



THÈSE présentée par :

Fatma ABDMOULEH

soutenue le : 12 Novembre 2013

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : Informatique

**Reconstruction tomographique de propriétés
qualitatives et quantitatives d'images**

THÈSE dirigée par :

M. TAJINE Mohamed

Professeur, université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

M. PICOULEAU Christophe

Professeur, Conservatoire National des Arts et Métiers

M. VUILLON Laurent

Professeur, université de Savoie

AUTRES MEMBRES DU JURY :

M. DUFOURD Jean-François

Professeur, université de Strasbourg

M. NORMAND Nicolas

Maître de conférences HDR, université de Nantes

Remerciements . . .

C'est grâce a beaucoup de personnes que ce travail a pu être fait. Avant d'adresser mes remerciements à toutes ces personnes, je voudrais commencer par une pensée à la mémoire de mon encadrant M. Alain Daurat qui nous a quitté quelques mois après le début de ma thèse. C'est sur ses pas que j'ai continué et je lui suis reconnaissante pour la disponibilité, la bienveillance qu'il a su montrer jusqu'à la fin de son combat avec la maladie.

Je souhaite ensuite adresser mes remerciements à mon directeur de thèse, M. Mohamed Tajine, Professeur à l'Université de Strasbourg, pour m'avoir confié ce travail de recherche. Je lui suis reconnaissante pour le temps qu'il m'a accordée et pour ses conseils précieux. J'ai beaucoup appris grâce à ses qualités scientifiques et humaines.

Mes sincères remerciements vont également aux rapporteurs de cette thèse, M. Christophe Picouveau, Professeur au CNAM et M. Laurent Vuillon, Professeur à l'Université de Savoie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, ainsi qu'à M. Jean François Dufourd, professeur à l'Université de Strasbourg, et à M. Nicolas Normand, Maître de conférences HDR à l'Université de Nantes, d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à M. Étienne Baudrier, maître de conférences à l'Université de Strasbourg, pour son aide, sa générosité et son soutien tout au long de ces années.

Je tiens à remercier toutes les personnes que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant ce long parcours qu'est la thèse. Merci à mes collègues de l'équipe MIV du laboratoire Icube pour l'ambiance de travail agréable. Je n'oublie pas non plus ceux qui m'ont beaucoup appris en enseignement durant mes 3 ans de monitorat à l'IUT de Louis Pasteur, spécialement Mme Marie Andrée Da col et M. Sylvain Porret-Blanc ; et durant mon année en tant que ATER à l'IUT Robert Schuman, spécialement Mme Agnès Braud, M. Julien Gossa et M.

Franco Zaroli.

Une pensée particulière à la mémoire de mes deux grand-pères qui sont la source de mon inspiration et mon modèle de persévérance, de patience et d'amour pour la science.

Je clos ces remerciements en dédiant cette thèse de doctorat à mes très chers parents, à mon mari et à mes frères qui ont toujours cru en moi. Sans leur amour et leur soutien inconditionnel je n'aurais pas pu arriver au bout de cette aventure.

Table des matières

1	Introduction générale	7
2	Notions de base	13
2.0.1	Concepts de base et terminologie	13
2.0.2	Notion de projection	17
3	Tomographie	23
3.1	Problème direct	23
3.2	Problème inverse	24
3.2.1	Tomographie continue et tomographie discrète	25
3.2.2	Problématiques dérivées	25
3.2.3	Applications de la tomographie	27
4	Reconstruction tomographique et convexité	29
4.1	Convexité dans l'espace euclidien \mathbb{R}^2	29
4.2	Convexité dans l'espace discret \mathbb{Z}^2	35
4.3	Classes de convexité dérivées	38
4.4	Reconstruction et complexité algorithmique	40
5	Convexité par quadrants pour des sources ponctuelles dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{Z}^2	41
5.1	Définition et propriétés	42
5.1.1	Calcul de l'enveloppe Q-convexe	49
5.2	Relation entre la convexité et la Q-convexité	51
5.2.1	Propriétés des ensembles convexes	52
5.2.2	Les points saillants d'un ensemble Q-convexe	57
5.3	Génération aléatoire d'ensembles Q-convexes discrets	63
5.3.1	Complexité algorithmique et probabilité de génération	65
5.3.2	Génération aléatoire d'ensembles de $\mathcal{QC}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{p}, \star)$	65
5.4	Reconstruction d'ensembles Q-convexes discrets pour des sources ponctuelles	67
5.4.1	Présentation du problème pour deux sources ponctuelles	68

5.4.2	Initialisation du noyau et de la coquille	70
5.4.3	Opérations de complétion	73
5.4.4	Reconstruction d'ensembles n'intersectant pas la droite des sources	75
5.4.5	Reconstruction avec plus que deux sources ponctuelles	80
5.4.6	Reconstruction d'ensembles intersectant la droite des sources	81
6	Reconstruction tomographique d'ensembles convexes par la Q-convexité	85
6.1	Unicité de la reconstruction d'ensembles Q-convexes	86
6.1.1	Presque semi-plan, \mathfrak{p} -polygone et \mathfrak{p} -séquence	86
6.1.2	Détermination des ensembles convexes et Q-convexes	89
6.2	Reconstruction d'ensembles convexes par la Q-convexité	103
7	Reconstruction de propriétés qualitatives d'images	105
7.1	Estimation de l'aire	106
7.1.1	Exemple	109
7.2	Approximation du périmètre	109
7.2.1	Bornes inférieures du périmètre	110
7.2.2	Borne supérieure pour le périmètre	111
7.2.3	Exemple	112
8	Conclusion générale	115
	Liste des Figures	117
	Liste des Tableaux	121
A	Notations	125
B	Algorithme de Tarjan pour l'évaluation d'une formule 2-SAT	127
B.1	Formation du graphe orienté	127
B.2	Composants fortement connexes	128
C	Complexité de l'algorithme de reconstruction	131
	Bibliographie	134

Chapitre 1

Introduction générale

L'introduction de l'informatique dans le traitement des images a donné une nouvelle discipline qui a révolutionné la science qu'est l'imagerie numérique. Grâce à l'imagerie numérique, des données qui semblaient jadis inaccessibles deviennent de plus en plus claires et précises. Cette discipline couvre des domaines d'applications très variés allant de l'imagerie aérienne ou satellitaire à l'imagerie médicale ou biologique en passant par la robotique et l'industrie.

Selon le domaine, les technologies et les conditions d'acquisition de l'image diffèrent. Néanmoins, un point commun est que des contraintes logicielles et matérielles imposent la représentation des données sous forme discrète, c'est-à-dire sous forme d'une matrice de points (« **picture element** » ou pixels) portant chacun une information numérique.

Par ailleurs, dans certaines applications, l'image que l'on cherche à avoir ne concerne pas l'aspect extérieur des objets étudiés. On voudrait plutôt avoir une image de l'intérieur d'un objet sans le couper. Ceci est rendu possible grâce à la découverte des rayons X par William K. Röntgen en 1895 qui a donné naissance à la *tomographie*. Le nom de cette technique d'imagerie est formé de deux mots : tomo- du grec ancien (*temnein*) pour dire « coupe » et -graphie du grec ancien (*graphia*) pour dire écrire. Ainsi, comme son nom l'indique, la tomographie permet de reconstruire une image coupe par coupe de l'intérieur d'un objet à partir d'une série de mesures faites grâce à des rayons qui le traversent. Ces mesures sont appelées les *projections* de l'objet.

D'un point de vue mathématique, il s'agit d'un problème inverse consistant à déterminer une fonction connue par ses intégrales (projections) le long des différentes droites qui représentent les rayons traversant l'objet projeté (cf. Figure 1.1).

On distingue alors différents types de tomographie :

- La tomodensitométrie qui reconstruit une image en niveau de gris. La fonction à reconstruire et son domaine sont continus.
- La tomographie géométrique où la fonction à reconstruire est binaire ayant un do-

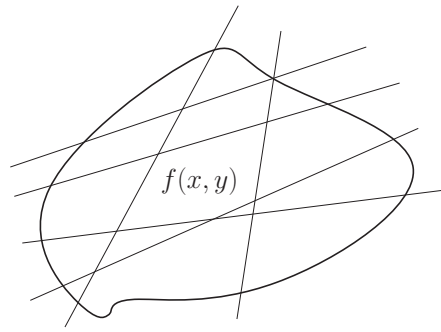


FIGURE 1.1 – $f(x, y)$ est connue par ses intégrales sur toutes les droites.

maine continu.

- La tomographie discrète où la fonction à reconstruire est binaire ayant un domaine discret.

Les questions immédiates dans un problème inverse de tomographie sont :

1. Existe-t-il une solution au problème considéré ?
2. Si oui, comment la reconstruire ?
3. Cette solution est elle unique ?



FIGURE 1.2 – Plusieurs projections sont nécessaires pour reconstruire l'objet.

C'est lors du symposium de la société mathématique américaine (American Mathematical Society Symposium) sur la convexité en 1961 que P. C. Hammer a posé le problème suivant : « Combien de projections sont nécessaires pour reconstruire un objet ? »

Sans aucun a priori sur cet objet, il faut une infinité de projections pour le reconstruire. Cependant, dans beaucoup d'applications (microscopie électronique, angiographie, etc.) seul un faible nombre de projections est disponible. Des informations supplémentaires sur l'objet à reconstruire sont alors nécessaires. Par exemple, si on suppose que l'objet à reconstruire appartient à une classe d'objets ayant des propriétés connues, on peut minimiser le nombre de projections utilisées.

La classe d'objets qui a attiré le plus d'intérêt dans ce contexte est celle des objets

convexes. Toutefois, la résolution du problème de reconstruction pour des objets convexes n'étant pas simple, d'autres classes qui en sont proches ont été introduites. Résoudre le problème de reconstruction pour ces classes pourrait alors permettre la résolution des problèmes que la question de P. C. Hammer a soulevée pour des ensembles convexes.

C'est dans ce cadre que s'inscrit cette thèse. La première approche adoptée dans ce travail est d'étudier le problème de la tomographie discrète en supposant que les ensembles que nous cherchons à reconstruire vérifient des propriétés géométriques particulières dites de convexité par quadrants. Le problème est posé dans les cas où les rayons qui passent par l'objet sont issus de sources ponctuelles et ne sont donc pas parallèles. En effet, dans la littérature, la plupart des travaux de recherche considèrent des rayons parallèles en supposant que la source de ces rayons est à une distance infinie de l'ensemble projeté. Le cas des sources ponctuelles est donc plus général. La deuxième approche consiste en l'étude de l'extraction des informations recherchées directement à partir des projections sans passer par l'étape de reconstruction. En effet, dans certaines applications, l'objectif de la reconstruction tomographique est de pouvoir extraire des informations qualitatives (topologie, arbre des composantes connexes, etc.) et quantitatives (surface, périmètre, etc.) sur l'objet projeté.

Après ce chapitre introductif, ce manuscrit contient 6 chapitres suivis d'un chapitre de conclusion.

Le chapitre 2 introduit les notions de bases et les définitions qui seront utiles dans les chapitres suivants. Le chapitre 3 décrit les étapes de la tomographie, à savoir le problème direct où les projections sont calculées, et le problème inverse, où l'ensemble est reconstruit à partir de ses projections. Ce chapitre décrit aussi les différentes problématiques liées au problème posé par Hammer ainsi que différentes applications de la tomographie. Le chapitre 4 est consacré à la notion de convexité et aux différentes classes de convexité dérivées. Un état de l'art est dressé dans ce chapitre.

Dans le chapitre 5, la notion de la convexité par quadrants est introduite. Nous étudions dans ce chapitre les propriétés de cette classe et établissons un lien avec la convexité classique. Un algorithme de génération aléatoire d'ensembles convexes par quadrants est présenté dans ce chapitre. La dernière section du chapitre est consacrée au problème de reconstruction des ensembles convexes par quadrants et un algorithme de reconstruction est proposé.

Grâce au lien entre la convexité classique et la convexité par quadrants, nous montrons dans le chapitre 6 comment le problème de reconstruction pourrait être résolu pour la classe d'ensembles convexes.

Le chapitre 7 est dédié à la reconstruction des propriétés des ensembles étudiés direc-

tement à partir des projections. Nous donnons un estimateur de l'aire d'un ensemble à partir d'une seule projection ainsi que deux bornes inférieures et une borne supérieure pour son périmètre.

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, nous récapitulons toutes les notations introduites dans une annexe (cf. annexe A). Deux autres annexes sont jointes à ce mémoire pour expliquer un algorithme de résolution d'une formule booléenne (cf. annexe B) et pour calculer la complexité algorithmique de l'algorithme de reconstruction présenté dans le chapitre 5 (cf. annexe C).

Ce travail a donné lieu aux publications suivantes :

Articles dans des actes de conférences d'audience internationale avec comité de sélection

F.Abdmouleh & M. Tajine : Reconstruction of quantitative properties from X-rays. DGCI LNCS (2013) 7749, 277-287

F.Abdmouleh, A. Daurat & M. Tajine : Discrete Q-convex sets reconstruction from discrete point X-rays. IWCI LNCS (2011) 6636, 323-336

Rapports de Recherche

F.Abdmouleh, A. Daurat & M. Tajine : Q-convex sets for point sources. (preprint : 2010) [http:// hal.archives-ouvertes/hal-00563126](http://hal.archives-ouvertes/hal-00563126)

Chapitre 2

Notions de base

Sommaire

2.0.1	Concepts de base et terminologie	13
2.0.2	Notion de projection	17

Nous introduisons dans ce chapitre les notions et les notations de bases qui seront utilisées tout au long de ce manuscrit.

2.0.1 Concepts de base et terminologie

Un plan discret pour un réel $r > 0$, noté $\mathbb{D}_r = r\mathbb{Z}^2$ (voir la Figure 2.1), est tel que la distance entre deux points consécutifs sur un même axe (vertical et horizontal) est r . Ce plan discret est représenté par une grille qui a une résolution égale à $p = 1/r$ appelée r -grille.

Certaines des définitions qui suivent sont valables aussi bien dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 que dans le plan discret. Dans ce cas, nous noterons \mathbb{S}^2 l'espace concerné.

Un pixel, à une résolution $p = 1/r$, est un point de $r\mathbb{Z}^2$. Il peut être représenté comme un point ou un carré centré sur un point de $r\mathbb{Z}^2$ (cf. Figure 2.2).

Toutes les notions topologiques que nous considérons dans cette thèse correspondent à la topologie usuelle induite par la valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur \mathbb{R} et la norme euclidienne $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ sur \mathbb{R}^2 où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 (e.g. $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$ pour tout (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de \mathbb{R}^2).

Une boule ouverte de centre A appartenant à \mathbb{R}^2 et de rayon $r > 0$ est définie comme l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 dont la distance à A est strictement inférieure à r (voir

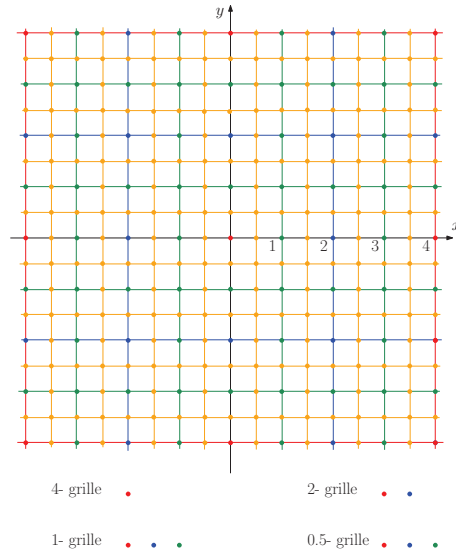


FIGURE 2.1 – $\mathbb{D}_r = r\mathbb{Z}^2$ pour $r = 4, 2, 1$ et 0.5 .

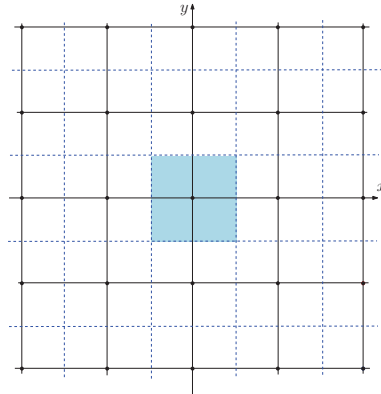


FIGURE 2.2 – Un pixel est représenté par un carré centré sur un point de la grille discrète.

l'illustration sur la Figure 2.3) :

$$\mathcal{B}(A, r) = \{B \in \mathbb{R}^2 ; \|\overrightarrow{AB}\| < r\}.$$

Tout au long de ce mémoire, les définitions et les notations suivantes seront utilisées :

- Si $P \in \mathbb{R}^2$, alors x_P (respectivement y_P) représente l'abscisse (respectivement l'ordonnée) du point P . Autrement dit, $P = (x_P, y_P)$.
- La distance entre deux points A et B de \mathbb{R}^2 est notée par $d(A, B)$ ($d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$).
- Un point $A \in \mathcal{E}$ est dit *point intérieur* de \mathcal{E} s'il existe une boule ouverte $\mathcal{B}(A, r)$ centrée en A qui est contenue dans \mathcal{E} .
- Un ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ est dit *ouvert* si tous ses points sont des points intérieurs à \mathcal{E} .
- Un ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ est dit *fermé* si son complémentaire est un ouvert.
- Un ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ est dit *compact* s'il est à la fois fermé et borné.
- Pour un ensemble fini \mathcal{E} , $|\mathcal{E}|$ désigne son cardinal indiquant le nombre d'éléments

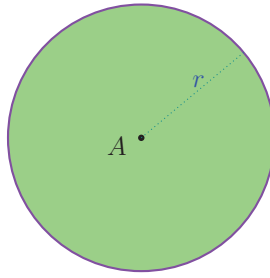


FIGURE 2.3 – Les points B tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = r$ sont en violet. Les points B tels que $\|\overrightarrow{AB}\| < r$ sont en vert. Les points verts forment un ensemble ouvert. L’union des points verts et violet forme un ensemble fermé.

de \mathcal{E} .

