telles que celle donnée dans [Apkarian98].



# Chapitre 3

## Commande basée sur un modèle LPV rationnel

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modèle dynamique de robot manipulateur . . . . .</b>	<b>69</b>
3.1.1	Cas des manipulateurs rigides . . . . .	70
3.1.2	Cas des manipulateurs flexibles . . . . .	72
3.1.3	Représentation d'état non-linéaire . . . . .	75
<b>3.2</b>	<b>Modèle LPV rationnel de robot manipulateur . . . . .</b>	<b>75</b>
3.2.1	Modélisation quasi-LPV par séquençage virtuel . . . . .	75
3.2.2	Cas d'étude . . . . .	76
3.2.3	Modélisation LFR . . . . .	79
3.2.4	Commande basée sur le modèle LPV rationnel . . . . .	81
<b>3.3</b>	<b>Commande utilisant un modèle LPV singulier . . . . .</b>	<b>82</b>
3.3.1	Modélisation LPV singulière (descripteur) . . . . .	82
3.3.2	Commande avec garantie de performance en gain $\mathcal{L}_2$ . . . . .	86
3.3.3	Résultats de simulation . . . . .	88
<b>3.4</b>	<b>Commande basée sur des conditions LMI étendues . . . . .</b>	<b>91</b>
3.4.1	Commande par retour d'état LPV . . . . .	92
3.4.2	Retour d'état avec action intégrale . . . . .	96
3.4.3	Retour d'état avec taux de convergence exponentielle . . . . .	97
3.4.4	Correcteur par retour de sortie dynamique avec garantie de performance en gain $\mathcal{L}_2$ . . . . .	98
3.4.5	Résultats de simulation . . . . .	101
<b>3.5</b>	<b>Comparaison avec la méthode d'inversion de modèle dynamique . . . . .</b>	<b>104</b>
3.5.1	Inversion de modèle dynamique . . . . .	104
3.5.2	Extension aux manipulateurs flexibles . . . . .	105
3.5.3	Résultats de tests comparatifs . . . . .	107
<b>3.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>108</b>

---

### 3.1 Modèle dynamique de robot manipulateur

Pour des robots manipulateurs qui subissent l'action de forces extérieurs vérifiant le principe des travaux virtuels, différentes approches sont possibles pour l'obtention d'un modèle dyna-

mique. Parmi les plus utilisées nous pouvons mentionner la méthode des équations d'Euler-Lagrange et la méthode du principe de moindre action de Hamilton. Une autre méthode qui a été développée récemment, utilisant des éléments de la théorie des graphes linéaires, permet un calcul systématique de modèles dynamiques de systèmes mécaniques multicorps flexibles. Cette méthode est implémentée sous forme numérique dans le logiciel de calcul symbolique MAPLE sous la forme de la boîte à outils DynaFlex [Shi02b].

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons essentiellement le formalisme de modélisation par les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau_e(t) \quad (3.1)$$

où  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$  est le Lagrangien du système,  $\mathcal{T}$  est son énergie cinétique et  $\mathcal{U}$  son énergie potentielle ;  $q$  est le vecteur des coordonnées généralisées et  $\tau_e$  le vecteur des couples extérieurs appliqués au manipulateur, donnés par la somme des couples de commande  $\tau$  et de frottement visqueux  $\tau_f$ .

Le développement de l'équation (3.1) conduit à l'obtention d'un modèle dynamique sous la forme générique suivante, représentant un ensemble d'équations différentielles du second ordre couplées :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q)\dot{q} + K(q)q + g(q) = \tau \quad (3.2)$$

où  $M(q)$ ,  $D(q)$  et  $K(q)$  représentent les matrices d'inertie, d'amortissement et de raideur respectivement.  $C(q, \dot{q})$  est la matrice des effets de Coriolis et centripètes et  $g(q)$  le vecteur des couples gravitationnels.

### 3.1.1 Cas des manipulateurs rigides

Nous développerons dans ce qui suit les équations d'Euler-Lagrange dans le cas des manipulateurs série à segments rigides. Les expressions présentées, largement utilisées pour la simulation et la commande de robots manipulateurs, sont rapportées de l'ouvrage [Spong05].

L'énergie cinétique d'un manipulateur rigide à  $n$  segments est donnée par :

$$\mathcal{T}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (3.3)$$

où  $M(q)$  est une matrice symétrique définie positive pour tout  $q$  et les coefficients  $m_{ij}$  sont ses éléments.

L'énergie potentielle  $\mathcal{U}(q)$ , qui peut contenir de termes élastiques et gravitationnels, dépend des coordonnées généralisées  $q$  et pas de leurs dérivées  $\dot{q}$ . Les dérivées du Lagrangien par rapport aux vitesses articulaires sont donc données par :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj}(q) \dot{q}_j \quad (3.4)$$

La dérivée temporelle de l'équation (3.5) donne :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.5)$$

D'autre part, nous avons :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_k} \quad (3.6)$$

En calculant la différence (3.5)-(3.6), nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \left( \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_k} \quad (3.7)$$

En raison de la symétrie de la matrice d'inertie  $M(q)$ , nous avons :

$$\sum_{i,j} \left( \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.8)$$

Par substitution, le terme à coefficient entre parenthèses dans (3.7) devient :

$$\sum_{i,j} \left( \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.9)$$

Les coefficients des termes  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  dans (3.9), sont notés  $c_{ijk}$ . Ils sont appelés symboles de Christoffel du premier type :

$$c_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right) \quad (3.10)$$

Ils caractérisent les termes non-linéaires du modèle dynamique qui sont quadratiques en fonction des vitesses articulaires. Les termes en  $\dot{q}_i^2$  sont appelés termes centrifuges alors que ceux en  $\dot{q}_i \dot{q}_j$ ,  $i \neq j$  sont appelés termes de Coriolis.

Finalement, en notant  $\psi_k(q) = \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q_k}$ , pour chacune des articulations  $k$ , le modèle dynamique s'écrit :

$$\sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + \psi_k(q) = \tau_{e_k} \quad (3.11)$$

où  $\tau_{e_k} = \tau_k + \tau_{f_k}$  est le couple extérieur appliqué à l'articulation  $k$ ,  $\tau_k$  étant le couple de commande fourni par le moteur et  $\tau_{f_k}$  est le couple de frottement visqueux affectant l'articulation.

L'ensemble d'équations non-linéaires obtenues pour  $k$  compris entre 1 et  $n$  peut être mis sous la forme matricielle (3.2). Pour un robot rigide, nous aurons généralement  $D(q) = K(q) = 0$ , l'énergie potentielle étant supposée purement gravitationnelle (pas de terme élastique) et les frottements visqueux supposés négligeables. Il est possible de remarquer, d'après l'expression des symboles de Christoffel donnée dans (3.10) que ces coefficients sont entièrement déterminés par la matrice d'inertie  $M(q)$  du robot. Hormis la mesure des vitesses articulaires  $\dot{q}_k$ , la

connaissance des effets non-linéaires de Coriolis et centrifuges ne nécessite donc aucune information supplémentaire sur le système.

Il est bien connu qu'un modèle dynamique obtenu à l'aide des équations d'Euler-Lagrange possède plusieurs propriétés intéressantes, parmi lesquelles nous pouvons mentionner :

1. La matrice  $N(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  est anti-symétrique. Autrement dit, elle vérifie :  $N^T(q, \dot{q}) = -N(q, \dot{q})$ .
2. La matrice d'inertie  $M(q)$  est bornée. Pour chaque valeur des coordonnées généralisées  $q$  (configuration), elle vérifie :  $\lambda_{\min}(q) \preceq M(q) \preceq \lambda_{\max}(q)$ , où  $\lambda_{\min}(q)$  et  $\lambda_{\max}(q)$  sont des nombre réels positifs représentant les valeurs propres minimales et maximale.
3. Le modèle dynamique est linéaire par rapport à ses paramètres. Autrement dit :  $\exists Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ , matrice d'expression connue appelée régresseur, et  $\Theta \in \mathbb{R}^l$ , vecteur de paramètres, vérifiant :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\Theta = \tau \quad (3.12)$$

Cette propriété permet de faciliter l'identification de paramètres inconnus du modèle dynamique tels que les masses et les moments d'inertie des segments du robot.

### 3.1.2 Cas des manipulateurs flexibles

Les manipulateurs à segments flexibles, qui présentent des déformations mécaniques distribuées le long de leur structure mécanique, sont les systèmes auxquels nous nous intéressons au cours de ce travail. Contrairement aux manipulateurs rigides, ces manipulateurs sont caractérisés par une énergie potentielle élastique non nulle. Une modélisation précise des phénomènes de déformations distribuées constitue en général un problème difficile et peut conduire à des modèles de dimension infinie. Pour des applications de commande, un compromis doit être trouvé entre la précision du modèle et sa facilité d'utilisation (en vue du traitement numérique, par exemple). Parmi les méthodes existantes de modélisation des déformations, nous utiliserons en particulier la méthode des modes supposés car elle conduit naturellement à une représentation lagrangienne similaire à celle décrite dans le paragraphe précédent pour les manipulateurs rigides. Les modèles dans l'espace d'état résultants peuvent être utilisés par la suite en vue de l'analyse des propriétés dynamiques du système et de la synthèse de correcteurs.

#### 3.1.2.1 Modélisation de la déformation transverse

Les hypothèses suivantes sont généralement admises pour la modélisation des segments flexibles :

1. Les segments flexibles sont des poutres d'Euler-Bernoulli fines caractérisées par un rapport longueur/section élevé.
2. Les variables de déformations subissent une élasticité linéaire et un faible amortissement.
3. Le type de déformation est une pure flexion de faible amplitude dans le plan du mouvement.

Sous ces hypothèses, les méthodes suivantes de modélisation des manipulateurs à plusieurs segments flexibles ont été citées dans [De Luca08] :

1. **La méthode des éléments localisés.** Dans cette approche, chaque élément de l'ensemble de la structure mécanique subit soit un effet d'inertie (s'il consiste en une masse ponctuelle rigide), soit un effet d'élasticité (s'il s'agit d'un élément déformable sans masse).
2. **La méthode des éléments finis.** Cette méthode s'appuie sur une décomposition de la structure globale en plusieurs éléments. Après l'obtention du modèle de chaque élément par une technique d'approximation, le modèle global est obtenu par assemblage des modèles élémentaires.
3. **La méthode des modes supposés.** Cette méthode effectue une approximation en modes de vibration de la solution de l'équation aux dérivées partielles (EDP) gouvernant l'évolution temporelle de la déformation en tout point du segment. Chaque mode est représenté par le produit d'une fonction temporelle et d'une fonction spatiale, ce qui permet une description équivalente du modèle sous la forme d'EDO (équations aux dérivées ordinaires).
4. **La méthode de représentation par matrices de transfert.**

### Méthode des modes supposés

La déformation élastique  $w_k(x_k, t)$  dans un point de coordonnée  $x_k$  du segment  $k$  est donnée par la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(EI)_k \frac{\partial^4 w_k(x_k, t)}{\partial x_k^4} + \lambda_k \frac{\partial^2 w_k(x_k, t)}{\partial t^2} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

où  $(EI)_k$  est la rigidité en flexion du segment  $k$ , donnée par le produit du module de Young  $E_k$  et de la section  $I_k$  du segment et  $\lambda_k$  est la densité de masse linéique uniforme du segment.

En tirant profit de la séparabilité des dépendances spatiales et temporelles, les solutions en modes supposés de l'équation (3.13) sont données par :

$$w_k(x_k, t) = \sum_{i=1}^{n_d} \phi_{ki}(x_k) \delta_{ki}(t) \quad (3.14)$$

où  $n_d$  est le nombre de modes flexibles considérés après la troncature du modèle théorique de dimension infinie. Dans beaucoup d'applications pratiques, la description de la déformation avec  $n_d = 2$  modes flexibles est suffisamment précise.

La variable  $\delta_{ki}(t)$  est l'amplitude instantanée et  $\phi_{ki}(x_k)$  est la fonction de forme spatiale associée au mode flexible  $i$  du segment  $k$ . Ces fonctions sont des solutions d'équations différentielles spatiale et temporelle [De Luca91]. Dans le cas d'un mouvement libre (couple d'excitation nul), les amplitudes instantanées, aussi appelées variables de déformation, sont des sinusoides entretenues :

$$\ddot{\delta}_{ki}(t) = -\omega_{ki} \delta_{ki}(t) \quad \Rightarrow \quad \delta_{ki}(t) = \alpha_{ki} \sin(\omega_{ki}t) + \beta_{ki} \cos(\omega_{ki}t) \quad (3.15)$$

où  $\omega_{ki}$  est la pulsation propre associée au mode flexible. Elle est obtenue à l'aide de la relation :  $\omega_{ki}^2 = \frac{\xi_{ki}^4 (EI)_k}{\rho_k}$ , chaque paramètre  $\xi_{ki}$  étant la solution d'une équation transcendante impliquant des conditions aux limites de l'équation (3.13). Les coefficients  $\alpha_{ki}$  et  $\beta_{ki}$  sont obtenues par les conditions initiales  $\delta_{ki}(0)$  et  $\dot{\delta}_{ki}(0)$ .

Les fonctions de forme sont données par l'expression :

$$\phi_{ki}(x_k) = A_{ki} \sin(\xi_{ki}x_k) + B_{ki} \cos(\xi_{ki}x_k) + C_{ki} \sinh(\xi_{ki}x_k) + D_{ki} \cosh(\xi_{ki}x_k) \quad (3.16)$$

Les coefficients  $A_{ki}$ ,  $B_{ki}$ ,  $C_{ki}$  et  $D_{ki}$  sont déterminés à l'aide des conditions aux limites :  $w_{ki}(0, t)$ ,  $w''_{ki}(0, t)$ ,  $w''_{ki}(l, t)$  et  $w'''_{ki}(l, t)$ , où  $w'_{ki}(x_k, t) = \frac{\partial w_{ki}(x_k, t)}{\partial x_k}$  est la dérivée spatiale de la déformation transverse.

### 3.1.2.2 Modèle dynamique non-linéaire

Les variables de déformation, rassemblées dans le vecteur  $\delta(t) = [\delta_{11}(t) \dots \delta_{1n_d}(t) \dots \delta_{n1}(t) \dots \delta_{nn_d}(t)]^T$ , sont considérées comme de nouvelles coordonnées généralisées. Le vecteur  $q$  admet alors la partition  $q = [\theta^T \ \delta^T]^T$ , où les positions articulaires  $\theta$  sont désignées sous le terme de *variables rigides* alors que les variables de déformation  $\delta$  sont appelées *variables flexibles*. Dans l'ensemble de ce travail, les variables flexibles sont supposées inaccessibles à la mesure. Sous cette hypothèse, les correcteurs par retour d'état, dont la synthèse est relativement simple, ne peuvent être utilisés pour l'asservissement des robots flexibles étudiés.

Connaissant le modèle géométrique du robot, le calcul des énergies cinétique et potentielle est effectué de manière récursive en exprimant les positions et vitesses de tout point du robot dans le repère fixe lié à la base (voir [De Luca91]). Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent de la manière suivante par rapport aux nouvelles coordonnées généralisées :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \tau_{e_i}(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.17a)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\delta}_{ij}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_{ij}} = 0 \quad j = 1, \dots, n_d \quad i = 1, \dots, n \quad (3.17b)$$

Le modèle dynamique du robot flexible est obtenu sous la forme suivante, traduisant un comportement du second ordre :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Kq + D\dot{q} + g(q) = G\tau \quad (3.18)$$

où  $q = [\theta^T \ \delta^T]^T$  est le vecteur de coordonnées généralisées.

Les matrices d'inertie, de raideur et d'amortissement sont partitionnées suivant les variables rigides et flexibles de la manière suivante :

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{\theta\theta}(q) & M_{\theta\delta}(q) \\ M_{\delta\theta}(q) & M_{\delta\delta} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_\delta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_\delta \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

De la même manière, les vecteurs de couples de Coriolis et gravitationnels admettent le partitionnement suivant :

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} c_\theta(q, \dot{q}) \\ c_\delta(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad g(q) = \begin{bmatrix} g_\theta(q) \\ g_\delta(q) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$G$  est une matrice d'entrée qui distribue les couples d'entrée du vecteur  $\tau$  parmi les coordonnées généralisées. Les équations (3.17a)-(3.17b) donnent naturellement une matrice de la

forme :  $G = [I \ 0]^T$  vu que les variables de déformation  $\delta_{ki}$  ne sont pas actionnées. Cependant, afin de faciliter certains aspects liés à la commande, comme l'obtention d'une structure simplifiée pour la matrice d'inertie, des changements de variables affectant les coordonnées articulaires peuvent conduire à des expressions différentes de la matrice  $G$ .

### 3.1.3 Représentation d'état non-linéaire

Le vecteur de couples gravitationnels  $g(q)$  est considéré nul par la suite en raison de l'espace de travail horizontal des robots manipulateurs considérés. En choisissant le vecteur d'état  $x(t) = [q^T(t) \ \dot{q}^T(t)]^T$  et en considérant les positions articulaires  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  comme sorties mesurées du système, une représentation d'état quasi-linéaire du système est obtenue sous la forme *descripteur* suivante :

$$\begin{cases} M_1(q)\dot{x}(t) &= A_1(q, \dot{q})x(t) + B_1u \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $M_1(q) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix}$ ,  $A_1(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C(q, \dot{q}) - D \end{bmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$  et  $C = [I_n \ 0]$ .

La matrice d'inertie  $M(q)$  d'un modèle dynamique obtenu à l'aide des équations d'Euler-Lagrange étant toujours inversible, le modèle descripteur (3.21), obtenu naturellement à partir du modèle dynamique non-linéaire (3.18), peut être exprimé de manière équivalente sous la forme d'une représentation d'état habituelle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(q, \dot{q})x(t) + B(q)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (3.22)$$

où  $A(q, \dot{q}) = M_1^{-1}(q)A_1(q, \dot{q})$ ,  $B(q, \dot{q}) = M_1^{-1}(q)B_1$ .

## 3.2 Modèle LPV rationnel de robot manipulateur

### 3.2.1 Modélisation quasi-LPV par séquençement virtuel

Afin d'aboutir à une modélisation dynamique sous la forme d'un modèle LPV, les matrices de la représentation quasi-linéaire donnée dans (3.22), ne doivent dépendre que des coordonnées rigides mesurables constituant le vecteur  $\theta$  et leurs dérivées  $\dot{\theta}$  qui sont mesurées directement à l'aide de capteurs appropriés ou estimées à partir des mesures de position disponibles. Cette hypothèse peut être satisfaite moyennant des approximations si cela est nécessaire.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\theta, \dot{\theta})x(t) + B(\theta)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (3.23)$$

Les paramètres variants sont définis par des fonctions non-linéaires des variables d'état mesurables, conduisant à une modélisation LPV par *séquençement virtuel* :

$$\rho_i(t) = \varphi_i(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \quad i = 1, \dots, l \quad (3.24)$$

Le choix des paramètres variants n'est pas unique. Il est influencé par le nombre et le type des termes non-linéaires dans les matrices  $A(\theta, \dot{\theta})$  et  $B(\theta)$ . Pour des systèmes robotiques, les fonctions  $\varphi_i$  contiennent typiquement des fonctions trigonométriques des positions articulaires  $\theta_k$  ainsi que d'autres termes non-linéaires des vitesses articulaires  $\dot{\theta}_k$ . Le nombre de paramètres ayant tendance à augmenter avec la complexité du système modélisé, cette méthode de modélisation est appropriée aux systèmes de taille et de nombre de non-linéarités modérées, qui seront entièrement prises en compte dans le modèle LPV car ce dernier est obtenu sans linéarisation.

### 3.2.2 Cas d'étude

Les méthodes de commande présentées dans ce chapitre ont été appliquées à deux cas d'étude qui consistent en des modèles dynamiques de bras manipulateurs pris dans la littérature scientifique.

#### 3.2.2.1 Manipulateur rigide à deux segments (Cas d'étude 1)

Pour un manipulateur rigide à deux degrés de liberté (2 DDL) à articulations rotoïdes (également appelé *manipulateur coude*), le modèle dynamique issu des équations d'Euler-Lagrange est donné par l'équation :

$$M(\theta_2)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + D\dot{\theta} + K\theta(t) = \tau(t) \quad (3.25)$$

Les matrices de raideur et de dissipation ont une structure diagonale :  $K = \text{diag}(k_1, k_2)$  et  $D = \text{diag}(d_1, d_2)$ . Ces matrices sont généralement nulles pour un manipulateur rigide. La matrice d'inertie  $M(\theta_2)$  varie de manière affine en fonction du cosinus de la seconde position articulaire  $\theta_2$ . Cette grandeur sera prise comme premier paramètre variant  $\rho_1 = \cos(\theta_2)$ . Nous aurons alors :

$$M(\theta_2) = M_0 + M_c \cos(\theta_2) = M_0 + M_c \rho_1 \quad \text{avec} \quad M_0 = \begin{bmatrix} m_{110} & m_{120} \\ m_{120} & m_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_c = \begin{bmatrix} m_{11c} & m_{12c} \\ m_{12c} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

A l'aide de la formule (3.10), les symboles de Christoffel, caractérisant les non-linéarités de Coriolis et centrifuges sont donnés par :

$c_{111} = 0$ ,  $c_{112} = \frac{1}{2}m_{11c} \sin(\theta_2) = -h$ ,  $c_{121} = c_{211} = h$  (symétrie),  $c_{122} = c_{212} = 0$  (symétrie),  $c_{221} = h$  et enfin  $c_{222} = 0$ .

Nous pouvons alors déduire l'équation de mouvement de chacune des articulations :

$$\begin{cases} m_{11}(\theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_{12}(\theta_2)\ddot{\theta}_2 - m_{11c} \sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2) + d_1\dot{\theta}_1 + k_1\theta_1 = \tau_1 \\ m_{12}(\theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_{22}\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_{11c} \sin(\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + d_2\dot{\theta}_2 + k_2\theta_2 = \tau_2 \end{cases} \quad (3.27)$$

En supposant que le vecteur d'état du système  $x(t) = [\theta(t)^T \dot{\theta}^T(t)]^T$  est mesurable, nous pouvons définir les paramètres variants supplémentaires :  $\rho_2 = \theta_2 \sin(\theta_2)$  et  $\rho_3 = \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2)$ .

Les trois paramètres  $\rho_i$  étant indépendants, l'ensemble paramétrique  $\mathcal{S}_\rho$  est un cube délimité par les valeurs minimale et maximale de chaque paramètre. Ainsi, si la deuxième position angulaire est autorisée à évoluer sur un large domaine de fonctionnement :  $\theta_2 \in [0, 2\pi]$  rad, alors le premier paramètre  $\rho_1 = \cos(\theta_2)$  est borné par la relation :  $|\rho_1| < 1$ . Les paramètres  $\rho_2$  et  $\rho_3$  sont bornés par les vitesses articulaires maximales de chacune des articulations, soit  $|\rho_2| < \dot{\theta}_{2\max}$  et  $|\rho_3| < \dot{\theta}_{1\max}$ . Ces limitations de vitesses sont imposées par des considérations technologiques telles que le type des moteurs articulaires utilisés. De la même manière, l'ensemble admissible  $\mathcal{S}_\rho$  pour les dérivées paramétriques  $\dot{\rho}$  est délimité par les vitesses et les accélérations maximales des coordonnées articulaires.

On note également la présence d'une relation algébrique entre le paramètre  $\rho_2$  et la dérivée de  $\rho_1$  :

$$\dot{\rho}_1 = -\rho_2 \quad (3.28)$$

Cette relation peut être exploitée pour réduire la dimension de l'espace paramétrique dans les conditions d'analyse ou de synthèse de correcteurs.

Le modèle LPV du manipulateur à 2 DDL est alors obtenu sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (3.29)$$

où

$$A(\rho(t)) = M_1^{-1}(\rho_1)A_1(\rho), B(\rho(t)) = M_1^{-1}(\rho_1)B_1(\rho) \text{ et } C = [I_2 \quad 0_2], M_1(\rho_1) = \text{diag}(I_2, M(\rho_1)),$$

$$A_1(\rho) = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -K_e & -D - S(\rho_2, \rho_3) \end{bmatrix}, B_1(\rho) = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \text{ et } S(\rho_2, \rho_3) = \begin{bmatrix} -m_{11c}\rho_2 & -\frac{1}{2}m_{11c}\rho_2 \\ \frac{1}{2}m_{11c}\rho_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notons la dépendance rationnelle des matrices d'état en fonction du vecteur de paramètres  $\rho(t) = [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \rho_3]^T$ . Pour les nombreux systèmes mécaniques articulés dont le mouvement est décrit par l'équation (3.2), ce caractère rationnel et structuré sous la forme (dénominateur)<sup>-1</sup>  $\times$  (numérateur) provient de l'inversion de la matrice d'inertie  $M(\theta)$ .

### 3.2.2.2 Manipulateur à deux segments avec avant-bras flexible (Cas d'étude 2)

Le deuxième exemple applicatif étudié dans ce chapitre est un manipulateur à deux segments dont seul le deuxième (avant-bras) est flexible, appelé FLEXARM, développé par l'équipe d'Alessandro De Luca à l'université Roma La Sapienza [De Luca90].

#### Modèle non-linéaire

Le modèle dynamique non-linéaire de ce système est donné par :

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + Kq + D\dot{q} = G\tau \quad (3.30)$$

où :  $q(t) = [\theta_1(t) \theta_2(t) \delta_1(t) \delta_2(t)]$ ,  $\theta_i$  :  $i = 1, 2$  sont les positions articulaires et  $\delta_j$  :  $j = 1, 2$  sont les amplitudes des deux modes flexibles considérés pour le deuxième segment.  $M(q)$  est

la matrice d'inertie,  $c(q, \dot{q})$  est le vecteur des couples de Coriolis et centripètes,  $K$  et  $D$  sont les matrices de raideur et d'amortissement,  $\tau$  le vecteur des couples de commande et  $G$  est une matrice d'entrée qui distribue les couples d'entrée sur les coordonnées généralisées.

Les matrices du modèle dynamique (3.30) ont les expressions suivantes.

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & 0 & 0 \\ m_{13} & 0 & 1 & 0 \\ m_{14} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

avec :

$$\begin{aligned} m_{11} &= J_{1t} + J_{2t} + 2h_3 \cos \theta_2 - 2(h_1\delta_1 + h_2\delta_2) \sin \theta_2 \\ m_{12} &= J_{2t} + h_3 \cos \theta_2 - (h_1\delta_1 + h_2\delta_2) \sin \theta_2 \\ m_{13} &= h_1 \cos \theta_2 \\ m_{14} &= h_2 \cos \theta_2 \\ m_{22} &= J_{2t} \end{aligned}$$

Le vecteur  $c(q, \dot{q}) = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]^T$  rassemble les couples de Coriolis et centrifuges, dont les expressions sont obtenues à l'aide du calcul des symboles de Christoffel :

$$\begin{aligned} c_1 &= -(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)(h_3 \sin \theta_2 + (h_1\delta_1 + h_2\delta_2) \cos \theta_2) \\ &\quad - 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)(h_1\dot{\delta}_1 + h_2\dot{\delta}_2) \sin \theta_2 \\ c_2 &= \dot{\theta}_1^2(h_3 \sin \theta_2 + (h_1\delta_1 + h_2\delta_2) \cos \theta_2) \\ c_3 &= \dot{\theta}_1^2 h_1 \sin \theta_2 \\ c_4 &= \dot{\theta}_1^2 h_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

La matrice d'entrée  $G$  est donnée par l'expression suivante.

$$G = \begin{bmatrix} I \\ G_\delta \end{bmatrix} \text{ avec } G_\delta = \begin{bmatrix} 0 & \phi'_{10} \\ 0 & \phi'_{20} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Ses deux dernières lignes sont non nulles à cause de la structure simplifiée choisie pour la matrice d'inertie.

Les matrices d'amortissement et de raideur ont des structures diagonales :

$$D = \text{diag}(0, 0, d_1, d_2) \text{ et } K = \text{diag}(0, 0, k_1, k_2) \quad (3.33)$$

De plus, la déformation (déflexion) de l'organe terminal est exprimée par :

$$y_t(t) = \left(\frac{\phi_{1e}}{l_2} - \phi'_{10}\right)\delta_1 + \left(\frac{\phi_{2e}}{l_2} - \phi'_{20}\right)\delta_2 = C_t x(t) \quad (3.34)$$

Les valeurs numériques des paramètres physiques :  $J_{1t}$ ,  $J_{2t}$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $\phi_{1e}$ ,  $\phi_{2e}$ ,  $\phi'_{10}$ ,  $\phi'_{20}$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $k_1$  et  $k_2$  sont données dans [De Luca90].

### Modèle LPV

Un modèle LPV décrivant le système (4.3) a été obtenu en négligeant les termes contenant les variables de déformation  $\delta_j$  dans la matrice d'inertie, et en reformulant certains termes non-linéaires en tant que paramètres variants suivant l'approche de séquençement virtuel mentionnée précédemment :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \cos(\theta_2), & \rho_2 &= \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2), & \rho_3 &= \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2), \\ \rho_4 &= \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_2), & \rho_5 &= \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2), & \rho_6 &= \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Les paramètres dépendent des variables d'état mesurables uniquement, c.à.d. les positions  $\theta$  et vitesses angulaires  $\dot{\theta}$ . Par conséquent, les ensembles admissibles pour les paramètres et leurs dérivées  $\mathcal{S}_\rho$  et  $\mathcal{S}_{\dot{\rho}}$  sont déduits de la connaissance des domaines de variation des positions, vitesses et accélérations angulaires.

En considérant que la sortie mesurée du système est constituée des positions angulaires des articulations du robot, le modèle LPV est obtenu sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (3.36)$$

où  $A(\rho(t)) = M_1^{-1}(\rho_1)A_1(\rho)$ ,  $B(\rho(t)) = M_1^{-1}(\rho_1)B_1(\rho)$  et  $C = [I_2 \quad 0_{2 \times 6}]$ ,

avec  $M_1(\rho_1) = \text{diag}(I_4, M(\rho_1))$ ,  $B_1(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ G \end{bmatrix}$ ,  $A_1(\rho) = \begin{bmatrix} 0_4 & I_4 \\ 0_{4 \times 2} & S(\rho) \end{bmatrix}$

$$\text{et } S(\rho) = \begin{bmatrix} -h_1(2\rho_5 + \rho_4) & -h_2(2\rho_5 + \rho_4) & -2h_3\rho_2 & -h_3\rho_2 & -2h_1(\rho_2 + \rho_3) & -2h_2(\rho_2 + \rho_3) \\ h_1\rho_6 & h_2\rho_6 & h_3\rho_3 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & h_1\rho_3 & 0 & -f_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & h_2\rho_3 & 0 & 0 & -f_2 \end{bmatrix}.$$

A cause de l'inversion de la matrice d'inertie  $M(\rho_1)$  dans les matrices d'état  $A(\rho)$  et  $B(\rho)$ , le système LPV (4.19) est rationnel avec une structure particulière. Cette structure peut être prise en compte pour la synthèse d'un correcteur LPV pour le robot manipulateur. La méthode de modélisation présentée est assez générique et peut s'appliquer à une large classe de robots manipulateurs.

### 3.2.3 Modélisation LFR

Les modèles LPV de robots manipulateurs étant obtenus avec une dépendance paramétrique rationnelle, ces modèles peuvent se réécrire de manière équivalente sous une forme de représentation linéaire fractionnaire (LFR), caractérisée par un bouclage rétroactif d'une matrice paramétrique  $\Delta(\rho)$  et d'une matrice indépendante des paramètres potentiellement dynamique  $N(s)$ . Le modèle LFR peut être utilisé directement à des fins de simulation, d'analyse ou de synthèse de correcteur, ou encore servir de modèle intermédiaire vers l'obtention d'une autre modèle, comme nous le verrons par la suite. La forme LFR est aussi appelée forme LPV/LFT dans la littérature scientifique.

Le modèle LFR peut être obtenu par manipulation manuelle du modèle LPV original pour des systèmes de complexité modérée, ou de manière numérique à l'aide de la boîte à outils LFRT (LFR toolbox) pour des systèmes plus complexes [Magni06]. A titre d'exemple, nous détaillerons la représentation LFR du modèle de manipulateur rigide à deux degrés de liberté présenté dans

le paragraphe 3.2.2.1, qui consiste en un système LPV à 3 paramètres variants. La modèle LFR de ce système, représenté dans la Figure 3.1, se traduit analytiquement par les équations :

$$\begin{bmatrix} z_{\Delta_1} \\ z_{\Delta_2} \\ z_{\Delta_3} \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -M_0^{-1}M_c & -M_0^{-1}M_cM_0^{-1} & -M_0^{-1}M_cM_0^{-1} & M_0^{-1}M_cM_0^{-1} \\ -\frac{1}{s}I_2 & \frac{1}{s}I_2M_0^{-1}S_2 & \frac{1}{s}I_2M_0^{-1}S_3 & \frac{1}{s}I_2M_0^{-1} \\ -\frac{1}{s}I_2 & \frac{1}{s}I_2M_0^{-1}S_2 & \frac{1}{s}I_2M_0^{-1}S_3 & \frac{1}{s}I_2M_0^{-1} \\ -\frac{1}{s^2}I_2 & \frac{1}{s^2}I_2M_0^{-1}S_2 & \frac{1}{s^2}I_2M_0^{-1}S_3 & \frac{1}{s^2}I_2M_0^{-1} \end{bmatrix}}_{N(s)} \begin{bmatrix} v_{\Delta_1} \\ v_{\Delta_2} \\ v_{\Delta_3} \\ u \end{bmatrix} \quad (3.37a)$$

$$v_{\Delta}(t) = \Delta(\rho)z_{\Delta}(t) \quad (3.37b)$$

où

$u(t) = \tau(t)$ ,  $y(t) = \theta(t)$ ,  $v(t) = [v_{\Delta_1} \ v_{\Delta_2} \ v_{\Delta_3}]^T$ ,  $z(t) = [z_{\Delta_1} \ z_{\Delta_2} \ z_{\Delta_3}]^T$ ,  $\Delta(\rho) = \text{diag}(\rho_1 I_2, \rho_2 I_2, \rho_3 I_2)$  et les matrices  $S_2$  et  $S_3$  sont obtenues de la manière suivante.

Le terme  $C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}$  qui représente les non-linéarités de Coriolis et centrifuges est réécrit en fonction des paramètres  $\rho_2$  et  $\rho_3$  de la manière :  $C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} = S(\rho_2, \rho_3)\dot{\theta}$ .

La matrice  $S(\rho_2, \rho_3)$  se décompose alors en tant que :

$$S(\rho_2, \rho_3) = m_{11c} \begin{bmatrix} -\rho_2 & -\frac{1}{2}\rho_2 \\ \frac{1}{2}\rho_3 & 0 \end{bmatrix} = m_{11c} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rho_2 + m_{11c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \rho_3 = S_2\rho_2 + S_3\rho_3 \quad (3.38)$$

où  $S_2 = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ .

L'inverse de la matrice d'inertie est traité de la manière suivante. Définissons les signaux  $u_m$  et  $y_m$  les entrée et sortie d'un bloc statique qui consiste en l'inverse de la matrice d'inertie  $M(\rho) = M_0 + \rho_1 M_c$  :

$$\begin{aligned} y_m &= M^{-1}(\rho_1)u_m = [M_0 + \rho_1 M_c]^{-1}u_m = [M_0(I + \rho_1 M_0^{-1}M_c)]^{-1}u_m \\ &= (I + \rho_1 M_0^{-1}M_c)^{-1}M_0^{-1}u_m \end{aligned} \quad (3.39)$$

Le facteur  $(I + \rho_1 M_0^{-1}M_c)^{-1}$  dans (3.39) peu être vu comme une fonction de sensibilité d'un asservissement dont le transfert direct est donné par  $\rho_1 M_0^{-1}M_c$ . Cette expression apparait graphiquement autour du comparateur central du schéma-bloc de la Figure 3.1.

Le transfert entre le couple de commande  $u(t) = \tau(t)$  et la mesure en position articulaire  $y(t) = \theta(t)$  est finalement donné par :

$$T_{\tau \rightarrow \theta}(s) = \text{lft}_u(N(s), \Delta(\rho)) \quad (3.40)$$

où l'indice  $u$  pour *upper* indique un bouclage LFT par le haut.

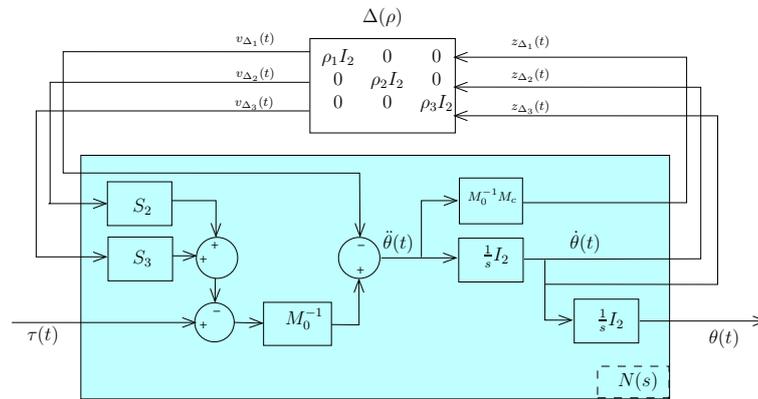


FIGURE 3.1 – Modèle LFR d'un manipulateur à 2 degrés de liberté

### 3.2.4 Commande basée sur le modèle LPV rationnel

L'analyse et la commande des systèmes LPV rationnels a fait l'objet de beaucoup de travaux et de publications scientifiques (voir par exemple [Wang06] [Bouali08]). Un des principaux obstacles rencontrés est la dimension infinie des conditions PD-LMI associées à ce type de problèmes.

Parmi les approches proposées dans la littérature scientifique dans le but de simplifier le traitement numérique des problèmes d'analyse et de synthèse, nous pouvons mentionner les méthodes suivantes :

1. L'utilisation de la forme LPV/LFT [Apkarian95].
2. L'échantillonnage de l'espace paramétrique [Apkarian98].
3. Le calcul de l'enveloppe convexe d'une nouvelle paramétrisation affine potentiellement conservative [Biannic96].
4. L'utilisation d'une représentation LPV singulière à dépendance paramétrique affine [Masubuchi03].
5. L'exploitation directe de la structure particulière du modèle.

Dans notre travail, nous avons en particulier exploré les deux dernières approches. Nous détaillerons dans les prochains paragraphes les méthodes proposées et les résultats obtenus pour chacune d'elles. Nous présenterons ensuite une comparaison avec la méthode d'inversion de modèle dynamique, qui a été adaptée au cas des robots flexibles pour lesquels une partie des coordonnées généralisée est inaccessible à une mesure directe.

### 3.3 Commande utilisant un modèle LPV singulier

#### 3.3.1 Modélisation LPV singulière (descripteur)

##### 3.3.1.1 Modèle singulier non-linéaire

Un système singulier non-linéaire, aussi appelé système descripteur, système implicite, ou système admettant une représentation d'état généralisée, est un système gouverné par les équations :

$$E\dot{x} = F(x, w, u) \quad (3.41a)$$

$$z = Z(x, w, u) \quad (3.41b)$$

$$y = Y(x, w, u) \quad (3.41c)$$

où la matrice  $E$  est singulière,  $F$ ,  $Z$  et  $Y$  sont des fonctions vectorielles non-linéaires.

Le formalisme des systèmes singuliers permet une représentation plus générale des systèmes physiques que les représentations d'état usuelles, caractérisées par une matrice  $E$  identité ( $E = I$ ) dans (3.41a), car ils contiennent à la fois des équations dynamiques (différentielles) et des équations algébriques (statiques). Ils peuvent être utilisés pour modéliser des systèmes rencontrés dans diverses applications, telles que les circuits électroniques, la robotique et les réseaux de neurones. L'ouvrage [Wang06] donne trois exemples de modélisation de systèmes sous une forme singulière non-linéaire : les problèmes variationnels contraints rencontrés dans l'étude des systèmes mécaniques, les procédés économiques décrits par les modèles de Leontieff et les circuits électriques contenant un amplificateur opérationnel (AOP).

##### 3.3.1.2 Modèle singulier LTI

Un système singulier linéaire et invariant dans le temps (LTI) est modélisé par les équations :

$$E\dot{x} = Ax + B_1w(t) + B_2u(t) \quad (3.42a)$$

$$z = C_1x + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \quad (3.42b)$$

$$y = C_2x + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \quad (3.42c)$$

L'équation d'état généralisée (3.42a) est souvent donnée avec la structure bloc-diagonale suivante de la matrice  $E$  :

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

On dit dans ce cas que le modèle descripteur est sous la forme canonique SVD. Cette forme est caractérisée par le partitionnement suivant de l'équation d'état généralisée, suivant les états dits dynamiques  $x_1$ , dont la dérivée temporelle apparaît explicitement et les autres états  $x_2$ , appelés algébriques :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} u \quad (3.44)$$

Les matrices intervenant dans les équations de sortie contrôlée  $z(t)$  et de mesure  $y(t)$  (3.42b)-(3.42c) peuvent également être partitionnées suivants les états  $x_1$  et  $x_2$ .

### 3.3.1.3 Modèle singulier LPV

De même que les systèmes décrits sous forme de représentation d'état régulière, les systèmes singuliers admettent des équations d'état dépendant des paramètres. Si ces paramètres sont mesurables, un système LPV singulier est modélisé par les équations :

$$\Sigma_d(s, \rho) : \begin{cases} E\dot{x} = A(\rho)x + B_1(\rho)w(t) + B_2(\rho)u(t) \\ z = C_1(\rho)x + D_{11}(\rho)w(t) + D_{12}(\rho)u(t) \\ y = C_2(\rho)x + D_{21}(\rho)w(t) + D_{22}(\rho)u(t) \end{cases} \quad (3.45)$$

Le vecteur des paramètres  $\rho$  et celui des dérivées temporelles  $\dot{\rho}$  appartiennent à des ensembles bornés :  $\rho \in \mathcal{S}_\rho$  et  $\dot{\rho} \in \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$ .

Les systèmes LPV singuliers peuvent également être mis sous la forme canonique SVD, en effectuant en cas de besoin des transformations d'état. L'équation d'état généralisée dans (3.45) est partitionnée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}(\rho) & A_{12}(\rho) \\ A_{21}(\rho) & A_{22}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}(\rho) \\ B_{12}(\rho) \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_{21}(\rho) \\ B_{22}(\rho) \end{bmatrix} u \\ z &= \begin{bmatrix} C_{11}(\rho) & C_{12}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= \begin{bmatrix} C_{21}(\rho) & C_{22}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned} \quad (3.46)$$

#### Admissibilité

La notion d'admissibilité des systèmes singuliers généralise celle de stabilité des systèmes LPV réguliers. Le système LPV (3.46) est admissible si les conditions suivantes sont vérifiées :

- Le système est régulier et non impulsif :  $A_{22}(\rho)$  inversible  $\forall \rho \in \mathcal{S}_\rho$ .
- Ses modes finis sont stables : la matrice de système dépendant des paramètres  $A_{11}(\rho) - A_{12}(\rho)A_{22}^{-1}(\rho)A_{21}(\rho)$  est stable sur tout l'espace paramétrique  $\mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$ .

#### Modèle régulier équivalent

Si la matrice  $A_{22}(\rho)$  est inversible  $\forall \rho \in \mathcal{S}_\rho$ , le système descripteur (3.46) est équivalent du point de vue entrée-sortie à un système LPV non singulier :

$$\Sigma(s, \rho) : \begin{cases} \dot{x}_1 &= \tilde{A}(\rho)x_1 + \tilde{B}_1(\rho)w + \tilde{B}_2(\rho)u \\ z &= \tilde{C}_1(\rho)x_1 + \tilde{D}_{11}(\rho)w + \tilde{D}_{12}(\rho)u \\ y &= \tilde{C}_2(\rho)x_1 + \tilde{D}_{21}(\rho)w + \tilde{D}_{22}(\rho)u \end{cases} \quad (3.47)$$

avec les formules de transformation suivantes, obtenues par élimination des contraintes algébriques impliquant les états  $x_2$  dans  $\Sigma_d(s, \rho)$  :

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\rho) &= A_{11}(\rho) - A_{12}(\rho)A_{22}^{-1}(\rho)A_{21}(\rho) \\ \tilde{B}_1(\rho) &= -A_{12}(\rho)A_{22}^{-1}(\rho)B_{12}(\rho) \\ \tilde{B}_2(\rho) &= -A_{12}(\rho)A_{22}^{-1}(\rho)B_{22}(\rho) \\ \tilde{C}_1(\rho) &= C_{11}(\rho) - C_{12}(\rho)A_{22}^{-1}(\rho)A_{21}(\rho) \\ \tilde{C}_2(\rho) &= C_{21}(\rho) - C_{22}(\rho)A_{22}^{-1}(\rho)A_{21}(\rho) \\ \tilde{D}_{11}(\rho) &= D_{11}(\rho) - C_{12}(\rho)A_{22}^{-1}(\rho)B_{12}(\rho) \\ \tilde{D}_{12}(\rho) &= D_{12}(\rho) - C_{12}(\rho)A_{22}^{-1}(\rho)B_{22}(\rho) \\ \tilde{D}_{21}(\rho) &= D_{21}(\rho) - C_{22}(\rho)A_{22}^{-1}(\rho)B_{12}(\rho) \\ \tilde{D}_{22}(\rho) &= D_{22}(\rho) - C_{22}(\rho)A_{22}^{-1}(\rho)B_{22}(\rho) \end{aligned} \quad (3.48)$$

On remarque que le modèle non singulier  $\Sigma(s, \rho)$  est à dépendance paramétrique rationnelle, même si le modèle descripteur  $\Sigma(s, \rho)$  est affine. Par l'intermédiaire de l'opération inverse, le formalisme descripteur apparaît comme une approche de modélisation de systèmes LPV permettant de simplifier une dépendance paramétrique complexe telle que la dépendance rationnelle en une dépendance paramétrique affine. Cependant, si le passage d'un modèle LPV descripteur à un modèle LPV non singulier est obtenu de manière unique par les formules de transformations (3.48), le passage inverse peut être effectué de différentes manières, suivant le choix des variables d'état algébriques  $x_2$  qui viennent augmenter le vecteur d'état  $x_1$  dans (3.47). Si ce choix peut toujours être effectué via des manipulations manuelles (voir l'exemple donné dans [Masubuchi03], l'exploitation de la représentation LFR constitue une approche systématique pour l'augmentation du modèle, tel que cela a été remarqué dans [Bouali06].

### 3.3.1.4 Lien entre modèle LFR et modèle LPV descripteur

A la différence de l'exemple de modélisation LFR décrit par les équations (3.37a)-(3.37b), le modèle LFR utilisé dans ce paragraphe utilise une matrice d'interconnexion  $N$  purement statique. Ceci est obtenu en considérant la dérivée du vecteur d'état dynamique  $\dot{x}_1(t)$  comme une sortie bouclée par un intégrateur afin d'obtenir  $x_1(t)$  (voir Figure 3.2).

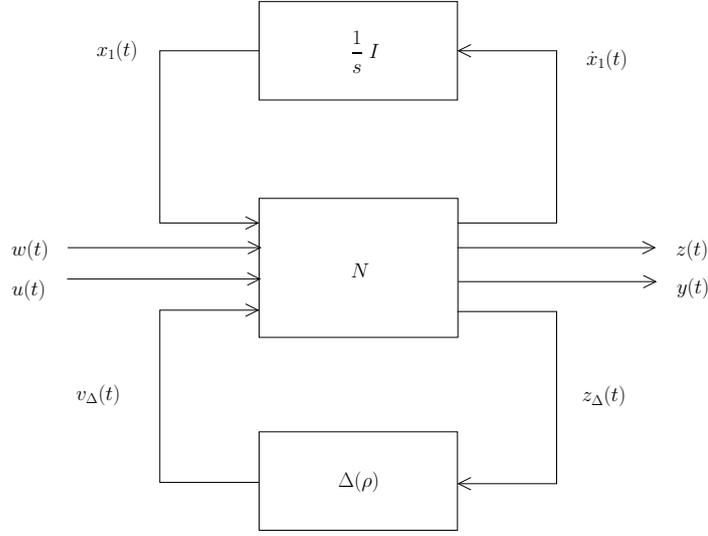


FIGURE 3.2 – Modèle LFR

Considérons les équations suivantes d'une représentation d'état paramétrique sous forme LFR :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ z(t) \\ y(t) \\ z_\Delta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ w(t) \\ u(t) \\ v_\Delta(t) \end{bmatrix} \quad (3.49a)$$

$$v_\Delta(t) = \Delta(\rho)z_\Delta(t) \quad (3.49b)$$

Cette représentation introduit l'équation algébrique suivante :

$$\Delta(\rho)N_{41}x_1(t) + \Delta(\rho)N_{42}w(t) + \Delta(\rho)N_{43}u(t) + (\Delta(\rho)N_{44} - I)v_\Delta(t) = 0 \quad (3.50)$$

En prenant un vecteur des états algébriques  $x_2(t) = v_\Delta(t)$ , le vecteur d'état augmenté  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$  introduit le modèle LPV descripteur suivant :

$$\Sigma_d(s, \rho) : \begin{cases} E\dot{x} = A(\rho)x + B_1(\rho)w(t) + B_2(\rho)u(t) \\ z = C_1x + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y = C_2x + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases} \quad (3.51)$$

où les matrices d'état du modèle descripteur  $\Sigma_d(s, \rho)$  sont partitionnées suivant les états dynamiques  $x_1(t)$  et algébriques  $x_2(t)$  de la façon suivante :

$$E = \text{diag}(I, 0), A(\rho) = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{14} \\ \Delta(\rho)N_{41} & \Delta(\rho)N_{44} - I \end{bmatrix}, B_1(\rho) = \begin{bmatrix} N_{12} \\ \Delta(\rho)N_{42} \end{bmatrix}, B_2(\rho) = \begin{bmatrix} N_{13} \\ \Delta(\rho)N_{43} \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} N_{21} & N_{24} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} N_{31} & N_{34} \end{bmatrix}, D_{11} = N_{22}, D_{12} = N_{23}, D_{21} = N_{32} \text{ et } D_{22} = N_{33}.$$

Les équations d'état du modèle LPV descripteur (3.51) sont affines en raison de la dépendance paramétrique affine de la matrice  $\Delta(\rho)$ . Ce fait constitue une simplification de la dépendance paramétrique rationnelle du modèle LFR (3.49a)-(3.49b) vers une dépendance affine qui facilite le traitement numérique des problèmes d'analyse ou de synthèse utilisant ce modèle. Nous tenons enfin à remarquer que le choix alternatif  $x_2(t) = [u(t) \ v_\Delta(t)]^T$  des états algébriques permet d'obtenir un modèle LPV descripteur où seule la matrice  $A(\rho)$  dépend des paramètres (de manière affine), les autres matrices d'état étant constantes ou nulles. Nous supposons par la suite que  $D_{22} = N_{33} = 0$  (système strictement propre), cette condition étant toujours vérifiée pour les systèmes étudiés dans le cadre de notre travail, comme dans beaucoup d'autres systèmes physiques.

### 3.3.2 Commande avec garantie de performance en gain $\mathcal{L}_2$

#### 3.3.2.1 Analyse de performance en gain $\mathcal{L}_2$

De même que pour les systèmes LPV non singuliers, la performance en gain  $\mathcal{L}_2$  d'un système LPV descripteur  $\Sigma_d(s, \rho)$  est le rapport des normes  $\mathcal{L}_2$  de la sortie  $z(t) \in \mathbb{R}^s$  et de l'entrée  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  du canal de performance du système :

$$\|\Sigma\|_{\mathcal{L}_2} = \sup_{w \in \mathbb{R}^r, w \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \quad (3.52)$$

Le lemme borné réel, qui constitue une formulation SDP dépendant des paramètres du problème d'analyse de performance en gain  $\mathcal{L}_2$ , a été généralisé aux systèmes sous forme descripteur LTI dans [Masubuchi97] et généralisé au cas LPV dans [Masubuchi03].

**Théorème 3.1** (Lemme borné réel généralisé dépendant des paramètres). *Le système  $\Sigma_d(s, \rho)$  est stable et a un indice de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  inférieur à un réel  $\gamma > 0$  si  $\exists X(\rho)$  telle que  $\forall (\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$  :*

$$E^T X(\rho) = X^T(\rho) E \succeq 0 \quad (3.53)$$

$$\begin{bmatrix} A^T(\rho)X(\rho) + X^T(\rho)A(\rho) + E^T \dot{X}(\rho) & X^T(\rho)B_1(\rho) & C_1^T(\rho) \\ B_1^T(\rho)X(\rho) & -\gamma I & D_{11}^T(\rho) \\ C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.54)$$

Ce théorème a été exploité dans le but d'obtenir des conditions PD-LMI de synthèse de correcteur LPV par retour de sortie dans [Masubuchi03], qui ont été appliquées par la suite pour la commande longitudinale d'un drone dans [Masubuchi04]. Dans [Halalchi10], nous avons adopté une approche similaire pour la commande LPV d'un manipulateur rigide à deux degrés

de liberté (voir la modélisation dans le paragraphe 3.2.2.1), en nous basant sur un modèle dynamique partiellement linéarisé dans lequel les couples de Coriolis et centrifuges sont supposés parfaitement compensés par la commande.

### 3.3.2.2 Synthèse de correcteurs LPV avec garantie de performance en gain $\mathcal{L}_2$

#### Correcteur LPV singulier

L'application du lemme borné généralisé aux systèmes LPV descripteur, conduit à des conditions de synthèse de correcteurs LPV avec garantie de performance en gain  $\mathcal{L}_2$ , qui peuvent s'exprimer sous la forme de conditions LMI dépendant des paramètres.

**Théorème 3.2** (Synthèse de correcteur LPV descripteur). *Pour un scalaire positif  $\gamma$ , supposons que les conditions PD-LMI suivantes admettent une solution  $\Phi(\rho) = \{X(\rho), Y(\rho), F(\rho), G(\rho), H(\rho)\}$  :*

$$P(\rho) = P^T(\rho) \succ 0 \quad (3.55)$$

$$\begin{bmatrix} Q(\rho) + Q^T(\rho) + D(\rho) & \begin{bmatrix} Y(\rho)C_1^T \\ C_1^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_1 \\ X^T(\rho)B_1 \end{bmatrix} \\ * & -\gamma I & D_{11} \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.56)$$

où :

$$P = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^T & I \\ I & X \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} AY^T + B_2F^T & A \\ H^T & X^T A + G^T C_2 \end{bmatrix}, \quad \text{et } D = \begin{bmatrix} \dot{Y}E^T & 0 \\ 0 & -\dot{X}^T E \end{bmatrix}.$$

Alors un correcteur LPV noté  $C(s)$  de représentation d'état généralisée  $\{E_c, A_c(\rho), B_c(\rho), C_c(\rho), 0\}$ , qui stabilise le système bouclé par retour de sortie et garantit un gain  $\mathcal{L}_2$  du canal de performance inférieur à  $\gamma$  est donné par :

$$C_c(\rho) = F^T(\rho)S^{-T}(\rho)$$

$$B_c(\rho) = -X^{-T}(\rho)G^T(\rho)$$

$$A_c(\rho) = \{(A(\rho) + X^{-T}(\rho)G^T(\rho)C_2)Y^T(\rho) - X^{-T}(\rho)H^T(\rho) + B_2(\rho)F^T(\rho) + E \frac{d}{dt}(X^{-1}(\rho))\}S^{-T}(\rho)$$

$$E_c = E$$

$$\text{où } S(\rho) = Y(\rho) - X^{-T}(\rho).$$

**Remarque 3.1.** Le terme  $E \frac{d}{dt}(X^{-1}(\rho))$  nécessite la disponibilité en temps réel de la dérivée temporelle des paramètres  $\dot{\rho}$ . Or, cette condition de disponibilité peut être contraignante, voire difficile à

satisfaire en pratique (voir la discussion sur la validité pratique des correcteurs dans [Apkarian98]). Cet obstacle peut être levé, au prix d'une augmentation du conservatisme, en considérant une matrice  $X$  constante.

Les conditions de synthèse de correcteur LPV sous forme descripteur données dans le Théorème 3.2 résultent de l'application des conditions d'analyse du Théorème 3.1 au système bouclé sous forme descripteur :

$$\begin{cases} E_{BF}\dot{x}_{BF}(t) &= A_{BF}(\rho)x_{BF}(t) + B_{BF}(\rho)w(t) \\ z(t) &= C_{BF}(\rho)x_{BF}(t) + D_{BF}w(t) \end{cases} \quad (3.57)$$

avec :

$$E_{BF} = \text{diag}(E, E_c), A_{BF}(\rho) = \begin{bmatrix} A(\rho) & B_2(\rho)C_K(\rho) \\ B_K(\rho)C_2(\rho) & A_K(\rho) \end{bmatrix}, B_{BF} = \begin{bmatrix} B_1(\rho) \\ B_K(\rho)D_{21} \end{bmatrix},$$

$$C_{BF} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } D_{BF} = D_{11}.$$

Des transformations linéarisantes sont ensuite utilisées afin de transformer la BMI résultante en LMI. Une preuve détaillée du Théorème 3.2 est donnée dans [Masubuchi03]. Dans [Masubuchi04], le correcteur est obtenu directement dans l'espace d'état non singulier en s'appuyant sur un partitionnement des variables matricielles  $X, Y, F, G$  et  $H$  suivant les dimensions des états statiques et algébriques. Cela permet une synthèse directe de correcteur LPV dans l'espace d'état non singulier pour des systèmes LPV rationnels représentés sous forme descripteur.

### 3.3.3 Résultats de simulation

#### 3.3.3.1 Utilisation de modèle rigide partiellement linéarisé

Dans le but de réaliser une première validation de la synthèse de correcteur LPV par l'approche descripteur, nous avons utilisé un modèle rigide partiellement linéarisé de manipulateur à 2 segments. Ce modèle est obtenu à l'aide du cas d'étude 1 présenté dans le paragraphe 3.2.2.1 en négligeant les effets de Coriolis et centrifuges, ce qui conduit à un modèle LPV à 1 paramètre  $\rho = \cos(\theta_2)$ , où  $\theta_2$  est la deuxième coordonnée articulaire.

Le modèle dynamique non-linéaire est donné par :

$$M(q_2)\ddot{q} + D\dot{q} + Kq(t) = \tau(t) \quad (3.58)$$

où  $M(q_2)$  est la matrice d'inertie,  $D$  et  $K$  sont des matrices diagonales de dissipation et de raideur et  $\tau(t)$  est le vecteur des couples de commande appliqués aux articulations. L'ensemble paramétrique est un segment de droite délimité par  $\underline{\rho}$  et  $\bar{\rho}$ , les valeurs minimale et maximale du paramètre. Le vecteur d'état est constitué des positions et vitesses articulaires  $x = [\theta^T \ \dot{\theta}^T]^T$ , ce qui conduit à une représentation d'état LPV de la forme (3.29) où la matrice  $S(\rho_2, \rho_3)$  est nulle. En utilisant une représentation LFR du système, le modèle LPV peut être mis sous la forme descripteur affine (3.51).

Des simulations numériques ont été effectuées en utilisant les valeurs physiques du robot Flexarm [Adams96]. Une description complète de ce manipulateur a été donnée dans [Chrétien89].

Afin d'évaluer la réponse temporelle du système sur un large espace de travail, nous avons imposé à la seconde articulation  $\theta_2$  une trajectoire de référence  $\theta_2^*(t)$  sous forme de créneaux progressifs balayant l'intervalle  $q_2 \in [0, \pi]$  (on ne donne pas de référence négative pour raison de symétrie). Afin d'évaluer le couplage entre les deux articulations, nous avons pris pour la première articulation une référence  $\theta_1^*(t)$  en forme de signal rectangulaire en quadrature de phase avec  $\theta_2^*(t)$ . Nous avons comparé les résultats de la commande LPV proposée avec ceux d'une commande proportionnelle et dérivée (PD) obtenue à l'aide d'un modèle nominal caractérisé par  $\rho = 0$  (correspondant à  $q_2 = \frac{\pi}{2}$ ). Le correcteur PD est synthétisé de manière à imposer pour chacune des deux articulations un comportement du second ordre avec un amortissement  $\xi = 1$  et une pulsation naturelle  $\omega_n = 10$  rad/sec nominaux. La Figure 3.5 montre les résultats de suivi de trajectoire obtenus.

A cause de la simplicité relative du modèle de synthèse (double intégrateur à gain statique variable), le correcteur PD assure également un bon suivi de trajectoire. Cependant, les effets de couplage sont beaucoup plus importants qu'avec l'utilisation du correcteur LPV. On remarque que ces effets de couplage sont d'autant plus importants que la matrice d'inertie du système diminue. Nous avons effectué cette simulation en tant que premier pas pour la validation de l'approche de commande à base de modèles sous forme descripteur. Nous avons par la suite appliqué cette méthode sur le cas d'étude 2, qui constitue un modèle avec plus de non-linéarités et dans lequel les effets de flexibilité d'articulation sont représentés (voir paragraphe suivant).

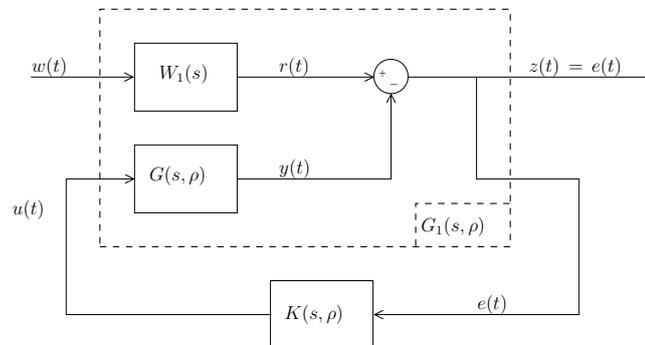


FIGURE 3.3 – Schéma de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  à un bloc

### 3.3.3.2 Utilisation de modèle flexible complet

Dans cette partie, nous présentons les résultats d'une commande LPV basée sur un modèle descripteur affine. Nous utiliserons en particulier le modèle flexible complet du robot FLEXARM (Cas d'étude 2) détaillé dans le paragraphe 3.2.2.2. Nous avons adopté le schéma de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  à 2 blocs, représenté sur la Figure 3.6.

Le système asservi augmenté a pour entrée externe le vecteur  $w_1(t) = \theta^*(t)$  constitué des trajectoires articulaires de référence. La sortie contrôlée  $z(t) = [e_\theta^T(t) \ y_t(t)]^T$  contient les si-

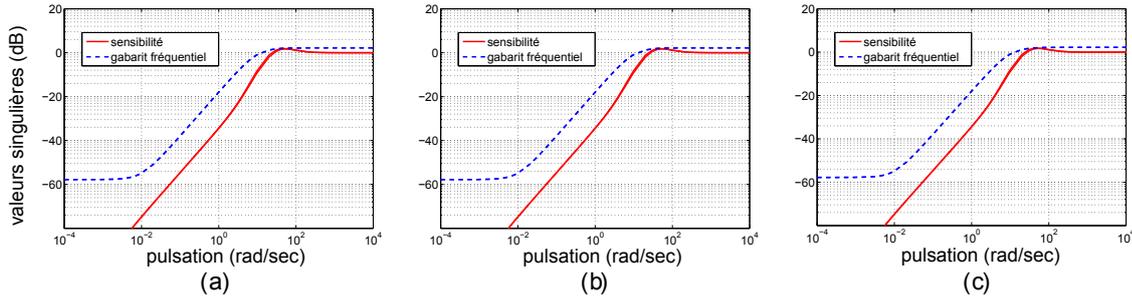


FIGURE 3.4 – Fonction de sensibilité réalisée pour (a) :  $\rho = -1$ , (b) :  $\rho = 0$ , (c) :  $\rho = 1$  et gabarit fréquentiel  $\frac{\gamma}{W_1(s)}$

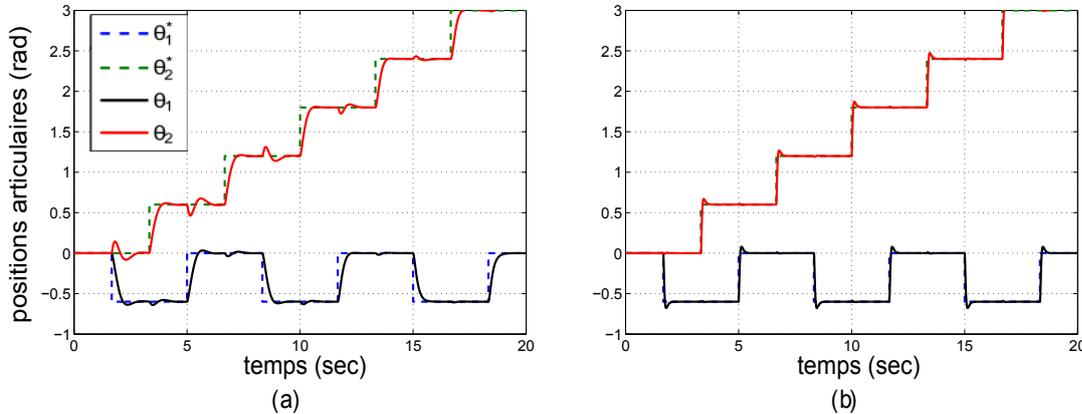
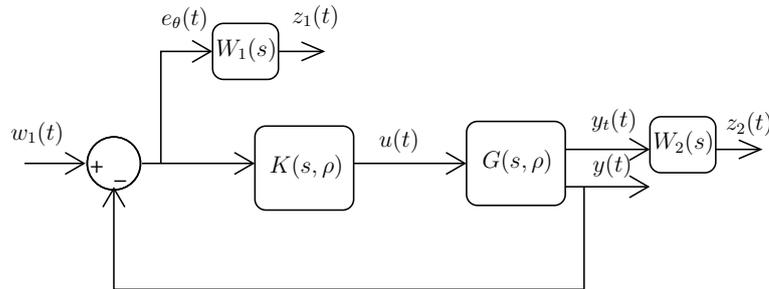


FIGURE 3.5 – Suivi des trajectoires de référence pour (a) : le correcteur PD nominal et (b) : le correcteur LPV descripteur

gnaux d'erreurs de suivi de trajectoire  $e_\theta(t) = \theta^*(t) - \theta(t)$  et la déflexion de l'organe terminal  $y_t(t) = C_t x(t)$ . Le signal de déflexion n'est pas mesurable mais la matrice  $C_t$  est connue à partir de l'équation (3.34). Le bloc  $w_1(t) \rightarrow z_1(t)$  du canal de performance permet d'imposer des contraintes sur la marge de module, la précision statique et la bande passante. Le transfert  $w_1(t) \rightarrow z_2(t)$  permet de minimiser la déflexion de l'organe terminal par rapport aux excitations extérieures. Des pondérations statiques ou dynamiques  $W_k(s)$ ,  $k = 1, 2$  peuvent être utilisées de manière à adapter le niveau de performance souhaité par rapport aux amplitudes et aux fréquences des signaux mis en jeu.

Nous avons effectué quelques simulations numériques. L'ensemble admissible des paramètres est défini par les conditions suivantes :  $|\rho_1| < 1$  (par définition de la fonction cosinus),  $|\rho_2|, |\rho_3| < 0.3 \text{ rad/s}$ , et  $|\rho_4|, |\rho_5|, |\rho_6| < 0.045 (\text{rad/s})^2$ . La condition LMI de synthèse est résolue sur l'ensemble des sommets  $\mathcal{S}_\rho^v$  à l'aide du solveur SeDuMi [Sturm99] associé à l'interface YALMIP [Löfberg04]. La stabilité de la boucle fermée est assurée sur tout l'ensemble paramétrique, tandis que le niveau de performance obtenu est garanti pour  $|\rho_1| < 0.5$ . Les trajectoires de référence  $\theta_1^*(t)$  et  $\theta_2^*(t)$  sont choisies de manière à évaluer la précision du suivi de trajectoire ainsi que la qualité du découplage des deux articulations sur l'ensemble du domaine de fonctionnement. Des signaux de référence lisses ont été utilisés afin de respecter les limitations sur les paramètres.

FIGURE 3.6 – Schéma de commande  $\mathcal{H}_\infty$ 

Nous présentons les résultats de synthèse de correcteur LPV par retour de sortie basés sur la méthode descripteur, en considérant des pondérations statiques  $W_1(s) = 1$  et  $W_2(s) = 0.1$ . En prenant le canal de performance complet, l'indice de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  obtenu est de l'ordre de 10. Ceci nous a amenés à relâcher le second bloc du canal en ne contraignant que le transfert  $w_1 \rightarrow z_1$ . Nous avons alors obtenu un indice de performance  $\gamma = 2.57$ , ce qui garantit une marge de stabilité en module  $M_m = 0.389$ . Même si le second bloc  $w \rightarrow z_2$  n'est pas contraint, nous avons tenu à afficher ses transferts pour avoir des éléments de comparaisons par rapport à la méthode de synthèse par LMI étendues exposée dans la section suivante.

La Figure 3.7 affiche les transferts fréquentiels réalisés  $S_{11}(\omega)$  et  $S_{12}(\omega)$  dans chaque bloc entrée-sortie du canal de performance  $w(t) \rightarrow z(t)$ . Chaque transfert est comparé au gabarit fréquentiel correspondant  $\gamma/W_k(s)$ ,  $k = 1, 2$ . Il est intéressant de remarquer que, même si les fonctions de pondération sont constantes, la fonction de sensibilité  $S_{11}(\omega)$  présente naturellement une allure de filtre passe-haut adéquate à un asservissement performant. Les transferts fréquentiels sont affichés pour quatre valeurs figées du vecteur de paramètres, sélectionnées parmi les  $2^6 = 64$  sommets de l'ensemble paramétrique :  $\rho_{\{1\}} = [\underline{\rho}_1 \dots \underline{\rho}_6]^T$ ,  $\rho_{\{32\}} = [\underline{\rho}_1 \bar{\rho}_1 \dots \bar{\rho}_6]^T$ ,  $\rho_{\{33\}} = [\bar{\rho}_1 \underline{\rho}_1 \dots \underline{\rho}_6]^T$  et  $\rho_{\{64\}} = [\bar{\rho}_1 \dots \bar{\rho}_6]^T$ , où  $\underline{\rho}_k$  et  $\bar{\rho}_k$  représentent les bornes minimale et maximale du paramètre  $\rho_k$ . La Figure 3.8-(a) illustre les réponses temporelles du système asservi obtenu par le bouclage rétroactif du modèle non-linéaire et du correcteur LPV synthétisé. La Figure 3.8-(b) affiche les erreurs de suivi de trajectoires correspondantes. Les figures présentées montrent l'efficacité de la méthodologie de commande proposée pour la stabilisation du système et le maintien des performances (découplage des articulations, rapidité, précision) sur un large espace de travail.

### 3.4 Commande basée sur des conditions LMI étendues

Un avantage de ces approches est l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres (PDLF), qui présentent une structure particulière simplifiant le problème de synthèse.