- Pour un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ désignent respectivement le périmètre et l’aire de \mathcal{E} .
- Soit \mathcal{E} un ensemble. $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ désigne l’ensemble des parties de \mathcal{E} (e.g. $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \{F \mid F \subseteq \mathcal{E}\}$).
- L’intérieur topologique d’un ensemble \mathcal{E} est le plus grand ensemble ouvert contenu dans \mathcal{E} . Il est noté $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$.
- La fermeture topologique d’un ensemble \mathcal{E} est le plus petit ensemble fermé contenant \mathcal{E} . Elle est notée $\overline{\mathcal{E}}$.
- Pour un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$, $\partial(\mathcal{E})$ désigne le bord. Le bord de \mathcal{E} est l’intersection de la fermeture de \mathcal{E} et de la fermeture de son complémentaire dans \mathbb{R}^2 , c’est à dire $\partial(\mathcal{E}) = \overline{\mathcal{E}} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}}$
- $\mathbb{F}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ désigne l’ensemble des entiers modulo un entier $m \geq 1$.
- Pour un réel x , $[x]$, $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ désignent respectivement l’entier le plus proche de x , la partie entière par défaut (« plancher ») et la partie entière par excès (« plafond »).
- Soit un vecteur $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Le vecteur normal à \vec{u} est le vecteur $\vec{u}^\perp = (-y, x)$.

Remarque 2.0.1. Pour un réel x , on a $[x] = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lceil x - \frac{1}{2} \rceil$.

Par exemple, pour $x = \sqrt{3}$, $[x] = 2$, $\lfloor x \rfloor = 1$ et $\lceil x \rceil = 2$.

La définition suivante est donnée dans [Dor95].

Définition 2.0.1. Un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ est dit *régulier* si \mathcal{E} est un ensemble compact et $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{E}}} = \mathcal{E}$.

Un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 est dit *régulier* s’il est borné. Notons l’ensemble des ensembles réguliers de \mathbb{S}^2 par $\mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$.

Un exemple d’ensembles réguliers dans \mathbb{R}^2 est illustré par la Figure 2.4.

Nous définissons à présent les notions de droite, de droite orientée et de segment dans les espaces euclidien et discret.

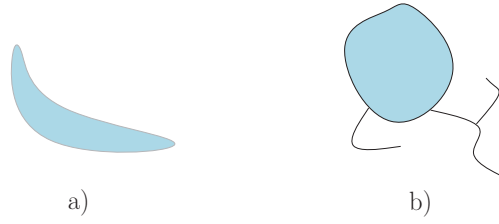


FIGURE 2.4 – a) ensemble régulier. b) ensemble non régulier.

Définition . Soient $\vec{n} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $A, P \in \mathbb{R}^2$.

- $D(A, \vec{n}) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0\}$ désigne la droite passant par le point A et de vecteur normal \vec{n} . La donnée d'une droite $D(A, \vec{n})$ comme un ensemble de points et de son vecteur normal \vec{n} définissent la droite orientée $D_{\vec{n}}(A)$. Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, lorsque le point A n'intervient pas explicitement, on notera la droite orientée par $D_{\vec{n}}$ au lieu de $D_{\vec{n}}(A)$.
- P est dit à gauche de $D_{\vec{n}}(A)$ si $\langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle \geq 0$. On notera $\mathcal{G}(D_{\vec{n}}(A))$ l'ensemble des points à gauche de $D_{\vec{n}}(A)$.
- P est dit strictement à gauche de $D_{\vec{n}}(A)$ si $\langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle > 0$. On notera $\mathcal{SG}(D_{\vec{n}}(A))$ l'ensemble des points strictement à gauche de $D_{\vec{n}}(A)$.
- P est dit à droite de $D_{\vec{n}}(A)$ si $\langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle \leq 0$. On notera $\mathcal{D}(D_{\vec{n}}(A))$ l'ensemble des points à droite de $D_{\vec{n}}(A)$.
- P est dit strictement à droite de $D_{\vec{n}}(A)$ si $\langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle < 0$. On notera $\mathcal{SD}(D_{\vec{n}}(A))$ l'ensemble des points strictement à droite de $D_{\vec{n}}(A)$.

Les ensembles $\mathcal{G}(D_{\vec{n}}(A)), \mathcal{D}(D_{\vec{n}}(A))$ (respectivement $\mathcal{SG}(D_{\vec{n}}(A)), \mathcal{SD}(D_{\vec{n}}(A))$) sont des demi-plans fermés (respectivement ouverts) dont le bord est la droite $D_{\vec{n}}$.

Soient n un entier strictement positif et A et B deux points de \mathbb{R}^n .

- Si $A \neq B$, (AB) désigne l'unique droite passant par A et B .
- Un segment de \mathbb{R}^n est défini comme suit

$$[A, B] = \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

- Le segment de \mathbb{Z}^n est défini comme suit

$$[[A, B]] = [A, B] \cap \mathbb{Z}^n.$$

Ceci nous permet de définir la notion de convexité, une notion importante dans ce travail.

Définition 2.0.2. Un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ est dit *convexe* si pour tout $A, B \in \mathcal{E}$ on a $[A, B] \subseteq \mathcal{E}$. Nous dirons alors que \mathcal{E} est \mathbb{R} -convexe.

Dans cette thèse, certains résultats sont vrais dans l'espace continu et l'espace discret. D'autres résultats sont basés sur le lien entre les deux espaces. Pour cela, nous définissons un opérateur de discrétisation.

Définition 2.0.3. Soit un r un réel strictement positif. Nous définissons l'opérateur de discrétisation suivant

$$\begin{aligned}\Lambda_r : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) &\mapsto \mathcal{P}(r\mathbb{Z}^n) \\ \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{E}_r = \mathcal{E} \cap r\mathbb{Z}^n\end{aligned}$$

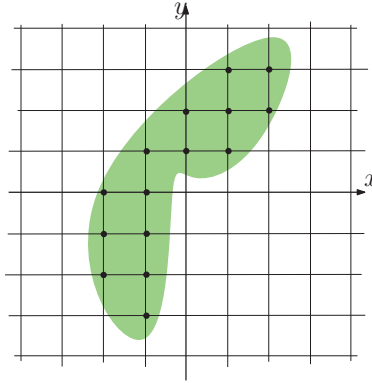


FIGURE 2.5 – $\Lambda_r(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_r = \mathcal{E} \cap r\mathbb{Z}^2$.

2.0.2 Notion de projection

Dans toute la suite de ce chapitre nous travaillerons dans l'espace euclidien \mathbb{R}^2 et l'espace discret \mathbb{Z}^2 .

Nous appelons *rayon* une demi-droite euclidienne de \mathbb{R}^2 ayant pour origine une source ponctuelle et étant parallèle à une direction donnée. Ainsi, un rayon $R_{S,\theta}$ issu d'une source ponctuelle $S = (x_0, y_0)$ parallèle à la direction $\vec{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ peut être défini de différentes manières :

$$\begin{aligned}R_{S,\theta} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0) \sin \theta - (y - y_0) \cos \theta = 0 \text{ et } x \geq x_0\}; \\ &= \{(x_0, y_0) + \lambda \vec{u}_\theta \mid \lambda \geq 0\}; \\ &= \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \widehat{PSM} = \theta\};\end{aligned}$$

avec $P = S + (1, 0)$ et \widehat{PSM} désigne l'angle entre (SP) et (SM) (voir la Figure 2.6.). Dans la suite, nous noterons l'angle \widehat{PSM} par θ_M^S . Tous les angles sont définis modulo 2π relativement à l'axe des abscisses.

Au rayon $R_{S,\theta}$ correspond la droite orientée $D_{\vec{u}_\theta^\perp}(S)$ passant par S et de vecteur normal \vec{u}_θ^\perp .

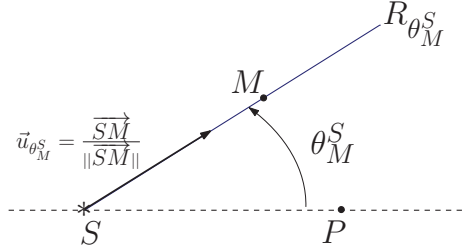


FIGURE 2.6 – Un rayon R_{S,θ_M^S} issu d'une source ponctuelle $S = (x_0, y_0)$ et parallèle à la direction \vec{SM} .

Soit $S \in \mathbb{R}^2$ une source ponctuelle. Nous définissons l'ensemble de tous les angles de tous les rayons issus de S et passant par tous les points de \mathbb{S}^2 .

$$\mathcal{A}(S, \mathbb{S}^2) = \{\theta_M^S \mid M \in \mathbb{S}^2\}.$$

Quand la source ponctuelle est fixée, on notera l'angle θ_M au lieu de θ_M^S et quand le point M n'est pas spécifié, on notera simplement θ .

Remarques 1. Nous remarquons que pour une source ponctuelle donnée $S \in \mathbb{R}^2$ on a :

- $\mathcal{A}(S, \mathbb{R}^2) = [0, 2\pi[$.
- $\mathcal{A}(S, \mathbb{Z}^2)$ est un ensemble infini dénombrable.
- $\overline{\mathcal{A}(S, \mathbb{Z}^2)} = [0, 2\pi]$.

Considérons une source ponctuelle $S \in \mathbb{R}^2$. Pour un ensemble euclidien $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$, les *projections* sont déterminées par la fonction $X_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}, S, \cdot) : [0, 2\pi[\mapsto \mathbb{R}$ qui à chaque rayon $R_{S,\theta}$ issu de S et parallèle à la direction $\vec{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ associe la longueur de l'intersection entre \mathcal{E} et le rayon $R_{S,\theta}$, définie par :

$$X_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}, S, \theta) = \int_0^{+\infty} \chi_{\mathcal{E} \cap R}(S + t\vec{u}_\theta) dt.$$

avec

$$\chi_{\mathcal{E}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $X_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}, S, \theta) = \mu(\mathcal{E} \cap R_{S,\theta})$ où μ est la mesure de Lebesgue usuelle sur \mathbb{R} .

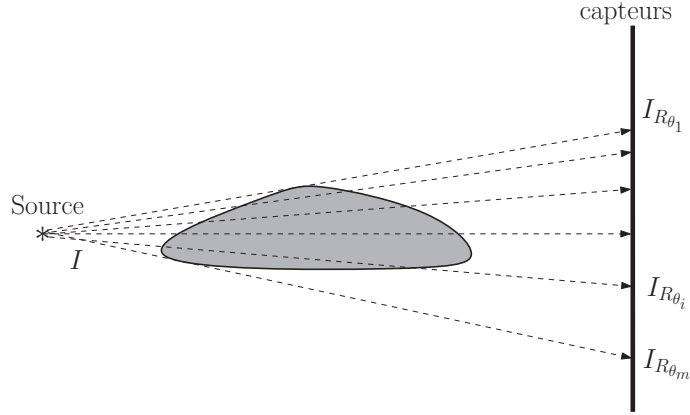


FIGURE 2.7 – Dispositif physique de projection.

La Figure 2.7 illustre le fonctionnement des dispositifs physiques qui permettent de calculer les projections. Une source fixée émet un rayon d'intensité I qui traverse l'objet. Les capteurs détectent le rayon ayant une intensité $I_{R_{S,\theta_i}}$ à la sortie de l'objet. La différence d'intensité d'un rayon $\Delta I = I - I_{R_{S,\theta_i}} = C\mu(\mathcal{E} \cap R_{S,\theta_i})$ est une information sur la quantité de matière composant l'objet (homogène) traversée par ce rayon (μ est la mesure de Lebesgue usuelle sur \mathbb{R}) et C une constante dépendant de la nature de la matière traversée. Dans le cas discret, (voir la Figure 2.8) pour un ensemble $D \subseteq \mathbb{Z}^2$, les projections sont déterminées par la fonction $X_{\mathbb{Z}}(D, S, \cdot) : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$X_{\mathbb{Z}}(D, S, \theta) = |R_{S,\theta} \cap D|.$$

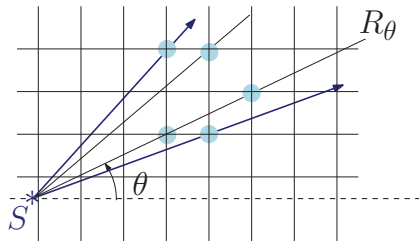


FIGURE 2.8 – Projection discrète par des rayons issus d'une source ponctuelle S .

Nous définissons aussi la notion de *support* d'un ensemble pour une source ponctuelle donnée :

Définition 2.0.4. Soit $S \in \mathbb{S}^2$ et $\mathcal{E} \subset \mathbb{S}^2$. Le support des \mathbb{S} -projections de \mathcal{E} par la source ponctuelle S est l'ensemble

$$Supp_{\mathbb{S}}(\mathcal{E}, S) = \{\theta \in \mathcal{A}(S, \mathbb{S}^2) \mid X_{\mathbb{S}}(\mathcal{E}, S, \theta) \neq 0\}.$$

Pour un rayon $R_{S,\theta}$ issu d'une source ponctuelle S dans la direction \vec{u}_θ ayant pour vecteur normal \vec{u}_θ^\perp , le demi-plan à droite et le demi-plan à gauche (cf. Figure 2.9) sont définis comme suit :

- $\mathcal{G}(R_{S,\theta}) = \mathcal{G}(D_{\vec{u}_\theta^\perp}(S))$ est l'ensemble des points qui sont à gauche de la droite orientée $D_{\vec{u}_\theta^\perp}(S)$ (portant $R_{S,\theta}$);
- $\mathcal{D}(R_{S,\theta}) = \mathcal{D}(D_{\vec{u}_\theta^\perp}(S))$ est l'ensemble des points qui sont à droite de la droite orientée $D_{\vec{u}_\theta^\perp}(S)$.

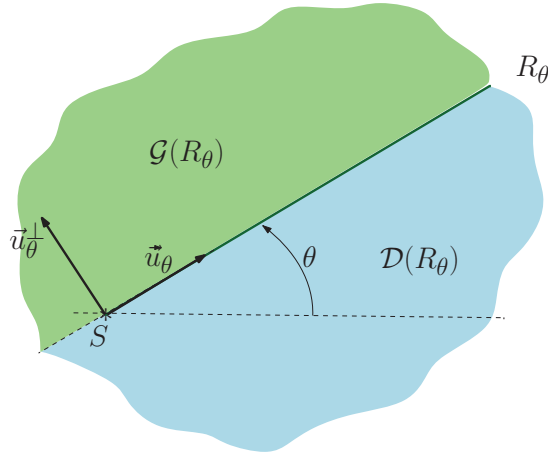


FIGURE 2.9 – Séparation du plan par la droite $D_{\vec{u}_\theta^\perp}(S)$ "portant" le rayon $R_{S,\theta}$.

Remarques 2. Soient $S \in \mathbb{R}^2$ une source ponctuelle et $\theta, \theta' \in [0, 2\pi[$ deux angles différents.

1. Pour un rayon $R_{S,\theta}$ issu d'une source S , on a :
 - $\mathcal{G}(R_{S,\theta}) = \{M \in \mathbb{S}^2 \mid \langle \overrightarrow{SM}, \vec{u}_\theta^\perp \rangle \geq 0\}$ et $\mathcal{D}(R_{S,\theta}) = \{M \in \mathbb{S}^2 \mid \langle \overrightarrow{SM}, \vec{u}_\theta^\perp \rangle \leq 0\}$
 - $\mathcal{G}(R_{S,\theta})$ et $\mathcal{D}(R_{S,\theta})$ sont des ensembles fermés.
 - $\mathcal{G}(R_{S,\theta}) \cap \mathcal{D}(R_{S,\theta}) = D(S, \vec{u}_\theta^\perp)$.
2. Le plan \mathbb{R}^2 privé des deux rayons $R_{S,\theta}, R_{S,\theta'}$ est constitué de deux composantes connexes : l'une correspondant à un angle $\alpha \in [0, \pi]$ et l'autre correspondant à l'angle $2\pi - \alpha \geq \pi$ (Voir l'illustration sur la Figure 2.10). Par exemple, si $R_{S,\theta'} \subset \mathcal{G}(R_{S,\theta})$, alors les composantes connexes de $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2 \setminus (R_{S,\theta} \cup R_{S,\theta'})$ sont :

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{S}\mathcal{G}(D_{\vec{u}_\theta^\perp}(S)) \cap \mathcal{S}\mathcal{D}(D_{\vec{u}_{\theta'}^\perp}(S)) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1.$$

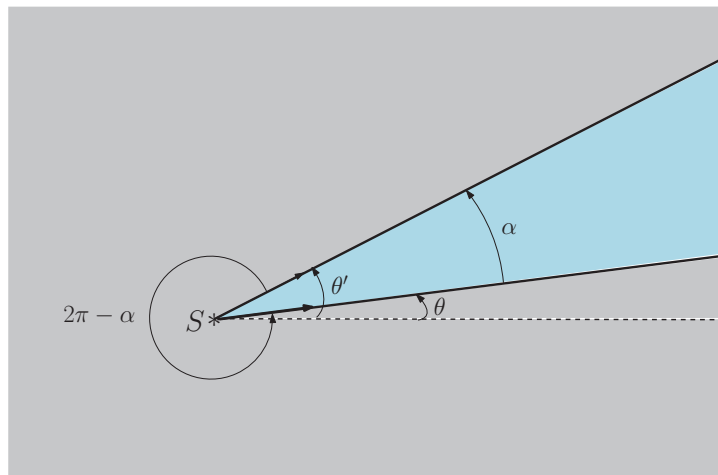


FIGURE 2.10 – Secteurs angulaire définis par deux rayons issus d’une même source ponctuelle : la composante connexe \mathcal{C}_1 est en bleu et la composante connexe \mathcal{C}_2 est en gris.

Chapitre 3

Tomographie

Sommaire

3.1	Problème direct	23
3.2	Problème inverse	24
3.2.1	Tomographie continue et tomographie discrète	25
3.2.2	Problématiques dérivées	25
3.2.3	Applications de la tomographie	27

La tomographie traite de la récupération d'informations sur un objet à partir d'une série de mesures qui lui sont appliquées de l'extérieur. Cette technique a rencontré un net succès non parce qu'elle évite la destruction ou la mutilation de l'objet étudié, mais aussi parce qu'elle offre une alternative à l'image radiologique où l'image d'une coupe n'est qu'une addition d'une infinité de plans superposés. Le processus se passe en deux phases : la première qui consiste à calculer les projections (problème direct) et la deuxième (problème inverse) qui, à partir de ces projections, répond aux trois questions suivantes :

1. Y-a-t-il une solution possible à partir de ces projections ?
2. Si une solution existe, comment la reconstruire ?
3. La solution reconstruite est elle l'unique solution au problème ?

Dans ce chapitre, nous présentons les étapes de la tomographie, dressons un état de l'art et citons quelques applications à la tomographie.

3.1 Problème direct

Des dispositifs physiques, de plus en plus sophistiqués, permettent d'obtenir une image de l'intérieur d'un objet sans le couper physiquement.

Cet objet est placé entre une source à rayons et un récepteur. Ce récepteur donne alors une information relative à la quantité de matière traversée par le rayon, qui partant de la



FIGURE 3.1 – Coupe d’abdomen. Image reconstruite par tomo-densiométrie.

source, traverse l’objet étudié (par exemple la différence d’intensité). Cette information est appelée projection. La surface d’une coupe est alors balayée par des rayons qui sont détectés à leur sortie par des récepteurs.

On peut distinguer deux cas pour les sources de ces rayons. Dans la plupart des cas, la source est supposée à une distance infinie de l’objet projeté. Via cette approximation, les rayons issus de cette source sont parallèles. Ainsi, chaque projection est mesurée selon une direction donnée.

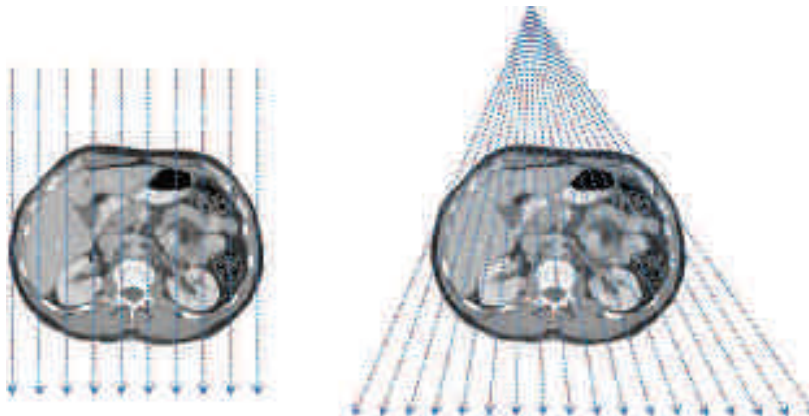


FIGURE 3.2 – À gauche : Projections par des rayons parallèles (source à l’infini). À droite : Projections par des rayons divergents (source ponctuelle).

Les projections collectées par ces récepteurs est ensuite numérisée et constitueront les données au problème inverse qui vise à reconstruire l’image du plan en question.

3.2 Problème inverse

Une fois les projections calculées, les trois questions citées au-dessus sont posées. Les travaux visant à y répondre peuvent être classés de différentes manières.

3.2.1 Tomographie continue et tomographie discrète

Nous pouvons partager les travaux dans la littérature entre ceux qui étudient la question de Hammer (voir l'Introduction) dans le cas continu [GM80, LC98, GG94, Kub91, Vol86, Fal83] et ceux qui l'étudient dans le cas discret [BLNP96, G98, CD99, Dau03, BBLN00, BD03, BD08, DGP06, KB02b].

En tomographie continue, l'ensemble projeté est un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 et les projections sont continues tandis qu'en tomographie discrète l'ensemble projeté et les projections sont discrets.

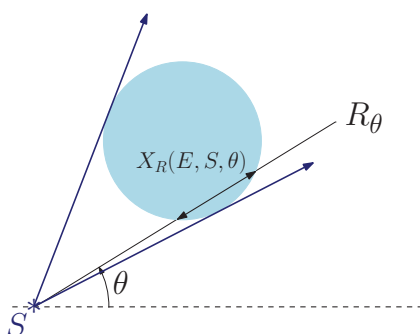


FIGURE 3.3 – Projection continue par des rayons issus d'une source ponctuelle S .

Certains résultats qui sont vrais dans le cas continu ne sont pas valables dans le cas discret. Nous en verrons des exemples dans la suite.

3.2.2 Problématiques dérivées

La manière avec laquelle le problème inverse de P. C. Hammer est posé nous permet aussi de classifier les différents travaux qui traitent ce problème.

Détermination et vérification de classes d'ensembles

Une des approches est la détermination de classes d'ensembles par n sources ou directions. Une classe d'ensembles donnée \mathcal{C} est dite déterminée par n projections s'il existe un ensemble de n sources tel que deux ensembles de \mathcal{C} ne peuvent pas avoir les mêmes projections relativement à ces sources. Dans cette problématique, la position des sources est fixée d'avance. Parmi les travaux qui se sont intéressés à ce problème nous citons [Gar92] où les auteurs montrent que la classe des polygones en forme d'étoile n'est déterminée par aucun ensemble fini de sources. Dans [SV03], il est montré que la classe des convexes en 3D peut être déterminée par deux sources ponctuelles sous certaines conditions. Falconer [Fal83] avait déjà montré en 1983 que la classe des ensembles convexes de \mathbb{R}^2 peut aussi être déterminée par deux sources ponctuelles sous certaines conditions. C'est Gardner qui

en donne une preuve plus simple dans [Gar83] tandis que Volčič [Vol86] prouve que la classe des ensembles convexes de \mathbb{R}^2 peut être déterminée par trois sources ponctuelles non colinéaires. Pour les ensembles convexes discrets, il est prouvé dans [DGP06] que cette classe peut être déterminée par deux sources ponctuelles satisfaisant des conditions relatives à la position de ces deux sources par rapport à l'ensemble projeté, par n'importe quel ensemble de plus que sept sources ponctuelles colinéaires et, sous certaines conditions, par un ensemble de quatre sources ponctuelles. Ce même papier démontre aussi que pour les sources ponctuelles non colinéaires, les résultats de Volčič pour le cas continu ne sont pas valables pour le cas discret.

Quant aux projections parallèles, Gardner et Gritzmann démontrent dans [GG97] que la classe des ensembles convexes de \mathbb{R}^2 peut être déterminée par deux directions satisfaisant des conditions relatives à la position de ces deux sources par rapport à l'ensemble projeté, par certains ensembles de quatre directions, par n'importe quel ensemble de sept directions et que trois directions ne sont pas suffisantes pour déterminer cette classe d'ensembles. Ces mêmes résultats ont été étendus au cas discret dans [GG97] où les auteurs prouvent que la classe des ensembles convexes discrets peut être déterminée par certains ensembles de quatre directions, par n'importe quel ensemble de sept directions ou plus et que trois directions ne sont pas suffisantes pour déterminer cette classe.

Lorsque c'est l'ensemble projeté qui est fixé d'avance et que la position des sources dépend de ce dernier, on parle de vérification. On dit qu'une classe d'ensembles \mathcal{C} est vérifiée par n sources si, pour un ensemble donné de \mathcal{C} , on peut trouver n sources tel qu'il n'y a aucun autre ensemble de \mathcal{C} qui ait les mêmes projections par ces mêmes sources. Cette problématique a fait l'objet d'une étude par Giering qui, indépendamment de la question de Hammer, prouve dans [Gie62] que la classe des ensembles convexes est vérifiée par trois directions. Ces résultats ont été étendus à la classe des polytopes par Gardner et Gritzmann [GG94].

Détermination successive de classes d'ensembles

La détermination successive de classes d'ensembles peut être considérée comme étant un concept intermédiaire entre la détermination et la vérification. Il s'agit de déterminer un ensemble donné d'une manière interactive, c'est-à-dire que la position des sources dépend à chaque fois de la position précédente. Ainsi, la position de la source sera choisie selon le résultat obtenu par les projections précédentes. Cette méthode a été introduite par Edelsbrunner et Skiena [ES88] qui confirment que les polygones convexes peuvent être successivement déterminés par trois projections parallèles. Un autre résultat présenté par Gardner et Gritzmann [GG94] montre que les polytopes convexes dans un espace à d dimensions peuvent être successivement déterminés par $(\lfloor \frac{d}{d-k} \rfloor + 1)$ projections parallèles à

k dimensions. Les mêmes auteurs ont démontré par la suite que, pour déterminer successivement un sous-ensemble de \mathbb{Z}^d , $\lfloor \frac{d}{d-k} \rfloor$ projections à $(d - k)$ dimensions sont nécessaires [GG97]. Ainsi, deux directions sont nécessaires pour déterminer successivement les sous-ensembles de \mathbb{Z}^2 .

Caractérisation des projections

Certaines recherches reliées à la question de Hammer visent à caractériser les projections données. Ces projections sont dites *uniques* si elles ne peuvent correspondre qu'à un unique ensemble, *non-unique* si elles peuvent correspondre à plusieurs ensembles et *incohérentes* si elles ne peuvent correspondre à aucun ensemble mesurable.

Des conditions nécessaires et suffisantes pour caractériser les projections selon la direction verticale et horizontale sont présentées par Lorentz dans [Lor49]. Cette étude est complétée par celle de Kuba et Volčič [KV88] qui donne une autre manière de caractériser ces projections. Le résultat de Lorentz est ensuite généralisé à n'importe quelles directions.

3.2.3 Applications de la tomographie

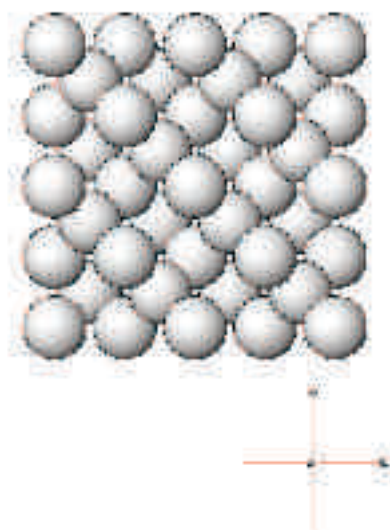


FIGURE 3.4 – Structure atomique du diamant.

Quand les projections sont vues comme un codage des données, la tomographie est utilisée pour sécuriser et compresser des données [IJ94]. En microscopie électronique, c'est à l'introduction de la notion de QUANTITEM que la tomographie discrète doit sa gloire [SKS⁺93, KSB⁺95]. Cette méthode est alors utilisée en cristallographie pour reconstruire la structure atomique des cristaux. En effet, la forme extérieure d'un cristal est liée à la

structure atomique interne. Le caractère ordonné et périodique de l'état cristallin fait que le cristal peut être modélisé à l'échelle atomique par des points dans un espace discret. (voir la Figure 3.4).

En médecine, la tomographie sert à inspecter le corps du patient aussi complexe soit la position de la partie à examiner. Les mesures internes sont un exemple typiques de l'application de la tomographie. Un médecin peut alors détecter les anomalies, contrôler leur évolution, etc. La tomographie binaire par exemple est utilisée en angiographie cardiaque où l'on injecte un produit de contraste dans les ventricules du cœur [CHM⁺99]. En industrie, la tomographie est utilisée pour le contrôle de qualité comme, par exemple,



FIGURE 3.5 – Machine de tomographie par émission de positrons.

détecter des bulles d'air dans un bloc de fonte. Elle est notamment exploitée en industrie aérospatiale, automobile et électronique afin de détecter des fissures ou des porosités. Dans l'industrie alimentaire, les produits sont inspectés pour détecter la présence de corps étrangers, vérifier le niveau de remplissage etc..



FIGURE 3.6 – Système de tomo-densitométrie à rayons X (de la marque ImageX).

D'autres applications de la tomographie sont détaillées dans [HK99] et [Gar06].

Chapitre 4

Reconstruction tomographique et convexité

Sommaire

4.1	Convexité dans l'espace euclidien \mathbb{R}^2	29
4.2	Convexité dans l'espace discret \mathbb{Z}^2	35
4.3	Classes de convexité dérivées	38
4.4	Reconstruction et complexité algorithmique	40

La convexité est une notion utilisée dans plusieurs domaines en imagerie. Cette notion est d'un intérêt particulier notamment parce qu'elle réunit des problématiques qui, en apparence, sont totalement indépendantes. Nous nous intéressons ici à l'aspect géométrique en posant le problème inverse de la reconstruction tomographique pour des ensembles convexes.

4.1 Convexité dans l'espace euclidien \mathbb{R}^2

Nous présentons dans cette section quelques propriétés des ensembles convexes de \mathbb{R}^2 qui seront utiles dans la suite.

Il existe plusieurs façons de définir les ensembles convexes (voir [Ber90, Gar06]). Nous rappelons la définition de la convexité dans \mathbb{R}^2 que nous avons adoptée dans le Chapitre 2 :

Définition . Un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ est dit *convexe* si pour tout $A, B \in \mathcal{E}$ on a $[A, B] \subseteq \mathcal{E}$. Nous dirons que \mathcal{E} est \mathbb{R} -convexe (voir la Figure 4.1).

Nous noterons par $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble de tous les ensembles convexes de \mathbb{R}^2 . Pour un ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$, par $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathcal{E}) = \{\mathcal{E}' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \mid \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'\}$ on désigne l'ensemble de tous les ensembles \mathbb{R} -convexes qui contiennent \mathcal{E} .

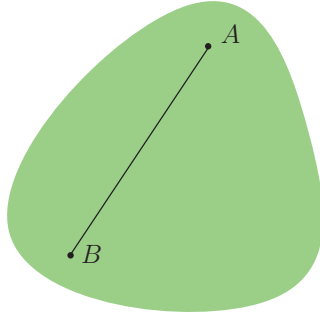


FIGURE 4.1 – Exemple d'un ensemble \mathbb{R} -convexe. On a $[A, B] \subseteq \mathcal{E}$ pour tout $A, B \in \mathcal{E}$.

Le plus petit ensemble convexe de \mathbb{R}^2 qui contient un ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ est appelé l'enveloppe convexe de \mathcal{E} et est noté $CH(\mathcal{E})$. Ainsi on a :

$$CH(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{E}' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathcal{E})} \mathcal{E}'.$$

La propriété suivante est nécessaire pour la suite.

Proposition 4.1.1. *Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble convexe et soient $n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in]0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Alors, le point $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ est dans \mathcal{E} .*

Démonstration. En effet, la propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$ par définition. Supposons que $n \geq 2$ et que la propriété est vraie pour $n - 1$ et posons $\lambda' = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$. Alors

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \lambda' \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\lambda'} x_j + \lambda_n x_n$$

Posons $x'_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j x_j$ où $\mu_j = \frac{\lambda_j}{\lambda'}$ pour tout entier j entre 1 et $n - 1$. Ainsi $\mu_j \in [0, 1]$

pour tout entier j entre 1 et $n - 1$ et $\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j} = 1$. Par hypothèse de récurrence on

a $x'_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j x_j \in \mathcal{E}$ et comme $x = \lambda' x'_1 + \lambda_n x_n$, $\lambda_n, \lambda' \in [0, 1]$ et $\lambda' + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors $x \in [x'_1, x_n] \subseteq \mathcal{E}$. \square

Nous introduisons à présent la notion de polygone convexe.