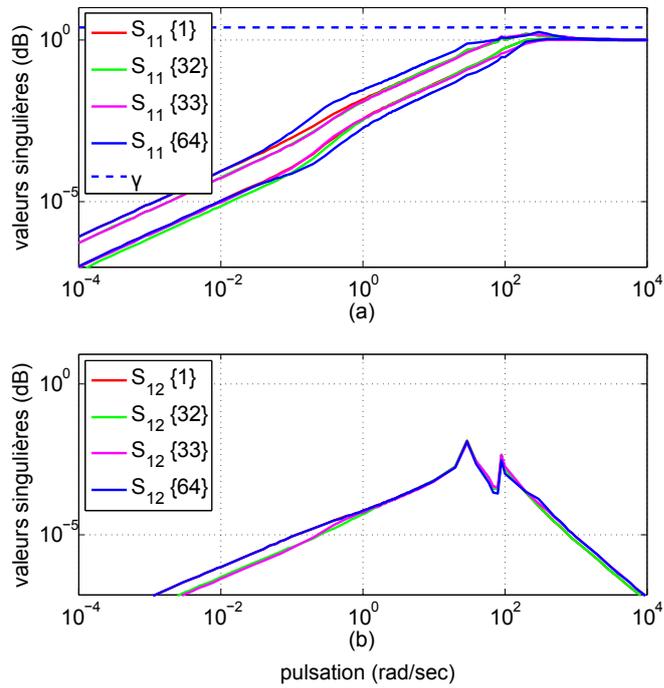


FIGURE 3.7 – Transferts fréquentiels réalisés

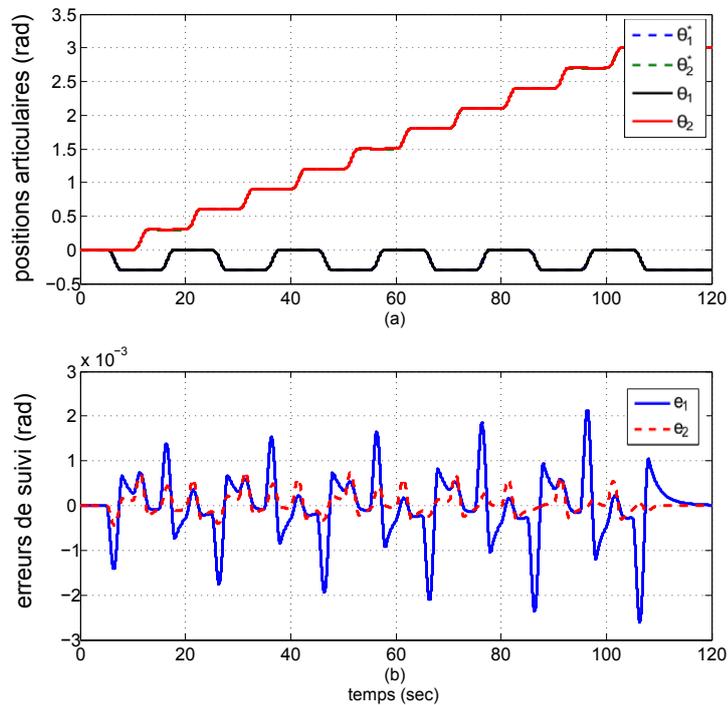


FIGURE 3.8 – Suivi des trajectoires de référence

### 3.4.1 Commande par retour d'état LPV

Comme cela a été souligné dans la modélisation présentée dans le paragraphe 3.1.1, le vecteur d'état d'un modèle de manipulateur rigide est généralement constitué des positions et des

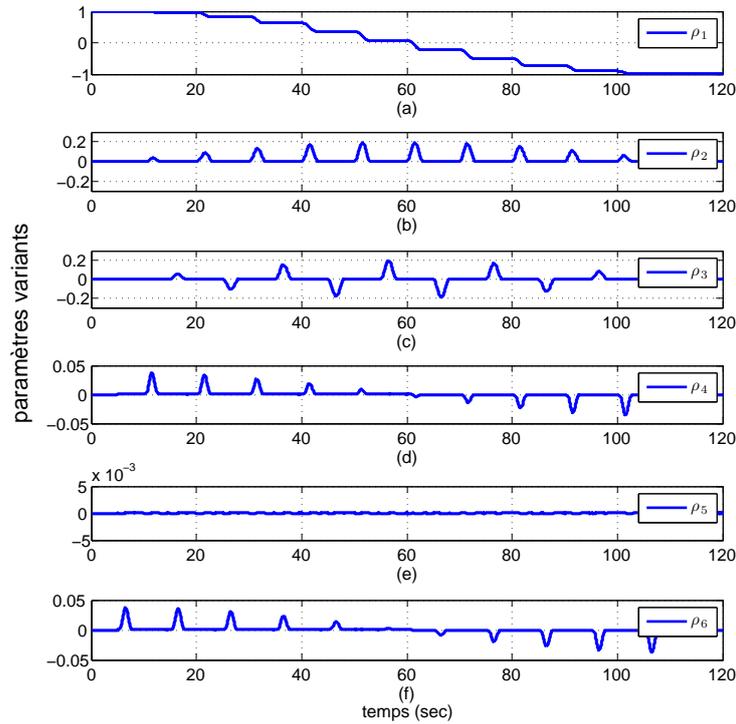


FIGURE 3.9 – Evolution des paramètres variants

vitesse articulaire. Ces variables sont mesurables et les signaux position et vitesse sont souvent donnés par le même capteur. Le codeur incrémental, par exemple, permet de fournir une mesure de la position angulaire et une estimation de la vitesse. Ceci rend possible un asservissement de position en utilisant un correcteur par retour d'état pour ce type de manipulateurs.

En revanche, pour un manipulateur flexible, le vecteur d'état peut contenir des variables de déformation inaccessibles à une mesure directe, ce qui empêche l'utilisation d'un correcteur par retour d'état complet. Une commande par retour d'état partiel serait alors plus appropriée. Nous étudierons dans les paragraphes suivants le problème de la stabilisation de modèles LPV de manipulateurs rigides tels que ceux donnés dans (3.29) (Cas d'étude 1) comme un premier pas vers la synthèse de correcteurs avec des garanties de performance. Ces problèmes seront traités dans le cas de la commande par retour de sortie dynamique.

Rappelons ici le modèle LPV (3.29) utilisé pour la synthèse de correcteur. Pour les besoins de la stabilisation, il n'est pas nécessaire de munir le modèle d'un canal de performance :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (3.59)$$

où

$$A(\rho(t)) = M_1^{-1}(\rho_1)A_1(\rho), B(\rho(t)) = M_1^{-1}(\rho_1)B_1(\rho) \text{ et } C = \begin{bmatrix} I_2 & 0_2 \end{bmatrix}, M_1(\rho_1) = \text{diag}(I_2, M(\rho_1)).$$

Le problème de stabilisation par un correcteur par retour d'état de gain  $K(\rho)$  dépendant des

paramètres est alors le suivant.

**Problème :** Trouver une matrice  $K(\rho)$  telle que le système asservi par le retour d'état  $u = K(\rho)x$  soit stable. Un tel système asservi a pour équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A(\rho) + B(\rho)K(\rho))x(t) = A_{BF}(\rho)x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (3.60)$$

Afin de traiter ce problème de stabilisation par retour d'état dépendant des paramètres, nous proposons dans ce qui suit des conditions de synthèse sous forme LMI en suivant deux méthodes : la caractérisation de la stabilité par une usage basique des inégalités de Lyapunov et l'utilisation de conditions de stabilité étendues qui font appel à des variables matricielles supplémentaires appelées variables faibles (*slack variables*).

### 3.4.1.1 Approche de synthèse par inégalités de Lyapunov basiques

Afin de supprimer le caractère rationnel des matrices d'état du modèle (3.29), l'approche proposée consiste en l'utilisation de matrices de Lyapunov dépendant des paramètres ayant une structure paramétrique particulière :  $P(\rho) = P_1(\rho)M_1(\rho)$ . Rappelons d'abord la condition de stabilité au sens de Lyapunov des systèmes LPV.

Suivant les conditions données dans le théorème 2.5, le système en boucle fermée représenté par la matrice  $A_{BF}(\rho)$  est stable au sens de Lyapunov s'il existe une matrice symétrique  $P(\rho)$  telle que  $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$  :

$$P(\rho) \succ 0 \quad (3.61a)$$

$$P(\rho)A_{BF}(\rho) + A_{BF}^T(\rho)P(\rho) + \dot{P}(\rho) \prec 0 \quad (3.61b)$$

Pour la classe de systèmes considérée, nous avons :  $A_{BF}(\rho) = A(\rho) + B(\rho)K(\rho) = M_1^{-1}(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho)) = M_1^{-1}(\rho)A_{1BF}(\rho)$ . L'inégalité (3.61b) est une BMI (inégalité matricielle bilinéaire) en fonction de  $P(\rho)$  et  $K(\rho)$ . Afin d'effectuer un changement de variable linéarisant, l'approche habituelle de la commande LPV par retour d'état fait intervenir une forme duale de cette inégalité de Lyapunov qui est obtenue en multipliant à gauche et à droite (3.61b) par  $P^{-1}(\rho)$ . Cependant, cette forme duale ne permet pas de compenser le terme rationnel  $M_1^{-1}(\rho)$  qui se trouve à gauche de la matrice de système  $A_{BF}(\rho)$ . A travers les conditions de synthèse suivantes, nous proposons une solution à ce problème.

**Théorème 3.3.** (Stabilisation) *Le système asservi de matrice d'état  $A_{BF}(\rho) = M_1^{-1}(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho))$  est stable au sens de Lyapunov si  $\exists Q(\rho) = Q^T(\rho) \succ 0$ ,  $\exists R(\rho)$  tels que :  $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$ ,*

$$\text{He}\{A_1(\rho)Q(\rho) + B_1R^T(\rho)\} - \dot{Q}(\rho)M_1(\rho) + Q(\rho)\dot{M}_1(\rho) \prec 0 \quad (3.62)$$

La matrice de gain du correcteur par retour d'état est alors donnée par :  $K(\rho) = R^T(\rho)Q^{-1}(\rho)$ .

**Preuve .** *Le critère de stabilité de Lyapunov se traduit par les conditions :*

$\exists P(\rho) = P_1(\rho)M_1(\rho) = P^T(\rho) \succ 0$  telle que :

$$P_1(\rho)A_{1BF}(\rho) + A_{1BF}^T(\rho)P_1(\rho) + \dot{P}_1(\rho)M_1(\rho) + P_1(\rho)\dot{M}_1(\rho) \prec 0 \quad (3.63)$$

Le développement du premier terme de la somme dans (3.63) donne :  $P_1(\rho)A_{1BF}(\rho) = P_1(\rho)A_1(\rho) + P_1(\rho)B_1K(\rho)$  où les matrices inconnues sont  $P_1(\rho)$  et  $K(\rho)$ . Vu que  $P_1(\rho)$  est régulière, en multipliant l'inégalité (3.63) à droite par  $P_1^{-T}(\rho)$  et à gauche par  $P_1^{-1}(\rho)$ , nous obtenons :

$$\text{He}\{A_1(\rho)P_1^{-T}(\rho) + B_1K(\rho)P_1^{-T}(\rho)\} + P_1^{-1}(\rho)\dot{P}_1(\rho)M_1(\rho)P_1^{-T}(\rho) + \dot{M}_1(\rho)P_1^{-T}(\rho) \prec 0 \quad (3.64)$$

Le terme qui rend difficile un changement de variable linéarisant est celui contenant  $\dot{P}_1(\rho)$ . Si on pose  $Q(\rho) = P_1^{-1}(\rho)$ , on a :

$$P_1^{-1}(\rho)\dot{P}_1(\rho)M_1(\rho)P_1^{-T}(\rho) = Q(\rho)\frac{d}{dt}[Q^{-1}(\rho)]M_1(\rho)Q^T(\rho) \quad (3.65)$$

Et comme  $\frac{d}{dt}[Q^{-1}(\rho)] = \sum_k \frac{\partial}{\partial \rho_k}[Q^{-1}(\rho)]\frac{d\rho_k(t)}{dt}$ , et  $\frac{\partial}{\partial \rho_k}[Q^{-1}(\rho)] = -Q^{-1}(\rho)\frac{\partial}{\partial \rho_k}[Q(\rho)]Q^{-1}(\rho)$ ,

le second membre de l'équation (3.65) devient :  $-\left\{\sum_k \frac{\partial}{\partial \rho_k}[Q(\rho)]\dot{\rho}_k\right\}Q^{-1}(\rho)M_1(\rho)Q^T(\rho)$ . Ceci vaut  $-\dot{Q}(\rho)M_1(\rho)$  sous la condition de commutation de produit matriciel  $M_1(\rho)Q(\rho) = Q(\rho)M_1(\rho)$ , qui est vérifiée si  $Q(\rho) = Q^T(\rho) \succ 0$  (ou, de manière équivalente,  $P_1(\rho) = P_1^T(\rho) \succ 0$ ). La condition de stabilité devient alors :

$$\text{He}\{A_1(\rho)Q(\rho) + B_1K(\rho)Q(\rho)\} - \dot{Q}(\rho)M_1(\rho) + Q(\rho)\dot{M}_1(\rho) \prec 0 \quad (3.66)$$

L'inégalité (3.66) est linéarisée à travers le changement de variables  $R(\rho) = Q(\rho)K^T(\rho)$ , ce qui conduit aux conditions LMI dépendant des paramètres du Théorème 3.3.

### 3.4.1.2 Approche de synthèse par conditions LMI étendues

Il a été montré dans [Apkarian01] qu'il est possible d'utiliser des conditions LMI étendues pour l'analyse de stabilité et de performance et la synthèse de correcteurs. Ces conditions permettent de supprimer le couplage entre la matrice de système et la matrice de Lyapunov. L'utilisation d'une variable matricielle supplémentaire appelée variable faible (*slack variable*) offre un degré de liberté supplémentaire qui peut être utile à la résolution du problème de synthèse. Nous rappellerons dans ce qui suit ce critère de stabilité puis nous l'appliquerons à la synthèse d'un correcteur par retour d'état stabilisant pour notre application.

**Théorème 3.4 (Stabilité).** *Le système en boucle fermée représenté par la matrice  $A_{BF}(\rho)$  est stable si :  $\exists P(\rho) = P^T(\rho)$  (matrice de Lyapunov) et  $\exists V(\rho)$  (variable faible) telles que :*

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{V(\rho)\} & V^T(\rho)A_{BF}(\rho) + P(\rho) & V^T(\rho) \\ A_{BF}^T(\rho)V(\rho) + P(\rho) & -P(\rho) + \dot{P}(\rho) & 0 \\ V(\rho) & 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.67)$$

Examinons le terme  $V(\rho)^T A_{BF}(\rho) = V^T(\rho)M_1^{-1}(\rho)(A_{1BF}(\rho))$ . Le choix de la structure particulière  $V(\rho) = M_1(\rho)V_1(\rho)$  pour la variable faible  $V(\rho)$  permet de compenser le facteur rationnel  $M_1^{-1}(\rho)$ . Nous donnons dans ce qui suit les conditions de synthèse d'un correcteur LPV stabilisant sous la forme d'une LMI dépendant des paramètres.

**Théorème 3.5** (Stabilisation). *Le système asservi de matrice d'état  $A_{BF}(\rho) = M_1^{-1}(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho))$  est stable si  $\exists \Gamma(\rho) = \Gamma^T(\rho)$ ,  $\exists R(\rho)$  et  $\exists V_1$  tels que :  $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$*

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{V_1^{-T}M_1(\rho)\} & A_1(\rho)V_1^{-1} + B_1R(\rho) + \Gamma(\rho) & V_1^{-T}M_1(\rho) \\ V_1^{-T}A_1^T(\rho) + R^T(\rho)B_1^T + \Gamma^T(\rho) & -\Gamma(\rho) + \dot{\Gamma}(\rho) & 0 \\ M_1(\rho)V_1^{-1} & 0 & -\Gamma(\rho) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.68)$$

La matrice de gain du correcteur est alors donnée par :  $K(\rho) = V_1R(\rho)$ .

**Remarque 3.2.** Contrairement à celle obtenue avec la condition de synthèse (3.62), la structure du correcteur obtenu par la condition (3.68) ne fait pas intervenir explicitement l'expression de la matrice de Lyapunov  $P(\rho)$ .

**Preuve .** Etant donnée la structure particulière de  $V(\rho)$ , les conditions (3.67) deviennent :  $\exists P(\rho) = P^T(\rho)$  et  $\exists V_1(\rho)$  tels que :

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{M_1(\rho)V_1(\rho)\} & V_1^T(\rho)A_{1BF}(\rho) + P(\rho) & V_1^T(\rho)M_1(\rho) \\ A_{1BF}^T(\rho)V_1(\rho) + P(\rho) & -P(\rho) + \dot{P}(\rho) & 0 \\ M_1(\rho)V_1(\rho) & 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.69)$$

Le terme  $V_1^T(\rho)A_{1BF}(\rho) = V_1^T(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho))$  est bi-linéaire par rapport aux matrices inconnues  $V_1(\rho)$  et  $K(\rho)$ . Afin d'effectuer un changement de variable linéarisant (permettant de transformer (3.69) en LMI), il est possible d'effectuer le pré-traitement suivant : en supposant la matrice  $V_1(\rho)$  régulière, pré-multiplier l'inégalité (3.69) par  $\text{diag}(V_1^{-T}, V_1^{-T}, V_1^{-T})$  et post-multiplier par sa transposée. Si, de plus, la matrice  $V_1$  est supposée constante, il est possible d'effectuer les changements de variables linéarisants :  $R(\rho) = K(\rho)V_1^{-1}$  et  $\Gamma(\rho) = -V_1^{-T}P(\rho)V_1^{-1}$ . Nous obtenons alors les conditions de synthèse du Théorème 3.5.

### 3.4.2 Retour d'état avec action intégrale

Afin de garantir une erreur statique de position nulle, il est courant d'ajouter une action intégrale appliquée uniquement sur l'erreur de position. La commande ainsi synthétisée est équivalente à une correction PID (proportionnelle, intégrale et dérivée) sur la sortie du système constituée du vecteur de positions articulaires  $y(t) = \theta(t)$  et peut être implantée sous cette forme sur le système physique. Définissons la variable d'état supplémentaire :  $\xi(t) = \int_0^t (\theta(\tau) - \theta^*(\tau)) d\tau$  où  $\theta^*$  est la position de référence articulaire. Le vecteur d'état augmenté du système sera  $\tilde{x}(t) = [\theta^T(t) \dot{\theta}^T(t) \xi^T(t)]^T$  et la nouvelle représentation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(\rho(t))\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1(\rho(t))u(t) + \tilde{B}_2\theta^*(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (3.70)$$

$$\text{où } \tilde{A}(\rho) = \begin{bmatrix} A(\rho) & 0_{4 \times 2} \\ C & 0_2 \end{bmatrix}, \tilde{B}_1(\rho) = \begin{bmatrix} B(\rho) \\ 0_2 \end{bmatrix}, \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{C} = [C \quad 0_2].$$

En effectuant un asservissement de ce système par le retour d'état avec action intégrale partielle  $u = K(\rho)[\dot{\xi}^T \quad \dot{\theta}^T \quad \xi^T]^T = K(\rho)\tilde{x} + K(\rho)[- \theta^{*T} \quad 0_{1 \times 4}]^T$ , le système en boucle fermée aura pour équation d'état :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_{BF}(\rho)\tilde{x}(t) + B_{BF}(\rho)\theta^*(t) \quad (3.71)$$

avec  $A_{BF}(\rho) = \tilde{A}(\rho) + \tilde{B}_1(\rho)K(\rho)$  et  $B_{BF}(\rho) = \tilde{B}_2 - \tilde{B}_1(\rho)K(\rho)\alpha$ , où  $\alpha = [I_2 \quad 0_{2 \times 4}]^T$ .

L'étude de stabilité du système asservi concerne la matrice  $A_{BF}(\rho) = M_2^{-1}(\rho)(A_2(\rho) + B_2K(\rho)) = M_2^{-1}(\rho)A_{2BF}$  où  $M_2(\rho) = \text{diag}(M_1(\rho), I_2)$ ,  $A_2(\rho) = \begin{bmatrix} A_1(\rho) & 0_{4 \times 2} \\ C & 0_2 \end{bmatrix}$  et  $B_2 = \begin{bmatrix} B_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ .

Les conditions de synthèse sont similaires à celles développées sans action intégrale (approche inégalités de Lyapunov et approche *slack variables*) mais en prenant maintenant une matrice de Lyapunov dépendant des paramètres du type  $P(\rho) = P_2(\rho)M_2(\rho)$ . La taille des LMIs à optimiser sera également plus importante à cause de l'utilisation d'un vecteur d'état augmenté.

### 3.4.3 Retour d'état avec taux de convergence exponentielle

Afin de rajouter, en plus de la stabilité, une condition sur la rapidité du système asservi, plusieurs démarches sont possibles telles que le placement de pôles et la maximisation du taux de décroissance exponentielle de la fonction de Lyapunov du système. Nous présenterons dans ce qui suit cette dernière approche comme une extension des conditions de synthèse stabilisantes discutées précédemment.

Le système en boucle fermée représenté par la matrice  $A_{BF}(\rho)$  est stable au sens de Lyapunov et présente un taux de convergence exponentielle scalaire (*decay rate*)  $\lambda > 0$  si :  $\exists P(\rho) = P^T(\rho) \succ 0$  telle que :

$$P(\rho)A_{BF}(\rho) + A_{BF}^T(\rho)P(\rho) + \dot{P}(\rho) + 2\lambda P(\rho) \prec 0 \quad (3.72)$$

Dans ce cas la fonction de Lyapunov quadratique en fonction de l'état  $V(x(t), \rho(t)) = x^T P(\rho)x$  évolue à l'intérieur d'une enveloppe exponentielle décroissante avec un taux de  $2\lambda$ , de même que la réponse temporelle du système  $x(t)$  mais avec un taux de décroissance de  $\lambda$ . Autrement dit  $V(x(t), \rho(t)) \leq V(x(0), \rho(0))e^{-2\lambda t}$  et  $\|x(t)\| \leq k\|x(0)\|e^{-\lambda t}$  ( $k$  réel positif),  $\forall x(t)$ . L'augmentation de la valeur de  $\lambda$  correspond donc à une convergence plus rapide de la réponse temporelle du système.

Si on se place dans le cadre d'une commande par retour d'état LPV :  $u = K(\rho)x(t)$ , les conditions de synthèse de la matrice de gain  $K(\rho)$  données dans les équations (3.62) et (3.68), associées à un critère de convergence exponentielle sont modifiées de la manière suivante.

**Théorème 3.6.** *Le système asservi représenté par la matrice  $A_{BF}(\rho) = M_1^{-1}(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho))$  est stable au sens de Lyapunov et présente un taux de décroissance exponentielle  $\lambda > 0$  si  $\exists Q(\rho) = Q^T(\rho) \succ 0$ ,  $\exists R(\rho)$  tels que :  $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$ ,*

$$\text{He}\{A_1(\rho)Q(\rho) + B_1R^T(\rho)\} - \dot{Q}(\rho)M_1(\rho) + Q(\rho)\dot{M}_1(\rho) + 2\lambda Q(\rho)M_1(\rho) \succ 0 \quad (3.73)$$

**Théorème 3.7.** *Le système asservi représenté par la matrice  $A_{BF}(\rho) = M_1^{-1}(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho))$  est stable et présente un taux de décroissance exponentielle  $\lambda > 0$  si  $\exists \Gamma(\rho) = \Gamma^T(\rho)$ ,  $\exists R(\rho)$  et  $\exists V_1$  tels que :  $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$*

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{V_1^{-T}M_1(\rho)\} & A_1(\rho)V_1^{-1} + B_1R(\rho) + \Gamma(\rho) & V_1^{-T}M_1(\rho) \\ * & \dot{\Gamma}(\rho) + (2\lambda - 1)\Gamma(\rho) & 0 \\ * & * & -\Gamma(\rho) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.74)$$

**Remarque 3.3.** *En raison du couplage entre les variables inconnues  $\lambda$  et  $Q(\rho)$  dans (3.73), ainsi que  $\lambda$  et  $\Gamma(\rho)$  dans (3.74), ces deux conditions sont des BMI de type particulier. En effet, ces contraintes constituent des problèmes quasi-convexes (contraintes LMI pour  $\lambda$  fixé). Pour résoudre ces inégalités en maximisant la valeur de  $\lambda$ , il est possible d'utiliser un solveur BMI en définissant la maximisation de  $\lambda$  comme un objectif d'optimisation ou d'utiliser un algorithme de maximisation linéaire ou de type dichotomie.*

### 3.4.4 Correcteur par retour de sortie dynamique avec garantie de performance en gain $\mathcal{L}_2$

Dans cette partie, nous présentons des conditions de synthèse de correcteurs par retour de sortie en suivant l'approche des LMI étendues. Comme pour la synthèse de correcteurs par retour d'état, des contraintes de structure sont imposées aux variables matricielles additionnelles intervenant dans les LMI de synthèse.

Pour les besoins de l'asservissement par retour de sortie dynamique LPV, le modèle (3.59) est maintenant muni d'un canal de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  de signaux d'entrée  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  et de signaux de sortie  $z(t) \in \mathbb{R}^s$  :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B^1(\rho(t))w(t) + B^2(\rho(t))u(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) \\ e(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) \end{cases} \quad (3.75)$$

où :

$e(t) = y(t) - y^*(t)$ ,  $y^*(t)$  étant une valeur de référence pour la mesure,  $A(\rho(t)) = M_1^{-1}(\rho_1)A_1(\rho)$ ,  $B^2(\rho(t)) = M_1^{-1}(\rho_1)B_1(\rho)$  et  $C = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$ ,  $M_1(\rho_1) = \text{diag}(I_2, M(\rho_1))$ . La matrice  $B^1(\rho(t))$  peut aussi avoir une structure factorisée similaire (par exemple si  $w(t)$  contient un bruit additif sur la commande  $u(t)$ ), mais cela n'est pas nécessairement le cas en général.

Le problème de commande LPV par un correcteur par retour de sortie dynamique avec garantie de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  est alors le suivant.

*Problème* : Trouver un correcteur LPV  $K(s, \rho) : \{A_K(\rho), B_K(\rho), C_K(\rho), 0\}$  qui stabilise le système asservi par retour de sortie et garantit un gain  $\mathcal{L}_2$  du canal de performance inférieur à un scalaire positif  $\gamma$ .

Si le correcteur LPV  $K(s, \rho)$  admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_K(t) &= A_K(\rho)x_K(t) + B_K(\rho)e(t) \\ u(t) &= C_K(\rho)x_K(t) \end{cases} \quad (3.76)$$

alors, le système asservi aura pour représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_{BF}(t) &= A_{BF}(\rho)x_{BF}(t) + B_{BF}(\rho)w(t) \\ z(t) &= C_{BF}(\rho)x_{BF}(t) + D_{BF}w(t) \end{cases} \quad (3.77)$$

où  $x_{BF} = [x^T \ x_K^T]^T$  est le vecteur d'état de la boucle fermée,  $x_K$  est celui du correcteur. Les matrices  $A_{BF}$ ,  $B_{BF}$  et  $C_{BF}$  sont partitionnées suivant les états du système et du correcteur :

$$A_{BF}(\rho) = \begin{bmatrix} A(\rho) & B^2(\rho)C_K(\rho) \\ B_K(\rho)C_2(\rho) & A_K(\rho) \end{bmatrix}, B_{BF} = \begin{bmatrix} B^1(\rho) \\ B_K(\rho)D_{21} \end{bmatrix}, C_{BF} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } D_{BF} = D_{11}.$$

Le théorème suivant permet la synthèse d'un correcteur stabilisant et garantissant un niveau de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  pour le système (3.75).

**Théorème 3.8.** *Le système asservi (3.77) est stable et le gain  $\mathcal{L}_2$  de son canal de performance est inférieur à un scalaire positif  $\gamma$  si la PD-LMI suivante a une solution  $\Phi = \{\hat{V}_{11}, \hat{V}_{12}, \hat{W}_{11}, \hat{A}_K, \hat{B}_K, \hat{C}_K, \hat{U}(\rho), \hat{X}(\rho)\}$ ,  $\forall \rho \in \mathcal{S}_\rho$  :*

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{M_1(\rho)\hat{V}_{11}\} & * & * & * & * & * \\ -(\hat{U}(\rho) + M_1(\rho)) & -\text{He}\{M_1(\rho)\hat{W}_{11}\} & * & * & * & * \\ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} & +\hat{P}(\rho) & -\hat{P}(\rho) & * & * & * \\ C_1\hat{V}_{11} & C_1(I + \hat{V}_{12}) & 0 & -\gamma I & * & * \\ 0 & 0 & \beta & D_w^T & -\gamma I & 0 \\ M_1(\rho)\hat{V}_{11} & M_1(\rho) & 0 & 0 & 0 & -\hat{X}(\rho) \\ \hat{U}(\rho) & \hat{W}_{11}^T M_1(\rho) & & & & \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.78)$$

avec :  $\alpha_1 = A_1(\rho)\hat{V}_{11} + B_1\hat{C}_K M_1(\rho)$ ,  $\alpha_2 = A_1(\rho)$ ,  $\alpha_3 = \hat{A}_K M_1(\rho)$ ,  $\alpha_4 = \hat{W}_{11}A_1(\rho) + \hat{B}_K C$ , et  $\beta = \begin{bmatrix} B^{1T}(\rho)M_1(\rho) & B^{1T}(\rho)M_1(\rho)\hat{W}_{11} + D_{21}\hat{B}_K \end{bmatrix}$ .

Les matrices d'état du correcteur sont alors données par :

$$B_K(\rho) = W_{21}^{-T}(\rho)\hat{B}_K \quad (3.79)$$

$$C_K(\rho) = \hat{C}_K V_{21}^{-1}(\rho) \quad (3.80)$$

$$A_K(\rho) = W_{21}^{-T}[\hat{A}_K - \hat{W}_{11}^T A_1 \hat{V}_{11} M_1^{-1} - W_{21}^T B_K C \hat{V}_{11} M_1^{-1} - \hat{W}_{11}^T B_1 C_K V_{21}] V_{21}^{-1} \quad (3.81)$$

La dépendance paramétrique des matrices intervenant dans la formule (3.81) est omise pour simplifier l'écriture.

**Preuve .** Introduisons la condition d'analyse de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  suivante, proposée dans [Bara01].

Le système (3.77) est stable et a un indice de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  inférieur à un scalaire  $\gamma > 0$  si :  $\exists P(\rho) = P^T(\rho)$  (matrice de Lyapunov) et  $\exists V(\rho)$  (variable faible) telles que,  $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho^v \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}^v$  :

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{V(\rho)\} & * & * & * & * \\ A_{BF}(\rho)V(\rho) + P(\rho) & -P(\rho) + \dot{P}(\rho) & * & * & * \\ C_{BF}V(\rho) & 0 & -\gamma I & * & * \\ 0 & B_{BF}^T & D_{BF}^T & -\gamma I & 0 \\ V(\rho) & 0 & 0 & 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.82)$$

Considérons maintenant le partitionnement suivant de la variable faible  $V(\rho)$  et de son inverse  $W(\rho)$ , suivant les états du système et du correcteur :

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \text{ et } W = V^{-1} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

Des transformations linéarisantes peuvent alors être définies en tant que :

$$\Pi_V = \begin{bmatrix} V_{11} & I \\ V_{21} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Pi_W = \begin{bmatrix} I & W_{11} \\ 0 & W_{21} \end{bmatrix}.$$

Cela permet d'aboutir à la matrice de transformation  $T(\rho)$ , dans laquelle  $M_2(\rho) = \text{diag}(M_1(\rho), I)$  :

$$T(\rho) = \begin{bmatrix} M_2(\rho)\Pi_W^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2(\rho)\Pi_W^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_2(\rho)\Pi_W^T \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

En multipliant à gauche l'inégalité d'analyse (3.82) par  $T(\rho)$  et à droite par sa transposée (transformation de congruence), et en exploitant les relations  $W\Pi_V = \Pi_W$  et  $V\Pi_W = \Pi_V$  nous obtenons les conditions de synthèse du Théorème 3.8.

**Remarque 3.4.** Les matrices  $W_{21}(\rho)$  et  $V_{21}(\rho)$  utilisées dans le correcteur sont déterminées comme suit. En fait  $\hat{U}(\rho) = (W_{11}^T V_{11} + W_{21}^T(\rho) V_{21}) M_1(\rho)$ ,  $W_{11} = M_1(\rho) \hat{W}_{11}$  et  $\hat{V}_{11} = V_{11} M_1(\rho)$ . Par conséquent,  $W_{21}(\rho)^T V_{21}(\rho) = M_1^{-1}(\rho) \hat{U}(\rho) - \hat{W}_{11}^T M_1(\rho) V_{11}$ . Les matrices  $W_{21}(\rho)$  et  $V_{21}(\rho)$  peuvent alors être obtenues en effectuant une factorisation du second membre de l'équation.

**Remarque 3.5.** Les variables matricielles  $V_{11}$ ,  $V_{21}$ ,  $W_{11}$  et  $W_{21}$ , qui résultent d'une partition des variables faibles, ne font pas partie des inconnues habituelles du problème de commande que sont la matrice de Lyapunov et les matrices du correcteur. Leur utilisation ici avec une structure particulière impliquant la matrice d'inertie permet de supprimer la dépendance rationnelle et par conséquent de simplifier le problème de synthèse.

**Remarque 3.6.** Le terme  $M_2(\rho)\Pi_W^T \dot{P}(\rho)\Pi_W M_2(\rho)$  est négligé dans le bloc (2, 2) de la LMI de synthèse (3.78), ce qui constitue une approximation valable pour une évolution lente temporelle des paramètres.

### 3.4.5 Résultats de simulation

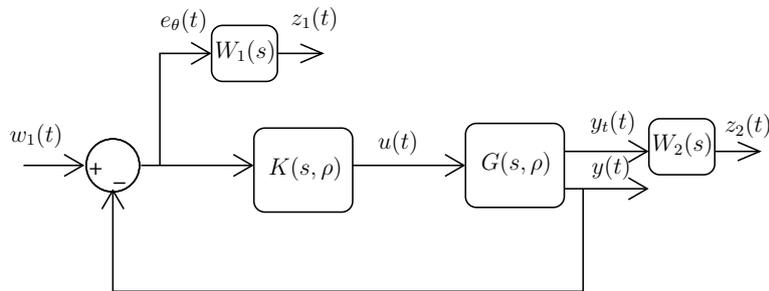
#### 3.4.5.1 Schéma de commande

Nous avons adopté le cadre de travail du problème de sensibilité mixte de la commande  $\mathcal{H}_\infty$ . De manière similaire aux conditions de synthèse et simulation présentées dans le paragraphe 3.3.3.2, le schéma de synthèse à deux blocs que nous avons utilisé est présenté dans la Figure 3.10 et les simulations présentées utilisent le modèle du manipulateur flexible FLEXARM (Cas d'étude 2) détaillé dans le paragraphe 3.2.2.2.

Le système asservi augmenté peut être décrit par l'équation (3.77) où le vecteur d'entrées externes  $w(t) = \theta^*(t)$  est constitué des trajectoires articulaires de référence. La vecteur de sorties contrôlées  $z(t) = [e^T(t) \ y_t(t)]^T$  contient les signaux d'erreurs de suivi de trajectoire  $e(t) = \theta^*(t) - \theta(t)$  et la déflexion de l'organe terminal  $y_t(t) = C_t x(t)$ .

#### 3.4.5.2 Simulations numériques

Afin d'évaluer le schéma de commande proposé, nous avons effectué des simulations numériques dans des conditions similaires à celles utilisées dans le paragraphe 3.3.3.2. L'ensemble admissible des paramètres est défini par les conditions suivantes :  $|\rho_1| < 1$ ,  $|\rho_2|, |\rho_3| < 0.3$  rad/s, et  $|\rho_4|, |\rho_5|, |\rho_6| < 0.045$  (rad/s)<sup>2</sup>. La condition LMI dépendant des paramètres (3.78) est résolue sur l'ensemble des sommets  $\mathcal{S}_\rho^v$  à l'aide du solveur SeDuMi [Sturm99] associé à l'interface

FIGURE 3.10 – Schéma de commande  $\mathcal{H}_\infty$ 

YALMIP [Löfberg04]. La stabilité de la boucle fermée est assurée sur tout l'ensemble paramétrique, tandis que le niveau de performance obtenu est garanti pour  $|\rho_1| < 0.5$ . Les trajectoires de référence  $\theta_1^*(t)$  et  $\theta_2^*(t)$  sont choisies de manière à évaluer la précision du suivi de trajectoire ainsi que la qualité du découplage des deux articulations sur l'ensemble du domaine de fonctionnement. Des signaux de référence lisses ont été choisis afin de respecter les limitations sur les paramètres.