Définition 4.1.1. $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ est dit un polygone convexe de sommets la suite Q_0, \dots, Q_k numérotée modulo k (i.e. $\forall i \in \mathbb{Z}, k + i \equiv i - 1 \pmod{k}$) de points de \mathcal{E} si

$$\mathcal{E} = \bigcap_{0 \leq i \leq k} \mathcal{G}(D_{\vec{n}_i})$$

où pour tout entier i entre 0 et k , $D_{\vec{n}_i}$ est la droite orientée passant par le point Q_i et de vecteur normal $\vec{n}_i = \overrightarrow{Q_i Q_{i+1}}^\perp$ et $D_{\vec{n}_i} \neq D_{\vec{n}_j}$ pour tout entiers i, j tels que $0 \leq i < j \leq k$.

En utilisant la construction correspondant à “la marche de Jarvis” [Jar73], on a la proposition suivante :

Proposition 4.1.2. *Soit $\mathcal{E} = \{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble fini de points de \mathbb{R}^2 . $CH(\mathcal{E})$ est un polygone convexe de suite de sommets $Q_0, \dots, Q_k \in \mathcal{E}$.*

En effet, posons $\mathcal{E}'_0 = \mathcal{E}$. Parmi les points qui ont une abscisse maximale, Q_0 est alors le point qui a l'ordonnée maximale. Autrement dit, si $\lambda_0 = \max_{P \in \mathcal{E}} x_P$, $\mathcal{E}_0 = \{P \in \mathcal{E}'_0 \mid x_P = \lambda_0\}$ et $\mu_0 = \max_{P \in \mathcal{E}_0} y_P$, alors $Q_0 = (\lambda_0, \mu_0)$.

Posons $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}'_0 \setminus \mathcal{E}_0$ et $Q'_0 = Q_0 + (0, 1)$ et soient $\alpha_1 = \min_{P \in \mathcal{E}'_1} \widehat{Q'_0 Q_0 P}$, $\mathcal{E}_1 = \{P \in \mathcal{E}'_1 \mid \widehat{Q'_0 Q_0 P} = \alpha_1\}$ et $\lambda_1 = \min_{P \in \mathcal{E}_1} x_P$. Alors, $Q_1 = (\lambda_1, \mu_1)$ où μ_1 est l'unique réel tel que $(\lambda_1, \mu_1) \in \mathcal{E}_1$.

Supposons que pour $i > 0$, le sommet Q_i a déjà été déterminé et posons $\mathcal{E}'_{i+1} = \mathcal{E}'_i \setminus \mathcal{E}_i$, $Q'_{i+1} = Q_i + \overrightarrow{Q_{i-1} Q_i}$, $\alpha_{i+1} = \min_{P \in \mathcal{E}'_{i+1}} \widehat{Q'_{i+1} Q_i P}$, $\mathcal{E}_{i+1} = \{P \in \mathcal{E}'_{i+1} \mid \widehat{Q'_{i+1} Q_i P} = \alpha_{i+1}\}$ et $\lambda_{i+1} = \min_{P \in \mathcal{E}_{i+1}} x_P$. Alors, $Q_{i+1} = (\lambda_{i+1}, \mu_{i+1})$ où μ_{i+1} est l'unique réel tel que $(\lambda_{i+1}, \mu_{i+1}) \in \mathcal{E}_{i+1}$.

Remarques 3. Soient \mathcal{E} un ensemble fini de points de \mathbb{R}^2 et Q_0, \dots, Q_k la suite des sommets de $CH(\mathcal{E})$ (Voir l'illustration sur la Figure 4.2).

- D'après la Proposition 4.1.2, on a $CH(\mathcal{E}) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \overrightarrow{Q_i M}, \overrightarrow{Q_i Q_{i+1}} \rangle \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, k\}\}$.
- $\partial(CH(\mathcal{E})) = \{[Q_i, Q_{i+1}] \mid i \in \{0, \dots, k\}\}$ (i.e. Rappelons que $Q_{k+1} = Q_0$) autrement dit le bord de $CH(\mathcal{E})$ est constitué de segments dont les sommets sont les extrémités consécutifs de $CH(\mathcal{E})$.

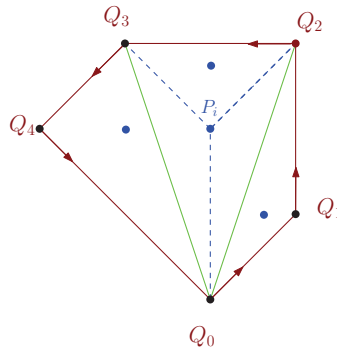


FIGURE 4.2 – Le bord ‘orienté’ de $CH(\mathcal{E})$ est en rouge.

La propriété suivante montre que la fermeture topologique préserve la convexité dans \mathbb{R}^2 .

Proposition 4.1.3. *Soit \mathcal{E} un ensemble convexe de \mathbb{R}^2 . Alors, $\overline{\mathcal{E}}$ est un ensemble convexe de \mathbb{R}^2 .*

Démonstration. Soient $x, y \in \overline{\mathcal{E}}$ et $z \in [x, y]$. Nous allons montrer que $z \in \overline{\mathcal{E}}$, ce qui impliquerait que $[x, y] \subseteq \overline{\mathcal{E}}$ et donc que $\overline{\mathcal{E}}$ est un ensemble convexe.

Comme $x, y \in \overline{\mathcal{E}}$, alors il existe deux suites $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathcal{E} telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Comme $z \in [x, y]$, alors il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Posons pour tout entier positif n , $z_n = \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n$. Alors, $z_n \in [x_n, y_n] \subseteq \mathcal{E}$.

Soient $\varepsilon > 0$ et soit $N \geq 0$ tels que $\forall n \geq N$, $\|x - x_n\| < \varepsilon$ et $\|y - y_n\| < \varepsilon$.

Alors, $\|z - z_n\| \leq \lambda\|x - x_n\| + (1 - \lambda)\|y - y_n\| < \varepsilon$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ et par conséquent $z \in \overline{\mathcal{E}}$. \square

L'enveloppe convexe d'un ensemble de \mathbb{R}^2 peut être exprimée comme le montre le lemme suivant.

Lemme 4.1.4. *Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$. On a*

$$CH(\mathcal{E}) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \geq 1, x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1] \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Démonstration. D'après la Proposition 4.1.1, l'ensemble $\mathcal{E}' = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \geq 1, x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1] \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$ est inclus dans $CH(\mathcal{E})$.

Montrons maintenant que l'ensemble \mathcal{E}' est convexe. Soient $x, x' \in \mathcal{E}'$ et $\mu \in [0, 1]$ et montrons que $\mu x + (1 - \mu)x' \in \mathcal{E}'$. Comme $x, x' \in \mathcal{E}'$, il existe $n, n' \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$, $x'_1, \dots, x'_{n'} \in \mathcal{E}$ et $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{n'} \in [0, 1]$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, $x' = \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i x'_i$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i = 1$. Donc, $\mu x + (1 - \mu)x' = \mu \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + (1 - \mu) \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i x'_i = \sum_{j=1}^{n+n'} \nu_j x''_j$ avec $\nu_j = \mu \lambda_j$, $x''_j = x_j$ pour tout entier j entre 1 et n et $\nu_j = (1 - \mu) \lambda'_j$, $x''_j = x'_{j-n}$ pour tout entier j entre $n + 1$ et $n + n'$ et par conséquent, $\nu_j \in [0, 1]$ pour tout entier j entre 1 et $n + n'$ et $\sum_{j=1}^{n+n'} \nu_j = \mu \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1 - \mu) \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i = 1$. Par conséquent, $\mu x + (1 - \mu)x' \in \mathcal{E}'$ et donc \mathcal{E}' est un ensemble convexe. \square

Proposition 4.1.5. *Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$. On a*

$$CH(\mathcal{E}) = \{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{E}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1] \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \}.$$

Autrement dit, $CH(\mathcal{E})$ est une union de triangles dont les sommets sont dans \mathcal{E} .

Démonstration. Soit $x \in CH(\mathcal{E})$. D'après le Lemme 4.1.4, il existe $n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in]0, 1]$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et donc x est un point du polygone convexe $P = CH(\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\})$.

La propriété que nous cherchons à démontrer est vraie pour $n \leq 3$. Posons $P' = CH(\{x_i \mid 1 \leq i \leq n-1\})$ et supposons que la propriété est vraie pour $n-1 \geq 3$ et montrons que cela implique qu'elle est vraie pour n . Deux cas sont possibles :

- $x \in P'$ et dans ce cas la propriété est vraie par hypothèse de récurrence.
- $x \notin P'$ et dans ce cas on a nécessairement $x_n \notin P'$. Posons $\lambda' = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j$ et $x' = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda'_i x_i$ avec $\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\lambda'}$ pour tout entier i compris entre 1 et $n-1$. Alors, $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \lambda' x' + \lambda_n x_n$ avec $\lambda', \lambda_n \in]0, 1]$ et $\lambda' + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et donc x est sur le segment $[x', x_n]$. Or comme $x_n \notin P'$ et $x' \in P'$, alors le segment $[x', x_n]$ intersecte le bord $\partial(P')$ de P' en un point x'' et $x \in [x'', x_n]$ et donc $\exists \mu \in [0, 1], x = \mu x''_j + (1 - \mu)x_n$ (Voir la Figure 4.3).

Comme l'ensemble des sommets du polygone convexe $P' = CH(\{x_i \mid 1 \leq i \leq n-1\})$ est inclus dans l'ensemble $\{x_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ et $x'' \in \partial(P')$, alors x'' est sur une arête du bord $\partial(P')$, il existe donc $j, k \in \{i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ tels que $x'' \in [x_j, x_k]$ et donc $\exists \nu \in [0, 1], x'' = \nu x_j + (1 - \nu)x_k$. Par conséquent, $x = \mu(\nu x_j + (1 - \nu)x_k) + (1 - \mu)x_n = \xi_1 x_j + \xi_2 x_k + \xi_3 x_n$ avec $\xi_1 = \mu\nu$, $\xi_2 = \mu(1 - \nu)$ et $\xi_3 = 1 - \mu$ et donc $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [0, 1]$ et $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \mu(\nu + (1 - \nu)) + (1 - \mu) = 1$ d'où le résultat.

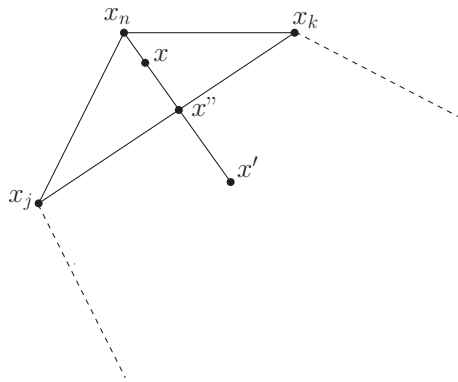


FIGURE 4.3 – Le point x est dans le triangle de sommets x_j, x_k, x_n .

□

Proposition 4.1.6. Soit \mathcal{E} un ensemble compact de \mathbb{R}^2 . Alors, $CH(\mathcal{E})$ est un ensemble compact de \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Comme \mathcal{E} est un ensemble compact de \mathbb{R}^2 , alors \mathcal{E} est un ensemble borné et fermé.

- Soient $P, Q \in \mathcal{E}$ tels que $r = d(P, Q) = \max_{X, Y \in \mathcal{E}} d(X, Y)$. Comme $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(P, r + 1)$ et $\mathcal{B}(P, r + 1)$ est un ensemble convexe, alors $CH(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(P, r + 1)$. Par conséquent, $CH(\mathcal{E})$ est un ensemble borné.
- Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite convergente de points de $CH(\mathcal{E})$. Posons $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3} \in \mathcal{E}, \exists \lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \lambda_{n,3} \in [0, 1]$ tels que $x_n = \lambda_{n,1}x_{n,1} + \lambda_{n,2}x_{n,2} + \lambda_{n,3}x_{n,3}$ et $\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2} + \lambda_{n,3} = 1$. Comme \mathcal{E} est un ensemble compact de \mathbb{R}^2 et l'intervalle $[0, 1]$ est un ensemble compact de \mathbb{R} , il existe trois sous-suites convergentes $(x_{i_n,1})_{n \geq 0}, (x_{i_n,2})_{n \geq 0}$ et $(x_{i_n,3})_{n \geq 0}$ des suites $(x_{n,1})_{n \geq 0}, (x_{n,2})_{n \geq 0}$ et $(x_{n,3})_{n \geq 0}$ et trois sous-suites convergentes $(\lambda_{i_n,1})_{n \geq 0}, (\lambda_{i_n,2})_{n \geq 0}$ et $(\lambda_{i_n,3})_{n \geq 0}$ des suites $(\lambda_{n,1})_{n \geq 0}, (\lambda_{n,2})_{n \geq 0}$ et $(\lambda_{n,3})_{n \geq 0}$ (i.e. en utilisant six extractions successives de sous-suites sur chacune des suites!) alors $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{i_n,1}x_{i_n,1} + \lambda_{i_n,2}x_{i_n,2} + \lambda_{i_n,3}x_{i_n,3} = \mu_1y_1 + \mu_2y_2 + \mu_3y_3$ où $\mu_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{i_n,j}$ et $y_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n,j}$ pour $j = 1, 2, 3$ avec $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in [0, 1], y_1, y_2, y_3 \in \mathcal{E}$ et $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ ce qui implique que $y \in CH(\mathcal{E})$ et par conséquent, $CH(\mathcal{E})$ est un ensemble fermé.

□

Remarque 4.1.1. Si \mathcal{E} un ensemble fermé de \mathbb{R}^2 , alors $CH(\mathcal{E})$ n'est pas nécessairement un ensemble fermé. En effet, considérons l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ qui est un ensemble fermé, alors que $CH(\mathcal{E}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ n'est pas un ensemble fermé de \mathbb{R}^2 (Voir l'illustration sur la Figure 4.4).

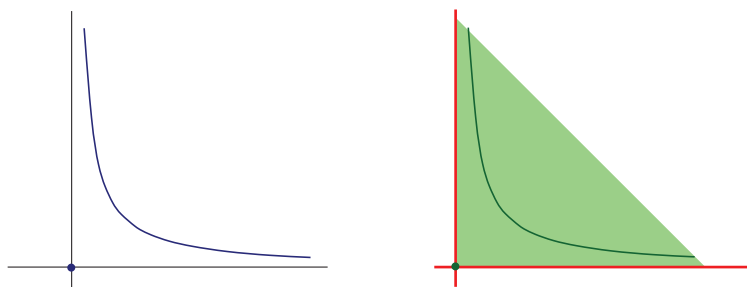


FIGURE 4.4 – À gauche, en bleu, l'ensemble fermé $\mathcal{E} = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$. À droite en vert (sans les points en rouges des axes du repère!) l'ensemble non fermé $CH(\mathcal{E})$.

Proposition 4.1.7. Soient \mathcal{E} un ensemble convexe et fermé de \mathbb{R}^2 et $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}$. Alors, il existe une droite orientée $D_{\vec{n}}$ tel que le point P est strictement à gauche de $D_{\vec{n}}$ et tous les points de \mathcal{E} sont strictement à droite de $D_{\vec{n}}$.

Démonstration. Comme \mathcal{E} est un ensemble fermé, il existe $X_0 \in \mathcal{E}$ tel que $r = d(P, X_0) = \inf_{X \in \mathcal{E}} d(P, X)$ avec $r > 0$ car $P \notin \mathcal{E}$. Soit $D'_{\vec{n}}$ la droite passant par X_0 et qui est perpendiculaire à la droite (PX_0) . Comme P n'est pas sur la droite $D'_{\vec{n}}$, alors il est soit strictement

à gauche soit strictement à droite de $D'_{\vec{n}}$. Supposons que P est strictement à gauche de $D'_{\vec{n}}$ et qu'il existe un point $Q \in \mathcal{E}$ qui est aussi strictement à gauche de $D'_{\vec{n}}$. Comme \mathcal{E} est un ensemble convexe, alors $[X_0, Q] \subseteq \mathcal{E}$. Soient $D''_{\vec{n}}$ la droite passant par P et qui est perpendiculaire à la droite (X_0Q) et R le point d'intersection de (X_0Q) et $D''_{\vec{n}}$. Alors, deux cas sont possibles (voir la Figure 4.5) :

- $R \in [X_0, Q]$ et comme le triangle (X_0PR) est rectangle en R , alors $d(P, R) < d(X_0, P)$ ce qui est absurde car $R \in \mathcal{E}$ et $d(P, X_0) = \inf_{X \in \mathcal{E}} d(P, X)$.
- $Q \in [X_0, R]$ et donc $d(Q, R) < d(X_0, R)$ et comme le triangle (X_0PR) est rectangle en R , alors $d(P, Q) = \sqrt{d(P, R)^2 + d(Q, R)^2}$ et $d(P, X_0) = \sqrt{d(P, R)^2 + d(X_0, R)^2}$. Par conséquent, $d(P, Q) < d(P, X_0)$, ce qui est absurde car $Q \in \mathcal{E}$ et $d(P, X_0) = \inf_{X \in \mathcal{E}} d(P, X)$.