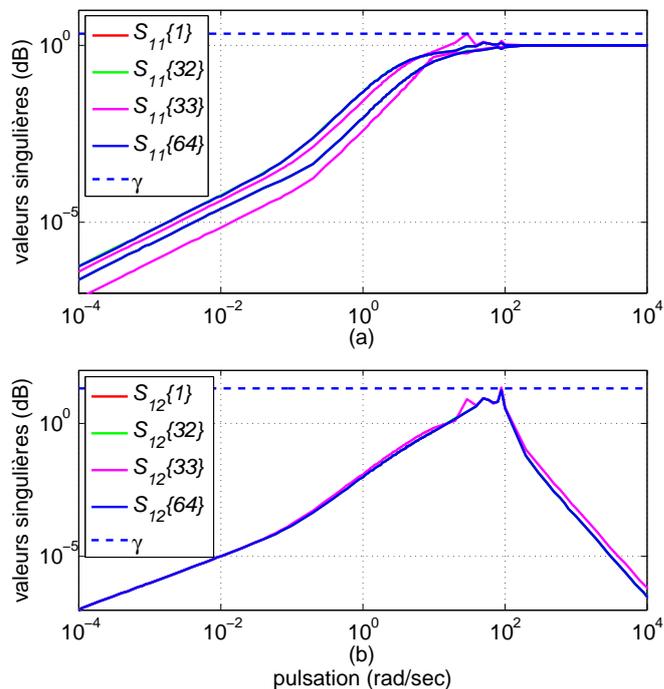


FIGURE 3.11 – Transferts fréquentiels réalisés

Les résultats présentés considèrent des pondérations statiques  $W_1(s) = 1$  et  $W_2(s) = 0.1$ . L'indice de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  obtenu est de  $\gamma = 2.10$ , ce qui garantit une marge de stabilité en module  $M_m = 0.476$ . La Figure 3.11 affiche les transferts fréquentiels réalisés  $S_{11}(\omega)$  et  $S_{12}(\omega)$  dans chaque bloc entrée-sortie du canal de performance  $w(t) \rightarrow z(t)$ . Chaque transfert

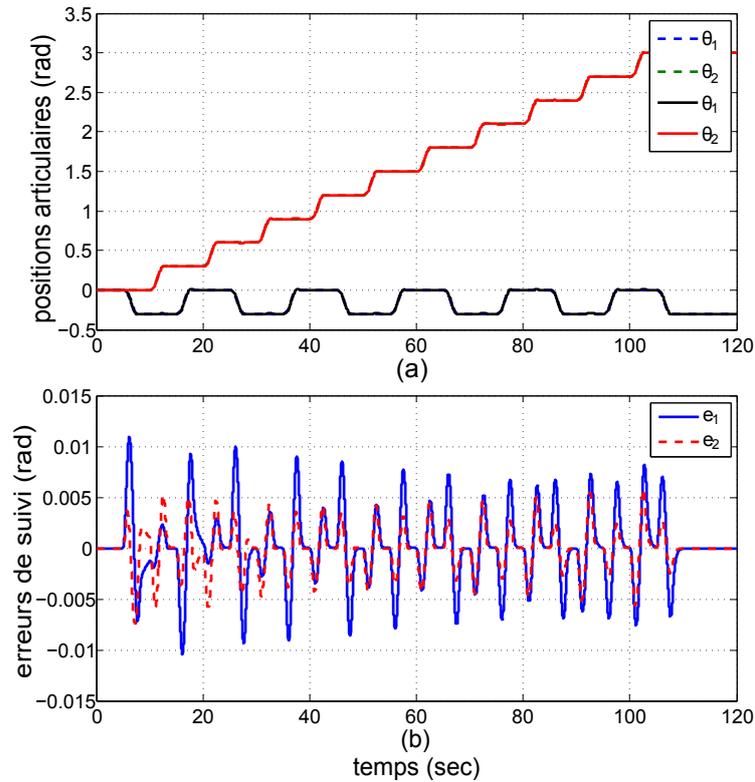


FIGURE 3.12 – Suivi des trajectoires de référence

est comparé au gabarit fréquentiel correspondant  $\gamma/W_k(s)$ ,  $k = 1, 2$ . La fonction de sensibilité  $S_{11}(\omega)$  présente naturellement une allure de filtre passe-haut adéquate à un asservissement performant. Les transferts fréquentiels sont affichés pour quatre valeurs figées du vecteur de paramètres, sélectionnées parmi les  $2^6 = 64$  sommets de l'ensemble paramétrique :  $\rho_{\{1\}} = [\underline{\rho}_1 \dots \underline{\rho}_6]^T$ ,  $\rho_{\{32\}} = [\underline{\rho}_1 \bar{\rho}_1 \dots \bar{\rho}_6]^T$ ,  $\rho_{\{33\}} = [\bar{\rho}_1 \underline{\rho}_1 \dots \underline{\rho}_6]^T$  et  $\rho_{\{64\}} = [\bar{\rho}_1 \dots \bar{\rho}_6]^T$ , où  $\underline{\rho}_k$  et  $\bar{\rho}_k$  représentent les bornes minimale et maximale du paramètre  $\rho_k$ . La Figure 3.12-(a) illustre les réponses temporelles du système asservi obtenu par le bouclage rétroactif du modèle non-linéaire (3.30) et du correcteur LPV de matrices d'état données dans (3.79)-(3.81). La Figure 3.12-(b) affiche les erreurs de suivi de trajectoires correspondantes. Les figures présentées montrent l'efficacité de la méthodologie de commande proposée pour la stabilisation du système et le maintien des performances (découplage des articulations, rapidité, précision) sur un large espace de travail.

**Remarque 3.7.** Les résultats de simulation décrits ci-dessus sont proches de ceux de la méthode descripteur, présentés dans le paragraphe 3.3.3.2, même si pour cette dernière méthode, seul le bloc (1, 1) du canal de performance était contraint. Cela peut être expliqué par le conservatisme de la méthode descripteur, qui est probablement dû à sa généralité. En effet, une représentation sous forme descripteur est possible pour tous les systèmes LPV rationnels quel que soit leur structure. La méthode des LMI étendues, en revanche, tient compte explicitement de la structure du modèle.

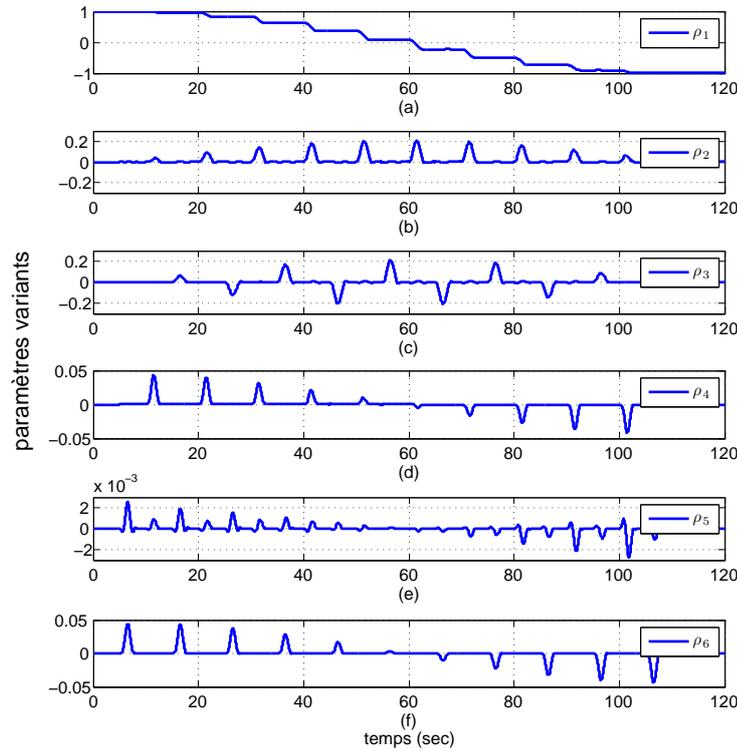


FIGURE 3.13 – Evolution des paramètres variants

### 3.5 Comparaison avec la méthode d'inversion de modèle dynamique

La méthode de commande par inversion de modèle dynamique est très populaire dans les applications robotiques [Spong05], pour lesquelles elle est souvent désignée sous le terme de méthode de *découplage non-linéaire*. Elle est fondée sur le principe de compensation des non-linéarités du système en se basant sur une connaissance exacte du modèle dynamique et une mesure instantanée de ses variables d'état (positions et vitesses articulaires). Une loi de commande décentralisée et linéaire externe peut ensuite être appliquée dans le but d'imposer une dynamique pour l'erreur de suivi de trajectoire.

#### 3.5.1 Inversion de modèle dynamique

Le principe de la méthode d'inversion de modèle est d'appliquer un retour d'état (statique ou dynamique)  $\tau = \psi(q, \dot{q})$  au modèle dynamique non-linéaire (3.2), rappelé ci-après :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q)\dot{q} + K(q)q + g(q) = \tau \quad (3.84)$$

Le couple de commande est obtenu suivant l'expression :

$$\tau = M(q)\nu + c(q, \dot{q}) + Kq + D\dot{q} \quad (3.85)$$

La commande auxiliaire  $\nu$  être choisie en tant que :

$$\nu = \ddot{q}^* + K_p(q^* - q) + K_d(\dot{q}^* - \dot{q}) \quad (3.86)$$

où  $q^*$  est le vecteur des coordonnées généralisées de référence. En remplaçant (3.85) dans (3.86), l'équation différentielle qui régit l'erreur de suivi de trajectoire  $e_q = q^* - q$  est :

$$\ddot{e}_q + K_p e_q + K_d \dot{e}_q = 0 \quad (3.87)$$

Une structure diagonale pour les matrices  $K_p$  et  $K_d$  induit un découplage des erreurs de suivi de chacune des articulations. Si ces matrices sont définies positives, alors l'erreur de suivi  $e_q$  s'annule asymptotiquement. La commande par inversion de modèle, comme son nom l'indique, est fortement basée sur une connaissance précise du modèle dynamique. De ce fait, elle souffre quelque peu d'un manque de robustesse par rapport aux dynamiques non modélisées ou aux termes variables dans le temps et selon les conditions de fonctionnement. Toutefois, des efforts de recherche ont été faits afin de remédier à cette faiblesse, puisque des lois de commande par inversion de modèle avec des exigences de robustesse par rapport aux incertitudes de modèle ont été proposées (voir par exemple [Spong05, Bascetta10]).

### 3.5.2 Extension aux manipulateurs flexibles

L'approche d'inversion de modèle dynamique décrite dans le paragraphe précédent est construite sur l'hypothèse de mesurabilité du vecteur d'état dans son ensemble, qui est constitué des coordonnées généralisées et leurs dérivées :  $x = [q^T \dot{q}^T]^T$ . Cependant, cela n'est pas toujours le cas pour les manipulateurs flexibles, où les variables de déformations  $\delta$  et leur dérivées  $\dot{\delta}$  sont supposées inaccessibles à une mesure directe dans notre travail.

Une solution pratique à ce problème a été proposée dans [De Luca93], faisant appel à un schéma de commande à deux degrés de liberté produisant un signal de commande avec un terme d'action directe (*feedforward*) et un autre de rétroaction (*feedback*), par exemple de nature proportionnelle et dérivée (PD) :

$$\tau = \tau_N + \tau_{PD} \quad (3.88)$$

Le terme d'action directe  $\tau_N$  est destiné à compenser de manière nominale, c.à.d. pour un suivi parfait des trajectoires de référence articulaires  $\theta^*(t)$ , les effets non-linéaires dans le modèle (3.84). Le terme de rétroaction  $\tau_{PD}$ , quant à lui, est destiné à stabiliser le système ainsi linéarisé et à assurer un bon suivi de la trajectoire de référence en faisant décroître l'erreur de suivi au cours du temps.

Décrivons de manière plus détaillée cette loi de commande. Les équations présentées sont essentiellement prises dans [De Luca93]. Le modèle dynamique non-linéaire des manipulateurs flexibles (3.18), partitionné suivant les coordonnées généralisées rigides et flexibles  $q = [\theta^T \delta^T]^T$ , est rappelé ci-après :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Kq + D\dot{q} + g(q) = G\tau \quad (3.89)$$

où

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{\theta\theta}(q) & M_{\theta\delta}(q) \\ M_{\delta\theta}(q) & M_{\delta\delta} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_\delta \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_\delta \end{bmatrix}, C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} c_\theta(q, \dot{q}) \\ c_\delta(q, \dot{q}) \end{bmatrix}, g(q) = \begin{bmatrix} g_\theta(q) \\ g_\delta(q) \end{bmatrix}$$

et  $G = [I_2 \ G_\delta^T]^T$ .

Le fait de considérer des couples gravitationnels nuls  $g(q) = 0$  dans le modèle non-linéaire du manipulateur flexible (3.89) donne :

$$\ddot{\delta} = G_\delta \tau - n_\delta - M_{\theta\delta}^T \ddot{\theta} \quad (3.90)$$

où  $n_\delta = c_\delta + K_\delta \delta + D_\delta \dot{\delta}$ .

Une commande par inversion de modèle, impliquant les variables rigides  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ , est appliquée en remplaçant  $\ddot{\theta}$  dans (3.90) par :

$$\nu = \ddot{\theta}^* + K_p(t)(\theta^* - \theta) + K_d(t)(\dot{\theta}^* - \dot{\theta}) \quad (3.91)$$

La partie rigide de l'équation (3.89) donne :

$$\tau = H^{-1}[(M_{\theta\theta} - M_{\theta\delta}M_{\theta\delta}^T)\nu + c_\theta - M_{\theta\theta}n_\delta] \quad (3.92)$$

où  $H = I - M_{\theta\delta}G_\delta$ .

Un mouvement nominal étant caractérisé par :  $\theta(t) = \theta^*(t) \forall t$ , la loi de commande (3.92) est réécrite sous la forme composite donnée dans (3.88), avec :

$$\tau_N = H^{-1}[(M_{\theta\theta} - M_{\theta\delta}M_{\theta\delta}^T)\ddot{\theta} + c_\theta - M_{\theta\theta}n_\delta] \Big|_{\substack{\theta=\theta^*, \dot{\theta}=\dot{\theta}^* \\ \delta=\delta_N, \dot{\delta}=\dot{\delta}_N}} \quad (3.93)$$

$$\tau_{PD} = K_p(t)(\theta^* - \theta) + K_d(t)(\dot{\theta}^* - \dot{\theta}) \quad (3.94)$$

Les trajectoires nominales  $\delta_N(t)$  et  $\dot{\delta}_N(t)$  des variables de déformation sont obtenues par intégration numérique de l'équation différentielle :

$$\ddot{\delta} = W(\theta^*, \delta, \dot{\theta}^*, \dot{\delta}) - n_\delta(\theta^*, \delta, \dot{\theta}^*, \dot{\delta}) - M_{\theta\delta}^T(\theta^*, \delta)\ddot{\theta}^* \quad (3.95)$$

où  $W = G_\delta H^{-1}[(M_{\theta\theta} - M_{\theta\delta}M_{\theta\delta}^T)\nu + c_\theta - M_{\theta\theta}n_\delta]$ .

Les gains proportionnel et dérivé ont alors les expressions :

$$K_p(t) = H^{-1}(M_{\theta\theta} - M_{\theta\delta}M_{\theta\delta}^T) \Big|_{\substack{\theta=\theta^* \\ \delta=\delta_N}} \mathcal{K}_p \quad (3.96)$$

$$K_d(t) = H^{-1}(M_{\theta\theta} - M_{\theta\delta}M_{\theta\delta}^T) \Big|_{\substack{\theta=\theta^* \\ \delta=\delta_N}} \mathcal{K}_d \quad (3.97)$$

où  $\mathcal{K}_p$  et  $\mathcal{K}_d$  sont des gains matriciels choisis de manière à satisfaire des propriétés désirées pour la boucle fermée. Des matrices  $K_p$  et  $K_d$  constantes peuvent être utilisées pour simplifier la loi de commande (3.94).

La méthode pratique d'inversion de modèle décrite ici est basée sur une modélisation dynamique à l'aide des équations d'Euler-Lagrange. L'inversion de modèle dynamique pour robots rigides et flexibles peut également être effectuée de manière itérative si le modèle est obtenu par l'approche de modélisation dynamique de Newton-Euler [Jain11].

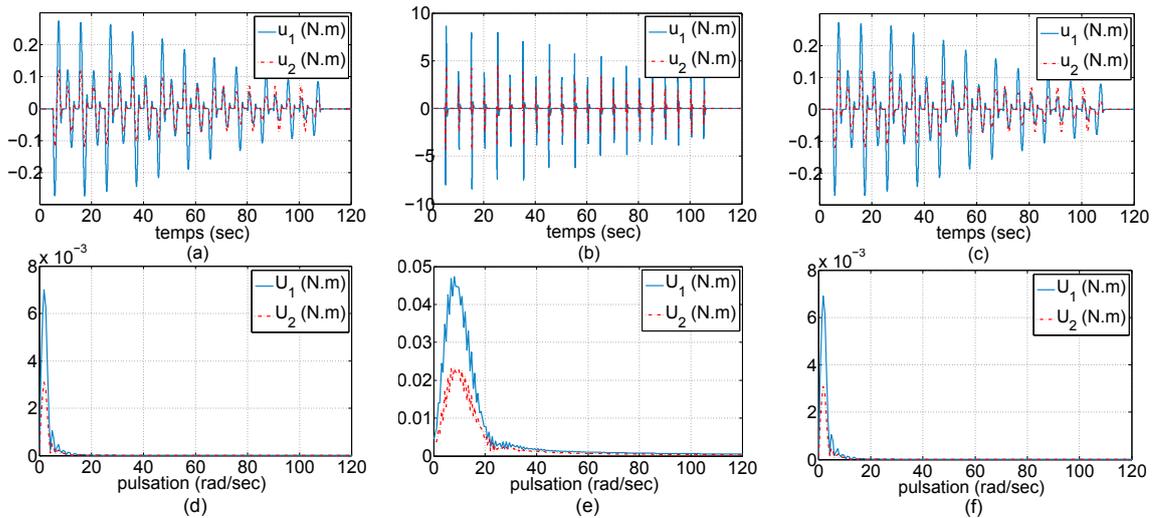


FIGURE 3.14 – Evaluation de la robustesse de la méthode de commande LPV (a & d : bruit de mesure de vitesse, b & e : entrées de haute-fréquence, c & f : incertitude de modèle)

### 3.5.3 Résultats de tests comparatifs

Il est difficile d'effectuer une comparaison équitable entre deux méthodes de commande de nature assez différente. Dans les résultats et commentaires de comparaisons donnés ci-après, nous avons tenté d'obtenir les meilleures performances possibles avec la méthode d'inversion de modèle. Des gains constants  $K_p$  et  $K_d$  peuvent être synthétisés pour le correcteur de la boucle de rétroaction interne, afin de satisfaire des exigences de performance. Par exemple, par la méthode de placement de pôles, il est possible d'imposer un coefficient d'amortissement et une pulsation naturelle à la dynamique de l'erreur de suivi de trajectoire. Cependant, en appliquant cette méthode de synthèse à notre exemple, nous avons constaté des performances très dégradées par rapport à la méthode de commande LPV basée sur les LMI étendues.

De meilleurs résultats ont été obtenus avec la méthode de synthèse basée sur l'optimisation non-lisse [Apkarian06]. En effet, des outils développés récemment en suivant cette approche permettent la synthèse de correcteurs structurés et d'ordre réduit pour les systèmes linéaires. Ils permettent une réduction importante du nombre de variables de décision du problème d'optimisation en évitant l'utilisation de conditions de type inégalités de Lyapunov. Organisés autour de la fonction `hinfstruct` de la Robust Control Toolbox de MATLAB [Gahinet11], ces outils de synthèse permettent de traiter les problèmes d'optimisation  $\mathcal{H}_\infty$  de manière simple et intuitive pour l'utilisateur. Pour notre application, nous avons effectué une synthèse basée sur un modèle linéarisé du système autour de la valeur nominale  $x = 0$  du vecteur d'état. En particulier, nous imposons la minimisation de la fonction de sensibilité en sortie du système, pondérée par un filtre qui impose les caractéristiques de performance suivantes : une marge de module de  $M_m = 0.8$ , une bande passante de  $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$  et une erreur statique de position de 5%. L'indice de performance obtenu est  $\gamma_{NS} = 1.48$  et les gains du correcteur sont :  $K_p = \text{diag}(18.75, 19.55)$  et  $K_d = \text{diag}(3.70, 4.60)$ .

Tandis que les deux méthodes de synthèse : LPV et par inversion de modèle dynamique montrent des résultats satisfaisants pour des conditions de fonctionnement nominales (telles que décrites dans le paragraphe 3.4.5.2), le correcteur LPV s'est montré plus robuste dans des

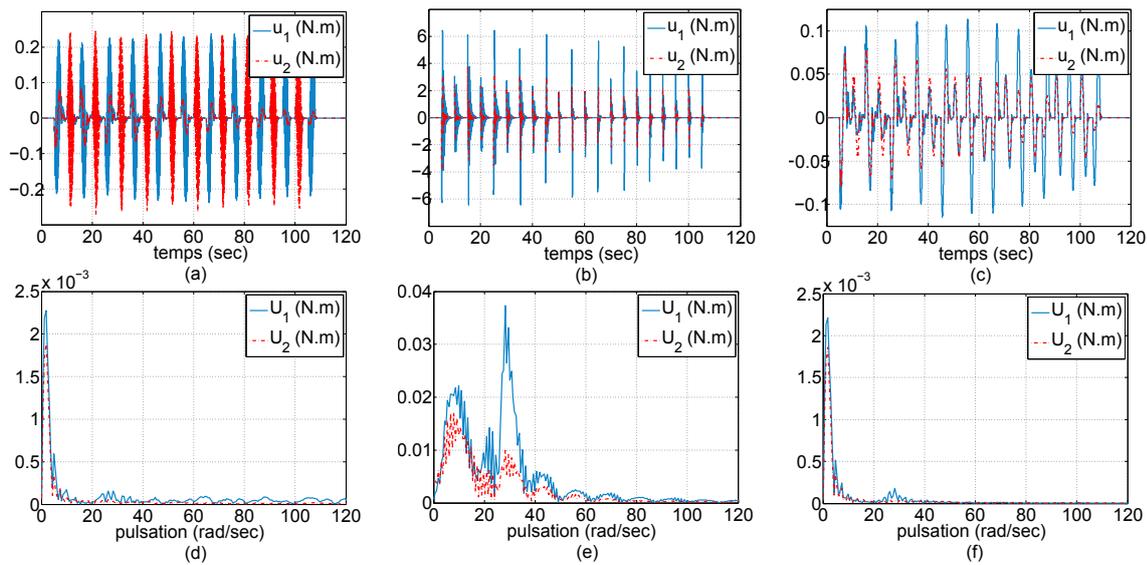


FIGURE 3.15 – Evaluation de la robustesse de la méthode de commande par inversion de modèle

conditions de fonctionnement difficiles. Parmi les différents tests effectués, les suivants ont permis de montrer un comportement différent des deux méthodes :

1. La présence d'un bruit de mesure pseudo-aléatoire dont l'amplitude est égale à  $\pm 25\%$  de la valeur mesurée.
2. Des signaux de référence consistant en des créneaux plus rapides caractérisés par un temps de réponse de 0.5 s au lieu de 3 s.
3. Une incertitude variant dans le temps d'une amplitude de  $\pm 15\%$  sur les valeurs connues des moments d'inertie du robot. Cette incertitude est implémentée en simulation sous la forme d'un bruit pseudo-aléatoire.

Les colonnes des Figures 3.14-3.15 rassemblent les résultats obtenues dans ces trois conditions de fonctionnement respectivement. Les lignes de chacune des deux figures représentent des descriptions temporelles et fréquentielles (obtenues à l'aide de la transformée de Fourier rapide FFT) du signal de commande  $u(t) = \tau(t)$ . Tandis qu'un suivi précis des trajectoires de référence a été observé pour les deux méthodes, ces figures montrent que le signal de commande délivré par le correcteur LPV est plus lisse dans tous les cas, alors qu'un comportement oscillatoire important est observé avec le correcteur par inversion de modèle. De plus, la Figure 3.15-e montre que l'application d'une entrée extérieure de haute fréquence excite les résonances des modes flexibles, contrairement à la commande LPV (Fig. 3.14-e) qui les atténue de manière significative. L'ensemble des simulations numériques présentées ont été obtenues avec un pas d'échantillonnage constant de  $T_s = 1$  ms.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé des méthodes de modélisation et de commande linéaires à paramètres variants (LPV) pour les robots manipulateurs flexibles. Partant des modèles non-linéaires de ces systèmes, des modèles de type quasi-LPV sont obtenus par la méthode de séquençage virtuel. Ce type de modèles est avantageux car il maintient une bonne description

---

d'un grand nombre de dynamiques non-linéaires du système. En nous basant sur les modèles obtenus, nous avons proposé des conditions de synthèse de correcteurs LPV par retour de sortie au niveau articulaire qui assurent une garantie de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  du système asservi. Afin de minimiser les vibrations liées à la flexibilité de la structure, la déflexion de l'organe terminal est traitée comme une sortie du canal de performance dont on veut minimiser l'indice de performance. Les résultats des comparaisons avec une approche plus usuelle d'inversion de modèle dynamique montrent que le commande LPV s'avère être plus robuste face aux bruits de mesure des vitesses articulaires, aux excitations dans les hautes fréquence ainsi qu'aux incertitudes de modèle.



## Chapitre 4

# Analyse et commande basées sur des relaxations de problèmes polynomiaux

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Description du manipulateur flexible considéré</b>	<b>112</b>
4.1.1	Modèle géométrique	112
4.1.2	Modèle cinématique	113
<b>4.2</b>	<b>Modèle LPV polynomial obtenu par identification</b>	<b>114</b>
4.2.1	Modèle non-linéaire	114
4.2.2	Structure du modèle LPV	115
4.2.3	Méthode d'identification	117
<b>4.3</b>	<b>Commande dans l'espace opérationnel</b>	<b>117</b>
4.3.1	Modèle augmenté pour l'asservissement opérationnel	118
4.3.2	Modélisation de l'espace de travail	119
4.3.3	Représentation factorisée de l'espace de travail	119
<b>4.4</b>	<b>Analyse de robustesse avec les relaxations SOS matricielles</b>	<b>124</b>
4.4.1	Limites de la scalarisation de contraintes matricielles	124
4.4.2	Version matricielle de la S-procédure	125
4.4.3	Synthèse de correcteur nominal	128
4.4.4	Analyse de robustesse en performance $\mathcal{H}_\infty$	129
4.4.5	Application au modèle de robot flexible	130
<b>4.5</b>	<b>Synthèse de correcteurs LPV avec les relaxations SOS matricielles</b>	<b>133</b>
4.5.1	Synthèse de correcteurs LPV	134
4.5.2	Application au modèle de robot flexible	138
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>145</b>

---

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats de commande et d'analyse de performance robustes de l'asservissement en position de l'organe terminal d'un manipulateur flexible en utilisant des méthodes polynomiales. L'approche proposée repose en particulier sur des relaxations convexes en sommes de carrés matricielles de problèmes SDP dépendant des paramètres de manière polynomiale. L'analyse et la synthèse de correcteurs robustes sur des régions spécifiques de l'espace paramétrique est rendu possible par l'utilisation de la version matricielle de la S-procédure introduite au chapitre 2 de ce mémoire.

## 4.1 Description du manipulateur flexible considéré

Nous prendrons comme cas d'étude le modèle d'un prototype de robot manipulateur utilisé dans des applications chirurgicales [Ginhoux05]. Ce robot a été conçu pour l'assistance aux gestes chirurgicaux à cœur battant, en particulier la compensation du mouvement cardiaque du patient. Les phénomènes de flexibilité apparaissent au niveau des 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> degrés de libertés du robot, qui servent au positionnement de l'organe terminal qui porte l'aiguille dans l'espace de travail assigné à l'opération (voir Figure 4.1). Les vibrations transitoires distribuées correspondent à des déformations de la structure mécanique qui apparaissent lors de l'application d'excitations d'amplitude élevée dans les hautes fréquences.

La déformation transverse en tout point d'abscisse  $x_k$  d'un segment flexible d'indice  $k$  est modélisée par une somme de modes flexibles dont chacun est caractérisé par une fonction de forme  $\phi_{ki}(x_k)$  et une amplitude instantanée  $\delta_{ki}(t)$  :

$$w_k(x_k, t) = \sum_{i=1}^{n_d} \phi_{ki}(x_k) \delta_{ki}(t), \quad x_k \in [0, l_k], \quad k = 1, 2 \quad (4.1)$$

Nous faisons ici le choix de fonctions de forme monomiales  $\phi_{ki}(x_k) = x_k^{i+1}$  de degré supérieur ou égal à deux afin de garantir la continuité et la différentiabilité de la déformation. Les résultats présentés utilisent  $n_d = 1$ , un seul mode flexible par segment est ainsi considéré. Les amplitudes instantanées non nulles sont donc  $\delta_{11}(t)$  et  $\delta_{21}(t)$  et seront désormais désignées sous le terme de *variables de déformation*.

### 4.1.1 Modèle géométrique

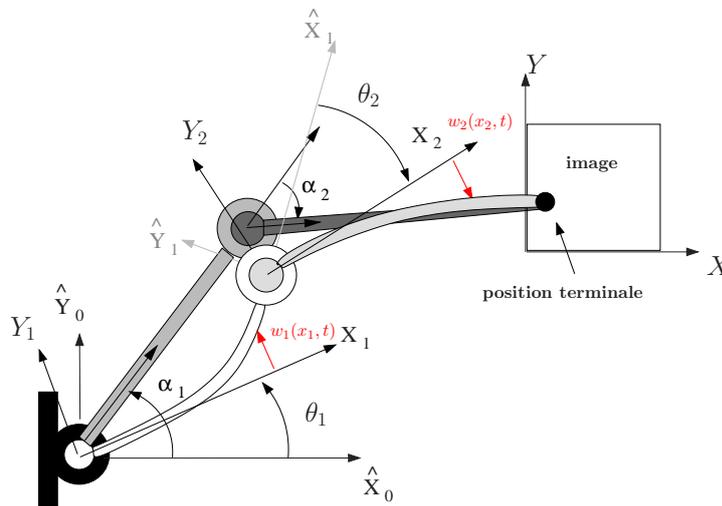


FIGURE 4.1 – Vue schématique du robot flexible

L'espace de travail du robot est horizontal. En effet, l'organe terminal qui porte l'outil évolue dans un plan horizontal dont les coordonnées cartésiennes constituent le vecteur  $F = [X \ Y]^T$ , avec :

$$\begin{aligned}
X &= \cos(\theta_1) (l_1 - 2/3 \delta_{11}^2 l_1^3) - \sin(\theta_1) \delta_{11} l_1^2 \\
&\quad + \cos(\theta_1 + \theta_2 + 2 \delta_{11} l_1) (l_2 - 2/3 \delta_{21}^2 l_2^3) \\
&\quad - \sin(\theta_1 + \theta_2 + 2 \delta_{11} l_1) \delta_{21} l_1^2
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
Y &= \sin(\theta_1) (l_1 - 2/3 \delta_{11}^2 l_1^3) + \cos(\theta_1) \delta_{11} l_1^2 \\
&\quad + \sin(\theta_1 + \theta_2 + 2 \delta_{11} l_1) (l_2 - 2/3 \delta_{21}^2 l_2^3) \\
&\quad + \cos(\theta_1 + \theta_2 + 2 \delta_{11} l_1) \delta_{21} l_1^2.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

où  $l_1$  et  $l_2$  sont les longueurs des deux segments. La relation qui lie les coordonnées cartésiennes  $F = [X \ Y]^T$  aux coordonnées généralisées  $q = [\theta^T \ \delta^T]^T$ , où  $\theta$  est le vecteur de positions articulaires (aussi appelées *variables rigides*) et  $\delta$  le vecteur des variables de déformations, est appelée *modèle géométrique* en robotique.

Le modèle géométrique d'un robot est donc déterminé par la relation :

$$F = g(q) \tag{4.4}$$

Cette relation fait apparaître toutes les coordonnées généralisées  $q$  du robot qui sont constituées des variables rigides  $\theta$  et de déformation  $\delta$ . Il serait toutefois intéressant de simuler un comportement purement rigide du robot. Ce comportement est obtenu en annulant les variables de déformation dans le modèle géométrique (4.4). On parle alors de *modèle géométrique rigide*  $g_0(\theta)$  qui est déterminé par :

$$F = g_0(\theta) = g(q)|_{\delta=0} \tag{4.5}$$

Notons que le modèle géométrique inverse, qui consiste à trouver les coordonnées généralisées  $q$  à partir d'une position cartésienne donnée  $F = [X \ Y]^T$  de l'organe terminal, est généralement difficile à obtenir à cause du nombre important de termes non-linéaires dans l'expression de  $g(q)$ . De plus, ce problème a une infinité de solution dès lors que  $n_q > n_F$ ,  $n_q$  et  $n_F$  étant les longueurs respectives des vecteurs  $q$  et  $F$ .

#### 4.1.2 Modèle cinématique

Le modèle cinématique lie la vitesse cartésienne  $\dot{F}$  aux vitesses des coordonnées généralisées  $\dot{q}$  :

$$\dot{F} = \frac{dg(q(t))}{dt} = \nabla_q g(q) \dot{q} = J(q) \dot{q} \tag{4.6}$$

La matrice  $J(q) = \nabla_q g(q) = \left[ \frac{\partial g(q)}{\partial q_1} \ \dots \ \frac{\partial g(q)}{\partial q_{n_q}} \right]^T$  est le jacobien du modèle géométrique, qui est aussi simplement appelé en robotique, *Jacobien* du robot. En considérant que les coordonnées cartésiennes sont obtenues à l'aide des variables rigides  $\theta$  uniquement, le modèle cinématique rigide du robot est obtenu par :

$$\dot{F} = \frac{dg_0(\theta(t))}{dt} = \nabla_{\theta} g_0(\theta) \dot{\theta} = J_0(\theta) \dot{\theta} \tag{4.7}$$

La matrice  $J_0(\theta) = \nabla_{\theta} g_0(\theta) = \left[ \frac{\partial g_0(\theta)}{\partial \theta_1} \dots \frac{\partial g_0(\theta)}{\partial \theta_{n_{\theta}}} \right]^T$  est le Jacobien rigide du robot.

Les équations (4.6) et (4.7) permettent de voir que la relation qui lie les vitesses cartésiennes  $\dot{F}$  aux vitesses des coordonnées généralisées  $\dot{q}$  est quasi-linéaire en fonction de la configuration du robot, ce qui constitue une différence notable avec le modèle géométrique (4.4)-(4.5). Grâce à cette linéarité, le modèle cinématique est plus simple à manipuler. En effet, l'inversion du modèle cinématique consiste simplement à calculer l'inverse du Jacobien  $J(q)$  si il correspond à une matrice carrée, ou sa pseudo-inverse (de Moore-Penrose) dans le cas contraire.

## 4.2 Modèle LPV polynomial obtenu par identification

La modélisation dynamique des robots manipulateurs est une opération difficile à réaliser en général à cause du caractère fortement non-linéaire du comportement dynamique de ces systèmes. Le problème est encore plus ardu si les flexibilités du robot doivent également être identifiées. Deux grandes classes d'approches sont possibles pour l'obtention du modèle dynamique. La première est l'utilisation des lois de la physique, associées à une connaissance approfondie des caractéristiques du système permettant d'identifier avec précision les coefficients des termes non-linéaires. La seconde consiste en l'utilisation des techniques d'identification expérimentale, conjointement avec le choix d'une structure adéquate pour le modèle à identifier.

En comparaison avec l'identification directe de modèles non-linéaires, l'identification de modèles LPV offre l'avantage d'une moindre complexité, permise par la généralisation d'outils classiques d'identification de systèmes LTI. La disponibilité du modèle LPV autorise l'utilisation du grand nombre de résultats qui sont maintenant disponibles pour la commande des systèmes LPV. Le modèle LPV utilisé est issu d'une identification dont la méthodologie complète est exposée dans [Laroche11] et [Mercère12], que nous rappelons brièvement ici.

### 4.2.1 Modèle non-linéaire

Le modèle non-linéaire d'un manipulateur flexible peut être obtenu par le principe des travaux virtuels, associé à une description géométrique et cinématique adéquate du robot. Les deux approches les plus couramment suivies en robotique flexible sont : l'obtention des équations d'Euler-Lagrange [De Luca91], [Spong05] et l'utilisation de la théorie des graphes linéaires, [Shi01], [Shi02a]. Dans [Shi02a], l'implémentation de cette modélisation dans le langage symbolique MAPLE est détaillée. Cette implémentation a donné lieu à la boîte à outils DynaFlex, qui est maintenant intégrée dans le logiciel commercial MapleSim. La disponibilité de cet outil logiciel permet d'automatiser l'obtention du modèle dynamique non-linéaire, ce qui peut induire un gain de temps important dans l'étape de modélisation. Cependant, cette modélisation ne préserve pas les propriétés structurelles habituelles des modèles de robots manipulateurs, telles que la symétrie de la matrice d'inertie et des termes non-linéaires de Coriolis et centrifuges. Ceci a pour effet de limiter quelque peu l'utilité de ces modèles si les méthodes d'analyse ou de commande se basent fortement sur ces propriétés structurelles.

Cette limitation n'est pas handicapante dans notre cas puisque nous utiliserons un modèle obtenu par l'approche de la théorie des graphes linéaires à des fins d'identification de modèle LPV et de simulation de système asservi. Le modèle non-linéaire n'est pas utilisé de manière

directe dans la synthèse de correcteur, comme cela est le cas de la méthode proposée dans le chapitre précédent.

Le modèle dynamique est obtenu sous la forme suivante d'un système du second ordre généralisé :

$$\mathbf{M}(q(t))\ddot{q}(t) = \mathbf{F}(q(t), \dot{q}(t)) + \mathbf{B}_0 u(t) \quad (4.8)$$

où  $q(t) \in \mathbb{R}^{n_q}$  est le vecteur de coordonnées généralisées qui contient les positions articulaires  $\theta(t) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  et les variables de déformation  $\delta(t) \in \mathbb{R}^{n_\delta}$  :  $q(t) = [\theta^T(t) \ \delta^T(t)]^T$ .  $\mathbf{M}(q(t)) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$  est la matrice d'inertie qui dépend de la configuration  $q(t)$ . Le vecteur  $\mathbf{F}(q(t), \dot{q}(t)) \in \mathbb{R}^{n_q}$  est donné par la somme des couples de Coriolis et centrifuges, des couples de raideur et des couples de frottement visqueux. La matrice  $\mathbf{B}_0$  distribue les couples d'entrée  $u(t)$  sur les coordonnées généralisées  $q(t)$ .

Le modèle considéré pour notre application correspond à un robot à deux segments flexibles à une variable de déformation par segment ( $n_d = 1$ ). Pour ce modèle, nous avons donc  $n_\theta = 2$ ,  $n_\delta = n_\theta \cdot n_d = 2$  et  $n_q = n_\theta + n_\delta = 4$ . Les couples sont fournis par les moteurs au niveau des deux articulations du robot et n'ont d'effet direct que sur les dynamiques rigides, ce qui se traduit par la structure :  $\mathbf{B}_0 = [I_2 \ 0_2]^T$ . Pour de faibles déformations, il est réaliste de négliger l'influence des variables de déformation  $\delta$  dans la matrice d'inertie, qui sera uniquement fonction de la deuxième position articulaire  $\theta_2$ , c.à.d.  $\mathbf{M}(q) = \mathbf{M}(\theta_2)$ .