Donc tous les points de \mathcal{E} sont à droite de $D'_{\vec{n}}$.

Considérons maintenant la droite $D_{\vec{n}}$ passant par le milieu $\frac{P+X_0}{2}$ du segment $[P, X_0]$ et perpendiculaire à la droite (PX_0) . Alors, d'après ce qui précède, le point P est strictement à gauche de $D_{\vec{n}}$ et tous les points de \mathcal{E} sont strictement à droite de $D_{\vec{n}}$. \square

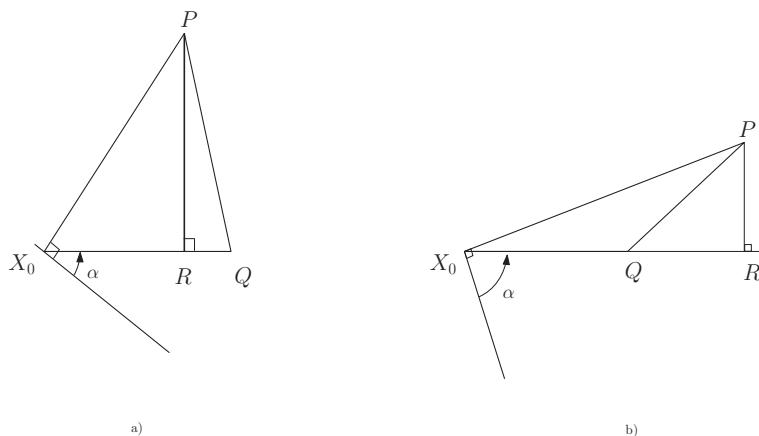


FIGURE 4.5 – a) Le point R est entre les points X_0 et Q . b) Le point Q est entre les points X_0 et R

4.2 Convexité dans l'espace discret \mathbb{Z}^2

Dans cette section nous introduisons une notion de convexité dans l'espace discret \mathbb{Z}^2 . Nous allons voir que cette notion partage un certain nombre de propriétés avec la notion de convexité dans \mathbb{R}^2 .

Si la Définition 2.0.2 est littéralement appliquée sur \mathbb{Z}^2 avec la notion de segment discret que nous avons définie au Chapitre 2, on obtient ce qu'on appelle la convexité par

segments ou la 2-convexité. Plus généralement, la notion de k -convexité, pour un entier $k \geq 2$, est définie comme suit :

Définition 4.2.1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$. $\mathcal{E} \subset \mathbb{S}^2$ est dit k - \mathbb{S} -convexe si pour tout $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ tel que $|\mathcal{E}'| \leq k$, on a $CH(\mathcal{E}') \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{E}$.

Comme nous allons le voir dans la propriété suivante, la notion de k - \mathbb{S} -convexité est stable par intersection.

Proposition 4.2.1. Soient $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$ et $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ une collection d'ensembles k - \mathbb{S} -convexes. Alors, l'ensemble $\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$ est k - \mathbb{S} -convexe.

Démonstration. Soit $\mathcal{E}' \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$ tel que $|\mathcal{E}'| \leq k$. Alors, $CH(\mathcal{E}') \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{E}_i$ pour tout $i \in I$ et donc $CH(\mathcal{E}') \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$. \square

Remarque 4.2.1. Par la Définition 2.0.2, un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ est \mathbb{R} -convexe si et seulement si \mathcal{E} est 2- \mathbb{R} -convexe.

Nous appellerons ensembles \mathbb{Z} -convexes les ensembles décrits par la définition suivante.

Définition 4.2.2. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}^2$. \mathcal{E} est dit \mathbb{Z} -convexe si $\mathcal{E} = CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{Z}^2$.

Définition 4.2.3. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}^2$. L'enveloppe convexe discrète de \mathcal{E} , notée $CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})$, est le sous-ensemble \mathbb{Z}^2 défini par :

$$CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}) = CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{Z}^2.$$

Si $\mathcal{E} \subset \mathbb{Z}^2$, alors $\mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2)$ notera l'ensemble des ensembles \mathbb{Z} -convexe contenant \mathcal{E} . Autrement dit, $\mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2) = \{\mathcal{E}' \mid \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}' \subseteq \mathbb{Z}^2 \text{ et } \mathcal{E}' \text{ est } \mathbb{Z}\text{-convexe}\}$.

D'après les notations précédentes, un sous-ensemble \mathcal{E} de \mathbb{Z}^2 est \mathbb{Z} -convexe si et seulement si $CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

Proposition 4.2.2. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Alors, $CH_{\mathbb{Z}}(CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})) = CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})$. Autrement dit, l'opérateur $CH_{\mathbb{Z}}$ est idempotent.

Démonstration. • Comme pour tout ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}^2$, on a $\mathcal{E} \subseteq CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})$, alors

$$CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}) \subseteq CH_{\mathbb{Z}}(CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})).$$

- Soit $p \in CH_{\mathbb{Z}}(CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}))$, alors d'après la Proposition 4.1.5, il existe $p_1, p_2, p_3 \in CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})$ tels que $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$ pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, il existe $s_{i,1}, s_{i,2}, s_{i,3} \in \mathcal{E}$ tels que $p_i = \mu_{i,1} s_{i,1} + \mu_{i,2} s_{i,2} + \mu_{i,3} s_{i,3}$ pour $\mu_{i,1}, \mu_{i,2}, \mu_{i,3} \in [0, 1]$ avec $\mu_{i,1} + \mu_{i,2} + \mu_{i,3} = 1$. Donc $p = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \sum_{j=1}^3 \mu_{i,j} s_{i,j} = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \lambda_i \mu_{i,j} s_{i,j}$ avec pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $\lambda_i \mu_{i,j} \in [0, 1]$ et

$\sum_{1 \leq i, j \leq 3} \lambda_i \mu_{i,j} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \sum_{j=1}^3 \mu_{i,j} = 1$. Par conséquent, $p \in CH_{\mathbb{Z}}(E)$ et donc $CH_{\mathbb{Z}}(CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})) \subseteq CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})$. □

Remarque 4.2.2. Contrairement aux ensembles $2\text{-}\mathbb{R}$ -convexes, un ensemble $2\text{-}\mathbb{Z}$ -convexe n'est pas toujours \mathbb{Z} -convexe (La Figure 4.6 représente un ensemble $2\text{-}\mathbb{Z}$ -convexe qui n'est pas \mathbb{Z} -convexe). Nous montrons par contre dans la proposition suivante que la $3\text{-}\mathbb{Z}$ -convexité est suffisante.

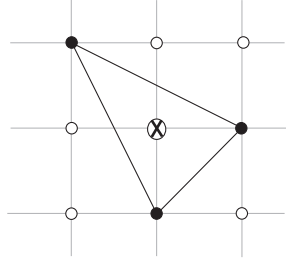


FIGURE 4.6 – \mathcal{E} (●) est $2\text{-}\mathbb{Z}$ -convexe mais pas \mathbb{Z} -convexe (\otimes n'appartient pas à \mathcal{E}).

Proposition 4.2.3. *Un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 est \mathbb{Z} -convexe si et seulement si il est $3\text{-}\mathbb{Z}$ -convexe.*

Démonstration. Soit \mathcal{E} un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2

- Si \mathcal{E} est \mathbb{Z} -convexe et si $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, alors $CH(\mathcal{E}') \cap \mathbb{Z}^2 \subseteq CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{Z}^2 = \mathcal{E}$ donc \mathcal{E} est $k\text{-}\mathbb{Z}$ -convexe pour tout entier $k \geq 2$.
- Si \mathcal{E} est un ensemble $3\text{-}\mathbb{Z}$ -convexe, alors deux cas sont possibles :
 1. $CH(\mathcal{E}) = [A, B]$ est un segment de \mathbb{R}^2 avec $A, B \in \mathcal{E}$ et comme \mathcal{E} est $3\text{-}\mathbb{Z}$ -convexe, alors $CH(\{A, B\}) \cap \mathbb{Z}^2 = [A, B] \cap \mathbb{Z}^2 \subseteq \mathcal{E}$ d'où $CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{Z}^2 = \mathcal{E}$ et par conséquent, \mathcal{E} est un ensemble \mathbb{Z} -convexe.
 2. $CH(\mathcal{E})$ n'est pas un segment de \mathbb{R}^2 . Soit $P \in (CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{Z}^2)$. Alors, d'après la Proposition 4.1.5, il existe $A, B, C \in \mathcal{E}$ tels que $p \in CH(\{A, B, C\})$, et comme \mathcal{E} est $3\text{-}\mathbb{Z}$ -convexe, on a nécessairement $P \in \mathcal{E}$, ce qui implique que \mathcal{E} est \mathbb{Z} -convexe.

□

Remarques 4. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{S}^2$. On a

- Si \mathcal{E} est $k\text{-}\mathbb{R}$ -convexe avec $k \geq 2$, alors \mathcal{E} est nécessairement $(k+1)\text{-}\mathbb{R}$ -convexe.
- Si \mathcal{E} est $k\text{-}\mathbb{Z}$ -convexe avec $k \geq 3$, alors \mathcal{E} est $(k+1)\text{-}\mathbb{Z}$ -convexe.

L'équivalence suivante est alors déduite :

Corollaire 4.2.1. *Un ensemble est \mathbb{S} -convexe si et seulement si il est $3\text{-}\mathbb{S}$ -convexe. .*

Le corollaire suivant, qui est une conséquence directe de la Propriété 4.2.1, la Remarque 4.2.1 et la Propriété 4.2.3, indique que la notion de \mathbb{S} -convexité est stable par intersection.

Corollaire 4.2.2. *Soit $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ une collection d'ensembles \mathbb{S} -convexes. Alors, l'ensemble $\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$ est \mathbb{S} -convexe.*

Ainsi, nous pouvons montrer que l'enveloppe convexe discrète d'un ensemble est le plus petit ensemble \mathbb{Z} -convexe qui le contient.

Corollaire 4.2.3. *Soit \mathcal{E} un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 . Alors,*

$$CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{E}' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2)} \mathcal{E}'.$$

Démonstration. $\mathcal{E} \subseteq \bigcap_{\mathcal{E}' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2)} \mathcal{E}'$ car $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$ pour tout $\mathcal{E}' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2)$ et par conséquent, $CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}'$ pour tout $\mathcal{E}' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2)$. De plus, comme $\mathcal{E} \subseteq CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})$, alors $CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}) \in \mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2)$ et donc $CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{E}' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2)} \mathcal{E}'$. \square

4.3 Classes de convexité dérivées

De par l'importance de la notion de convexité, le problème de reconstruction tomographique pour des ensembles convexes est largement étudié. Cependant ce problème n'est pas si simple à résoudre. Les chercheurs se sont alors tournés vers des classes de convexité qui s'approchent de la classe des ensembles convexes. Ces classes sont généralement basées sur la notion de *connexité* que nous définissons comme suit.

Définition 4.3.1. Soient $A, B \in r\mathbb{Z}^2$.

- A et B sont dits 4-adjacents si $\overrightarrow{AB} \in \{r(\pm 1, 0), r(0, \pm 1)\}$.
- A et B sont dits 6-adjacents si $\overrightarrow{AB} \in \{r(\pm 1, 0), r(0, \pm 1), r(1, 1), r(-1, -1)\}$.
- A et B sont dits 8-adjacents si $\overrightarrow{AB} \in \{r(\pm 1, 0), r(0, \pm 1), r(\pm 1, \pm 1)\}$.

Ainsi, un ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}^2$ est dit 4-connexe, 6-connexe ou 8-connexe si pour tous $A, B \in \mathcal{E}$ il existe une suite de points $M_0, M_1, \dots, M_n \in \mathcal{E}$ reliant A et B tels que M_i et M_{i+1} sont respectivement 4-adjacents, 6-adjacents ou 8-adjacents pour $0 \leq i < n$. La Figure 4.7 montre un exemple de points 4, 6 et 8-adjacents à un point A donné.

Une notion qui découle immédiatement de la connexité est celle des *polyominos* [Gol94, AFRTV10]. Il s'agit d'un sous-ensemble 8-connexe de $r\mathbb{Z}^2$. Un polyomino peut être convexe horizontalement (h-convexe), c'est à dire que son intersection avec toute droite parallèle à l'axe des abscisses sont des points consécutifs. De même, on parle de polyomino convexe

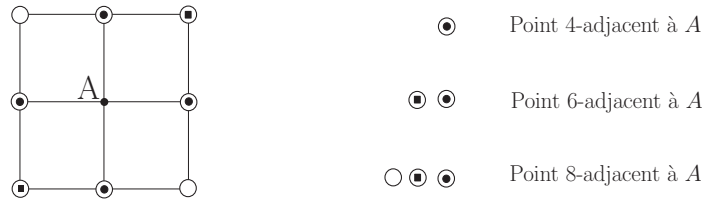


FIGURE 4.7 – 4, 6 et 8-adjacence.

verticalement (*v-convexe*) quand son intersection avec toute droite parallèle à l'axe des ordonnées sont des points consécutifs. Un polyomino qui est à la fois *h-convexe* et *v-convexe* est dit *hv-convexe*. Un exemple de chaque type est illustré par la Figure 4.8. La notion de

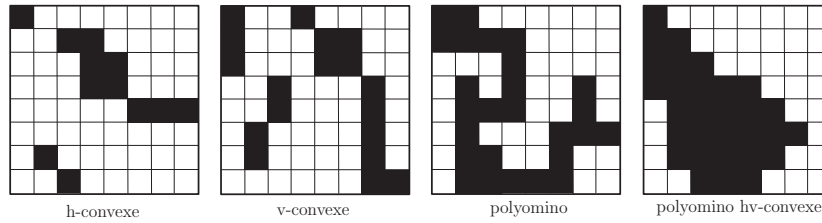


FIGURE 4.8 – Polyominos avec différentes connexités.

polyominoes a permis l'introduction de nouvelles classes d'ensembles qui s'approchent de celle des ensembles convexes de par les propriétés qui les caractérisent. Le problème de reconstruction pour les ensembles convexes peut alors être approché en les posant sur ces classes proches.

Parmi ces classes nous citons celle des ensembles *L-convexes* [CR03a]. La notion de la *L-convexité* est basée sur le fait que chaque paire de points d'un polyomino 4-connexe et *hv-convexe* peuvent être reliés par un chemin monotone en changeant de direction (horizontale ou verticale). Lorsqu'il y a au plus un seul changement de direction, l'ensemble est dit *L-convexe* (de par la forme géométrique de la lettre L). En d'autres termes, pour deux points *A* et *B* d'un même ensemble *L-convexe* qui ne sont pas 4-adjacents et qui ne sont ni sur la même droite horizontale ni sur la même droite verticale, il existe une suite de points de cet ensemble qui sont 4-adjacents et qui forment un chemin liant *A* et *B*.

Une autre classe, dont les propriétés présentent beaucoup de liens avec celles de la classe des ensembles convexes, est la classe des ensembles convexes par quadrants. Cette classe a été introduite par A. Daurat en considérant des sources placées à une distance infinie des objets à observer (rayons parallèles). Nous consacrons le chapitre suivant à la notion de convexité par quadrants pour le cas des sources ponctuelles.

4.4 Reconstruction et complexité algorithmique

Pour une classe de convexité \mathcal{CC} donnée, le problème de reconstruction tomographique posé pour des projections avec des rayons parallèles est le suivant : considérant un ensemble de directions \mathcal{D} , un vecteur de projections $(p_d)_{d \in \mathcal{D}}$, il s'agit de reconstruire un ensemble $\mathcal{E} \in \mathcal{CC}$ ayant les projections p_d pour chaque $d \in \mathcal{D}$.

La complexité algorithmique du problème de reconstruction dépend de la classes à laquelle appartient l'ensemble recherché ainsi que du nombre de projections utilisées. Pour le cas de rayons parallèles le tableau suivant récapitule les résultats connus à ce jour :

Classes de convexité \ Directions	$\{(1,0), (0,1)\}$	2 directions	$\{(1,0),(0,1),(1,-1)\}$	≥ 4 directions
	quelconque	$O(n^2)$ [Rys63]		NP-complet [GGP99]
polyomino	NP-complet [Woe96]			
hv-convexe	NP-complet [Woe96]		NP-complet [BBLN00]	
polyomino hv-convexe	$O(n^4)$ [BLNP96]			
6-connexe, convexe selon $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$			$O(n^5)$ [BBLN00]	
Q-convexe	$O(n^4)$ [BD08]			
convexe				$O(n^4)$ [BD08]

TABLE 4.1 – Complexité algorithmique du problème de reconstruction pour des rayons parallèles

Chapitre 5

Convexité par quadrants pour des sources ponctuelles dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{Z}^2

Sommaire

5.1	Définition et propriétés	42
5.1.1	Calcul de l'enveloppe Q-convexe	49
5.2	Relation entre la convexité et la Q-convexité	51
5.2.1	Propriétés des ensembles convexes	52
5.2.2	Les points saillants d'un ensemble Q-convexe	57
5.3	Génération aléatoire d'ensembles Q-convexes discrets	63
5.3.1	Complexité algorithmique et probabilité de génération	65
5.3.2	Génération aléatoire d'ensembles de $QC_{\mathbb{Z}}(\mathbf{p}, \star)$	65
5.4	Reconstruction d'ensembles Q-convexes discrets pour des sources ponctuelles	67
5.4.1	Présentation du problème pour deux sources ponctuelles	68
5.4.2	Initialisation du noyau et de la coquille	70
5.4.3	Opérations de complétion	73
5.4.4	Reconstruction d'ensembles n'intersectant pas la droite des sources	75
5.4.5	Reconstruction avec plus que deux sources ponctuelles	80
5.4.6	Reconstruction d'ensembles intersectant la droite des sources	81

Dans ce chapitre nous introduisons une classe d'ensembles ayant une propriété de convexité dite "par quadrants" dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{Z}^2 . La convexité par quadrants (Q-convexité) est définie pour un ensemble de sources ponctuelles donné. Cette nouvelle classe d'ensembles est inspirée de celle introduite par A. Daurat [Dau03, BD03] pour le cas des rayons parallèles. Elle présente cependant des propriétés particulières par rapport à cette dernière.