#### 4.2.2 Structure du modèle LPV

Le modèle non-linéaire (4.8) peut s'écrire de manière condensée comme :

$$\ddot{q} = \phi(q, \dot{q}, u) \quad (4.9)$$

où  $\phi$  est le champ de vecteur non-linéaire déterminé par le passage de la matrice d'inertie  $M(q)$  au coté droit de l'équation (4.8).

Une linéarisation de cette équation autour d'un point d'équilibre caractérisé par  $\dot{q} = 0$ , associée à une approximation en basses vitesses articulaires, permet de fixer une structure pour les matrices d'état du modèle LPV à identifier :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (4.10)$$

où  $x = [q^T \ \dot{q}^T]^T$  est le vecteur d'état du système, le paramètre variant est choisi comme  $\rho = \cos(\theta_2)$ , la matrice de mesure  $C$  est constante à cause du choix effectué pour la sortie mesurée  $y(t)$  du système. En effet, ce signal est constitué des positions articulaires  $\alpha(t)$  d'un robot rigide virtuel ayant la même position terminale  $F = [X \ Y]^T$  que le robot flexible considéré. Les positions rigides fictives ainsi définies seront appelées *pseudo-positions*.

La prise en compte de la structure suivante des matrices d'état du modèle LPV (4.10) permet de réduire le nombre de paramètres à identifier :

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{n_q} & I_{n_q} \\ A_1(\rho) & 0_{n_q} \end{bmatrix}; B(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{n_q \times n_\theta} \\ B_1(\rho) \end{bmatrix} \text{ où } A_1(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{n_q \times n_\theta} & A_2(\rho) \end{bmatrix}.$$

La matrice de mesure est complètement déterminée par la connaissance des longueurs  $l_1$  et  $l_2$  des deux segments du robot. Elle a pour expression :

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{n_\theta \times n_q} \end{bmatrix}, \text{ où } C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 1 & l_1 & l_2 \end{bmatrix}.$$

Les paramètres à identifier sont les composantes des matrices pleines  $A_2(\rho) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_\delta}$  et  $B_1(\rho) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_\theta}$ . Il y a donc  $n_q \times n_\delta + n_q \times n_\theta = 16$  éléments à identifier, dont chacun dépend potentiellement du paramètre de séquençement  $\rho = \cos(\theta_2)$ .

### Boucle interne de vitesse articulaire

Sur les robots utilisés dans les applications pratiques, un asservissement de la vitesse articulaire  $\dot{\theta}$  est réalisé au niveau des articulations. Si cet asservissement est effectué par l'intermédiaire d'un correcteur proportionnel de gain  $K$ , la vitesse de référence articulaire  $\dot{\theta}^*$  peut être considérée comme la nouvelle entrée du système. En remplaçant dans l'équation (4.10) la commande en couple  $u(t)$  par :

$$u(t) = K(\dot{\theta}^*(t) - \dot{\theta}(t)) \quad (4.11)$$

les matrices d'état du modèle LPV (4.10) sont modifiées de la manière suivante :

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{n_q} & I_{n_q} \\ [0_{n_q \times n_\theta} & A_2(\rho)] & -B_1(\rho)K_1 \end{bmatrix} \text{ et } B(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{n_q \times n_\theta} \\ B_1(\rho)K \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

où  $K_1 = [K \ 0_{n_\theta \times n_\delta}]$ . Partant du constat que les modes associés aux variables d'état  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ne sont ni commandables ni observables, il est possible de réduire le modèle LPV en supprimant ces variables du vecteur d'état  $x$ .

Le nouveau vecteur d'état réduit  $\bar{x} = [\delta^T \ \dot{\theta}^T \ \delta^T]^T$  donne lieu à une nouvelle représentation d'état sous la forme suivante :

$$\bar{\Sigma}(s, \rho) : \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}(\rho)\bar{x}(t) + \bar{B}(\rho)\dot{\theta}^*(t) \\ \bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\text{où } \bar{A}(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{n_\delta} & 0_{n_\delta \times n_\theta} & I_{n_\delta} \\ A_2(\rho) & -B_2(\rho) & 0_{n_q \times n_\delta} \end{bmatrix}, \bar{B}(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{n_\delta \times n_\theta} \\ B_2(\rho) \end{bmatrix} \text{ et } \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_1 & l_2 \end{bmatrix}, \text{ avec}$$

$B_2(\rho) = B_1(\rho)K_1$ . Cette matrice de mesure correspond au choix des pseudo-vitesses articulaires comme la nouvelle sortie du système :  $\bar{y}(t) = \dot{\alpha}(t)$ , où  $\alpha(t)$  est le vecteur de pseudo-positions rigides.

### 4.2.3 Méthode d'identification

Le modèle LPV (4.13) est obtenu par une interpolation polynomiale de modèles LTI locaux identifiés aux points de fonctionnement donnés par 7 valeurs de la seconde position angulaire  $\theta_{2_i}$ ,  $i = 1, \dots, 7$  :  $\frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}, \dots, \frac{7\pi}{8}$ . Les sorties de ces modèles sont notées  $\bar{y}_i$  respectivement. Ces modèles à identifier, notés  $\hat{\Sigma}^{[i]} : \{\hat{A}^{[i]}, \hat{B}^{[i]}, C, 0\}$ , correspondent à des valeurs figées du paramètre  $\rho_i = \cos(\theta_{2_i})$  et leur sortie est notée  $\hat{y}_i$ . L'objectif de l'identification est de maximiser le critère d'erreur de sortie suivant :

$$\eta_i = 100 \max \left( 1 - \frac{\|\bar{Y}_i - \hat{Y}_i\|}{\|\bar{Y}_i - \langle \hat{Y}_i \rangle\|}, 0 \right), \quad i = 1, \dots, 7 \quad (4.14)$$

où les matrices  $\bar{Y}_i \in \mathbb{R}^{n_\theta \times N_d}$  et  $\hat{Y}_i \in \mathbb{R}^{n_\theta \times N_d}$  sont obtenues par concaténation horizontale des échantillons  $\bar{y}_i(k)$  et  $\hat{y}_i(k)$ ,  $k = 0, \dots, N_d - 1$  des entrées du modèle analytique et du modèle identifié respectivement.  $\langle \hat{Y}_i \rangle$  est une matrice qui contient la valeur moyenne des échantillons de  $\hat{y}_i$  sur toutes ces colonnes.  $\eta_i$  est donc un vecteur colonne de même longueur que  $\bar{y}_i$  (2 dans notre application). Une performance moyenne de toutes les sorties peut être obtenue par la moyenne arithmétique des lignes de  $\eta_i$ .

Une fois les coefficients des matrices  $\hat{A}^{[i]}$  et  $\hat{B}^{[i]}$  estimés pour les 7 modèles locaux, les matrices  $\hat{A}(\rho)$  et  $\hat{B}(\rho)$  du modèle LPV sont obtenues par interpolation polynomiale des éléments des matrices  $\hat{A}^{[i]}$  et  $\hat{B}^{[i]}$  :

$$\hat{A}(\rho) = \hat{A}_0 + \rho \hat{A}_1 + \dots + \rho^d \hat{A}_d \quad (4.15)$$

$$\hat{B}(\rho) = \hat{B}_0 + \rho \hat{B}_1 + \dots + \rho^d \hat{B}_d \quad (4.16)$$

où  $\hat{A}_k \in \mathbb{R}^{(2n_\delta + n_\theta) \times (2n_\delta + n_\theta)}$  et  $\hat{B}_k \in \mathbb{R}^{(2n_\delta + n_\theta) \times n_\theta}$ ,  $k = 0, \dots, d$ . En remarquant que la matrice  $B_2(\rho)$  intervient à la fois dans les matrices  $\bar{A}(\rho)$  et  $\bar{B}(\rho)$ , la connaissance de  $\bar{A}(\rho)$  suffit à déterminer le modèle LPV  $\bar{\Sigma}(s, \rho)$  dans son ensemble.

## 4.3 Commande dans l'espace opérationnel

Les tâches assignées aux robots manipulateurs sont généralement exprimées dans l'espace opérationnel, c.à.d. dans l'espace de travail associé à l'organe terminal du robot, qui doit effectuer une tâche donnée. Dans le contexte de la robotique médicale, la tâche peut consister à positionner une aiguille en vue de l'insertion dans l'organe d'un patient, ou à réaliser une compensation de mouvements physiologiques.

Une première approche pour la commande opérationnelle consiste à traduire les trajectoires de référence du robot de l'espace des tâches (coordonnées cartésiennes) vers l'espace des configurations (coordonnées articulaires). Un correcteur de position articulaire est alors implémenté afin de réaliser les trajectoires articulaires de référence ainsi obtenues. Ces correcteurs articulaires sont synthétisés par une des méthodes usuelles en robotique telles que la commande PID simple (décentralisée) ou l'inversion de modèle dynamique. Cependant, cette approche comporte certaines limitations qui sont dues au fait que le modèle géométrique/cinématique n'est pas inclus dans la boucle d'asservissement. Le principal inconvénient est un manque de robustesse de l'asservissement en présence d'incertitudes de modélisation ou en cas d'interaction avec

un environnement extérieur incertain ou variant dans le temps.

Afin de pallier ces inconvénients, nous proposons un asservissement direct de la position de l'organe terminal du robot flexible considéré comme cas d'étude. Des garanties de performances et de robustesse sont offertes par l'adoption du cadre LPV/ $\mathcal{H}_\infty$  pour l'analyse des systèmes et la synthèse de correcteurs.

### 4.3.1 Modèle augmenté pour l'asservissement opérationnel

Une fois le modèle LPV  $\bar{\Sigma}(s, \rho)$  donné dans (4.13) convenablement identifié, il peut être augmenté pour la synthèse directe d'un correcteur en position de l'organe terminal, comme le montre la Figure 4.2. En introduisant le vecteur d'état augmenté  $\tilde{x} = [\tilde{x}^T \ F^T]^T$  et les nouveaux paramètres variants  $\rho_2 = \cos(\theta_1)$ ,  $\rho_3 = \sin(\theta_2)$  et  $\rho_4 = \sin(\theta_1)$ , qui viennent s'ajouter au premier paramètre qui sera désormais noté  $\rho_1 = \cos(\theta_2)$ , nous pouvons définir le modèle LPV augmenté suivant :

$$\tilde{\Sigma}(s, \rho) : \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}(\rho)\tilde{x} + \tilde{B}(\rho)\dot{\theta}^*(t) \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x} \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\text{où } \tilde{A}(\rho) = \begin{bmatrix} \bar{A}(\rho) & 0_{(2n_\delta+n_\theta) \times n_f} \\ \bar{C}(\rho) & 0_{n_f} \end{bmatrix}, \tilde{B}(\rho) = \begin{bmatrix} \bar{B}(\rho) \\ 0_{n_f \times n_\theta} \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0_{n_f \times (2n_\delta+n_\theta)} & I_{n_f} \end{bmatrix},$$

avec  $\rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3 \ \rho_4]^T$ .

Tandis que les matrices  $\bar{A}(\rho)$  et  $\bar{B}(\rho)$  sont identiques à celles données en (4.13), la matrice  $\bar{C}(\rho)$  est obtenue à l'aide du modèle cinématique rigide du robot, qui donne la relation  $\dot{F} = J_0(\rho)\dot{\alpha} = J_0(\rho)\bar{C}\tilde{x}$ , avec :

$$J_0(\rho) = \begin{bmatrix} -l_1\rho_4 - l_2(\rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3) & -l_2(\rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3) \\ l_1\rho_2 + l_2(\rho_1\rho_2 - \rho_3\rho_4) & l_2(\rho_1\rho_2 - \rho_3\rho_4) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

L'ajout d'un intégrateur permet d'obtenir la position  $F \in \mathbb{R}^{n_f}$  à partir de la vitesse  $\dot{F}$ . Les matrices d'état  $\tilde{A}(\rho)$  et  $\tilde{B}(\rho)$  sont à dépendance paramétrique polynomiale et la matrice  $\tilde{C}$  est constante. Ce modèle peut être utilisé pour l'analyse et la synthèse de correcteurs assurant le suivi d'une trajectoire opérationnelle de référence  $F^*(t)$ .

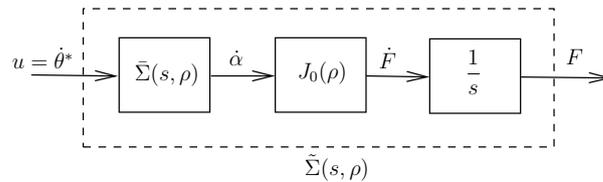


FIGURE 4.2 – Modèle LPV augmenté

### 4.3.2 Modélisation de l'espace de travail

L'espace de travail du robot peut être modélisé par les ensembles admissibles des paramètres variants du système  $\tilde{\Sigma}(s, \rho)$ . Clairement, ces paramètres sont interdépendants. Ils sont liés deux à deux par des relations trigonométriques qui définissent les ensembles algébriques suivants :

$$G_1 = \{(\rho_1, \rho_3) \in \mathbb{R}^2 : g_1(\rho) = \rho_1^2 + \rho_3^2 - 1 = 0\} \quad (4.19)$$

$$G_2 = \{(\rho_2, \rho_4) \in \mathbb{R}^2 : g_2(\rho) = \rho_2^2 + \rho_4^2 - 1 = 0\} \quad (4.20)$$

Etant données les vitesses maximales  $V_{M_1}$  et  $V_{M_2}$  des moteurs articulaires, l'ensemble admissible  $\mathcal{S}_\rho$  des dérivées temporelles des paramètres peut être modélisé par les ensembles semi-algébriques suivants :

$$G_3 = \{(\dot{\rho}_1, \dot{\rho}_3) \in \mathbb{R}^2 : g_3(\rho) = \dot{\rho}_1^2 + \dot{\rho}_3^2 - V_{M_2}^2 \leq 0\} \quad (4.21)$$

$$G_4 = \{(\dot{\rho}_2, \dot{\rho}_4) \in \mathbb{R}^2 : g_4(\rho) = \dot{\rho}_2^2 + \dot{\rho}_4^2 - V_{M_1}^2 \leq 0\} \quad (4.22)$$

En résumé, les ensembles admissibles des paramètres et leurs dérivées sont donnés par  $\mathcal{S}_\rho = G_1 \cup G_2$  et  $\mathcal{S}_{\dot{\rho}} = G_3 \cup G_4$ .

Les ensembles (4.19) et (4.20) peuvent être modifiées afin de modéliser des propriétés de robustesse. A titre d'exemple, il est possible de modéliser une mesure inexacte des paramètres. Pour ce faire, le cercle unité dans lequel évoluent les paramètres dans  $G_1$  et  $G_2$  est remplacé par une bande circulaire de rayon moyen 1 et de largeur de bande  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Dans ce cas, les ensembles admissibles sont donnés par l'intersection de nouveaux ensembles semi-algébriques.  $G_1 = G_{11} \cap G_{12}$  et  $G_2 = G_{21} \cap G_{22}$ , où :

$$G_{11} = \{(\rho_1, \rho_3) \in \mathbb{R}^2 : g_{11}(\rho) = \rho_1^2 + \rho_3^2 - R_M^2 \leq 0\} \quad (4.23)$$

$$G_{12} = \{(\rho_1, \rho_3) \in \mathbb{R}^2 : g_{12}(\rho) = -\rho_1^2 - \rho_3^2 + R_m^2 \leq 0\} \quad (4.24)$$

$$G_{21} = \{(\rho_2, \rho_4) \in \mathbb{R}^2 : g_{21}(\rho) = \rho_2^2 + \rho_4^2 - R_M^2 \leq 0\} \quad (4.25)$$

$$G_{22} = \{(\rho_2, \rho_4) \in \mathbb{R}^2 : g_{22}(\rho) = -\rho_2^2 - \rho_4^2 + R_m^2 \leq 0\}. \quad (4.26)$$

$R_m = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$  et  $R_M = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  sont les rayons minimal et maximal de la bande circulaire respectivement.

### 4.3.3 Représentation factorisée de l'espace de travail

Afin de décrire de façon factorisée les ensembles semi-algébriques dans lesquels évoluent les paramètres, considérons le vecteur à composantes monomiales suivant :

$$H(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_l \end{bmatrix}^T \quad (4.27)$$

$l$  étant le nombre de paramètres variants du système.

Le but est de représenter les ensembles  $G_k$ , tel que ceux donnés dans (4.23)-(4.26) sous la forme suivante :

$$G_k = \{\rho \in \mathbb{R}^l : g_k(\rho) = H^T(\rho) \tilde{G}_k H(\rho) \leq 0\} \quad (4.28)$$

où  $\tilde{G}_k = \tilde{G}_k^T \in \mathbb{R}^{(l+1) \times (l+1)}$ .

Les éléments monomiaux sont de degré 1 dans le vecteur  $H(\rho)$  car les polynômes délimitant les contraintes paramétriques dans (4.23)-(4.26) sont de degré 2. Dans le cas général, le vecteur  $H(\rho)$  est de degré  $\frac{d}{2}$  si il est utilisé pour décrire des contraintes polynomiales de degré pair  $d$ . Les ensembles admissibles pour les vitesses de paramètres  $\dot{\rho}$ , donnés dans (4.21)-(4.22), sont modélisables suivant une démarche similaire, mais en considérant un vecteur de base monomiale constitué d'éléments  $\dot{\rho}_i, i = 1, \dots, l$  :

$$H(\dot{\rho}) = \begin{bmatrix} 1 & \dot{\rho}_1 & \dots & \dot{\rho}_l \end{bmatrix}^T \quad (4.29)$$

Les contraintes sur les paramètres et leur vitesses coexistent souvent dans les applications d'analyse et de synthèse, en particulier celles faisant appel à des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres (PDLF). Dans ce cas, il est possible de prendre le vecteur de base monomiale suivant :

$$H(\rho, \dot{\rho}) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_l & \dot{\rho}_1 & \dots & \dot{\rho}_l \end{bmatrix}^T \quad (4.30)$$

Nous donnons dans ce qui suit des exemples d'ensembles semi-algébriques représentables sous la forme (4.28).

#### 4.3.3.1 Demi-espaces paramétriques

Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^l$ , un demi-espace paramétrique (généralisation du demi-plan pour des dimensions supérieures à 2) est délimité par un hyperplan dans l'espace des paramètres. Il peut être modélisé par l'inégalité affine :

$$D_p(\rho) = 1 + \frac{1}{2}c_1\rho_1 + \dots + \frac{1}{2}c_l\rho_l \leq 0 \quad (4.31)$$

où  $c_1, \dots, c_l \in \mathbb{R}$ .

L'inégalité (4.31) peut être factorisée de la manière suivante :

$$D_p(\rho) = H^T(\rho)Q_pH(\rho) = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}c_l \\ \frac{1}{2}c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{1}{2}c_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}c_l & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_l \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.32)$$

### 4.3.3.2 hyperrectangles paramétriques

Les hyperrectangles, appelée aussi *boîtes* paramétriques constituent une classe particulière importante de polytopes convexes. Cette représentation de l'espace paramétrique est très couramment suivie dans les contributions théoriques et applicatives sur l'analyse de robustesse paramétrique et la synthèse de lois de commande. Chaque paramètre est délimité par des valeurs min et max, indépendamment des autres paramètres :

$$b_i \leq \rho_i \leq a_i, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, l \quad (4.33)$$

#### Cas général

Pour des valeurs quelconques de  $a_i$  et  $b_i$ , les deux contraintes de type inégalité dans (4.33) sont traitées séparément. Chacune de ces contraintes définit un demi-espace paramétrique.

*i)* Contrainte  $\rho_i \leq a$  :

Afin d'illustrer l'approche de modélisation, commençons par le cas simple d'un seul paramètre variant  $\rho_1$ . Le vecteur de base monomial est donné par :  $H(\rho_1) = [1 \ \rho_1]^T$ . La condition  $\rho_1 \leq a$  est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.34)$$

Cette condition est généralisable au cas où plusieurs paramètres sont présents de la manière suivante. Introduisons la contrainte scalaire :

$$H^T(\rho) \tilde{G}_i H(\rho) = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2a_i & q_1 & \cdot & \cdot & \cdot & q_l \\ q_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ q_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_l & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_l \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.35)$$

Nous avons alors, pour chaque paramètre  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  :

$$\rho_i \leq a_i \iff q_i = 1 \quad \text{et} \quad q_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, l, \quad j \neq i \quad (4.36)$$

*ii)* Contrainte  $\rho_i \geq b$  :

La contrainte de valeur minimale sur un paramètre  $\rho_i \geq b_i$  peut être modélisée de la même manière que la contrainte de valeur maximale présentée ci-dessus. Introduisons pour ce faire la contrainte scalaire suivante :

$$H^T(\rho)\tilde{F}_i H(\rho) = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2b_i & p_1 & \cdot & \cdot & \cdot & p_l \\ p_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ p_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_l & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_l \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.37)$$

Pour un paramètre  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , nous avons :

$$\rho_i \geq b_i \iff p_i = -1 \quad \text{et} \quad p_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, l, \quad j \neq i \quad (4.38)$$

On remarque la structure particulière des matrices  $\tilde{G}_i$  et  $\tilde{F}_i$ , dont tous les éléments sont nuls, sauf le premier élément de la diagonale principale, le  $(i+1)^{\text{ème}}$  élément de la première ligne et le  $(i+1)^{\text{ème}}$  élément de la première colonne. Cette structure permet la sélection du paramètre variant  $\rho_i$  à contraindre.

### Cas des contraintes centrées

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que les contraintes sur les bornes d'un paramètre  $\rho_i$  sont traitées séparément lorsque les bornes  $a_i$  et  $b_i$  prennent des valeurs quelconques. Si les contraintes sont centrées :  $a_i = -b_i = M_i > 0$ , une seule condition est suffisante pour satisfaire les deux inégalités dans (4.33). En effet, pour chaque paramètre  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , nous avons :

$$b_i \leq \rho_i \leq a_i \iff -M_i \leq \rho_i \leq M_i \iff |\rho_i| < M_i \iff \rho_i^2 < M_i^2 \quad (4.39)$$

Il est intéressant de remarquer que la dernière relation d'équivalence dans (4.39) décrit la contrainte de borne comme un carré du paramètre, ce qui n'était pas possible dans la description précédente. Cela a pour conséquence de remplacer les matrices  $\tilde{G}_i$  et  $\tilde{F}_i$  par une matrice diagonale  $D_i$ . Considérons donc la contrainte scalaire :

$$H^T(\rho)\tilde{F}_i H(\rho) = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M_i^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & r_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & r_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_l \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.40)$$

Pour chaque paramètre  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , nous avons :

$$|\rho_i| \leq M_i \iff r_i = 1 \quad \text{et} \quad r_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, l, \quad j \neq i \quad (4.41)$$

### 4.3.3.3 Ellipsoïdes paramétriques

#### Cas centré

Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^l$ , un ellipsoïde paramétrique est un ensemble convexe défini par la contrainte :

$$B(\rho) = -1 + \frac{1}{a_1^2} \rho_1^2 + \dots + \frac{1}{a_l^2} \rho_l^2 \leq 0 \quad (4.42)$$

où  $a_1, \dots, a_l > 0$  sont les longueurs des demi-axes suivant chaque direction.

Cette contrainte est factorisée de la manière suivante :

$$H^T(\rho) \tilde{B} H(\rho) = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1^2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_2^2} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{a_l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_l \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.43)$$

Dans le cas particulier où  $a_i = 1, \forall i = 1, \dots, l$ , l'ellipsoïde est une boule dans l'espace euclidien de dimension  $l$ . Elle contient tous les points dont la distance euclidienne par rapport au centre  $\rho^c = 0$  est inférieure à 1.

#### Cas non centré

Si le centre de l'ellipsoïde est un point non nul quelconque  $\rho^c = [\rho_1^c \dots \rho_l^c]^T \in \mathbb{R}^l$ , alors l'équation (4.42) de l'ellipsoïde est modifiée de la manière suivante :

$$B(\rho) = -1 + \frac{1}{a_1^2} (\rho_1 - \rho_1^c)^2 + \dots + \frac{1}{a_l^2} (\rho_l - \rho_l^c)^2 \leq 0 \quad (4.44)$$

Cette inégalité se factorise naturellement sous la forme  $B(\rho) = H_c^T(\rho) \tilde{B} H_c(\rho)$ , où  $\tilde{B}$  a l'expression donnée dans (4.43) et  $H_c^T(\rho) = [1 \ (\rho_1 - \rho_1^c) \dots (\rho_l - \rho_l^c)]$ , ce qui constitue une différence notable avec les hyperrectangles paramétriques pour lesquels le centrage des contraintes modifie de manière importante la structure des matrices de la décomposition. Cela provient du caractère quadratique de la dépendance paramétrique des ellipsoïdes. Dans le cas où l'on souhaite garder la matrice de base monomiale  $H(\rho)$  au lieu de la nouvelle base centrée  $H_c(\rho)$ , ce qui se produit lorsque des contraintes de différents types sont associées (hyperrectangles et ellipsoïdes

par exemple), des termes non-diagonaux font leur apparition dans la matrice  $\tilde{B}$ .

Nous aimerions conclure cette partie en soulignant l'intérêt des factorisations quadratiques d'ensembles semi-algébriques que nous venons de présenter. Ce type de représentation est assez générique car les ensembles considérés ainsi que leurs combinaisons sont capables de décrire ou d'approximer de manière précise l'espace paramétrique d'un système. De plus, un grand intérêt de ce type de modélisation réside dans sa simplicité d'exploitation numérique, en particulier lorsqu'elle est utilisée en association avec des relaxations en sommes de carrés (SOS) matricielles et la S-procédure.

## 4.4 Analyse de robustesse avec les relaxations SOS matricielles

Une analyse de stabilité sur des hyperrectangles paramétriques définis par les valeurs min et max de chaque paramètre peut introduire un certain degré de conservatisme. En effet, une telle description sous-entend que les paramètres variants seraient indépendants les uns des autres. Or, cela n'est pas toujours le cas dans les applications pratiques. Dans notre système, par exemple, les paramètres sont liés deux à deux par des relations trigonométriques exactes.

Une meilleure approximation de l'espace de fonctionnement réel permet de réduire le conservatisme lié à l'analyse de stabilité et de performance sur un domaine paramétrique plus large, car ce dernier inclurait alors des zones jamais atteintes par les paramètres variants. La version matricielle de la S-procédure, dite *de plein bloc*, permet de restreindre l'analyse sur des ensembles semi-algébriques définis par des contraintes polynomiales, voire rationnelles.

### 4.4.1 Limites de la scalarisation de contraintes matricielles

Tout problème d'optimisation matricielle peut être décrit de manière équivalente par un ensemble de problèmes d'optimisation scalaires. Cependant, cette démarche, appelée *scalarisation*, présente certaines limitations que nous voudrions souligner dans le présent paragraphe. Une matrice  $\mathcal{M}$  est semi-définie positive si et seulement si la forme quadratique associée est globalement non négative. Autrement dit, pour une matrice symétrique  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , potentiellement dépendant des paramètres :

$$\mathcal{M} \succeq 0 \iff z^T \mathcal{M} z \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}^m \quad (4.45)$$

L'introduction de variables de décision supplémentaires  $z$  a cependant pour effet d'augmenter la complexité numérique. Cette approche a été utilisée dans [Wu05] à des fins d'analyse et de synthèse de correcteurs LPV.

Une autre manière de scalariser un problème matriciel se base sur la définition de la semi-définie positivité d'une matrice faisant appel aux mineurs principaux. En effet, une matrice symétrique  $\mathcal{M}(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux  $h_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, 2^m - 1$  sont globalement non négatifs.

$$\mathcal{M}(x) \succeq 0 \iff h_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, 2^m - 1 \quad (4.46)$$

Bien que la condition de semi-définie positivité est généralement entendue au sens global, c.à.d. pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , cette contrainte peut permettre de délimiter un sous-ensemble de l'espace des variables de décision, constitué des variables  $x$  vérifiant la contrainte  $\mathcal{M}(x) \succeq 0$  ou de

manière équivalente, des variables  $x$  vérifiant les contraintes scalaires  $h_i(x)$ .

Ainsi, pour des matrices symétriques  $F(x, y) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et  $G(x) \in \mathbb{R}^{q \times q}$ , le problème SDP suivant :

$$\text{Minimiser } c^T y \quad (4.47a)$$

$$\text{sous } F(x, y) \succ 0 \quad (4.47b)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } G(x) \preceq 0 \quad (4.47c)$$

est équivalent au programme à contraintes scalaires suivant, impliquant des variables additionnelles contenues dans le vecteur  $v \in \mathbb{R}^p$  :

$$\text{Minimiser } c^T y \quad (4.48a)$$

$$\text{sous } f(v, x, y) = v^T F(x, y)v \geq 0 \quad (4.48b)$$

$$\forall (x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \text{ satisfaisant } h_i(v, x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, r + 2 \quad (4.48c)$$

où  $h_i(v, x), i = 1, \dots, r = 2^l - 1$  sont les mineurs principaux de la matrice  $G(x)$ ,  $h_{r+1}(v, x) = 1 - v^T v$  et  $h_{r+2}(v, x) = v^T v - 2$ .

La contrainte (4.48b) résulte d'une scalarisation de (4.47b) par la forme quadratique associée et la contrainte (4.48c) résulte d'une scalarisation de (4.47c) par les mineurs principaux.

Cependant, comme cela a été souligné dans [Hol05, Scherer06b], le degré des mineurs  $h_i(x), i = 1, \dots, r$  de la matrice  $G(x)$  est potentiellement beaucoup plus élevé que le degré des composantes scalaires de  $G(x)$ . Ceci a pour effet d'augmenter la longueur des bases monomiales utilisées pour la factorisation SOS du problème scalarisé (4.48a)-(4.48c) et par voie de conséquence, la taille de la LMI résultant de cette relaxation, ce qui peut engendrer des difficultés de résolution numérique. Cet obstacle est levé par les relaxations SOS matricielles qui n'induisent pas d'augmentation de degré des polynômes de contraintes.

#### 4.4.2 Version matricielle de la S-procédure

Le théorème de la S-procédure de plein bloc généralise la S-procédure au cas pleinement matriciel [Scherer01]. Un avantage important introduit par ce théorème a été la généralisation de la description LFR de modèles dépendant des paramètres, obtenue en relâchant les contraintes de structure sur la matrice paramétrique  $\Delta(\rho)$ . Cette formulation présente des similitudes avec la notion de séparation quadratique introduite dans [Iwasaki97] et [Iwasaki01].

Nous rappellerons ci-après ce théorème avant de l'appliquer, dans un contexte de relaxations SOS matricielles, à notre problème d'analyse et de commande des systèmes LPV polynomiaux, suivant l'approche proposée dans [Scherer06b] et [Dietz06].

**Théorème 4.1** (S-procédure de plein bloc). *Soit  $\mathcal{B}$  un sous espace de  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{q \times n}$  et  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Soit la famille de sous-espaces  $\mathcal{S}(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$  dépendant de manière continue de  $\Delta \in \nabla$ . Soit l'ensemble  $\mathcal{B}(\Delta) = \{x \in \mathcal{B} : Vx \in \mathcal{S}(\Delta)\}$ . Les propositions suivantes sont alors équivalentes :*

$$1) \quad U^T Q U \prec 0 \text{ sur } \mathcal{B}(\Delta), \Delta \in \nabla \quad (4.49)$$

$$2) \quad \exists P = P^T \succ 0 \text{ sur } \mathcal{S}(\Delta) \text{ telle que : } U^T Q U + V^T P V \prec 0 \text{ sur } \mathcal{B} \quad (4.50)$$

La preuve de ce théorème est donnée dans [Scherer01].

Ce théorème peut paraître abstrait à première vue. Nous pouvons cependant donner l'explication simplifiée suivante, orientée vers notre application. Le but, exprimé par la condition (4.49), est de satisfaire la contrainte locale  $x^T U^T Q U x < 0, \forall x \in \mathcal{B}(\Delta)$ . Cela peut se faire à travers la satisfaction de la contrainte  $x^T (U^T Q U + V^T P V) x < 0$ , donnée dans (4.50), sur un ensemble plus large  $\mathcal{B}$ . Pour l'application à l'analyse et la synthèse de systèmes LPV polynomiaux, l'ensemble  $\mathcal{B}(\Delta)$  désigne typiquement les ensembles semi-algébriques dans lesquels évoluent les paramètres et l'ensemble  $\mathcal{B}$  peut être égal à  $\mathbb{R}^n$ . Dans ce cas la condition (4.50) est globale et peut se traduire par la contrainte LMI :  $U^T Q U + V^T P V \prec 0$ . L'optimisation d'un objectif linéaire, représentant par exemple l'indice de performance  $\mathcal{H}_\infty$  du système, peut être exigée sous ces contraintes.

### Implémentation avec les relaxations SOS matricielles

Nous utiliserons des ensembles semi-algébriques définis de la manière suivante :

$$G_k = \{(\rho, \dot{\rho}) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l : g_k(\rho, \dot{\rho}) \leq 0\} \quad (4.51)$$

Les  $g_k(\rho, \dot{\rho}), k = 1, \dots, K$  sont des polynômes multivariés des paramètres variants et leurs dérivées temporelles. Considérons l'intersection de ces ensembles :

$$G = G_1 \cap \dots \cap G_K \quad (4.52)$$

L'ensemble  $G$  peut être caractérisé de la manière suivante :

$$G = \{(\rho, \dot{\rho}) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l : G_d(\rho, \dot{\rho}) \preceq 0\} \quad (4.53)$$

où la matrice  $G_d(\rho, \dot{\rho})$  est obtenue par concaténation diagonale des polynômes de contraintes scalaires  $g_k(\rho, \dot{\rho})$  :

$$G_d(\rho, \dot{\rho}) = \begin{bmatrix} g_1(\rho, \dot{\rho}) & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & g_2(\rho, \dot{\rho}) & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & g_K(\rho, \dot{\rho}) \end{bmatrix}.$$

Définissons maintenant la contrainte LMI suivante, dépendant des paramètres sur un domaine restreint :

$$\mathcal{M}(\rho, \dot{\rho}) = \mathcal{M}^T(\rho, \dot{\rho}) \succ 0, \quad \forall (\rho, \dot{\rho}) \in G \quad (4.54)$$

**Corollaire 4.1.** La condition (4.54) est vérifiée si il existe des matrices  $Z_k = Z_k^T \succeq 0$ ,  $k = 1, \dots, K$  et un scalaire  $\lambda > 0$  tels que :

$$\mathcal{M}'(\rho, \dot{\rho}) = \mathcal{M}(\rho, \dot{\rho}) + \sum_{k=1}^K Z_k g_k(\rho, \dot{\rho}) - \lambda I \text{ est SOS} \quad (4.55)$$

Ce corollaire est une conséquence directe de la S-procédure de plein bloc avec l'analogie informelle suivante. La PD-LMI  $\mathcal{M}(\rho, \dot{\rho})$  à vérifier sur  $G$  est l'analogue de la contrainte locale  $U^T Q U$  à satisfaire sur  $\mathcal{B}(\Delta)$ . Les multiplicateurs symétriques  $Z_k \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$  sont regroupés dans la matrice  $P$ , le terme  $\sum_{k=1}^K Z_k g_k(\rho, \dot{\rho})$  étant l'analogue de  $V^T P V$ . L'équivalence entre les propositions (4.49) et (4.50) est remplacée par une implication à cause de la relaxation SOS matricielle d'un problème de semi-définie positivité. Ce corollaire peut également être vu comme une relaxation lagrangienne matricielle du problème (4.54), suivi d'une relaxation SOS matricielle.

Dans le cas général, une matrice  $M(x)$  est SOS si elle admet une décomposition spectrale de la forme  $M(x) = H^T(x) Q H(x)$ , où  $Q = Q^T \succ 0$ . Cela sera détaillé dans le paragraphe suivant. Le terme  $\lambda I$ , destiné à assurer une inégalité stricte, peut être remplacé par  $H^T(x) \lambda I H(x)$  pour faciliter la résolution numérique. Les matrices symétriques  $Z_k$  sont appelées *multiplicateurs SOS matriciels*, qui peuvent également dépendre des paramètres.

Supposons maintenant qu'un objectif d'optimisation est associé à la contrainte LMI (4.54). La convergence asymptotique de l'optimum du problème relaxé (4.55) vers l'optimum du problème original (4.54) est assurée lorsque le degré des multiplicateurs  $Z_k$  croît, si la qualification de contraintes suivante, impliquant la matrice  $G_d(\rho, \dot{\rho})$ , est satisfaite [Scherer06b] :

**Qualification de contraintes :**  $\exists r > 0$  et une matrice SOS  $R(\vartheta)$  tels que :

$$r - \|\vartheta\|^2 + \text{trace}(R(\vartheta)G(\vartheta)) \text{ est SOS} \quad (4.56)$$

avec la notation  $\vartheta = [\rho^T \ \dot{\rho}^T]^T$ .