5.1 Définition et propriétés

Soient $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^2$ deux sources ponctuelles distinctes, un point $M \in \mathbb{S}^2$, un rayon $R_{S_1, \theta_M^{S_1}}$ issu de S_1 et un rayon $R_{S_2, \theta_M^{S_2}}$ issu de S_2 tels que $\{M\} = R_{S_1, \theta_M^{S_1}} \cap R_{S_2, \theta_M^{S_2}}$. L'intersection des deux rayons $R_{S_1, \theta_M^{S_1}}$ et $R_{S_2, \theta_M^{S_2}}$ définit les quatre zones suivantes (quadrants) illustrées par la Figure 5.1 :

$$\begin{aligned} Z_{S_1, S_2}^0(M) &= \mathcal{D}(R_{S_1, \theta_M^{S_1}}) \cap \mathcal{G}(R_{S_2, \theta_M^{S_2}}), \\ Z_{S_1, S_2}^1(M) &= \mathcal{D}(R_{S_1, \theta_M^{S_1}}) \cap \mathcal{D}(R_{S_2, \theta_M^{S_2}}), \\ Z_{S_1, S_2}^2(M) &= \mathcal{G}(R_{S_1, \theta_M^{S_1}}) \cap \mathcal{D}(R_{S_2, \theta_M^{S_2}}), \\ Z_{S_1, S_2}^3(M) &= \mathcal{G}(R_{S_1, \theta_M^{S_1}}) \cap \mathcal{G}(R_{S_2, \theta_M^{S_2}}). \end{aligned}$$

Rappelons que $\mathcal{D}(R_{S_1, \theta_M^{S_1}})$ et $\mathcal{G}(R_{S_1, \theta_M^{S_1}})$ désignent respectivement la droite et la gauche de la droite orientée portant le rayon $R_{S_1, \theta_M^{S_1}}$ (voire la Figure 2.9).

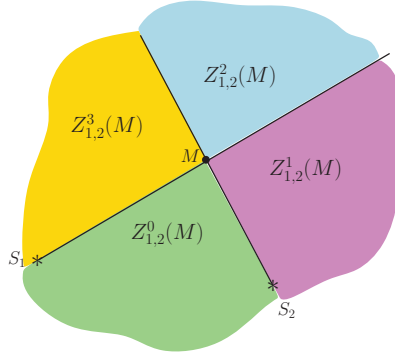


FIGURE 5.1 – L'intersection de deux rayons issus de deux sources ponctuelles définit quatre quadrants

Remarque 5.1.1. Soit \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles et $S_i, S_j \in \mathfrak{p}$.

La fonction $(t, j, i) \mapsto Z_{S_j, S_i}^t$ avec $\{M\} = R_{S_j, \theta_M} \cap R_{S_i, \theta_M}$ retourne le même quadrant pour tous les triplets suivants :

$(0, j, i)$, $(1, j, \bar{i})$, $(3, \bar{j}, i)$, $(2, \bar{j}, \bar{i})$, $(0, \bar{i}, \bar{j})$, $(1, \bar{i}, j)$, $(3, i, \bar{j})$ et $(2, i, j)$;

avec j et i correspondant respectivement aux directions $\overrightarrow{S_j M}$ et $\overrightarrow{S_i M}$ et \bar{j} et \bar{i} correspondant respectivement aux directions $\overrightarrow{M S_j}$ et $\overrightarrow{M S_i}$. Les quadrants sont obtenus avec les notions de gauche et de droite relative à chacune de ces directions. (voir la Figure 5.2)).

Ce partage du plan en quadrants nous permet d'introduire la convexité par quadrants pour deux sources ponctuelles.

Définition 5.1.1. Soient $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^2$ deux sources ponctuelles distinctes et un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{S}^2$ tels que $S_1, S_2 \notin \mathcal{E}$. \mathcal{E} est dit *S-Q-convexe* (convexe par quadrants dans \mathbb{S}^2) relativement à S_1 et S_2 si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

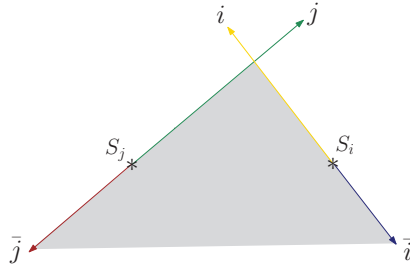


FIGURE 5.2 – $(0, j, i)$, $(1, j, \bar{i})$, $(3, \bar{j}, i)$, $(2, \bar{j}, \bar{i})$, $(0, \bar{i}, \bar{j})$, $(1, \bar{i}, j)$, $(3, i, \bar{j})$ et $(2, i, j)$ désignent la même zone (en gris).

1. Pour tout $M \in \mathbb{S}^2$ vérifiant $\{M\} = R_{S_1, \theta_{S_1}^{S_1}} \cap R_{S_2, \theta_{S_2}^{S_2}}$ (i.e. $\theta_{S_1, M} \neq \theta_{S_2, M}$), on a :

$$(\forall t \in \{0, 1, 2, 3\}, Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset) \implies M \in \mathcal{E},$$

2. $\mathcal{E} \cap (S_1 S_2)$ est un segment de \mathbb{S}^2 .

Les notions de \mathbb{Z} -Q-convexes et de \mathbb{R} -Q-convexes sont illustrées par la Figure 5.3.

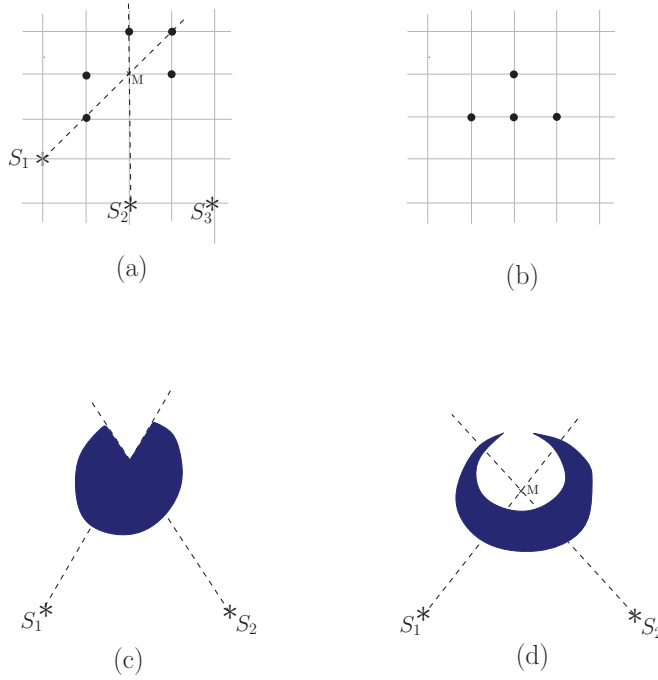


FIGURE 5.3 – (a) Ensemble non \mathbb{Z} -Q-convexe pour S_1 et S_2 et \mathbb{Z} -Q-convexe pour S_2 et S_3 (le point M vérifie la condition (1) de Q-convexité pour S_1 et S_2 mais n'est pas un point de l'ensemble) ;

(b) Ensemble discret Q-convexe pour toute paire de sources ponctuelles de \mathbb{S}^2 ;

(c) Ensemble continu Q-convexe pour S_1 et S_2 ;

(d) Ensemble continu non Q-convexe pour S_1 et S_2 (le point M vérifie la condition (1) de Q-convexité mais n'est pas un point de l'ensemble).

Remarques 5. Soient $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^2$ deux sources ponctuelles distinctes et un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{S}^2$ tels que $S_1, S_2 \notin \mathcal{E}$ et \mathcal{E} est \mathbb{S} -Q-convexe relativement à S_1 et S_2 .

- Si \mathcal{E} n'intersecte pas la droite (S_1S_2) , alors seule la partie (1) de la Définition 5.1.1 est nécessaire pour vérifier si \mathcal{E} est Q-convexe ou pas.
- $\mathcal{E} \cap (S_1S_2)$ est un segment de \mathbb{S}^2 si et seulement si pour tous $P_1, P_2 \in \mathcal{E} \cap (S_1S_2)$, $[P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{E}$.
- Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{E}$ tels que $S_1 \in (P_1P_2)$. Alors, $[P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{E}$. En effet, deux cas sont possibles :
 - $S_2 \in (P_1P_2)$ et par conséquent, $[P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2 \subseteq (S_1S_2) \cap \mathcal{E}$ (Voir l'illustration sur la Figure 5.4).

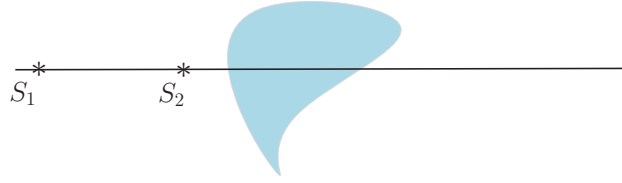


FIGURE 5.4 – Le segment $[P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2$ est inclus dans \mathcal{E} par la 2^{ème} condition de la Q-convexité.

- $S_2 \notin (P_1P_2)$ et par conséquent, si $M \in [P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2$, alors $\{P_1, P_2\} \cap Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ (Voir l'illustration sur la Figure 5.5) et donc $M \in \mathcal{E}$.

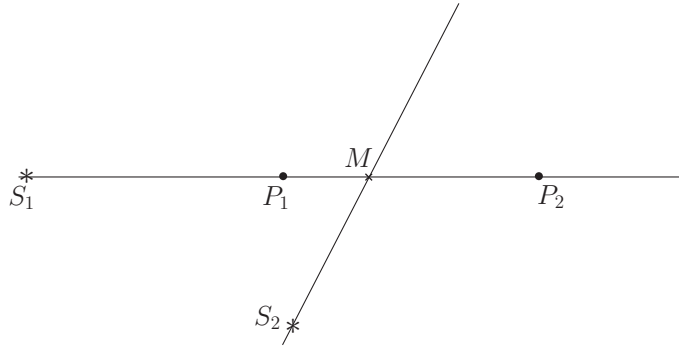


FIGURE 5.5 – Le segment $[P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2$ est inclus dans \mathcal{E} par la 1^{ème} condition de la Q-convexité.

Comme $[P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{E}$, alors en particulier on a $S_1 \notin [P_1, P_2] \cap \mathbb{S}$

Pour un ensemble contenant plus que deux sources ponctuelles, la Q-convexité est définie comme suit :

Définition 5.1.2. Soit \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles tel que $|\mathfrak{p}| \geq 2$. Un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{S}^2$ tel que $\mathfrak{p} \cap \mathcal{E} = \emptyset$ est dit S-Q-convexe relativement à \mathfrak{p} si \mathcal{E} est S-Q-convexe pour toute paire de sources de \mathfrak{p} (voir la Définition 5.1.1).

Notons par $\mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$ la classe des ensembles S-Q-convexe relativement à un ensemble de sources ponctuelles \mathfrak{p} .

Remarques 6. Soit $\mathfrak{p} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble de sources ponctuelles tel que $|\mathfrak{p}| \geq 2$ et soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{S}^2$ tels que $\mathfrak{p} \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Alors, deux cas sont possibles :

- Il existe une droite D de \mathbb{R}^2 telle que $\mathfrak{p} \subset D$ et dans ce cas \mathcal{E} est \mathbb{S} -Q-convexe relativement à \mathfrak{p} si et seulement si

1. $\forall S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ tels que $S_1 \neq S_2, \forall M \in \mathbb{S}^2$ tel que $M \notin (S_1 S_2)$ on a :

$$(\forall t \in \{0, 1, 2, 3\}, Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset) \implies M \in \mathcal{E} \quad \text{et}$$

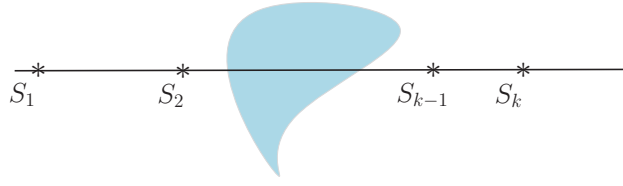


FIGURE 5.6 – Le segment $[P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2$ est inclus dans \mathcal{E} par la 2^{ème} condition de la Q-convexité.

2. $D \cap \mathcal{E}$ est un segment de \mathbb{S}^2 . (Voir l'illustration sur la Figure 5.6)

- Il n'existe pas de droite D de \mathbb{R}^2 telle que $\mathfrak{p} \subset D$ et dans ce cas \mathcal{E} est \mathbb{S} -Q-convexe relativement à \mathfrak{p} si et seulement si $\forall S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ tels que $S_1 \neq S_2, \forall M \in \mathbb{S}^2$ tel que $M \notin (S_1 S_2)$ on a :

$$(\forall t \in \{0, 1, 2, 3\}, Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset) \implies M \in \mathcal{E}.$$

En effet, soient $S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ deux sources ponctuelles distinctes et $P_1, P_2 \in (S_1 S_2) \cap \mathcal{E}$. Si $M \in [P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2$, alors il existe $S_3 \in \mathfrak{p}$ tel que $S_3 \notin (S_1 S_2)$ et donc pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ on a $\{P_1, P_2\} \cap Z_{S_1, S_2}^t(M) \neq \emptyset$ (Voir l'illustration sur la Figure 5.7). Par conséquent, on a nécessairement $M \in \mathcal{E}$. Autrement dit, lorsque les sources ponctuelles \mathfrak{p} ne sont pas sur une même droite, alors la partie (1) de la Définition 5.1.1 est suffisante pour caractériser la notion de \mathbb{S} -Q-convexité.

De la définition que nous venons de présenter, découle un premier lien avec la notion de convexité « classique ».

Lemme 5.1.1. Soit $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$. Alors, on a :

$$\mathcal{E} \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^2) \implies \mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}).$$

Démonstration. Soit \mathcal{E} un ensemble convexe de \mathbb{S}^2 et deux sources ponctuelles distinctes $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}$.

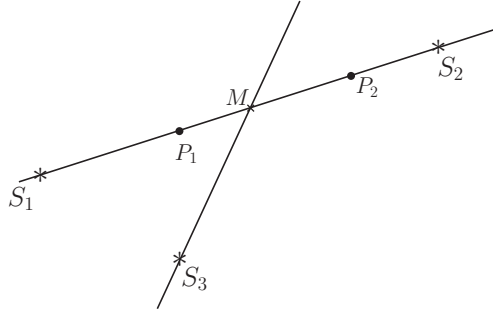


FIGURE 5.7 – Le segment $[P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2$ est inclus dans \mathcal{E} par la 1^{ère} condition de la Q-convexité.

1. Si $\mathcal{E} \cap (S_1 S_2) \neq \emptyset$, alors comme \mathcal{E} est \mathbb{S} -convexe on a $\mathcal{E} \cap (S_1 S_2)$ est un segment de \mathbb{S}^2 et par conséquent l'ensemble \mathcal{E} vérifie la 2^{ème} condition de la Q-convexité.
2. Soit $M \in \mathbb{S}^2$ tel que $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ et soient $A_t \in Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E}$ pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$. Alors, on a

$$\langle \overrightarrow{MA_0}, \vec{v}_{S_1 M} \rangle \leq 0, \langle \overrightarrow{MA_1}, \vec{v}_{S_1 M} \rangle \leq 0, \langle \overrightarrow{MA_2}, \vec{v}_{S_1 M} \rangle \geq 0 \text{ et } \langle \overrightarrow{MA_3}, \vec{v}_{S_1 M} \rangle \geq 0.$$

Il existe donc $\lambda, \lambda' \in [0, 1]$ tels que

$$\langle \lambda \overrightarrow{MA_0} + (1 - \lambda) \overrightarrow{MA_3}, \vec{v}_{S_1 M} \rangle = \langle \lambda' \overrightarrow{MA_1} + (1 - \lambda') \overrightarrow{MA_2}, \vec{v}_{S_1 M} \rangle = 0.$$

Soient les points B et B' tels que

$$\overrightarrow{MB} = \lambda \overrightarrow{MA_0} + (1 - \lambda) \overrightarrow{MA_3} \text{ et } \overrightarrow{MB'} = \lambda' \overrightarrow{MA_1} + (1 - \lambda') \overrightarrow{MA_2}.$$

Alors, les points B et B' sont sur la droite $(S_1 M)$ (Voir l'illustration sur la Figure 5.8). On a aussi :

$$\langle \overrightarrow{MA_0}, \vec{v}_{S_2 M} \rangle \geq 0, \langle \overrightarrow{MA_1}, \vec{v}_{S_2 M} \rangle \leq 0, \langle \overrightarrow{MA_2}, \vec{v}_{S_2 M} \rangle \leq 0 \text{ et } \langle \overrightarrow{MA_3}, \vec{v}_{S_2 M} \rangle \geq 0.$$

Par conséquent $\langle \overrightarrow{MB}, \vec{v}_{S_2 M} \rangle \geq 0$ et $\langle \overrightarrow{MB'}, \vec{v}_{S_2 M} \rangle \leq 0$ ce qui implique que $M \in [B, B']$. Ainsi, on a $M \in CH_{\mathbb{S}^2}(\{A_0, A_1, A_2, A_3\}) \subseteq CH_{\mathbb{S}^2}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ et \mathcal{E} est alors Q- \mathbb{S} -convexe relativement à S_1, S_2 .

Par conséquent, $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E})$ □

Ceci nous mène au résultat d'équivalence suivant :

Théorème 5.1.2. *Soit $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$. Alors on a l'équivalence suivante :*

$$\mathcal{E} \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^2) \iff \mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{E})$$

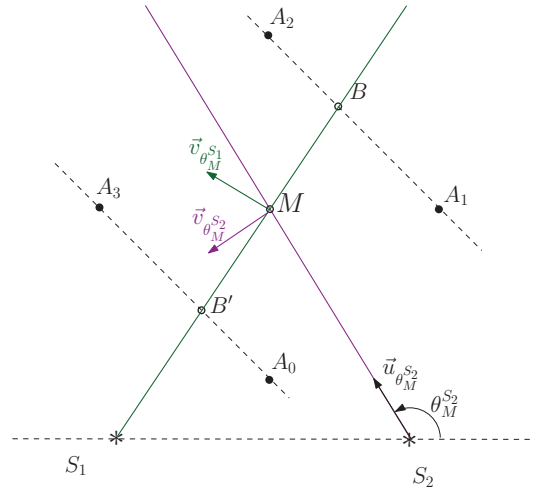


FIGURE 5.8 – M appartient à l'enveloppe convexe de $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$

Démonstration. Montrons tout d'abord la propriété suivante qui va être utile dans la suite pour la preuve du théorème.

Si \mathcal{E} est un ensemble borné et $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{E})$, alors pour tout $A, B \in \mathcal{E}$ on a $[A, B] \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{E}$.

En effet, comme \mathcal{E} est borné, il existe deux points distincts S_1, S_2 dans $(AB) \setminus \mathcal{E}$. Or, comme \mathcal{E} est \mathbb{Q} - \mathbb{S} -convexe relativement à S_1, S_2 et $(S_1 S_2) = (AB)$ on a $\mathcal{E} \cap (S_1 S_2)$ est un segment de \mathbb{S}^2 et par conséquent, $[A, B] \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{E}$ d'où la validité de la propriété.

Montrons maintenant le théorème.

- D'après le Lemme 5.1.1, si $\mathcal{E} \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^2)$, alors $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E})$ et donc en particulier $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{E})$.
- Supposons maintenant que $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{E})$ et montrons que \mathcal{E} est 3- \mathbb{S} -convexe. Soient A, B, C des points de \mathcal{E} et soit $M \in CH(\{A, B, C\}) \cap \mathbb{S}^2$, alors deux cas sont possibles :

1. M est sur l'un des cotés du triangle $CH(\{A, B, C\})$ (par exemple M est sur le segment $[A, B]$). Or, d'après la propriété précédente, on a $[A, B] \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{E}$. Donc, on a $M \in \mathcal{E}$.
2. M n'est sur aucun coté de $CH(\{A, B, C\})$. Il existe alors $\lambda, \mu, \nu \in]0, 1[$ tels que $M = \lambda A + \mu B + \nu C$ et $\lambda + \mu + \nu = 1$. Comme \mathcal{E} est borné, il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ et deux points $S_1, S_2 \in \mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{MS_1} = m\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MS_2} = n\overrightarrow{MB}$. Par construction, on a $A \in Z_{S_1, S_2}^1(M)$, $A, B \in Z_{S_1, S_2}^2(M)$, $B \in Z_{S_1, S_2}^3(M)$ et comme en particulier $M \in Z_{S_1, S_2}^0(M)$, alors on a nécessairement $C \in Z_{S_1, S_2}^0(M)$ (Voir l'illustration sur la Figure 5.9). On a donc $\mathcal{E} \cap Z_{S_1, S_2}^t(M) \neq \emptyset$ pour tout t

dans $\{0, 1, 2, 3\}$ et comme \mathcal{E} est \mathbb{Q} - \mathbb{S} -convexe relativement à S_1, S_2 alors on a nécessairement $M \in \mathcal{E}$.

Ainsi, \mathcal{E} est 3- \mathbb{S} -convexe et donc \mathbb{S} -convexe.

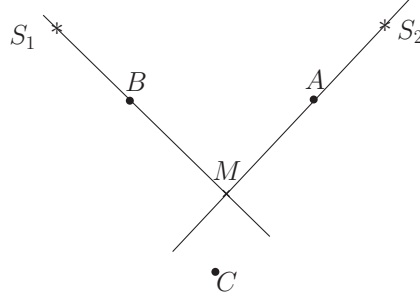


FIGURE 5.9 – Le point M est à l'intérieur du triangle $CH(\{A, B, C\})$.

□

Proposition 5.1.3. *Soit $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}(\mathbb{Z}^2)$. Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- \mathcal{E} est \mathbb{Z} - \mathbb{Q} -convexe relativement à $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}$
- \mathcal{E} est \mathbb{Z} - \mathbb{Q} -convexe relativement à $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{E}$

Démonstration. • Comme $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}$, alors \mathcal{E} est \mathbb{Z} - \mathbb{Q} -convexe relativement à $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}$ implique que \mathcal{E} est \mathbb{Z} - \mathbb{Q} -convexe relativement à $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{E}$

- Si \mathcal{E} est \mathbb{Z} - \mathbb{Q} -convexe relativement à $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{E}$, alors d'après le Théorème 5.1.2, \mathcal{E} est \mathbb{S} -convexe et donc d'après le Lemme 5.1.1 \mathcal{E} est \mathbb{Z} - \mathbb{Q} -convexe relativement à $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}$.

□

Nous allons montrer maintenant que la classe des ensembles \mathbb{Q} -convexes est stable par intersection.

Proposition 5.1.4. *Soit \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles et $\mathbb{E} \subseteq \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$. Alors, on a :*

$$\bigcap_{\mathcal{E} \in \mathbb{E}} \mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}).$$

Démonstration. Posons $\mathcal{E}' = \bigcap_{\mathcal{E} \in \mathbb{E}} \mathcal{E}$ et soient $S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ deux sources ponctuelles distinctes.

- Si $M \in \mathbb{S}^2$ tels que pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E}' \neq \emptyset$, alors on a pour tout $\mathcal{E} \in \mathbb{E}$ et pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$. Donc $M \in \mathcal{E}$ pour tout $\mathcal{E} \in \mathbb{E}$ et par conséquent, $M \in \mathcal{E}'$.
- Soient $A, B \in (S_1 S_2) \cap \mathcal{E}'$. Alors, $([A, B] \cap \mathbb{S}) \subseteq \mathcal{E}$ pour tout $\mathcal{E} \in \mathbb{E}$ et donc $([A, B] \cap \mathbb{S}) \subseteq \mathcal{E}'$. Par conséquent, $(S_1 S_2) \cap \mathcal{E}'$ est un segment de \mathbb{S} .

Donc $\bigcap_{\mathcal{E} \in \mathbb{E}} \mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$. □

À ce stade, nous pouvons introduire une notion similaire à celle de l'enveloppe convexe qui est l'*enveloppe Q-convexe* d'un ensemble de \mathbb{S}^2 .

Définition 5.1.3. Soient $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$ et \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 tels que $\mathfrak{p} \cap \mathcal{E} = \emptyset$.

- $\mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = \{\mathcal{E}' \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}) \mid \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'\}$ désigne l'ensemble de tous les sous-ensembles de \mathbb{S}^2 contenant \mathcal{E} et qui sont \mathbb{S} -Q-convexes relativement à \mathfrak{p} .
- On appelle *enveloppe \mathbb{S} -Q-convexe* de \mathcal{E} relativement à \mathfrak{p} , notée $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$, l'intersection de tous les sous-ensembles de \mathbb{S}^2 contenant \mathcal{E} et qui sont \mathbb{S} -Q-convexes relativement à \mathfrak{p} . Autrement dit, on a

$$QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{E}' \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})} \mathcal{E}'.$$

Remarques 7. Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux sous-ensembles de \mathbb{S} et \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles dans $\mathbb{S}^2 \setminus (\mathcal{E} \cup \mathcal{E}')$.

1. D'après la Proposition 5.1.4, $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$ est bien un ensemble \mathbb{S} -Q-convexe. Ainsi, l'enveloppe \mathbb{S} -Q-convexe d'un ensemble \mathcal{E} relativement à un ensemble de sources ponctuelles donné \mathfrak{p} est le plus petit ensemble (au sens de l'inclusion) contenant \mathcal{E} et qui est Q-convexe relativement à \mathfrak{p} .
2. Si $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$, alors $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \subseteq QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}')$.

Un résultat immédiat découle de cette définition.

Corollaire 5.1.1. Soit $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$ et \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles de $\mathbb{R}^2 \setminus CH(\mathcal{E})$. Alors, on a $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \subseteq CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{S}^2$.

Démonstration. On a pour tout ensemble \mathcal{E} , $\mathcal{E} \subseteq CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{S}^2$ et donc $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \subseteq QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, CH(\mathcal{E} \cap \mathbb{S}^2))$. Or $CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{S}^2$ est \mathbb{S}^2 -Q-convexe relativement à $\mathbb{R}^2 \setminus CH(\mathcal{E})$, ainsi $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, CH(\mathcal{E})) = CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{S}^2$. D'où $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \subseteq CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{S}^2$. □

5.1.1 Calcul de l'enveloppe Q-convexe

Considérons un ensemble \mathfrak{p} de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 . Afin de calculer l'enveloppe Q-convexe d'un ensemble relativement à \mathfrak{p} , nous allons introduire quatre opérateurs :

$$\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}, \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}} : \mathcal{P}(\mathbb{S}^2) \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$$

appelés *opérateurs de complétion* :

Soit $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$. Alors,

1. $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \cup \left(\bigcup_{S_1, S_2 \subseteq \mathfrak{p}; S_1 \neq S_2} (CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2)) \cap \mathbb{S}^2) \right)$.
2. $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \left\{ M \in \mathbb{S}^2 \mid \forall S_1, S_2 \in \mathfrak{p}; S_1 \neq S_2; \theta_M^{S_1} \neq \theta_M^{S_2}, \forall t \in \{0, 1, 2, 3\}, Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset \right\}$.
3. $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E}) \cup \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E}))$.
4. $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E})$.
Posons $E_0 = \mathcal{E}$ et $E_{i+1} = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(E_i)$ pour tout $i \geq 0$. Donc, $E_i = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E})$ pour tout $i \geq 0$. Alors, $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \bigcup_{i \geq 0} E_i$.

Remarques 8. Soit \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 .

- $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}$ est un opérateur croissant (au sens de l'inclusion ensembliste) : Si $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, alors $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$.
- Soit $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$ tel que $\mathfrak{p} \cap \mathcal{E} = \emptyset$, alors $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$ et par conséquent, $(\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E}))_{i \geq 0}$ est une suite croissante au sens de l'inclusion ensembliste.

Dans ce qui suit nous présentons certaines propriétés des opérateurs de complétion $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}$ et $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}$.

Proposition 5.1.5. Soient $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$ et \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 . Alors, on a :

1. $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}$ est un opérateur croissant :

$$\forall \mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2), \quad \text{si } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}', \text{ alors } \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}').$$

2. $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$ si et seulement si $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ si et seulement si $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.
3. $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}$ est idempotent : $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})) = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$.
4. $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$.
5. Si \mathcal{E} est un ensemble fini et $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^k(\mathcal{E})$.

Démonstration. Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$ et $S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ deux sources ponctuelles distinctes :

1. Comme $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}$ est un opérateur croissant au sens de l'inclusion, si $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$, alors $E_i = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E}) \subseteq E'_i = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E}')$ et donc $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \bigcup_{i \geq 0} E_i \subseteq \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}') = \bigcup_{i \geq 0} E'_i$.
2. Rappelons que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$. Par conséquent, $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \iff \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.
 - Supposons que $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ et soient $S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ deux sources ponctuelles distinctes.
 - Soit $M \in \mathbb{S}$ tel que pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ et donc $M \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$ et comme $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, alors $M \in \mathcal{E}$.
 - Par construction, le segment $CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2)) \cap \mathbb{S}^2$ de \mathbb{S}^2 est inclus dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$. Comme $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, alors $\mathcal{E} \cap (S_1 S_2)$ est un segment de \mathbb{S} .

Par conséquent, $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$.

- Supposons que $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$ et soit $M \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$. Alors, deux cas sont possibles :
 - Il existe $S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ deux sources ponctuelles distinctes tels que $CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2)) \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$ et $M \in CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2)) \cap \mathbb{S}^2$ et comme \mathcal{E} est Q- \mathbb{S} -convexe relativement à S_1, S_2 , alors $\mathcal{E} \cap (S_1 S_2)$ est un segment \mathbb{S}^2 et donc $M \in \mathcal{E}$.
 - Il existe $S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ deux sources ponctuelles distinctes telles que pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ et donc $M \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$. Or, comme \mathcal{E} est Q- \mathbb{S} -convexe relativement à S_1, S_2 , alors $M \in \mathcal{E}$.

Par conséquent, $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}) \Rightarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}, \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \Rightarrow \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

3. D'après 2., il suffit de montrer que $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$. Soient $S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ deux sources ponctuelles distinctes :
 - Soit $M \in \mathbb{S}$ tel que pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$. Il existe alors nécessairement un entier positif i tel que pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E}) \neq \emptyset$, ce qui implique que $M \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^{i+1}(\mathcal{E})$ et donc $M \in \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$.
 - Soit $M \in CH(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \cap (S_1 S_2)) \cap \mathbb{S}^2$. Soient P, Q les extrémités du segment $CH(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \cap (S_1 S_2)) \cap \mathbb{S}^2$ de \mathbb{S}^2 . Il existe alors nécessairement un i tel que $P, Q \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E})$ et donc $CH(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \cap (S_1 S_2)) \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^{i+1}(\mathcal{E})$ et par conséquent, $M \in \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$. Donc $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \cap (S_1 S_2)$ est un segment de \mathbb{S}^2 .

Donc $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$.

4. D'après la preuve de 3. on a $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$. Donc, $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$. De plus, comme $\mathcal{E} \subseteq QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$ on a alors $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})) = QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$. Ainsi, $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \subseteq QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$.
5. Posons $n = |CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{Z}^2| - |\mathcal{E}|$. On a $QH_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \subseteq CH(\mathcal{E})$. De plus, pour tout i , on a $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^{i+1}(\mathcal{E})$ ou $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E}) = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^{i+1}(\mathcal{E})$. Si $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E}) = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^{i+1}(\mathcal{E})$, alors $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E}) = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^{i+j}(\mathcal{E})$ pour tout $j \geq 0$, et par conséquent $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^i(\mathcal{E}) = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$ avec $i \leq n$ car $QH_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \subseteq CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{Z}^2$.

□

Nous verrons dans la suite que la notion d'enveloppe Q-convexe nous permettra notamment de générer aléatoirement des ensembles Q-convexes. Avant cela, nous montrons dans la section suivante qu'il existe un lien fort entre les notions de convexité classique et de Q-convexité.

5.2 Relation entre la convexité et la Q-convexité

Nous explorons dans cette partie les liens entre la notion de Q-convexité pour des sources ponctuelles et celle de convexité. Ces liens nous permettraient de trouver de nou-

velles solutions au problème de reconstruction des ensembles convexes.

5.2.1 Propriétés des ensembles convexes

D'après le Théorème 5.1.2, un ensemble convexe \mathcal{E} est Q-convexe pour l'ensemble des sources ponctuelles $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}$.

Nous introduisons dans cette partie une classe d'ensembles intermédiaire entre la classe des ensembles Q-convexes et celle des ensembles convexes.