**Factorisation spectrale : passage d'un SOSP (programme SOS) à un SDP (programme semi-défini)**

Supposons qu'une matrice symétrique  $\mathcal{M}(\vartheta) \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ ,  $\forall \vartheta \in \mathbb{R}^{2l}$  (typiquement  $\vartheta = [\rho^T \ \dot{\rho}^T]^T$ ) dépend des paramètres et de leurs dérivées de manière polynomiale. Cette matrice est une somme de carrés si il existe une matrice  $T(\vartheta) \in \mathbb{R}^{n_m \times n_p}$  (avec typiquement  $n_m > n_p$ ) vérifiant :

$$\mathcal{M}(\vartheta) = T^T(\vartheta)T(\vartheta) \quad (4.57)$$

La recherche d'une matrice  $T(\vartheta)$  vérifiant (4.57) est toutefois difficile car cette contrainte est non-convexe (BMI) et de dimension infinie (dépendance paramétrique). Une approche pratique pour le calcul consiste à utiliser un vecteur de base monomiale  $H(\vartheta) = [h_1(\vartheta) \dots h_{n_h}(\vartheta)]^T$ , où les  $h_i(\vartheta)$ ,  $i = 1, \dots, n_h$  sont typiquement des monomes scalaires, puis à chercher la matrice  $T(\vartheta)$  sous la forme factorisée :

$$T(\vartheta) = R(H(\vartheta) \otimes I_{n_p}) \quad (4.58)$$

où  $R = [R_1 \dots R_{n_h}]$  et  $\otimes$  symbolise le produit de Kronecker des matrices.

En substituant (4.58) dans (4.57) et en posant le changement de variable  $Q = R^T R$ , l'existence d'une décomposition SOS pour la matrice  $\mathcal{M}(\vartheta)$  équivaut à la condition suivante :

$$\mathcal{M}(\vartheta) = (H(\vartheta) \otimes I_{n_p})^T Q (H(\vartheta) \otimes I_{n_p}) \quad \text{avec} \quad Q \succeq 0 \quad (4.59)$$

La matrice  $H(\vartheta)$  étant connue, cette condition est une LMI de la variable matricielle symétrique  $Q$ , de dimension  $(n_h \cdot n_p) \times (n_h \cdot n_p)$ .

Revenons maintenant à la condition (4.55). Si la matrice  $\mathcal{M}(\rho, \dot{\rho})$  admet la factorisation  $\mathcal{M}(\rho, \dot{\rho}) = H^T(\rho, \dot{\rho}) Q H(\rho, \dot{\rho})$  et les polynômes décrivant les contraintes admettent des factorisations de la forme  $g_k(\rho, \dot{\rho}) = H^T(\rho, \dot{\rho}) \tilde{G}_k H(\rho, \dot{\rho})$ , alors cette contrainte est satisfaite si :

$$Q' = Q + \sum_{k=1}^K (\tilde{G}_k \otimes Z_k) - \lambda I_{n_h \cdot n_p} \succ 0 \quad (4.60)$$

Nous tenons à signaler, qu'à la différence d'une résolution aux sommets de l'espace paramétrique dans le cas d'un domaine polytopique, pour laquelle le nombre de LMI est égal au nombre de sommets du polytope convexe ( $2^l$ , où  $l$  est le nombre de paramètres, dans le cas de l'hyperrectangle min-max, voire un nombre potentiellement beaucoup plus grand avec l'enveloppe convexe de l'ensemble paramétrique d'un ensemble non-convexe), la relaxation en sommes de carrés matricielles conduit à une seule LMI quels que soient le nombre de paramètres et le nombre de domaines paramétriques considérés. Ceci constitue à notre avis un avantage majeur de cette approche de résolution de LMI dépendant des paramètres.

Cependant, la méthode de résolution par les relaxations SOS matricielles souffre de quelques inconvénients. Le plus important à nos yeux est la taille de la LMI finale à satisfaire qui est de  $(n_h \cdot n_p) \times (n_h \cdot n_p)$ , où  $n_h$  est la longueur du vecteur de la base monomiale choisie  $H(\vartheta)$ , contre seulement  $n_p \times n_p$  pour la résolution aux sommets. La manière de choisir  $H(\vartheta)$  n'étant pas unique, ce choix doit être fait de façon à avoir une longueur  $n_h$  la plus faible possible afin de réduire la taille de la matrice  $Q$  et diminuer ainsi le nombre de variables de décision. Un autre point faible est le conservatisme introduit par la relaxation SOS elle-même, toutes les matrices semi-définies positives n'admettant pas nécessairement de décomposition SOS. Il est possible dans ce cas de jouer sur le degré des multiplicateurs  $Z_k$  afin de trouver une telle décomposition.

### 4.4.3 Synthèse de correcteur nominal

Dans des applications pratiques où l'espace de travail du robot est relativement étroit telles que la robotique médicale, une approche courante consiste à synthétiser un correcteur linéaire pour un point de fonctionnement nominal. Une analyse *a posteriori* de stabilité et de performance sur un espace de travail plus large, permet ensuite de valider la loi de commande synthétisée. Cette action peut être vue comme une opération d'analyse de robustesse par rapport à des incertitudes de modèle représentant l'éloignement du point de fonctionnement réel par rapport au point de fonctionnement nominal pour lequel le correcteur a été synthétisé.

Considérons donc un point de fonctionnement déterminé par une valeur nominale du vecteur de paramètres  $\rho^N = [\rho_1^N \ \rho_2^N \ \rho_3^N \ \rho_4^N]^T$  du modèle (4.17). En nous basant sur le modèle linéaire correspondant  $\tilde{\Sigma}_N(s) : \{\tilde{A}_N, \tilde{B}_N, \tilde{C}_N, 0\}$ , nous pouvons synthétiser un correcteur LTI (linéaire et invariant dans le temps)  $K_N(s)$  en utilisant une des méthodes classiques de synthèse

avec garantie de performance  $\mathcal{H}_\infty$ .

Nous utiliserons le modèle de synthèse augmenté suivant, schématisé dans la Figure 4.3, qui contient un canal de performance  $\mathcal{H}_\infty$  dont l'entrée est  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  et la sortie est  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ . Le vecteur d'état augmenté est  $x_1(t) = [\tilde{x}^T(t) \ x_w^T(t)]^T$ , où  $x_w(t)$  contient les états du filtre de pondération multivariable  $W_1(s)I_2$  de réalisation  $\{A_w, B_w, C_w, D_w\}$  dans l'espace d'état.

$$\Sigma_1(s) : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{x}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 & 0 \\ B_w C_a & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_w D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^* \\ \dot{\theta}^* \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z \\ e_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{wa} C_a & C_{wa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_w \end{bmatrix} + D_{wa} D_a \begin{bmatrix} F^* \\ \dot{\theta}^* \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.61)$$

$$\text{où } e_F(t) = F^*(t) - F(t), B_a = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_0 \end{bmatrix}, C_a = -\tilde{C}_0, D_a = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, C_{wa} = \begin{bmatrix} C_w \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } D_{wa} = \begin{bmatrix} D_w \\ I \end{bmatrix}.$$

Le réglage adéquat du filtre  $W_1(s)$  permet d'imposer au système asservi : une marge de module minimum  $M_m$ , une bande passante minimum  $\omega_c$  et une erreur relative de position maximum  $E_p$ .

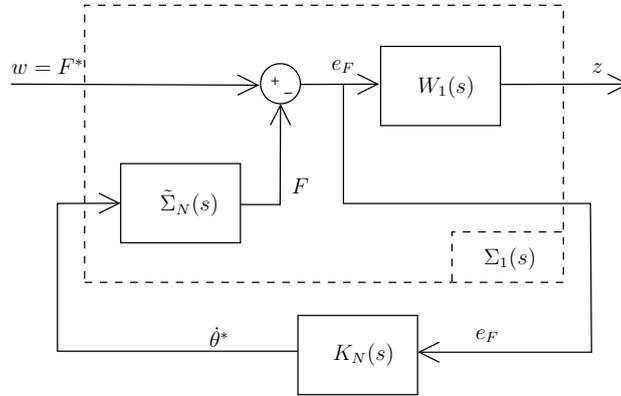


FIGURE 4.3 – Schéma de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  nominale

#### 4.4.4 Analyse de robustesse en performance $\mathcal{H}_\infty$

Le correcteur LTI  $K_N(s) : \{A_{K_N}, B_{K_N}, C_{K_N}, 0\}$  est connecté avec le système LPV  $\tilde{\Sigma}(s, \rho)$  dans une boucle de rétroaction. Le système asservi pondéré résultant sera noté  $\tilde{\Sigma}_{Cl}(s, \rho) : \{\tilde{A}_{Cl}(\rho), \tilde{B}_{Cl}, \tilde{C}_{Cl}, \tilde{D}_{Cl}\}$ , où le vecteur d'état est :  $\tilde{x}_{Cl}(t) = [x_1^T(t) \ x_K^T(t)]^T$  de dimension  $\tilde{n}$ ,  $x_K^T(t)$  contenant les états du correcteur. Le schéma d'analyse de robustesse en performance  $\mathcal{H}_\infty$  est obtenu en remplaçant  $\tilde{\Sigma}_N(s)$  par  $\tilde{\Sigma}(s, \rho)$  dans la Figure 4.3.

L'approche proposée pour l'analyse de robustesse consiste à appliquer une relaxation SOS matricielle, telle que définie dans le corollaire 4.1, au lemme borné réel rappelé ci-dessous. L'analyse locale se fait sur l'ensemble paramétrique  $\mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$ , donné par la réunion des ensembles semi-algébriques définis dans (4.23)-(4.26).

**Lemme borné réel dépendant des paramètres** [Gahinet96] : Le système bouclé pondéré  $\tilde{\Sigma}_{Cl}(s, \rho)$  est stable et a un indice de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  inférieur à  $\gamma > 0$  si il existe une matrice  $X(\rho) = X^T(\rho) \succ 0$  satisfaisant la LMI dépendant des paramètres suivante,  $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$  :

$$\mathcal{M}(\rho, \dot{\rho}) = \begin{bmatrix} He\{X(\rho)\tilde{A}_{Cl}(\rho)\} + \sum_k \dot{\rho}_k \frac{\partial X(\rho)}{\partial \rho_k} & * & * \\ \tilde{B}_{Cl}^T X(\rho) & -\gamma I & * \\ \tilde{C}_{Cl} & \tilde{D}_{Cl} & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.62)$$

Le problème d'analyse de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  peut donc être résolu par le problème SDP de dimension infinie donné dans (4.62), dont la contrainte LMI est notée  $\mathcal{M}(\rho, \dot{\rho}) \prec 0$ ,  $(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$ . Une relaxation SOS de la forme donnée dans (4.55) est effectuée afin de reformuler (4.62) en un problème SDP de dimension finie.

La condition  $\mathcal{M}(\rho, \dot{\rho}) \prec 0, \forall(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$  est alors satisfaite si il existe des matrices  $Z_k = Z_k^T \succeq 0, k = 1, \dots, K$  et un scalaire  $\lambda > 0$  tels que :  $-\mathcal{M}(\rho, \dot{\rho}) + \sum_{k=1}^K Z_k g_k(\rho, \dot{\rho}) - \lambda I$  admet une décomposition en sommes de carrés matricielles.

#### 4.4.5 Application au modèle de robot flexible

##### 4.4.5.1 Décomposition monomiale de la boucle fermée

**Mise en œuvre proposée** : Afin de simplifier les calculs, nous considérerons une matrice de Lyapunov constante  $X = X^T \succ 0$ . De plus, nous prendrons  $H(\rho) = \text{diag}(H_1(\rho), I_2, I_2)$  pour la factorisation spectrale, où  $H_1(\rho) = H_2(\rho) \otimes I_{\tilde{n}}$  avec  $H_2(\rho) = [1 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3 \ \rho_4]^T$ . Ceci donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\rho) &= H^T(\rho) Q H(\rho) \\ &= \begin{bmatrix} H_1^T(\rho) Q_{11} H_1(\rho) & H_1^T(\rho) Q_{21}^T & H_1^T(\rho) Q_{31}^T \\ Q_{21} H_1(\rho) & Q_{22} & Q_{32}^T \\ Q_{31} H_1(\rho) & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Des outils logiciels permettant d'effectuer la factorisation spectrale sont disponibles. La boîte à outils SOSTOOLS [Prajna04a], considère une scalarisation du problème matriciel. Toutefois, la décomposition est faite ici manuellement.

En examinant (4.62), une décomposition monomiale de chaque bloc  $\mathcal{M}_{ij}, i, j = 1, \dots, 3$  de la matrice  $\mathcal{M}(\rho)$  est donnée par :  $\mathcal{M}_{11} = He\{X\tilde{A}_{Cl}(\rho)\} = He\{XA_0^{cl} + XA_1^{cl}\rho_1 + XA_2^{cl}\rho_2 + XA_4^{cl}\rho_4 + XA_{11}^{cl}\rho_1^2 + XA_{12}^{cl}\rho_1\rho_2 + XA_{14}^{cl}\rho_1\rho_4 + XA_{23}^{cl}\rho_2\rho_3 + XA_{34}^{cl}\rho_3\rho_4\}$ , où les matrices  $A_0^{cl}, A_1^{cl}, A_2^{cl}, A_4^{cl}, A_{11}^{cl},$

$A_{12}^{cl}, A_{14}^{cl}, A_{23}^{cl}$  et  $A_{34}^{cl} \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$  résultent d'une décomposition monomiale de  $\tilde{A}_{Cl}(\rho)$ .

$H_1^T(\rho)Q_{11}H_1(\rho)$  est une factorisation spectrale de  $\mathcal{M}_{11}$  où :

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} He\{XA_0^{cl} - \sigma_{13} - \sigma_{24}\} & XA_1^{cl} & XA_2^{cl} & 0 & XA_4^{cl} \\ * & He\{XA_{11}^{cl} + \sigma_{13}\} & XA_{12}^{cl} & 0 & XA_{14}^{cl} \\ * & * & He\{\sigma_{24}\} & XA_{23}^{cl} & 0 \\ * & * & * & He\{\sigma_{13}\} & XA_{34}^{cl} \\ * & * & * & * & He\{\sigma_{24}\} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Notons que des variables matricielles additionnelles  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{24} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$  ont été utilisés afin d'éviter l'apparition de termes diagonaux nuls dans  $Q_{11}$ , ce qui rendrait la condition  $Q \succeq 0$  difficile à satisfaire. L'introduction de ces matrices n'a pas d'effet sur la valeur de  $\mathcal{M}_{11}$  à cause des relations algébriques liant les paramètres dans (4.19)-(4.20). Les autres matrices de la décomposition sont :  $Q_{21} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{Cl}^T X & 0_{2 \times 4\tilde{n}} \end{bmatrix}$ ,  $Q_{22} = -\gamma I_{n_w}$ ,  $Q_{31} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{Cl} & 0_{2 \times 4\tilde{n}} \end{bmatrix}$ ,  $Q_{32} = \tilde{D}_{Cl}$  et  $Q_{33} = -\gamma I_{n_z}$ .

Les ensembles semi-algébriques  $G_{ij}, i, j = 1, 2$  dans (4.23)-(4.26) admettent les factorisations  $H_2^T(\rho)\tilde{G}_{ij}H_2(\rho)$ , où :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{11} &= \text{diag}(-R_M^2, 1, 0, 1, 0) \\ \tilde{G}_{12} &= \text{diag}(R_m^2, -1, 0, -1, 0) \\ \tilde{G}_{21} &= \text{diag}(-R_M^2, 0, 1, 0, 1) \\ \tilde{G}_{22} &= \text{diag}(R_m^2, -1, 0, -1, 0). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Les termes  $Z_{ij}g_{ij}(\rho)$  utilisés dans (3.85) pourront de ce fait se factoriser en tant que :  $H_1^T(\rho)(\tilde{G}_{ij} \otimes Z_{ij})H_1(\rho)$ . Finalement, la LMI implémentée est  $-Q + \sum_{i,j=1}^2 (\tilde{G}_{ij} \otimes Z_{ij}) - \lambda I \succeq 0$ .

#### 4.4.5.2 Résultats de simulation

Nous avons appliqué la méthodologie proposée à un modèle identifié d'un robot flexible de la forme (4.17) où la longueur des segments est  $l_1 = l_2 = 0.5$  m. Un correcteur  $\mathcal{H}_\infty$  noté  $K_N(s)$  est synthétisé pour le point de fonctionnement défini par  $\rho^N = \frac{\sqrt{2}}{2}[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  qui correspond à la configuration  $(\theta_1, \theta_2) = (45^\circ, 45^\circ)$  et à la position terminale  $F = [X \ Y]^T = [0.3536 \text{ m} \ 0.8536 \text{ m}]^T$ . Un schéma de synthèse 1-bloc (Figure 4.3) est utilisé, dans lequel  $W_1(s)$  assure les caractéristiques suivantes :  $M_{mod} = 0.65$ ,  $\omega_c = 20 \text{ rad.sec}^{-1}$  et  $E_p = 10^{-2}$ .

En utilisant la méthode de synthèse LMI disponible dans MATLAB (fonction `hinfsyn`), l'indice de performance garanti est  $\gamma_{syn} = 1.0581$ . Dans la Figure 4.4, la fonction de sensibilité  $S_y(s) = T_{r \rightarrow e}(s)$  est comparée au gabarit fréquentiel  $\frac{\gamma}{W_1(s)}$ . La Figure 4.5 illustre les résultats de

simulations temporelles effectuées avec le système LPV  $\tilde{\Sigma}(s, \rho)$  et le correcteur nominal  $K_N(s)$ .

Une analyse de performance du système bouclé est effectuée en utilisant la méthode détaillée dans la partie 4.2 avec le filtre  $W_1(s)$  utilisé pour la synthèse. La LMI  $Q \succeq 0$  qui résulte de la relaxation SOS est résolue en utilisant le solveur numérique SeDuMi [Sturm99] associé à l'interface YALMIP [Löfberg04]. En appliquant l'algorithme d'analyse à l'ensemble admissible  $\mathcal{S}_\rho$  défini dans (4.23)-(4.26), la LMI résultante est infaisable. Cet échec n'est pas forcément dû au pessimisme de la méthode puisque des instabilités ont été observées en simulation pour ces conditions infaisables. Ceci montre l'insuffisance du correcteur nominal pour la satisfaction des performances requises sur une large plage de fonctionnement. Nous avons par conséquent restreint le domaine d'analyse  $\mathcal{S}_\rho$  à des arcs de cercle contenant le point de fonctionnement  $\rho^N$  et son voisinage. Autrement dit, nous ajoutons la contrainte  $\rho \in [\underline{\rho} \ \bar{\rho}]$  dans les conditions d'analyse, où  $\underline{\rho} = \rho^N(1 - \nu)$  et  $\bar{\rho} = \rho^N(1 + \nu)$ ,  $\nu > 0$ . La Figure 4.6 illustre le domaine d'analyse considéré. Par exemple, un choix de  $\nu = 0.1$  correspond à l'espace de travail  $\theta_1, \theta_2 \in [39^\circ \ 51^\circ]$ . Les indices de performance  $\gamma_{ana}$  obtenus sont donnés dans le Tableau 1 pour des tolérances de  $\nu = 0.01$  et  $\nu = 0.04$ . On observe clairement une dégradation de l'indice de performance garanti par la synthèse, et ce à cause de l'analyse sur un ensemble plus large. Un autre test d'analyse est effectuée au voisinage immédiat de  $\rho^N$ , en prenant  $\nu = 0.0001$ . L'indice  $\gamma_{ana}$  obtenu, reporté sur la dernière ligne du Tableau 1 est légèrement inférieur au  $\gamma_{syn}$  garanti par la synthèse nominale. La taille de la LMI est de  $104 \times 104$ .

$\nu$	$\varepsilon$	$\gamma_{ana}$
0.1	0.01	1.4209
0.1	0.04	1.4232
0.0001	0	1.0012

Tableau 1 - Résultats d'analyse de performance

En conclusion, nous pensons que ces résultats préliminaires d'analyse de robustesse permettent de valider l'approche proposée utilisant les relaxations en sommes de carrés matricielles. Cependant, des difficultés de traitement numérique ont été observées pour des coefficients de largeur des domaines d'analyse supérieures à  $\nu = 0.1$ . Afin de lever ces difficultés, nous avons adopté, pour le problème de synthèse de correcteurs LPV, une représentation paramétrique alternative qui implique un centrage et par conséquent une représentation factorisée diagonale des hyperrectangles délimités par des contraintes min – max sur les paramètres. La synthèse de correcteurs LPV est discutée dans la prochaine section.

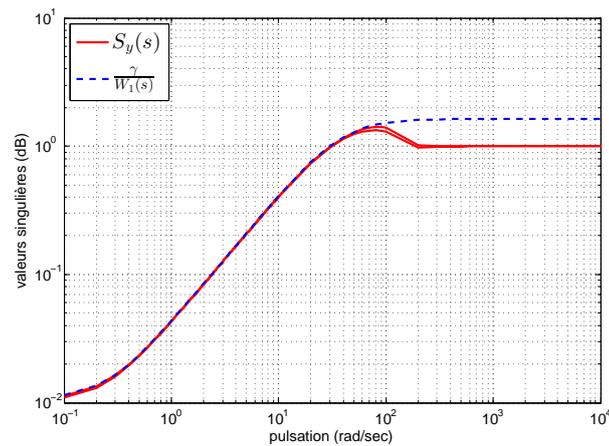


FIGURE 4.4 – Transferts fréquentiels réalisés

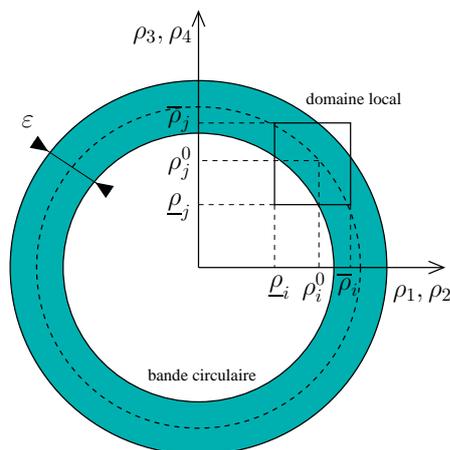


FIGURE 4.5 – Domaine d'analyse local

## 4.5 Synthèse de correcteurs LPV avec les relaxations SOS matricielles

Les relaxations en sommes de carrés matricielles peuvent également être utilisées pour la synthèse de correcteurs LPV. Bien que les relaxations SOS scalaires aient été utilisées dans diverses applications de synthèse de correcteurs pour les systèmes non-linéaires polynomiaux [Prajna04c, Prajna04b, Tan06], relativement peu de publications ont été consacrées à la synthèse de correcteurs LPV en utilisant les relaxations SOS [Dietz06, Henrion06, Gilbert10].

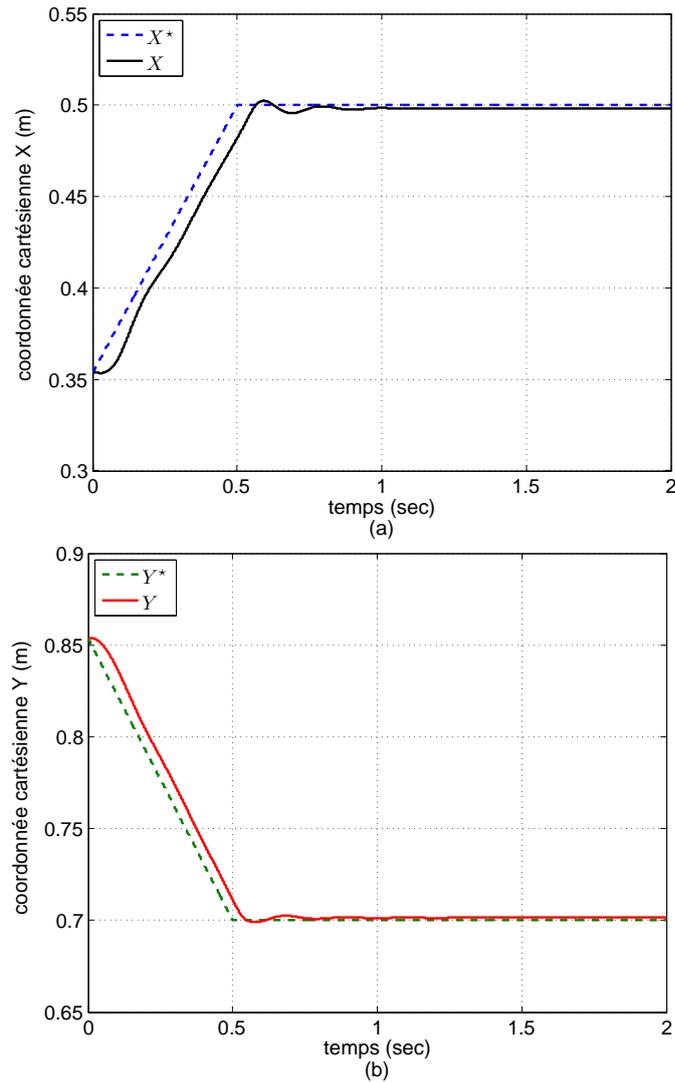


FIGURE 4.6 – Suivi des trajectoires de référence

#### 4.5.1 Synthèse de correcteurs LPV

Pour notre application d'asservissement en position de l'organe terminal d'un robot flexible, le problème de commande est un problème de synthèse de correcteur LPV par retour de sortie. A la différence de la synthèse nominale présentée dans le paragraphe 4.4.3, le modèle LPV  $\tilde{\Sigma}(s, \rho)$  donné dans (4.17) est directement utilisé pour la synthèse de correcteur LPV  $K(s, \rho) : \{A_K(\rho), B_K(\rho), C_K(\rho), 0\}$  sans aucune linéarisation locale. Cette démarche a le mérite de garantir *a priori*, c.à.d. dès l'étape de synthèse de correcteur, la stabilité et la performance du système sur un large espace de travail.

D'une manière similaire à la synthèse nominale, nous utiliserons le modèle de synthèse suivant, muni d'un canal de performance  $\mathcal{H}_\infty$  qui comporte une entrée  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  et une sortie  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ . Le vecteur d'état augmenté est  $x_1(t) = [\tilde{x}^T(t) \ x_w^T(t)]^T$ , où  $x_w(t)$  contient les états

du filtre de pondération multivariable  $W_1(s)I_2$  de réalisation  $\{A_w, B_w, C_w, D_w\}$  dans l'espace d'état.

$$\Sigma_1(s, \rho) : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{x}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\rho) & 0 \\ B_w C_a & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a(\rho) \\ B_w D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^* \\ \dot{\theta}^* \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z \\ e_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{wa} C_a & C_{wa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{wa} D_a \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^* \\ \dot{\theta}^* \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.66)$$

où  $e_F(t) = F^*(t) - F(t)$ ,  $B_a(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}(\rho) \end{bmatrix}$ ,  $C_a = -\tilde{C}$ ,  $D_a = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$ ,  $C_{wa} = \begin{bmatrix} C_w \\ 0 \end{bmatrix}$  et

$D_{wa} = \begin{bmatrix} D_w \\ I \end{bmatrix}$ . Le filtre  $W_1(s)$  est réglé de manière à imposer des exigences de performance au système asservi.

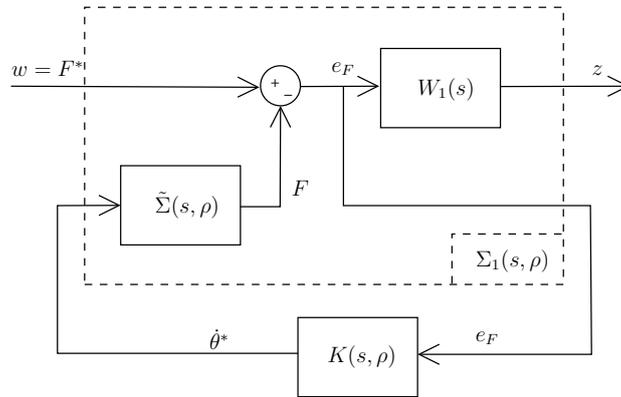


FIGURE 4.7 – Schéma de synthèse LPV/ $H_\infty$

#### 4.5.1.1 Synthèse avec des conditions LMI projetées

Dans [Dietz06], la synthèse LPV est faite en utilisant des relaxations SOS matricielles des conditions exprimées sous la forme de LMI projetées, proposées dans [Wu06], qui permettent d'éliminer les matrices du correcteur au niveau des conditions de synthèse. Le correcteur LPV est ensuite reconstruit à partir des solutions  $R(\rho)$  et  $S(\rho)$  de la LMI de synthèse, qui représentent une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres (PDLF), ainsi que des matrices d'état du système à asservir. Afin de résumer de manière brève cette méthode, introduisons la forme condensée suivante du modèle de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ e_F(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho) & B_1(\rho) & B_2(\rho) \\ C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & D_{12}(\rho) \\ C_2(\rho) & D_{21}(\rho) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ \dot{\theta}^*(t) \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

pour  $(\rho, \dot{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\dot{\rho}}$ .

De plus, les hypothèses suivantes doivent être vérifiées :

1. Le triplet  $(A(\rho), B_2(\rho), C_2(\rho))$  est stabilisable et détectable  $\forall \rho \in \mathcal{S}_\rho$ .
2. Les matrices  $[C_2(\rho) \ D_{21}(\rho)]$  et  $[B_2^T(\rho) \ D_{12}^T(\rho)]$  sont de plein rang colonnes sur  $\mathcal{S}_\rho$ .

L'existence d'un correcteur LPV ayant pour expression :

$$K(s, \rho) : \begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K(\rho)x_K(t) + B_K(\rho)e_F(t) \\ u(t) = C_K(\rho)x_K(t) + D_K(\rho)e_F(t) \end{cases} \quad (4.68)$$

qui assure la stabilité et un indice de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  du système bouclé en dessous d'un scalaire  $\gamma > 0$ , est garantie si il existe des matrices  $R(\rho)$  et  $S(\rho)$  satisfaisant les contraintes matricielles suivantes :

$$N_R^T(\rho) \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & R(\rho) & & & & \\ R(\rho) & -\dot{R}(\rho) & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \gamma^{-1}I & 0 & \\ & & & 0 & -\gamma I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T(\rho) & C_1(\rho) \\ I & 0 \\ B_1^T(\rho) & D_{11}^T(\rho) \\ 0 & I \end{bmatrix} N_R(\rho) \prec 0 \quad (4.69)$$

$$N_S^T(\rho) \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & S(\rho) & & & & \\ S(\rho) & \dot{S}(\rho) & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \gamma^{-1}I & 0 & \\ & & & 0 & -\gamma I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\rho) & B_1(\rho) \\ I & 0 \\ B_1(\rho) & D_{11}(\rho) \\ 0 & I \end{bmatrix} N_S(\rho) \prec 0 \quad (4.70)$$

$$\begin{bmatrix} R(\rho) & I \\ I & S(\rho) \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (4.71)$$

avec  $N_R(\rho) = \ker[B_2^T(\rho) \ D_{12}^T(\rho)]$  et  $N_S(\rho) = \ker[C_2(\rho) \ D_{12}(\rho)]$ , où  $\ker(M)$  désigne une base du noyau de la matrice  $M$ .

Pour simplifier le traitement numérique, la recherche des matrices  $R(\rho)$  et  $S(\rho)$  est restreinte aux matrices de la forme :  $R(\rho) = T_R^T(\rho)PT_R(\rho)$  et  $S(\rho) = T_S^T(\rho)QT_S(\rho)$ , où  $T_R(\rho)$  et  $T_S(\rho)$  sont des matrices à composantes polynomiales et  $P, Q$  des matrices symétriques constantes. De plus les contraintes (4.69)-(4.70) sont linéarisées par rapport à  $\gamma$  en appliquant le lemme du complément de Schur afin d'obtenir des PD-LMI, auxquelles des relaxations SOS matricielles sont finalement appliquées, ce qui permet de résoudre le problème de synthèse LPV en solvant un programme SDP de dimension finie. Les matrices d'état  $A_K(\rho)$ ,  $B_K(\rho)$ ,  $C_K(\rho)$  et  $D_K(\rho)$  du correcteur sont ensuite reconstruites à partir des solutions des LMI suivant la procédure décrite dans [Wu06].

Cette méthode de synthèse, qui présente des similitudes avec la méthode proposée dans [Apkarian98] utilisant le lemme de projection introduit dans [Gahinet94], a l'avantage de réduire le nombre de variables de décision étant donné que les variables liées au correcteur n'apparaissent pas explicitement. Cette approche souffre toutefois de quelques inconvénients dont les plus importants à notre avis sont :

- Elle nécessite un pré-traitement considérable des variables matricielles, notamment l'écriture des matrices  $R(\rho)$  et  $S(\rho)$  sous une forme particulière factorisée.
- Elle exige le calcul de noyaux de matrices dépendant des paramètres.

Il est utile de noter enfin que le calcul des noyaux des matrices dépendant des paramètres  $[B_2^T(\rho) D_{12}^T(\rho)]$  et  $[C_2(\rho) D_{12}(\rho)]$  peut être évité en utilisant le lemme de Finsler, tel qu'il a été établi dans [Apkarian00].

#### 4.5.1.2 Synthèse avec une caractérisation basique

Cette partie est dédiée à la synthèse de correcteurs assurant un indice de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  avec une caractérisation qualifiée de *basique* dans [Apkarian98], par opposition à l'approche par projection de contraintes décrite dans le paragraphe précédent. Cette méthode de synthèse, qui résulte d'une simple application du lemme borné réel à la représentation d'état de la boucle fermée, suivie de l'application de transformations de congruence qui linéarisent les contraintes BMI, est dépourvue des limitations et de la complexité conceptuelle de la méthode précédente.

Il a été établi dans [Apkarian98] que l'existence d'un correcteur LPV de représentation d'état (4.68) stabilisant le système bouclé et garantissant un indice de performance en gain  $\mathcal{L}_2$   $\gamma > 0$  est assurée si il existe des matrices symétriques  $X(\rho)$ ,  $Y(\rho)$  et des matrices  $\hat{A}_K(\rho)$ ,  $\hat{B}_K(\rho)$ ,  $\hat{C}_K(\rho)$  et  $D_K(\rho)$ , telles que,  $\forall(\rho, \hat{\rho}) \in \mathcal{S}_\rho \times \mathcal{S}_{\hat{\rho}}$  :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + XA + \hat{B}_K C_2 + (*) & * & * & * \\ \hat{A}_K + A + B_2 D_K C_2 & -\dot{Y} + AY + B_2 \hat{C}_K + (*) & * & * \\ (XB_1 + \hat{B}_K D_{21})^T & (B_1 + B_2 D_K D_{21})^T & -\gamma I & * \\ C_1 + D_{12} D_K C_2 & C_1 Y + D_{12} \hat{C}_K & D_{11} + D_{12} D_K D_{21} & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.72)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succ 0 \quad (4.73)$$

Toutes les matrices dans (4.72) et (4.73) dépendent potentiellement des paramètres. Cette dépendance a été omise afin de simplifier la notation.

Si les PD-LMI (4.72)-(4.73) sont faisables pour les matrices  $X(\rho)$ ,  $Y(\rho)$ ,  $\hat{A}_K(\rho)$ ,  $\hat{B}_K(\rho)$ ,  $\hat{C}_K(\rho)$  et  $D_K(\rho)$ , alors les matrices d'état du correcteur sont construites de la manière suivante :

1. Trouver des matrices  $N(\rho)$ ,  $M(\rho)$ , solutions du problème de factorisation :

$$I - X(\rho)Y(\rho) = N(\rho)M^T(\rho) \quad (4.74)$$

2. Calculer les matrices d'état  $A_K(\rho)$ ,  $B_K(\rho)$  et  $C_K(\rho)$  du correcteur suivant les formules :

$$A_K(\rho) = N^{-1}(X\dot{Y} + N\dot{M}^T + \hat{A}_K - X(A - B_2D_KC_2)Y - \hat{B}_KC_2Y - XB_2\hat{C}_K)M^{-T} \quad (4.75)$$

$$B_K(\rho) = N^{-1}(\hat{B}_K - XB_2D_K) \quad (4.76)$$

$$C_K(\rho) = (\hat{C}_K - D_KC_2Y) \quad (4.77)$$

On remarque que les variables matricielles  $\hat{A}_K(\rho)$ ,  $\hat{B}_K(\rho)$ ,  $\hat{C}_K(\rho)$  et  $D_K(\rho)$  associées au correcteur apparaissent explicitement dans la LMI de synthèse, contrairement à la méthode de projection. Cette méthode de synthèse utilise donc un nombre plus important de variables de décision. Cependant, pour des systèmes de taille relativement modérée, avec un ordre de grandeur de la dizaine de variables d'état pour les applications traitées dans ce travail, cet accroissement du nombre de variables de décision n'induit pas de problème de résolution numérique à l'aide des solveurs disponibles, dont SeDuMi est celui que nous avons le plus largement utilisé [Sturm99].

## 4.5.2 Application au modèle de robot flexible

### 4.5.2.1 Paramétrisation initiale

Dans le but de valider l'approche de commande proposée par des simulations numériques, nous utiliserons un modèle LPV identifié  $\bar{\Sigma}(s, \rho)$  du robot flexible considéré, tel que donné dans (4.13), où les matrices  $\bar{A}(\rho)$  et  $\bar{B}(\rho)$  sont polynomiales de degré 2 :

$$\bar{A}(\rho) = \bar{A}_0 + \rho_1\bar{A}_1 + \rho_1^2\bar{A}_{11} \quad (4.78)$$

$$\bar{B}(\rho) = \bar{B}_0 + \rho_1\bar{B}_1 + \rho_1^2\bar{B}_{11} \quad (4.79)$$

Une augmentation de ce modèle en vue de l'asservissement opérationnel permet d'obtenir le nouveau modèle LPV  $\tilde{\Sigma}(s, \rho)$  donné dans (4.17), dont les matrices d'état  $\tilde{A}(\rho)$  et  $\tilde{B}(\rho)$  admettent la décomposition monomiale suivante :

$$\tilde{A}(\rho) = \tilde{A}_0 + \rho_1 \tilde{A}_1 + \rho_2 \tilde{A}_2 + \rho_4 \tilde{A}_4 + \rho_1^2 \tilde{A}_{11} + \rho_1 \rho_2 \tilde{A}_{12} + \rho_1 \rho_4 \tilde{A}_{14} + \rho_2 \rho_3 \tilde{A}_{23} + \rho_3 \rho_4 \tilde{A}_{34} \quad (4.80)$$

$$\tilde{B}(\rho) = \tilde{B}_0 + \rho_1 \tilde{B}_1 + \rho_1^2 \tilde{B}_{11} \quad (4.81)$$

Le modèle  $\Sigma_1(s, \rho) : \{\mathcal{A}(\rho), \mathcal{B}(\rho), \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$  utilisé pour la synthèse de correcteurs LPV, qui est muni d'un canal de performance  $\mathcal{H}_\infty$  et pondéré par un filtre  $W_1(s)$ , se décompose d'une façon similaire au modèle  $\tilde{\Sigma}(s, \rho)$ . Le filtre de pondération  $W_1(s)I_2$  étant indépendant des paramètres, les matrices d'état de cette pondération n'apparaissent que dans le terme constant de la décomposition monomiale :

$$\mathcal{A}(\rho) = \mathcal{A}_0 + \sum_i \rho_i \mathcal{A}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \leq j}} \rho_i \rho_j \mathcal{A}_{ij} \quad (4.82)$$

$$\mathcal{B}(\rho) = \sum_i \rho_i \mathcal{B}_i \quad (4.83)$$

avec :

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 & 0 \\ B_w C_a & A_w \end{bmatrix}, \mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_0 \\ B_w D_a \end{bmatrix}, \mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est clair, d'après (4.80), que les matrices  $\mathcal{A}_3$  et  $\mathcal{A}_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  sont nulles.

#### 4.5.2.2 Paramétrisation modifiée

Reprenons la discussion entamée au paragraphe 4.3.3.2 sur le centrage des contraintes de bornes min et max sur les paramètres, qui sont désignées sous le terme de contraintes hyperrectangulaires. Nous avons vu qu'un tel centrage, ou symétrisation, permet une description diagonale et compacte de ces contraintes, dont le traitement numérique s'en trouve ainsi simplifié. Cet avantage peut être exploité pour la résolution du problème de synthèse de correcteur LPV. Par exemple, les hyperrectangles paramétriques dont le centre est une valeur nominale du vecteur de paramètres dans une paramétrisation originale (paramétrisation en  $\rho$  dans notre application), sont translatés de manière à ce que leur centre (la valeur nominale d'un nouveau vecteur de paramètres, qu'on notera  $\psi$ ) soit nul.

$$\rho_i \in [\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i], \underline{\rho}_i \text{ et } \bar{\rho}_i \text{ des scalaires quelconques vérifiant : } \underline{\rho}_i \leq \bar{\rho}_i$$

$$\downarrow \text{ translation } \psi_i = \rho_i - m_i, m_i = \frac{1}{2}(\bar{\rho}_i + \underline{\rho}_i)$$

$$\psi \in [-\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_i] \text{ où } \bar{\psi}_i = \frac{1}{2}(\bar{\rho}_i - \underline{\rho}_i)$$

Avec ce nouveau choix de paramètres, les matrices d'état données dans (4.82)-(4.83) admettent les factorisations :

$$\mathbf{A}(\psi) = \mathbf{A}_0 + \sum_i \psi_i \mathbf{A}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \leq j}} \psi_i \psi_j \mathbf{A}_{ij} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{B}(\psi) = \sum_i \psi_i \mathbf{B}_i \quad (4.85)$$

où  $\mathbf{A}_{ij} = 0, \forall (i, j) \in \{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ . En appliquant le changement de variables paramétriques  $\rho_i = \psi_i + m_i, i = 1, \dots, 4$ , les autres matrices de la décomposition sont données par :

$$\mathbf{A}_0 = \mathcal{A}_0 + m_1 \mathcal{A}_1 + m_2 \mathcal{A}_2 + m_4 \mathcal{A}_4 + m_1 m_2 \mathcal{A}_{12} + m_1 m_4 \mathcal{A}_{14} + m_2 m_3 \mathcal{A}_{23} + m_3 m_4 \mathcal{A}_{34} + m_1^2 \mathcal{A}_{11}$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathcal{A}_1 + m_2 \mathcal{A}_{12} + m_4 \mathcal{A}_{14} + 2m_1 \mathcal{A}_{11}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathcal{A}_2 + m_1 \mathcal{A}_{12} + m_3 \mathcal{A}_{23}$$

$$\mathbf{A}_3 = m_2 \mathcal{A}_{23} + m_4 \mathcal{A}_{34}$$

$$\mathbf{A}_4 = \mathcal{A}_4 + m_1 \mathcal{A}_{14} + m_3 \mathcal{A}_{34}$$

$$\mathbf{A}_{11} = \mathcal{A}_{11}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \mathcal{A}_{12}$$

$$\mathbf{A}_{14} = \mathcal{A}_{14}$$

$$\mathbf{A}_{23} = \mathcal{A}_{23}$$

$$\mathbf{A}_{34} = \mathcal{A}_{34}$$

$$\mathbf{B}_0 = \mathcal{B}_0 + m_1 \mathcal{B}_1 + m_1^2 \mathcal{B}_{11}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathcal{B}_1 + 2m_1 \mathcal{B}_{11}$$

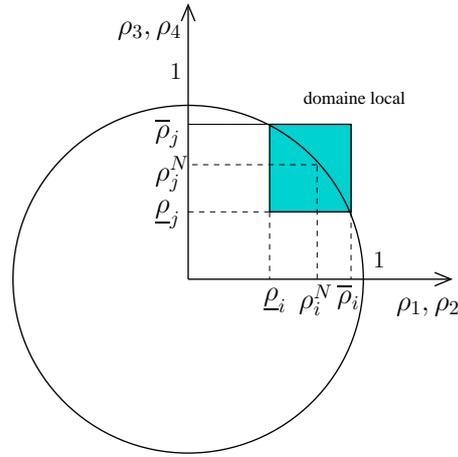
$$\mathbf{B}_{11} = \mathcal{B}_{11}$$

Les matrices  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  du modèle de synthèse  $\Sigma_1(s, \rho)$  étant constantes, elles ne sont pas affectées par le changement de coordonnées paramétriques réalisé. Ce nouveau modèle augmenté peut être utilisé pour la synthèse d'un correcteur LPV  $K(s, \psi) : \{A_K(\psi), B_K(\psi), C_K(\psi), 0\}$  qui dépend du nouveau vecteur de paramètres  $\psi$ . Cette approche de synthèse LPV par changement de coordonnées paramétriques peut être mise dans un cadre plus général pour lequel les paramètres du correcteur ne sont pas directement les paramètres du système mais des fonctions non-linéaires de ces derniers. Autrement dit, pour un système LPV  $S(s, \rho)$  dépendant d'un vecteur de paramètre  $\rho$ , il est possible de synthétiser un correcteur LPV  $K(s, \phi(\rho))$ ,  $\phi$  étant une fonction non-linéaire multivariée.

### 4.5.2.3 Résultats de simulation

#### Démarche adoptée

Le modèle augmenté  $\Sigma_1(s, \psi)$  dépendant des nouveaux paramètres centrés  $\psi$  est utilisé pour la synthèse de correcteur LPV, en appliquant une relaxation SOS à la caractérisation basique de

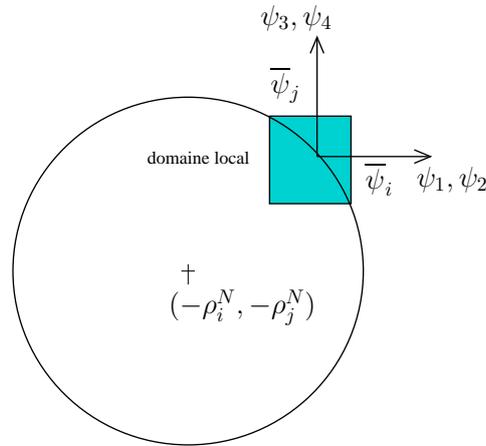
FIGURE 4.8 – Domaine local de synthèse, paramétré en  $\rho$ 

problèmes de synthèse décrite dans le paragraphe (4.5.1.2).

Un correcteur LPV  $K(s, \psi)$  satisfaisant les exigences de stabilité et de performance requises pour le système asservi, est synthétisé par la résolution de la LMI (4.60) résultant de l'application de la relaxation SOS matricielle décrite dans le corollaire 4.1 à la PD-LMI de synthèse donnée dans (4.72). Afin de simplifier le problème, en limitant la taille des bases monomiales paramétriques, des matrices de Lyapunov  $X$  et  $Y$  et des multiplicateurs SOS  $Z_k$  constants ont été utilisées. Si l'ensemble de l'espace de travail, modélisé par les ensembles donnés dans (4.19)-(4.20) est considéré, les conditions LMI de synthèse sont infaisables. Cela montre la difficulté de synthétiser un correcteur LPV qui maintient la stabilité et les performances pour tout le domaine de fonctionnement du robot.

Afin de pallier cette limitation, nous proposons de restreindre le domaine paramétrique pour lequel les exigences sur l'asservissement sont garanties à des arcs de cercle constituant des sous-ensembles de l'espace paramétrique. Ces domaines locaux sont caractérisés par une distance à un point de fonctionnement nominal  $\rho^N$  (ou  $\psi^N$  de manière équivalente) :  $\rho_i \in [\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i]$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , où  $\underline{\rho}_i = \rho_i^N(1 - \nu_i)$  et  $\bar{\rho}_i = \rho_i^N(1 + \nu_i)$ ,  $\nu_i > 0$ . Les domaines ainsi obtenus sont donc donnés par l'intersection de cercles de rayon 1 (bandes circulaires de largeur  $\varepsilon$  nulle, obtenues en prenant  $R_m = R_M = 1$  dans (4.23)-(4.26)) et de l'intérieur de rectangles paramétriques min-max. Afin de simplifier l'analyse des résultats, nous avons pris une même valeur  $\nu > 0$  pour les coefficients  $\nu_i$  des intervalles d'analyse des quatre paramètres. Ceci permet d'écrire simplement :  $\rho \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$ , où  $\underline{\rho} = \rho^N(1 - \nu)$  et  $\bar{\rho} = \rho^N(1 + \nu)$ . L'approche proposée reste bien entendu valable si cette hypothèse est relâchée. Les ensembles paramétriques considérés sont représentés dans la Figure 4.8 dans la paramétrisation originale en  $\rho$  et dans la Figure 4.9 dans la paramétrisation modifiée en  $\psi$ , qui est utilisée ici pour la synthèse.

Nous avons effectué des simulations numériques en prenant  $\rho^N = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ce qui correspond à la configuration  $(\theta_1, \theta_2) = (45^\circ, 45^\circ)$  du robot. Les coordonnées cartésiennes correspondantes de

FIGURE 4.9 – Domaine local de synthèse, paramétré en  $\psi$ 

la position terminale sont :  $X = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$  et  $Y = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$ . Ceci donne, pour  $l_1 = l_2 = 0.5$  m, des coordonnées nominales de  $X = 0.3536$  m et  $Y = 0.8536$  m. Nous avons utilisé un filtre de pondération du premier ordre de la forme :

$$W_1(s) = \frac{1}{k} \frac{s + a}{s + b} \quad (4.86)$$

Cela nous permet d'imposer les contraintes de performance suivantes : une bande passante  $\omega_c$ , une marge de module  $M_m$  et une précision statique de position  $E_p$  en prenant  $k = \frac{1}{M_m}$ ,  $a = \omega_c \sqrt{\frac{(2k^2 - 1)}{(1 - 2k^2 R^2)}}$  et  $b = Ra$ , avec  $R = \frac{E_p}{k}$ .

### Performance réalisée

L'indice de performance en gain  $\mathcal{L}_2$   $\gamma$ , obtenu en considérant le domaine paramétrique comme étant les rectangles min-max dans leur intégralité et les intersections de ces rectangles avec les cercles trigonométriques, est tracé sur la Figure 4.10 en fonction du coefficient de largeur  $\nu$  des intervalles paramétriques, pour les caractéristiques de performance suivantes :  $\omega_c = 20$  rad/s,  $M_m = 0.99$  et  $E_p = 10^{-4}$ . Les résultats présentés nous permettent de faire les commentaires suivants, qui constituent à nos yeux des éléments importants dans la validation de la méthode de synthèse par relaxations SOS :

- L'indice de performance  $\gamma$  croît régulièrement avec la largeur de l'intervalle de synthèse.
- La restriction de la synthèse sur des arcs de cercles permet de diminuer l'indice de performance  $\gamma$  garanti. Cette diminution est plus importante lorsque l'intervalle d'analyse s'élargit, la différence de surface entre le rectangle et l'arc de cercle devenant plus grande.
- La synthèse sur les rectangles est infaisable pour  $\nu > 0.35$  alors qu'elle est faisable au-delà de  $\nu = 0.40$  pour des arcs de cercle. La boucle fermée obtenue dans le second cas réalise

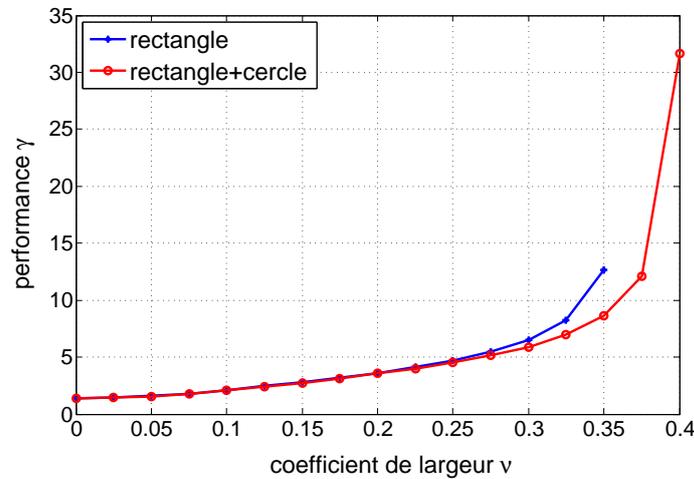


FIGURE 4.10 – Performance réalisée en fonction de la largeur l'espace de travail

un bon suivi de trajectoire en simulation numérique, bien que ses performances (en particulier la rapidité) soient relativement dégradées étant donné un indice  $\gamma$  élevé (de l'ordre de 30).

- A titre de comparaison, l'indice de performance obtenu par une synthèse nominale à l'aide de la méthode LMI de la fonction `hinfsyn` de MATLAB est de  $\gamma_{\text{hinfsyn}} = 1.2819$  alors qu'il est de  $\gamma_{\text{SOS}} = 1.3817$  avec la méthode de relaxation SOS sur un arc de cercle de coefficient de largeur  $\nu = 0$ .

Ces observations permettent de conclure que la méthode de synthèse par relaxations SOS matricielles permet de réduire le conservatisme de la synthèse en rendant possible une meilleure approximation des conditions réelles de fonctionnement du système. La réduction de la surface de l'espace paramétrique pour laquelle les exigences de stabilité et de performances sont garanties permet de diminuer l'indice de performance  $\gamma$  obtenu. De plus la comparaison donnée dans la dernière remarque fait apparaître des indices de performance relativement proches, avec cependant  $\gamma_{\text{hinfsyn}} < \gamma_{\text{SOS}}$ . Ceci dénote l'introduction d'un degré restreint de conservatisme par la relaxation SOS matricielle.

### Analyse fréquentielle

Afin d'évaluer les performances accomplies par le système asservi, il est utile de visualiser les transferts fréquentiels réalisés au niveau du canal de performance. Comme nous avons effectué une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  à un bloc, le transfert fréquentiel pertinent est celui de la fonction de sensibilité en sortie :

$$S_y(s, \rho) = T_{F^* \rightarrow e_F}(s, \rho) = (I + \tilde{\Sigma}(s, \rho)K(s, \rho))^{-1} \quad (4.87)$$

Pour toute valeur figée du paramètre  $\rho \in \mathcal{S}_\rho$ , la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  garantit :  $\|W_1(s)I_2 S_y(s, \rho)\|_\infty \leq$

$\gamma$ . Ceci équivaut à :  $\bar{\sigma}(S_y(s, \rho)) \leq \frac{\gamma}{W_1(s)}$ ,  $\forall \omega > 0$ , où  $\bar{\sigma}$  désigne la valeur singulière max. La fonction de transfert  $\frac{\gamma}{W_1(s)}$  représente le gabarit fréquentiel réalisé par la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ .

Les parties (a)-(b) de la figure 4.11 présentent les transferts fréquentiels réalisés, pour une synthèse sur les arcs de cercle et les rectangles paramétriques min-max pleins respectivement, avec un coefficient de largeur nul  $\nu = 0$ . Les parties (c)-(d) et (e)-(f) sont obtenues de la même manière pour des valeurs de  $\nu = 0.1$  et  $\nu = 0.2$ . Dans chacune des figures présentées, la fonction de sensibilité en sortie  $S_y(s, \rho)$  est comparée au gabarit fréquentiel pour trois valeurs effectivement atteintes par le vecteur de paramètres : la valeur nominale  $\rho^N$ , la valeur "basse" de l'arc de cercle  $\rho^m = [\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 \rho_3 \rho_4]^T$  et la valeur "haute" de l'arc de cercle  $\rho^M = [\rho_1 \rho_2 \bar{\rho}_3 \bar{\rho}_4]^T$ . On remarque par ailleurs que ces transferts varient très peu d'un point de fonctionnement à un autre.

### Analyse temporelle

Le prototype de robot médical Sinters, dont le modèle LPV examiné décrit le comportement dynamique, est typiquement utilisé pour effectuer des déplacements de faible amplitude au niveau des coordonnées cartésiennes  $X$  et  $Y$  de l'organe terminal, qui sont mesurées à l'aide d'une caméra rapide. Ces déplacements sont effectués dans le but de compenser le mouvement cardiaque du patient sur une petite surface de travail traitée par le chirurgien. Les résultats de simulation et expérimentaux présentés dans le travail de thèse de L. Cuvillon [Cuvillon06], ont utilisé des correcteurs de type LTI/ $\mathcal{H}_\infty$  et prédictifs de type GPC (*Generalized Predictive Control*) et ont considéré des espaces de travail d'une amplitude de l'ordre de 5 cm pour chacune des coordonnées cartésiennes. L'apport de l'approche de synthèse LPV/ $\mathcal{H}_\infty$  est de garantir la stabilité et les performances sur un espace de travail plus large.

En adoptant une synthèse LPV sur des domaines paramétriques de type arcs de cercle, les réponses indicielles de la fonction de sensibilité en sortie  $S_y(s, \rho)$ , où le vecteur de paramètres prend les valeurs figées  $\rho = \rho^N$ ,  $\rho = \rho^m$  et  $\rho = \rho^M$  définies plus haut, sont affichées sur les Figures 4.12, 4.13 et 4.14 pour les valeurs respectives  $\nu = 0$ ,  $\nu = 0.1$  et  $\nu = 0.2$  du coefficient de largeur de l'intervalle paramétrique. Les courbes situées sur la diagonale de ces figures montrent un temps d'établissement de l'erreur de suivi de trajectoire  $e_F$  de l'ordre de 0.2 s pour  $\nu = 0$  et  $\nu = 0.1$  et de l'ordre de 0.4 s pour  $\nu = 0.2$ . La diminution de la rapidité dans le dernier cas correspond à un indice de performance  $\gamma$  plus élevé. Les courbes non diagonales montrent un découplage efficace des trajectoires dans les deux coordonnées cartésiennes. L'effet de couplage augmente cependant avec la largeur du domaine paramétrique. La dégradation de la rapidité du système et de l'efficacité du découplage lorsque le domaine de fonctionnement s'élargit, constitue une illustration du compromis performance/robustesse, une propriété classique des systèmes asservis.

Par la suite, nous avons voulu tester l'efficacité de la loi de commande LPV pour une tâche typique effectuée par le robot au cours d'un fonctionnement réel. En nous inspirant des résultats présentés dans [Cuvillon06], nous avons assigné à l'organe terminal une trajectoire de référence opérationnelle de forme rectangulaire. Toutefois, des conditions de fonctionnement plus difficiles ont été imposées dans les résultats présentés ici : un espace de travail plus étendu, d'une longueur de 10 cm dans les directions  $X$ ,  $Y$  au lieu de 5 cm et une vitesse de déplacement dans le plan cartésien de  $0.25 \text{ ms}^{-1}$  au lieu de  $0.10 \text{ ms}^{-1}$ . La Figure 4.15 montre les résultats de suivi d'une trajectoire cartésienne rectangulaire pour une synthèse LPV avec  $\nu = 0$  et  $\nu = 0.2$ ,

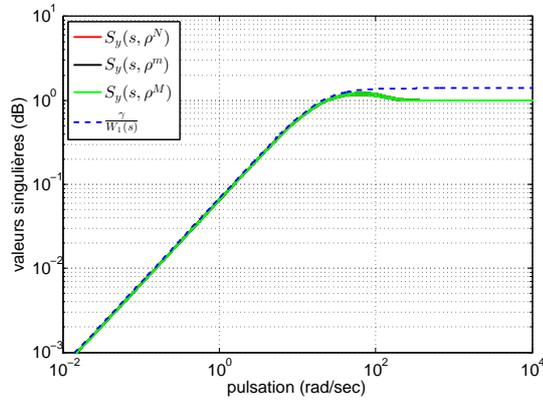
tandis que la Figure 4.16 affiche les domaines paramétriques effectivement atteints lors de cette simulation. Le suivi temporel des trajectoires cartésiennes de référence est affiché dans la Figure 4.17 et l'évolution temporelle des paramètres centrés  $\psi_i, i = 1, \dots, 4$  est montrée dans la Figure 4.18.

Les résultats présentés ont permis d'améliorer les performances obtenues en utilisant des correcteurs linéaires synthétisés dans [Cuvillon06] et permettent de valider l'approche de synthèse proposée.

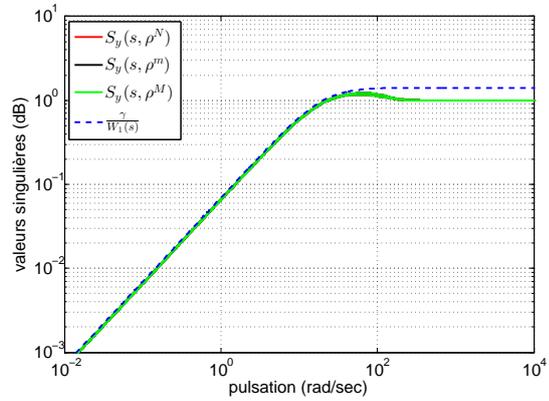
## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré les potentialités offertes par les relaxations en sommes de carrés matricielles pour l'analyse et la commande des systèmes LPV, dans le contexte applicatif des robots manipulateurs flexibles. En particulier, un modèle LPV à dépendance paramétrique polynomiale, permettant l'asservissement de la position terminale d'un robot flexible a été exploité. Un des avantages de la méthode d'analyse/synthèse par relaxations SOS est la possibilité de considérer des ensembles paramétriques semi-algébriques modélisés par des contraintes polynomiales, voir rationnelles. En effet, comme cela a été souligné dans [Jibotean03], il est également possible d'appliquer les relaxations en sommes de carrés à des contraintes de type fractions rationnelles, aboutissant à des contraintes polynomiales de degré plus élevés que celui des polynômes (numérateur et dénominateur) originaux.

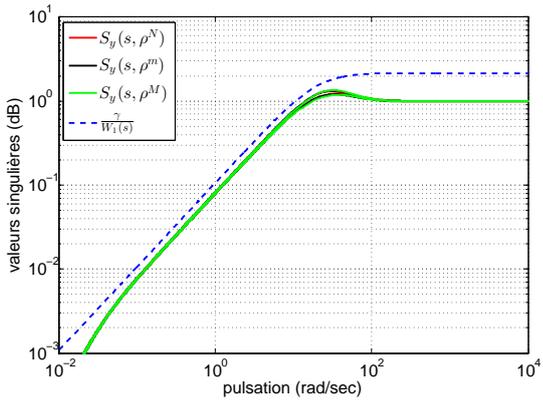
Une large classe d'ensembles peut donc être traité avec l'approche des relaxations, en effectuant si nécessaire une approximation rationnelle par la méthode de Padé par exemple, si l'ensemble est délimité au départ par des contraintes analytiques plus complexes. L'analyse et la synthèse en se basant sur une description étroite de l'espace paramétrique et par voie de conséquence, de l'espace de travail réel du système, permet une réduction du conservatisme lié à la garantie de stabilité et de performances sur des zones inatteignables par le système. Des dépendances paramétriques irrationnelles des contraintes pourraient également être gérées en suivant une approche algorithmique similaire à celle développée dans [Papachristodoulou05] pour les systèmes non-linéaires irrationnels.



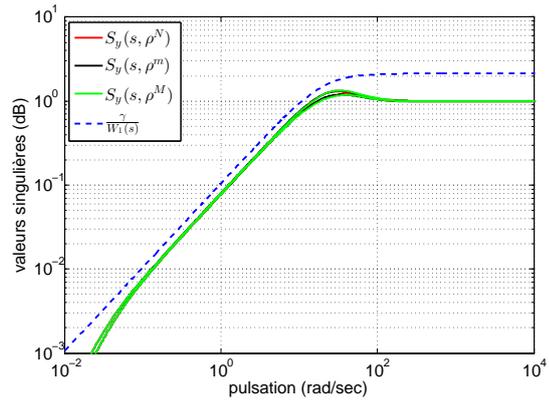
(a)



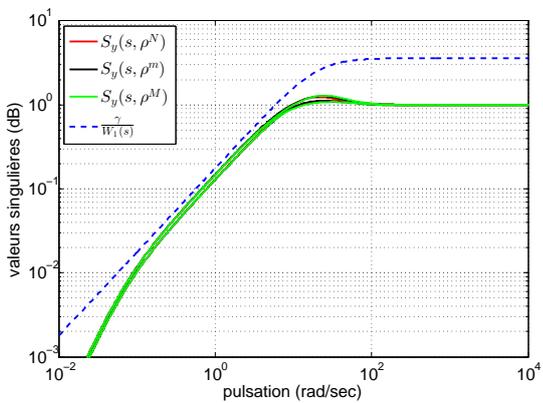
(b)



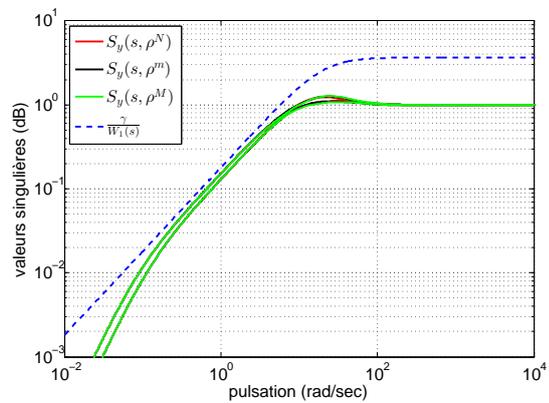
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURE 4.11 – Transferts fréquentiels réalisés suivant la largeur et le type du domaine paramétrique : arcs de cercle à droite et rectangles pleins à gauche

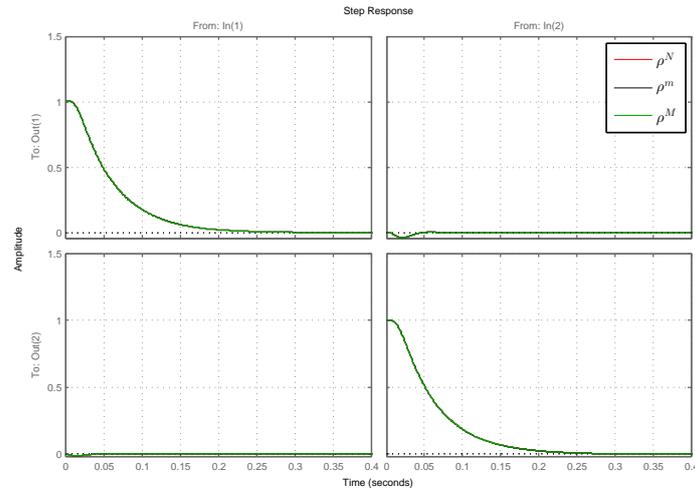


FIGURE 4.12 – Réponse indicielle de la fonction de sensibilité pour  $\nu = 0$

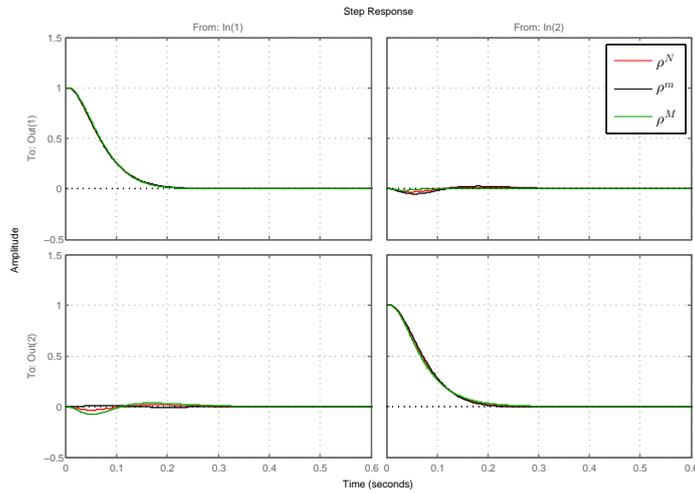


FIGURE 4.13 – Réponse indicielle de la fonction de sensibilité pour  $\nu = 0.1$

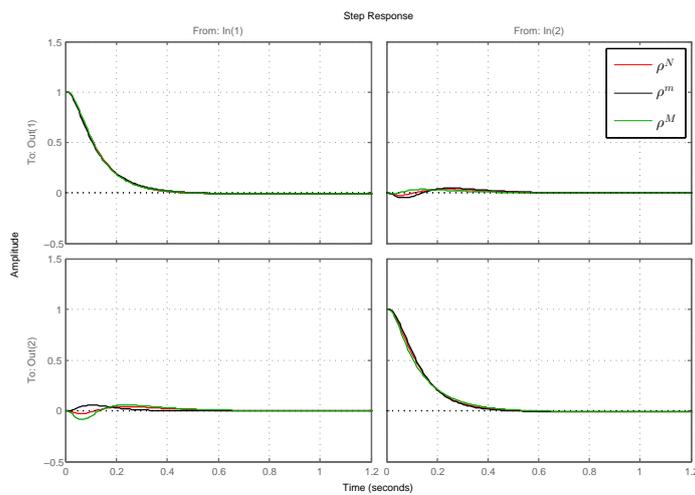


FIGURE 4.14 – Réponse indicielle de la fonction de sensibilité pour  $\nu = 0.2$

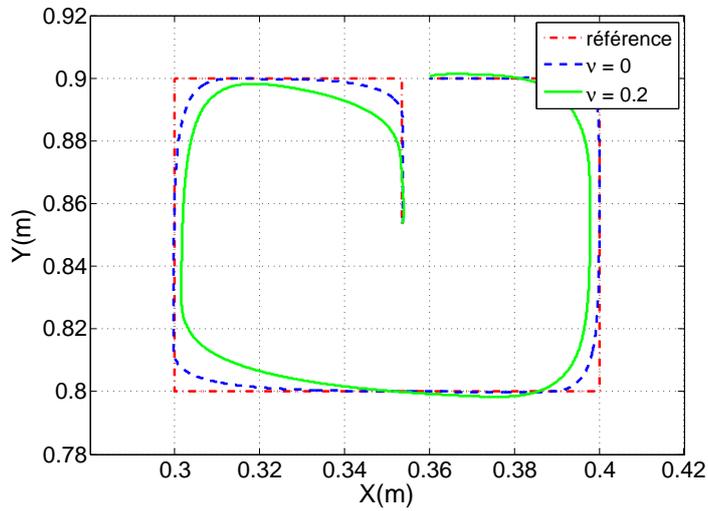


FIGURE 4.15 – Suivi d'une trajectoire cartésienne rectangulaire

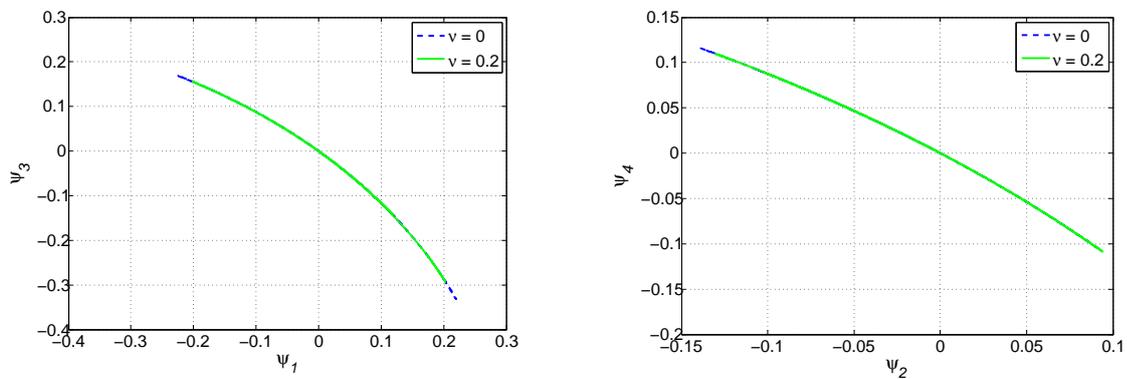
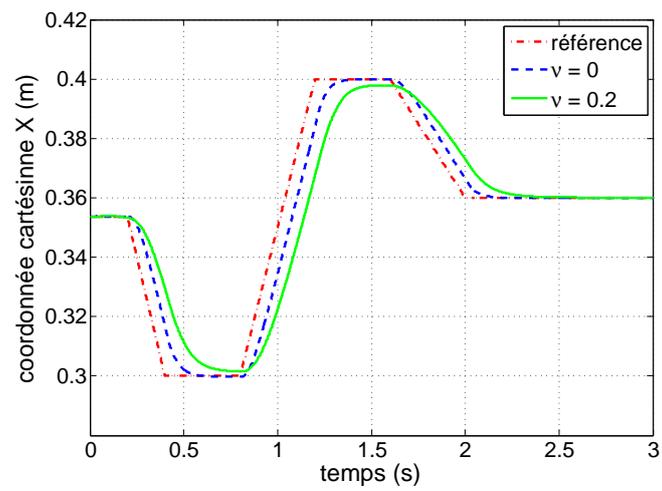
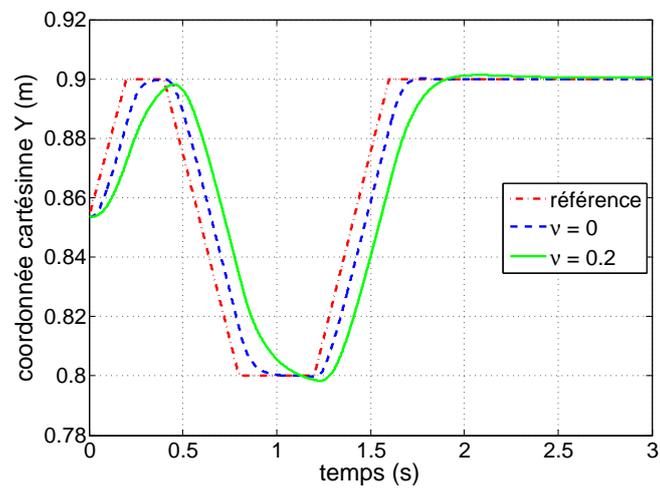


FIGURE 4.16 – Domaines paramétriques atteints



(a)



(b)

FIGURE 4.17 – Suivi des trajectoires de référence des coordonnées X (a) et Y (b)

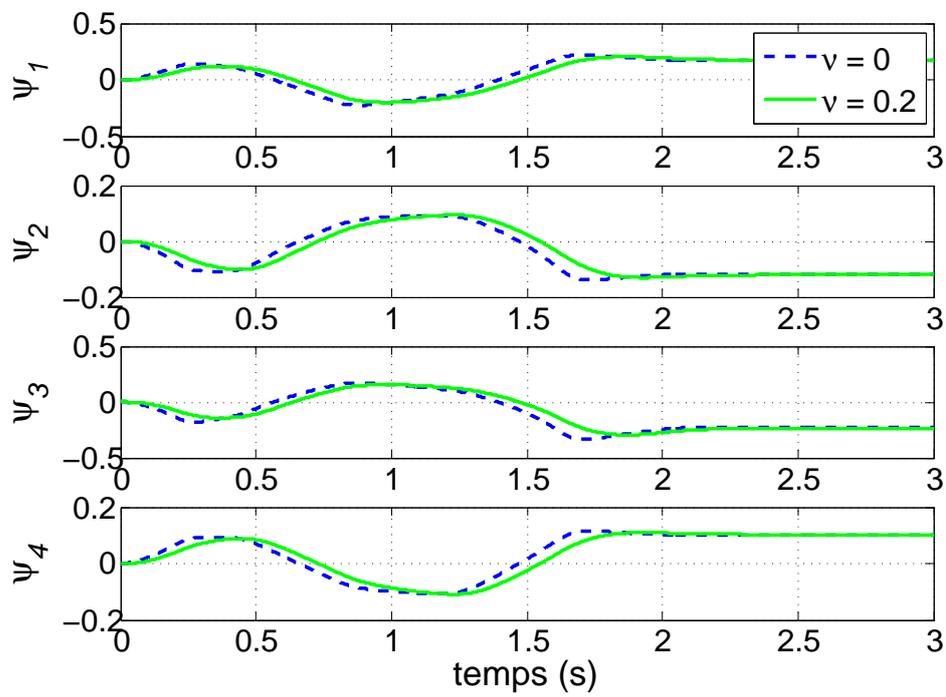


FIGURE 4.18 – Evolution temporelle des paramètres

# Conclusion générale

L'utilisation de matériaux légers et d'éléments de transmission élastiques constitue un des axes d'évolution majeurs de la robotique de manipulation. Au niveau technologique, cette évolution a permis la conception et l'intégration de capteurs et d'actionneurs dédiés peu encombrants qui permettent une mesure complète des variables décrivant ces systèmes et la possibilité d'une action extérieure directe sur ces variables. Au niveau logiciel, cette évolution a permis le développement de stratégies d'estimation et de commande avancées, visant à améliorer la performance, la robustesse et la sécurité du fonctionnement des robots déformables.

Les méthodes de commande non-linéaire de robots à segments flexibles disponibles dans la littérature nécessitent souvent des calculs fastidieux dans l'étape de synthèse et de calcul en ligne de la loi de commande. De plus, l'analyse de stabilité, de performance et de robustesse des systèmes non-linéaires est en général difficile et dépend fortement du type des fonctions non-linéaires du modèle. Parmi les différentes problématiques d'asservissement, celle du suivi précis d'une trajectoire opérationnelle demeure difficile et seules des solutions partielles y ont été proposées. Soulignons enfin que la mesure entière du vecteur d'état n'étant pas disponible, seules des lois de commande par retour de sortie peuvent être effectivement appliquées.

Dans le travail de thèse exposé au sein de ce mémoire, nous avons approfondi les problèmes de modélisation dynamique et de commande avancée des systèmes robotiques flexibles en adoptant le paradigme de la commande robuste, des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV), des relaxations convexes et de la programmation semi-définie (SDP).

Une partie importante du travail de recherche réalisé concerne la modélisation de ces systèmes sous forme de représentation d'état LPV, ainsi que la modélisation de l'espace de travail sous forme d'ensembles semi-algébriques. Des résultats d'analyse de robustesse et de synthèse de correcteurs LPV avec garantie de performance en gain  $\mathcal{L}_2$  pour des robots à segments flexibles ont été obtenus, aussi bien au niveau articulaire qu'opérationnel.

Pour réaliser un suivi de trajectoire dans l'espace articulaire, nous avons proposé des lois de commande LPV par les méthodes suivantes :

- Dans le but de simplifier la dépendance paramétrique rationnelle, nous avons fait appel à une modélisation LPV et une synthèse de correcteur en utilisant le formalisme des systèmes singuliers.
- Afin de réduire le conservatisme et de pouvoir utiliser des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres (PDLF), nous avons utilisé des conditions LMI étendues qui impliquent des variables matricielles structurées.

En comparaison avec la méthode d'inversion de modèle adaptée aux systèmes flexibles, la commande LPV s'est avérée plus robuste face aux incertitudes sur les paramètres physiques, des bruits de mesure sur les vitesses articulaires, ainsi que des couples d'excitation dans les hautes fréquences.

Pour réaliser un suivi de trajectoire dans l'espace opérationnel, nous avons effectué une analyse robuste et une synthèse LPV en utilisant des relaxations convexes en sommes de carrés matricielles de LMI dépendant des paramètres de manière polynomiale. Un modèle LPV identifié de manipulateur flexible a été utilisé afin de valider l'approche proposée. Cette approche a l'avantage de permettre une analyse et une synthèse sur une diversité de domaines paramétriques qui constituent des ensembles semi-algébriques décrits par des contraintes polynomiales. Nous avons constaté qu'une approximation plus étroite de l'espace de travail effectif permet d'avoir de meilleurs indices de performance, réduisant ainsi le conservatisme de l'analyse/synthèse sur des hyperrectangles paramétriques.

De nombreuses perspectives de recherche sont envisageables telles que :

- L'application de la méthodologie proposée à des systèmes mécaniques plus complexes, moyennant une obtention systématique de modèles LPV exploitables pour l'analyse et la synthèse de correcteurs.
- Une évaluation approfondie du conservatisme des méthodes proposées.
- La prise en compte des dynamiques des actionneurs et des capteurs de vision pour l'amélioration des performances de suivi de trajectoire opérationnelle dans le cadre d'un asservissement visuel.
- La combinaison de la commande LPV avec d'autres méthodes de commande telles que la commande prédictive MPC (*Model Predictive Control*) qui permet une gestion directe des limitations sur les vecteurs de commande ou d'état, modélisant ainsi les contraintes physiques du système.

# Liste des publications

## Chapitre d'ouvrage

- [1] H. Halalchi, L. Cuvillon, G. Mercère, E. Laroche. Commande robuste des robots manipulateurs à flexibilités structurelles. Dans M. Grossard, S. Régnier, N. Chaillet, "Structures flexibles - Applications à la manipulation robotique multi-échelles", Hermès, Paris (à paraître).

## Revue internationale avec comité de lecture

- [2] H. Halalchi, E. Laroche, G.I. Bara. Flexible robot control using a Linear Parameter Varying systems methodology. Soumis (2012).

## Conférences internationales avec comité de lecture

- [3] H. Halalchi, E. Laroche, G.I. Bara. A polynomial LPV approach for flexible robot end-effector position controller analysis. *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Orlando, FL, Etats-Unis, 2011.*
- [4] H. Halalchi, E. Laroche, G.I. Bara. Output-feedback LPV control strategies for flexible robot arms. *IFAC World Congress, Milan, Italie, 2011.*
- [5] H. Halalchi, G.I. Bara, E. Laroche. Observer-based controller synthesis for LPV descriptor systems using dilated LMI conditions. *IEEE Multi-Conference on Systems and Control, Denver, CO, Etats-Unis, 2011.*
- [6] H. Halalchi, G.I. Bara, E. Laroche. LPV controller design for robot manipulators based on augmented LMI conditions with structural constraints. *IFAC Symposium on System, Structure and Control, Ancône, Italie, 2010.*
- [7] H. Halalchi, E. Laroche, G.I. Bara. LPV modeling and control of a 2-dof robotic manipulator based on descriptor representation. *11<sup>th</sup> Pan-American Congress of Applied Mechanics, Foz do Iguaçu, Brésil, 2010.*
- [8] H. Halalchi, G. Mahé, M. Jaidane. Revisiting quantization theorem through adiwatermarking. *IEEE Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Taipei, Taiwan, 2009.* (Hors thèse).

---

## Conférences nationales avec comité de lecture

- [9] H. Halalchi, E. Laroche, G.I. Bara. Analyse d'asservissement opérationnel pour manipulateurs flexibles suivant une approche LPV polynomiale. *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Grenoble, France, 2012.*
- [10] H. Halalchi, E. Laroche, G.I. Bara. Contrôle LPV par retour de sortie pour les manipulateurs flexibles. *Journées doctorales du GdR MACS, Marseille, France, 2011.*
- [11] E. Laroche, G. Mercère, H. Halalchi. Modélisation et identification LPV d'un manipulateur flexible. *Journées Identification et Modélisation Expérimentale, Douai, France, 2011.*
- [12] H. Halalchi, G.I. Bara, E. Laroche. Commande LPV des robots manipulateurs avec matrice de Lyapunov structurée. *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Nancy, France, 2010.*

# Annexe A

## Eléments d'algèbre linéaire

### A.1 Valeurs propres

Soit la matrice  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Un nombre  $\lambda \in \mathbb{C}$  est appelé *vecteur propre* de  $M$  si il existe un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  vérifiant :

$$Mx = \lambda x \tag{A.1}$$

Le vecteur  $x$  est alors appelé vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Le calcul des valeurs propres se fait par l'intermédiaire de la résolution de l'équation caractéristique suivante :

$$\det(M - \lambda I) = 0 \tag{A.2}$$

### A.2 Valeurs singulières

Les valeurs singulières  $\sigma_i$  d'une matrice  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice  $M^H M$ , où  $M^H$  est la matrice transposée conjuguée de  $M$ .

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_j(M^H M)} \tag{A.3}$$

### A.3 Rang et noyau d'une matrice

Le rang d'une matrice  $M \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , noté  $\text{rang}(M)$ , est son nombre maximal de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes.

- On dit que  $M$  est de plein rang en lignes si son nombre maximal de lignes linéairement indépendantes est égal à sa dimension en lignes  $n$ .
- On dit que  $M$  est de plein rang en colonnes si son nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes est égal à sa dimension en colonnes  $m$ .

Le noyau d'une matrice  $M \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , noté  $\ker(M)$ , est défini par l'ensemble des vecteurs dont l'image par l'application linéaire associée à la matrice  $M$  est nulle.

$$\ker(M) = \{X \in \mathbb{C}^m : MX = 0\} \quad (\text{A.4})$$

#### A.4 Produit de Kronecker

Le produit de Kronecker de deux matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , noté  $A \otimes B$ , est une opération définie de la manière suivante :

$$M = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nm}B \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

où les  $a_{ij}$ ,  $i = 1 \dots n$ ,  $j = 1 \dots m$ , sont les composantes de la matrice  $A$ . La matrice  $M$  est de dimension  $n.p \times m.q$ .

## Annexe B

# Lemmes usuels en commande robuste

### B.1 Lemme du complément de Schur

**Lemme B.1.** Soit la matrice partitionnée  $M \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  suivante, où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice inversible :

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Le complément de Schur de la matrice  $M$  par rapport à  $A$  est alors défini par :

$$M/A = D - CA^{-1}B \quad (\text{B.2})$$

De même, si la matrice  $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est inversible, le complément de Schur de la matrice  $M$  par rapport à  $D$  est défini par :

$$M/D = A - BD^{-1}C \quad (\text{B.3})$$

### B.2 Lemme de projection

**Lemme B.2.** Soit une matrice symétrique  $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et deux matrices  $P$  et  $Q$  de dimension en colonne égale à  $m$ . Considérons le problème de trouver une matrice  $\Theta$  de dimension appropriée satisfaisant :

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P \prec 0 \quad (\text{B.4})$$

Soient  $W_P$  et  $W_Q$  des matrices dont les colonnes forment des bases des noyaux des matrices  $P$  et  $Q$ . La matrice  $\Theta$  est une solution de (B.4) si et seulement si :

$$\begin{cases} W_P^T \Psi W_P \prec 0 \\ W_Q^T \Psi W_Q \prec 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

### B.3 Lemme de Finsler

**Lemme B.3.** Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telle que  $\text{rang}(B) < n$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $x^T Q x \prec 0$ , pour tout  $x \neq 0$  vérifiant  $Bx = 0$ .
2.  $N_B^T Q N_B \prec 0$ .
3.  $\exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu B^T B \prec 0$ .
4.  $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + XB + B^T X^T \prec 0$ .

où  $N_B$  est une base de  $\ker(B)$ , le noyau de la matrice  $B$ .

# Bibliographie

- [Adams96] R. Adams, P. Apkarian, et J. Chrétien. «Robust control approaches for a two-link flexible manipulator». Dans «International Conference on Dynamics and Control Structures in Space», Cranfield, UK, 1996.
- [Albu-Schäffer02] A. Albu-Schäffer et G. Hirzinger. «Cartesian impedance control techniques for torque controlled light-weight robots». Dans «IEEE International Conference Robotics Automation», Washington D.C., USA, 2002.
- [Albu-Schäffer07] A. Albu-Schäffer, S. Haddadin, C. Ott, A. Stemmer, Wimböck, et G. Hirzinger. «The DLR lightweight robot : design and control concepts for robots in human environments». *Industrial Robot : an international journal*, Vol. 34, n° 5, pages 376–385, 2007.
- [Albu-Schäffer10] A. Albu-Schäffer, S. Wolf, O. Eiberger, S. Haddadin, F. Petit, et M. Chalon. «Dynamic Modelling and Control of Variable Stiffness Actuators». Dans «Proceeding IEEE International Conference on Robotics Automation», Anchorage, AK, USA, 2010.
- [Apkarian95] P. Apkarian et P. Gahinet. «A convex characterization of gain-scheduled  $H_\infty$  controllers». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 5, n° 5, pages 853–864, 1995.
- [Apkarian97] P. Apkarian et R. Adams. «Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems». Dans «American control conference», Albuquerque, NM, USA, 1997.
- [Apkarian98] P. Apkarian et R. Adams. «Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems». *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 6, n° 1, pages 21–32, 1998.
- [Apkarian00] P. Apkarian et H. Tuan. «Parameterized LMIs in control theory». *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 38, n° 4, pages 1241–1264, 2000.
- [Apkarian01] P. Apkarian, H. Tuan, et J. Bernussou. «Continuous-time analysis, eigenstructure assignment and  $H_2$  synthesis with enhanced LMI characterizations». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, n° 12, pages 1941–1946, 2001.
- [Apkarian06] P. Apkarian et D. Noll. «Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, n° 1, pages 71–86, 2006.
- [Arteaga00] M. A. Arteaga et B. Siciliano. «On tracking control of flexible robot arms». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, n° 3, pages 520–527, 2000.

- [Bara01] G. I. Bara et J. Daafouz. «Parameter-dependent control with  $\gamma$ -performance for affine LPV systems». Dans «IEEE Conference on Decision and Control», Orlando, FL, USA, 2001.
- [Bascetta06] L. Bascetta et P. Rocco. «Two-time scale visual servoing of eye-in-hand flexible manipulators». *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 22, n° 4, pages 818–830, 2006.
- [Bascetta10] L. Bascetta et P. Rocco. «Revisiting the robust-control design for rigid robot manipulators». *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 26, n° 1, pages 180–187, 2010.
- [Benosman01] M. Benosman et G. Le Vey. «Model inversion for a particular class of nonlinear non-minimum phase systems : an application to the two-link flexible manipulator». Dans «IEEE Conference on Decision and Control», Orlando, FL, USA, 2001.
- [Benosman02] M. Benosman et G. Le Vey. «Joint trajectory tracking for planar multi-link flexible manipulator : simulation and experiment for a two-link flexible manipulator». Dans «IEEE International Conference on Robotics and Automation», Washington D.C., USA, 2002.
- [Benosman03] M. Benosman et G. Le Vey. «Stable inversion of SISO nonminimum phase linear systems through output planning : an experimental application to the one-link flexible manipulator». *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 11, n° 4, pages 588–597, 2003.
- [Biannic96] J. M. Biannic. *Commande robuste des systèmes linéaires à paramètres variables - Applications en aéronautique*. Thèse de doctorat, Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, Toulouse, France, 1996.
- [Bochnak98] J. Bochnak, M. Coste, et M.-F. Roy. *Real Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Book75] W. J. Book, O. Maizza-Neto, et D. Whitney. «Feedback control of two beam, two joint systems with distributed flexibility». *ASME journal of dynamic systems measurement and control*, Vol. 97, n° 3, pages 424–431, 1975.
- [Book84] W. J. Book. «Recursive Lagrangian dynamics of flexible manipulator arms». *International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, n° 3, pages 87–101, 1984.
- [Bouali06] A. Bouali, P. Chevrel, et M. Yagoubi. «About gain scheduled state feedback controllers for rational LPV systems». Dans «IEEE International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision», Singapore, 2006.
- [Bouali08] A. Bouali, M. Yagoubi, et P. Chevrel. « $H_2$  gain scheduling control for rational LPV systems using the descriptor framework». Dans «IEEE Conference on Decision and Control», Cancun, Mexico, 2008.
- [Boyd94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, et V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.

- [Boyd97] S. Boyd et Vandenberghe. *Semidefinite Programming Relaxations of Non-Convex Problems in Control and Combinatorial Optimization*, chapitre 15, pages 1–10. Kluwer, 1997. In Paulraj, A. and Roychowdhuri, V. and Shaper, C. *Communications, Computation, Control and Signal Processing : A tribute to Thomas Kailath*.
- [Boyd04] S. Boyd et L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [CanudasdeWit96] C. Canudas de Wit, B. Siciliano, et G. Bastin. *Theory of Robot Control*. Springer, London, 1996.
- [Chesi11a] G. Chesi. *Domain of Attraction - Analysis and Control via SOS Programming*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2011.
- [Chesi11b] G. Chesi. *SMRSOFT : a Matlab Toolbox for Optimization over Polynomials and Dynamical Systems Study via SOS Programming*, 2011. Disponible à partir de <http://www.eee.hku.hk/~chesi>.
- [Chilali96] M. Chilali et P. Gahinet. « $H_\infty$  design with pole placement constraints : an LMI approach». *IEEE Transactions on System, Man, Cybernetics*, Vol. 41, n° 3, pages 358–367, 1996.
- [Chrétien89] J.-P. Chrétien. «SECAFLEX : an experimental set-up for the study of active control of flexible structures». Dans «American Control Conference», Pittsburgh, PA, USA, 1989.
- [Cuvillon06] L. Cuvillon. *Compensation du battement cardiaque en chirurgie robotisée : asservissement visuel d'un robot médical avec flexibilités*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 2006.
- [Daafouz02] J. Daafouz, P. Riedinger, et C. Iung. «Stability analysis and control synthesis for switched systems : a switched Lyapunov function approach». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, n° 11, pages 1883–1887, 2002.
- [De Luca90] A. De Luca, L. Lanari, P. Lucibello, S. Panzieri, et G. Ulivi. «Control experiments on a two-link robot with a flexible forearm». Dans «IEEE Conference on Decision and Control», Honolulu, HI, USA, 1990.
- [De Luca91] A. De Luca et B. Siciliano. «Closed-form dynamic model of planar multilink lightweight robots». *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 21, n° 4, pages 826–839, 1991.
- [De Luca93] A. De Luca et B. Siciliano. «Inversion-based nonlinear control of robot arms with flexible links». *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16, n° 6, pages 1169–1176, 1993.
- [De Luca96] A. De Luca et B. Siciliano. *Flexible Links*, chapitre 6, pages 219–261. Springer, London, 1996. In Canudas de Wit, C. and Siciliano, B. *Theory of Robot Control*.
- [De Luca08] A. De Luca et W. Book. *Robots with Flexible Elements*, chapitre B.13, pages 287–319. Springer-Verlag, Berlin, 2008. In B. Siciliano and O. Khatib, *Springer Handbook of Robotics*.

- [De Luca09] A. De Luca, F. Flacco, A. Bicchi, et R. Schiavi. «Nonlinear decoupled motion-stiffness control and collision detection/reaction for the VSA-II variable stiffness device». Dans «IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems», Saint-Louis, MO, USA, 2009.
- [deOliveira99] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, et J. Geromel. «A new discrete-time robust stability condition». *Systems and Control Letters*, Vol. 37, n° 4, pages 261–265, 1999.
- [Dietz06] S. Dietz, C. Scherer, et W. Huyghen. «Linear parameter-varying controller synthesis using matrix sum-of squares». Dans «XVI Brazilian Automation Conference and XII Latin-American Congress on Automatic Control.», Salvador, BA, Brazil, 2006.
- [Dwivedy06] S. Dwivedy et P. Eberhard. «Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review». *Mechanism and machine theory*, Vol. 41, pages 749–777, 2006.
- [Gahinet94] P. Gahinet et P. Apkarian. «A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control». *International Journal of Robust Nonlinear Control*, Vol. 4, n° 4, pages 421–448, 1994.
- [Gahinet96] P. Gahinet, P. Apkarian, et M. Chilali. «Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, n° 3, pages 436–442, 1996.
- [Gahinet11] P. Gahinet et P. Apkarian. «Structured  $H_\infty$  synthesis in Matlab». Dans «IFAC World Congress», Milan, Italy, 2011.
- [Gilbert10] W. Gilbert, D. Henrion, J. Bernussou, et D. Boyer. «Polynomial LPV synthesis applied to turbofan engines». *Control Engineering Practice*, Vol. 18, n° 9, pages 1077–1084, 2010.
- [Ginhoux05] R. Ginhoux, J. Gangloff, M. de Mathelin, L. Soler, M. Sanchez, et J. Marescaux. «Active filtering of physiological motion in robotized surgery using predictive control». *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 21, pages 67–79, 2005.
- [Gu03] K. Gu, V. L. Kharitonov, et J. Chen. *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhäuser, 2003.
- [Hagn08] U. Hagn, M. Nickl, S. Jörg, G. Passig, T. Bahls, A. Nothhelfer, F. Hacker, L. Le-Tien, A. Albu-Schäffer, R. Konietschke, M. Grebenstein, R. Warpup, R. Haslinger, M. Frommberger, et G. Hirzinger. «The DLR MIRO : a versatile lightweight robot for surgical applications». *Industrial Robot*, Vol. 35, n° 4, pages 324–336, 2008.
- [Halalchi10] H. Halalchi, E. Laroche, et G. I. Bara. «LPV modeling and control of a 2-DOF robotic manipulator based on descriptor representation». Dans «Pan-American Congress of Applied Mechanics», Foz do Iguaçu, Brazil, 2010.
- [Hashemi12] S. M. Hashemi, H. S. Abbas, et H. Werner. «Low-complexity linear parameter-varying modeling and control of a robotic manipulator». *Control Engineering Practice*, Vol. 20, n° 3, pages 248–257, 2012.

- 
- [Henrion01] D. Henrion, M. Sebek, et O. Bachelier. «Rank one LMI approach for stability of 2D polynomial matrices». *Multidimensional Systems and Signal Processing*, Vol. 12, pages 23–48, 2001.
- [Henrion04] D. Henrion et J. B. Lasserre. «Solving nonconvex optimization problems». *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 24, n° 3, pages 72–83, 2004.
- [Henrion06] D. Henrion et B. Lasserre. «Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, n° 2, pages 192–202, 2006.
- [Hirzinger04] G. Hirzinger, N. Sporer, M. Schedl, J. Butterfass, et M. Grebenstein. «Torque-controlled lightweight arms and articulated hands : Do we reach the technological limits now ?» *International Journal on Robotics Research*, Vol. 23, n° 4–5, pages 331–340, 2004.
- [Hol05] C. W. J. Hol et C. W. Scherer. «Sum of squares relaxation for robust polynomial semi-definite programs». Dans «IFAC World Congress», Prague, Czech Republic, 2005.
- [Iwasaki97] T. Iwasaki. «Robust stability analysis with quadratic separator : parametric time-varying uncertainty case». Dans «IEEE Conference on Decision and Control», San Diego, CA, USA, 1997.
- [Iwasaki01] T. Iwasaki et G. Shibata. «LPV system analysis via quadratic separator for uncertain implicit systems». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, n° 8, pages 1195–1208, 2001.
- [Jain11] A. Jain. *Robot and Multibody Dynamics - Analysis and Algorithms*. Springer, 2011.
- [Jarvis-Wloszek05] Z. Jarvis-Wloszek, R. Feeley, W. Tan, K. Sun, et A. Packard. *Control Applications of Sum of Squares Programming*, chapitre 1, pages 3–22. Springer, 2005. In Henrion, D. and Garulli, A. *Positive Polynomials in Control*.
- [Jibotean03] D. Jibotean et E. De Klerk. «Global optimization of rational functions : a semidefinite programming approach». Rapport technique, CWI (Centrum voor Wiskunde en Informatica), Pays-Bas, 2003.
- [Kwiatkowski08] A. Kwiatkowski et H. Werner. «PCA-based parameter set mappings for LPV models with fewer parameters and less overbounding». *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 16, n° 4, pages 781–788, 2008.
- [Laroche11] E. Laroche, G. Mercère, et H. Halalchi. «Modélisation et identification LPV d’un manipulateur flexible». Dans «Journées identification et modélisation expérimentale», Douai, France, 2011.
- [Lasserre01] J. B. Lasserre. «Global optimization with polynomials and the problem of moments». *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 11, pages 796–817, 2001.
- [Lee91] W. C. Lee. *Effects of collocation and non collocation of sensors and actuators on flexible structures*. Thèse de maître, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AFB, CA, USA, 1991.

- [Leith98] D. J. Leith et W. E. Leithad. «Gain-scheduled and nonlinear systems : dynamic analysis by velocity-based linearization families». *International Journal of Control*, Vol. 70, n° 2, pages 289–317, 1998.
- [Ljung99] L. Ljung. *System Identification - Theory for the user*. Prentice Hall, 1999.
- [Löfberg04] J. Löfberg. «YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in Matlab». Dans «IEEE Conference on Computer-aided Control Systems Design», Taipei, Taiwan, 2004.
- [Magni06] J.-F. Magni. «User manual of the linear fractional representation toolbox (Version 2.0)». Rapport technique, ONERA, Toulouse, France, 2006.
- [Marcos01] A. Marcos et G. Balas. «Linear parameter varying modeling of the Boeing 747-100/200 longitudinal motion». Dans «AIAA Guidance, Navigation and Control Conference», Montreal, QC, Canada, 2001.
- [Martins05] J. Martins, J. da Costa, et M. Botto. «Modelling, control and validation of flexible robot manipulators». *Advances in Computational Multibody Systems*, Vol. 2, pages 239–268, 2005.
- [Masubuchi97] I. Masubuchi. « $H_\infty$  control for descriptor systems : a matrix inequalities approach». *Automatica*, Vol. 33, n° 4, pages 669–673, 1997.
- [Masubuchi03] I. Masubuchi, T. Akiyama, et M. Saeki. «Synthesis of output feedback gain scheduling controllers based on descriptor LPV system representation». Dans «IEEE Conference on Decision and Control», Maui, HI, USA, 2003.
- [Masubuchi04] I. Masubuchi, J. Kato, M. Saeki, et A. Ohara. «Gain-scheduled controller design based on descriptor representation of LPV systems : application to flight vehicle control». Dans «IEEE Conference on Decision and Control», Atlantis, Bahamas, 2004.
- [Mercère12] G. Mercère, E. Laroche, et O. Prot. «Analytical Modelling and Grey-box Identification of a Flexible Arm using a Linear Parameter-varying Model». Dans «IFAC Symposium on System Identification», Brussels, Belgium, 2012.
- [Motzkin67] T. S. Motzkin. «The arithmetic-geometric inequality». Dans «Symposium of Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965», Academic Press, New York, 1967.
- [Papachristodoulou05] A. Papachristodoulou et S. Prajna. *Analysis of non-polynomial systems using the sum of squares decomposition*, chapitre 2, pages 23–44. Springer, 2005. In Henrion, D. and Garulli, A. *Positive Polynomials in Control*.
- [Parrilo00] P. Parrilo. *Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization*. Thèse de doctorat, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 2000.
- [Parrilo04] P. A. Parrilo. «Sum of squares programs and polynomial inequalities». *SIAG/OPT Views-and-News : A Forum for the SIAM Activity Group on Optimization*, Vol. 15, n° 2, pages 7–15, 2004.
- [Parrilo06] P. Parrilo. «Sum of squares optimization in the analysis and synthesis of control systems». Téléchargeable à partir de [www.mit.edu/~parrilo](http://www.mit.edu/~parrilo), 2006. Présentation plénière dans American Control Conference.

- [Pettersson97] S. Pettersson et B. Lennartson. «An LMI approach for stability analysis of nonlinear systems». Dans «European Control Conference», Brussels, Belgium, 1997.
- [Pettersson02] S. Pettersson et B. Lennartson. «Hybrid system stability and robustness verification using linear matrix inequalities». *International Journal of Control*, Vol. 75, n° 16, pages 1335–1355, 2002.
- [Prajna04a] S. Prajna, A. Papachristodoulou, P. Seiler, et P. Parrilo. *SOSTOOLS : Sum of squares optimization toolbox for MATLAB*. Disponible à partir de <http://www.cds.caltech.edu/sostools>, 2004.
- [Prajna04b] S. Prajna, A. Papachristodoulou, et F. Wu. «Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization : a Lyapunov-based approach». Dans «Asian Control Conference», Melbourne, Australia, 2004.
- [Prajna04c] S. Prajna, P. A. Parrilo, et A. Rantzer. «Nonlinear Control Synthesis by Convex Optimization». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, n° 2, pages 310–314, 2004.
- [Rantzer96] A. Rantzer. «On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma». *Systems and Controls Letters*, Vol. 28, n° 1, pages 7–10, 1996.
- [Robinson73] R. M. Robinson. «Some definite polynomials which are not sums of squares of real polynomials». *Selected questions of algebra and logic*, pages 264–282, 1973.
- [Rugh00] W. J. Rugh et J. Shamma. «Research on gain-scheduling». *Automatica*, Vol. 36, n° 10, pages 1401–1425, 2000.
- [Sage99] H. Sage, M. de Mathelin, et E. Ostertag. «Robust control of robot manipulators : a survey». *International Journal of Control*, Vol. 72, n° 16, pages 1498–1522, 1999.
- [Sato07] M. Sato et D. Peaucelle. «Robust stability/performance analysis for uncertain linear systems via multiple slack variable approach : polynomial LTIPD systems». Dans «IEEE Conference on Decision and Control», New Orleans, LA, USA, 2007.
- [Scherer97] C. W. Scherer, P. Gahinet, et M. Chilali. «Multi-objective output-feedback control via LMI optimization». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, n° 7, pages 896–911, 1997.
- [Scherer01] C. W. Scherer. «LPV control and full-block multipliers». *Automatica*, Vol. 37, n° 3, pages 361–375, 2001.
- [Scherer06a] C. W. Scherer. «LMI relaxations in robust control». *European Journal of Control*, Vol. 12, n° 1, pages 3–29, 2006.
- [Scherer06b] C. W. Scherer et C. J. W. Hol. «Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs». *Mathematical Programming*, Vol. 107, n° 1, pages 189–211, 2006.
- [Shamma93] J. Shamma et J. R. Cloutier. «Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations». *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16, n° 2, pages 256–263, 1993.
- [Shi01] P. Shi, J. McPhee, et G. Heppler. «A deformation field for Euler-Bernoulli beams with applications to flexible multibody dynamics». *Multibody System Dynamics*, Vol. 5, pages 79–104, 2001.

- [Shi02a] P. Shi et McPhee. «Symbolic programming of a graph-theoretic approach to flexible multibody dynamics». *Mechanical structures and machines*, Vol. 30, n° 1, pages 123–154, 2002.
- [Shi02b] P. Shi, J. McPhee, et G. Heppler. *DynaFlex User's Guide*. Systems Design Engineering, University of Waterloo, 2002.
- [Slotine91] J.-J. E. Slotine et W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [Spong05] M. W. Spong, S. Hutchinson, et M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control*. Wiley and Sons, 2005.
- [Sturm99] J. Sturm. «Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones». *Optimization Methods and Software*, Vol. 11–12, pages 625–653, 1999.
- [Tan04] W. Tan et A. Packard. «Searching for control Lyapunov functions using sums of squares programming». Dans «Annual Allerton Conference on Communications, Control and Computing», Monticello, IL, USA, 2004.
- [Tan06] W. Tan. *Nonlinear control analysis and synthesis using sum-of-squares programming*. Thèse de doctorat, University of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA, 2006.
- [Tan08] W. Tan et A. Packard. «Stability region analysis using polynomial and composite polynomial Lyapunov functions and sum-of-squares programming». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 53, n° 2, pages 565–571, 2008.
- [Tokhi99] M. Tokhi et Z. Mohamed. «Finite element approach to dynamic modelling of a flexible robot manipulator : performance evaluation and computational requirements». *Communications in numerical methods in engineering*, Vol. 15, pages 669–678, 1999.
- [Topcu10] U. Topcu, A. Packard, P. Seiler, et G. Balas. «Help on SOS». *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 30, pages 18–23, 2010.
- [Tóth10] R. Tóth. *Modeling and Identification of Linear Parameter-Varying Systems*. Springer, Berlin, 2010.
- [Vidyasagar93] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Engle Woods, 1993.
- [Wang06] H. S. Wang, C. F. Yung, et F. R. Chang.  *$H_\infty$  Control for Nonlinear Descriptor Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2006.
- [Wu05] F. Wu et S. Prajna. «SOS-based solution approach to polynomial LPV systems analysis and synthesis problems». *International Journal of Control*, Vol. 11–12, pages 625–653, 2005.
- [Wu06] F. Wu et K. Dong. «Gain-scheduling control of LFT systems using parameter-dependent Lyapunov functions». *Automatica*, Vol. 42, n° 1, pages 39–50, 2006.
- [Zhang01] J. Zhang, C. R. Cnops, et P. Tsiotras. «Stability of time-delay systems : equivalence between Lyapunov and scaled small-gain conditions». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, n° 3, pages 482–486, 2001.

- [Zhou96] K. Zhou, J. C. Doyle, et K. Glover. *Robust and Adaptive Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.

## Résumé

**Titre :** Commande linéaire à paramètres variants (LPV) des robots manipulateurs flexibles

Les robots flexibles sont de plus en plus utilisés dans les applications pratiques. Ces robots sont caractérisés par une conception mécanique légère, réduisant ainsi leur encombrement, leur consommation d'énergie et améliorant leur sécurité. Cependant, la présence de vibrations transitoires rend difficile un contrôle précis de la trajectoire de ces systèmes. Cette thèse est précisément consacrée à l'asservissement en position des manipulateurs flexibles dans les espaces articulaire et opérationnel. Des méthodes de commande avancées, basées sur des outils de la commande robuste et de l'optimisation convexe, ont été proposées. Ces méthodes font en particulier appel à la théorie des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) et aux inégalités matricielles linéaires (LMI). En comparaison avec des lois de commande non-linéaires disponibles dans la littérature, les lois de commande LPV proposées permettent de considérer des contraintes de performance et de robustesse de manière simple et systématique. L'accent est porté dans notre travail sur la gestion appropriée de la dépendance paramétrique du modèle LPV, en particulier les dépendances polynomiale et rationnelle. Des simulations numériques effectuées dans des conditions réalistes, ont permis d'observer une meilleure robustesse de la commande LPV par rapport à la commande non-linéaire par inversion de modèle face aux bruits de mesure, aux excitations de haute fréquence et aux incertitudes de modèle.

**Mots-clés :** Robots manipulateurs flexibles, commande robuste, systèmes LPV, inégalités matricielles linéaires (LMI), programmation semi-définie (SDP), commande  $H_\infty$ , optimisation convexe.

## Abstract

**Title :** Linear Parameter Varying (LPV) control of flexible robotic manipulators

Flexible robots are becoming more and more common in practical applications. This type of robots is characterized by the use of lightweight materials, which allows reducing their size, their power consumption and improves their safety. However, an accurate trajectory tracking of these systems is difficult to achieve because of the transient vibrations they undergo. This PhD thesis work is particularly devoted to the position control of flexible robotic manipulators at the joint and end-effector levels. Advanced control methods, based on some tools of the robust control theory and convex optimization, have been proposed. These methods are based on the theory of Linear Parameter Varying (LPV) systems and Linear Matrix Inequalities (LMI). Compared to some nonlinear control laws available in the literature that involve model inversion, the proposed LPV control laws make it possible to consider performance and robustness constraints in a simple and systematic manner. Our work particularly emphasizes on the appropriate management of the parametric dependence of the LPV model, especially the polynomial and rational dependences. Numerical simulations carried out in realistic operating conditions have shown a better robustness of the LPV control compared to the inversion-based nonlinear control with respect to measurement noise, high frequency inputs and model uncertainties.

**Keywords :** Flexible robots, robust control, LPV systems, Linear Matrix Inequalities (LMI), semidefinite programming (SDP),  $H_\infty$  control, convex optimization.