Comme on a vu dans la section précédente, le calcul de l'enveloppe Q-convexe et donc de l'opérateur de complétion $\mathfrak{Q}_{\mathbf{p},\mathcal{S}}$ nécessite a priori l'itération de l'opérateur $\mathcal{F}_{\mathbf{p},\mathcal{S}}$ un nombre infini de fois. La Proposition 5.1.5 montre que l'opérateur $\mathfrak{Q}_{\mathbf{p},\mathcal{Z}}$ peut être calculé dans le cas discret pour les ensembles finis par un nombre fini d'itérations de l'opérateur $\mathcal{F}_{\mathbf{p},\mathcal{Z}}$. Nous nous posons alors la question sur l'existence d'une classe de sous ensembles de \mathbb{S}^2 pour laquelle le calcul de l'enveloppe Q-convexe peut être obtenu en appliquant une seule fois l'opérateur $\mathcal{F}_{\mathbf{p},\mathcal{Z}}$.

Nous présentons alors dans cette section une condition suffisante pour que $\mathfrak{Q}_{\mathbf{p},\mathcal{S}} = \mathcal{F}_{\mathbf{p},\mathcal{S}}$.

Définition 5.2.1. Soient $S \in \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$ tels que $S \notin \mathcal{E}$. \mathcal{E} est dit séparable de la source ponctuelle S si la condition suivante, notée (\star) , est vérifiée :

$$\exists A, B \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} \subset \mathcal{G}(R_{S,\theta_A^S}) \cap \mathcal{D}(R_{S,\theta_B^S}) \quad \text{et} \quad \widehat{ASB} < \pi \quad (\star)$$

La condition (\star) est illustrée dans la Figure 5.10.

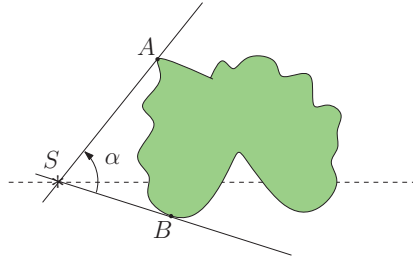


FIGURE 5.10 – Illustration de la condition (\star) : $\widehat{ASB} < \pi$

Nous introduisons maintenant des notations en relation avec la condition (\star) qui vont être utiles dans la suite.

Soient $\mathbf{p} \subset \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$ tels que $\mathbf{p} \cap \mathcal{E} = \emptyset$.

- $\mathfrak{D}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p})$ est l'ensemble de tous les ensembles de $\mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$ qui sont séparables de toute source ponctuelle de \mathbf{p} .
- $\mathfrak{QC}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \star) = \mathfrak{QC}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}) \cap \mathfrak{D}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p})$.

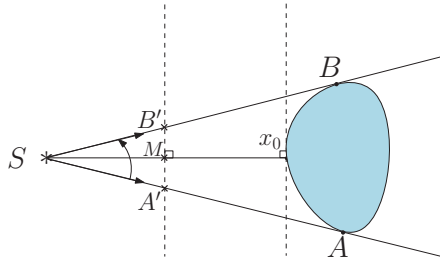


FIGURE 5.11 – $S \in \mathbb{R}^2 \setminus CH(\mathcal{E}) \implies \mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\{S\})$

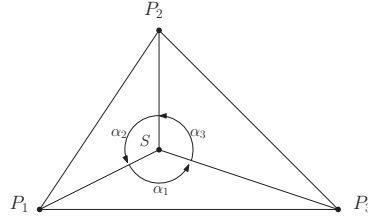


FIGURE 5.12 – $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\{S\}) \implies S \in \mathbb{R}^2 \setminus CH(\mathcal{E})$

Proposition 5.2.1. Soient $S \in \mathbb{S}^2$ une source ponctuelle et $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$. On a

$$\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\{S\}) \iff S \in \mathbb{R}^2 \setminus CH(\mathcal{E}).$$

Démonstration. • Supposons que $S \notin CH(\mathcal{E})$. D'après la Proposition 4.1.7 (Chapitre précédent), il existe une droite orientée $D_{\vec{n}}$ tel que le point S est strictement à gauche de $D_{\vec{n}}$ et tous les points de $CH(\mathcal{E})$ sont strictement à droite de $D_{\vec{n}}$. Soient $A, B \in \mathcal{E}$ tels que B est strictement à gauche de la droite $D_{\vec{S}\vec{A}^\perp}(S)$ passant par S et de vecteur normal $\vec{S}\vec{A}^\perp$ et soit A' (respectivement B') le point d'intersection de la droite (SA) (respectivement (SB)) avec la droite $D_{\vec{S}\vec{A}^\perp}(S)$. Alors, comme S est strictement à gauche de $D_{\vec{S}\vec{A}^\perp}(S)$, A et B sont strictement à droite de $D_{\vec{S}\vec{A}^\perp}(S)$, et comme la somme des angles du triangle (ASB) est égale à π et $S \notin (A'B')$, alors $\widehat{ASB} = \widehat{A'SB'} < \pi$ (Voir l'illustration sur la Figure 5.11).

- Soient $S \in \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\{S\})$ tels que $S \in CH(\mathcal{E})$. Comme $S \notin \mathcal{E}$, alors d'après la Proposition 4.1.5 (voir le Chapitre précédent), il existe $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{E}$ tels que S est dans le triangle $CH(\{P_1, P_2, P_3\})$ et comme la somme des trois angles $\alpha_1 = \widehat{P_1SP_2}$, $\alpha_2 = \widehat{P_2SP_3}$ et $\alpha_3 = \widehat{P_3SP_1}$ vaut 2π , alors l'une des trois sommes $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_2 + \alpha_3$ ou $\alpha_3 + \alpha_1$ de deux angles consécutifs est nécessairement supérieure ou égale à π et donc $\mathcal{E} \notin \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\{S\})$ (Voir l'illustration sur la Figure 5.12).

□

La condition (\star) est une condition technique qui est peu contraignante en pratique. En effet, il suffit de positionner de façon adéquate l'objet \mathcal{E} à observer relativement à l'ensemble \mathfrak{p} des sources lumineuses du dispositif physique de tomographie utilisé pour

l'acquisition d'images. En fait, il faut et il suffit que la position spatiale de \mathcal{E} dans le dispositif physique vérifie $\mathbf{p} \cap CH(\mathcal{E}) = \emptyset$.

Nous donnons maintenant quelques propriétés qui sont des conséquences directes de la définition précédente :

Remarques 9. Soient $\mathbf{p} \subset \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \subset \mathbb{S}^2$. On a :

- Si $\mathcal{E} \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^2)$ et $\mathcal{E} \cap \mathbf{p} = \emptyset$, alors $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \star)$.
- Si $\mathcal{E} \in \mathcal{D}_{\mathbb{S}}(\mathbf{p})$ et $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, alors $\mathcal{E}' \in \mathcal{D}_{\mathbb{S}}(\mathbf{p})$.
- Si $\mathcal{E} \in \mathcal{D}_{\mathbb{S}}(\mathbf{p})$, alors $CH(\mathcal{E}) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbf{p})$.

Le résultat suivant présente une importante propriété des ensembles vérifiant la condition (\star) .

Proposition 5.2.2. Inclusion des quadrants Soient $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^2$ deux sources ponctuelles distinctes et $\mathcal{E} \in \mathcal{D}_{\mathbb{S}}(\{S_1, S_2\})$.

Soient $M, M' \in CH(\mathcal{E}) \cap \mathbb{S}^2$. Alors, pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ on a :

$$M' \in Z_{S_1, S_2}^t(M) \implies Z_{S_1, S_2}^t(M') \cap \mathcal{E} \subseteq Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E}.$$

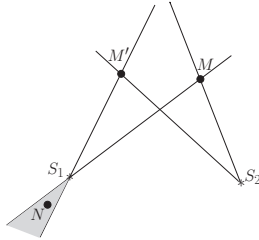


FIGURE 5.13 – Le point N est à l'intérieur de la région $\mathcal{G}(D_{(\vec{u}_{\theta_{S_1}})^{\perp}}(S_1)) \cap \mathcal{SD}(D_{(\vec{u}_{\theta_M}})^{\perp}(S_1))$.

Démonstration. Nous prouvons la proposition pour le cas $t = 3$. Les autres cas sont similaires. Soient $M' \in Z_{S_1, S_2}^3(M)$ et $N \in Z_{S_1, S_2}^3(M') \cap \mathcal{E}$ tels que $N \notin Z_{S_1, S_2}^3(M) \cap \mathcal{E}$ et supposons que $S_1 = (0, 0)$, $S_2 = (a, b)$, $M = (x, y)$, $M' = (x', y')$ et $N = (x'', y'')$. Alors,

- $M' \in Z_{S_1, S_2}^3(M)$ implique que $\langle \overrightarrow{S_1 M'}, \overrightarrow{S_1 M}^{\perp} \rangle \geq 0$ et $\langle \overrightarrow{S_2 M'}, \overrightarrow{S_2 M}^{\perp} \rangle \geq 0$, ce qui implique que

$$xy' - yx' \geq 0 \text{ et } (x - b)(y' - b) - (y - a)(x' - a) \geq 0.$$

N est alors dans la partie en gris dans la Figure 5.13. Donc

- $N \in \mathcal{G}(D_{(\vec{u}_{\theta_{M'}}^{S_1})^\perp}(S_1)) \cap \mathcal{SD}(D_{(\vec{u}_{\theta_M}^{S_1})^\perp}(S_1))$ implique que $\langle \overrightarrow{S_1 N}, \overrightarrow{S_1 M'}^\perp \rangle \geq 0$ et $\langle \overrightarrow{S_1 N}, \overrightarrow{S_1 M}^\perp \rangle < 0$ ce qui implique que

$$x'y'' - y'x'' \geq 0 \text{ et } xy'' - yx'' < 0.$$

Déterminons maintenant la position de la source ponctuelle S_1 relativement aux points M, M' et N :

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{NS_1}, \overrightarrow{NM}^\perp \rangle &= x''(y - y') - y''(x - x') &= x''y - y''x &> 0 \\ \langle \overrightarrow{MS_1}, \overrightarrow{MM'}^\perp \rangle &= x(y' - y) - y(x' - x) &= xy' - yx' &\geq 0 \\ \langle \overrightarrow{M'S_1}, \overrightarrow{M'N}^\perp \rangle &= x'(y'' - y') - y'(x'' - x') &= x'y'' - y'x'' &\geq 0. \end{cases}$$

Par conséquent, $S_1 \in CH(\{M, M', N\})$ et donc $S_1 \in CH(\mathcal{E})$, ce qui est absurde car $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\{S_1, S_2\})$ implique en particulier que $S_1 \notin CH(\mathcal{E})$. \square

Ainsi, pour les sous-ensembles de $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$, une seule application de l'opérateur de complétion $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}$ suffit pour calculer l'enveloppe Q-convexe comme le montre la proposition suivante.

Proposition 5.2.3. *Soient \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$. Alors,*

$$QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}).$$

Démonstration. Rappelons tout d'abord que

- $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \cup \mathfrak{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}))$ et que
- $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}) \Rightarrow CH(\mathcal{E}) \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}) \Rightarrow QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$ car $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \subseteq CH(\mathcal{E})$.

Supposons que $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^2(\mathcal{E}) \neq \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$ et soit $M \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^2(\mathcal{E}) \setminus \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$. Alors, deux cas sont possibles :

- Il existe une droite $D \subset \mathbb{R}^2$ telle que $\mathfrak{p} \subseteq D$. On a donc nécessairement, $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}^2(\mathcal{E}) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}))$. On a alors $M \notin D$ et $M \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})) \setminus \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$. Il existe alors $S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ deux sources ponctuelles distinctes telles que $\forall t \in \{0, 1, 2, 3\}$, $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$. Soit pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, N_t un point dans $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$. Pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, si $N_t \notin \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$, alors $N_t \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}))$ et on a donc nécessairement $Z_{S_1, S_2}^t(N_t) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$. Comme d'après la propriété d'inclusion des quadrants on a $Z_{S_1, S_2}^t(N_t) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \subseteq Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$, alors on a aussi $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$, ce qui implique que $M \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E}))$, d'où $M \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$, ce qui est absurde.
- Les points de \mathfrak{p} ne sont pas sur la même droite. Alors, deux sous-cas sont possibles :

- $M \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})) \setminus \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$ et donc $M \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E}))$. Il existe alors $S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ deux sources ponctuelles distinctes telles que $\forall t \in \{0, 1, 2, 3\}$, $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$. Soit pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, N_t un point dans $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$. Pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, si $N_t \notin \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$, alors on a nécessairement $Z_{S_1, S_2}^t(N_t) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$ et comme $Z_{S_1, S_2}^t(N_t) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E}) \subseteq Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$, alors on a aussi $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$, ce qui implique que $M \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$, d'où $M \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$ ce qui est absurde.

Ainsi, on a nécessairement, $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})) = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$.

- $M \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E}))) \setminus \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$ et d'après le premier sous-cas on a $M \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})) \setminus \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$. Il existe donc $S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ deux sources ponctuelles distinctes telles que $\forall t \in \{0, 1, 2, 3\}$, $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$. Soit pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, N_t un point dans $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$. Pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, si $N_t \notin \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$, alors on a nécessairement $Z_{S_1, S_2}^t(N_t) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$ et comme $Z_{S_1, S_2}^t(N_t) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E}) \subseteq Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$, alors on a aussi $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$, ce qui implique que $M \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$, d'où $M \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$ ce qui est absurde.

ainsi, on a nécessairement, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})) = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$.

En conclusion, on a : $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}^2(\mathcal{E}) = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$. □

Remarque 5.2.1. Contrairement au cas des rayons parallèles étudié dans [Dau03], dans le cas de sources ponctuelles, l'égalité $QH_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$ n'est vraie que quand $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{p})$. La Figure 5.14 donne un exemple d'un ensemble $\mathcal{E} \notin \mathfrak{D}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{p})$ tel que $QH_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \neq \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$.

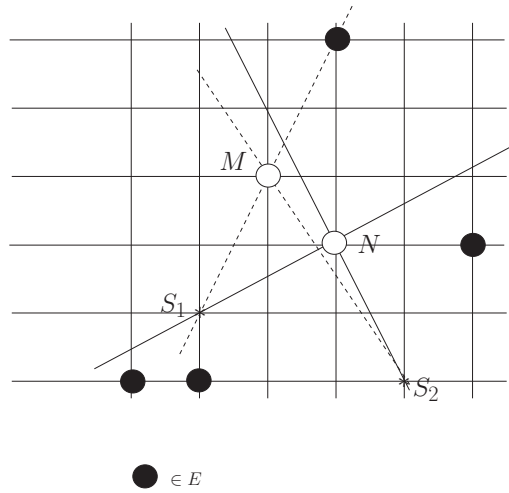


FIGURE 5.14 – Le point $N \in QH_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$ ne sera ajouté à $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{S}}(\mathcal{E})$ qu'une fois M est ajouté par une itération précédente.

5.2.2 Les points saillants d'un ensemble Q-convexe

Nous introduisons dans cette sous-section la notion de point saillant d'un ensemble Q-convexe. Cette notion est l'analogie de la notion de sommet pour un polygone convexe. Rappelons que les sommets d'un polygone convexe caractérisent complètement ce polygone. Autrement dit, deux polygones convexes sont égaux si et seulement si ils ont la même suite de sommets.

Avant de donner la définition formelle d'un point saillant d'un ensemble Q-convexe, commençons d'abord par des notions et des propriétés préliminaires.

Définition 5.2.2. Soit $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$ et \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 . Nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = \left\{ \mathcal{E}' \subseteq \mathbb{S}^2 \mid QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}') = QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \right\}.$$

$\mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$ est l'ensemble de tous les $\mathcal{E}' \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$ ayant la même enveloppe \mathbb{S} -Q-convexe relativement à \mathfrak{p} que \mathcal{E} .

Proposition 5.2.4. Soient $\mathcal{E} \in \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$, $\mathfrak{p} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble de sources ponctuelles et $\mathbb{H} \subseteq \mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$. Alors,

$$\bigcup_{\mathcal{E}' \in \mathbb{H}} \mathcal{E}' \in \mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}).$$

Démonstration. Nous savons que pour tout $\mathcal{E}' \in \mathbb{H}$, on a $\mathcal{E}' \subseteq QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$. Donc, $\bigcup_{\mathcal{E}' \in \mathbb{H}} \mathcal{E}' \subseteq QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$, ce qui implique que $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \bigcup_{\mathcal{E}' \in \mathbb{H}} \mathcal{E}') \subseteq QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$. D'autre part, si $\mathcal{E}'' \in \mathbb{H}$, alors comme $\mathcal{E}'' \subseteq \bigcup_{\mathcal{E}' \in \mathbb{H}} \mathcal{E}'$, on a $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}'') \subseteq QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \bigcup_{\mathcal{E}' \in \mathbb{H}} \mathcal{E}')$ et donc, $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \bigcup_{\mathcal{E}' \in \mathbb{H}} \mathcal{E}') = QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$, par conséquent $\bigcup_{\mathcal{E}' \in \mathbb{H}} \mathcal{E}' \in \mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$. \square

Remarque 5.2.2. Nous avons prouvé dans la Proposition 5.2.4 que l'ensemble $\mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$ est stable par union. Par contre, $\mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$ n'est généralement pas stable par intersection. Un contre exemple illustré par la Figure 5.15 montre deux ensembles F et F' tels que $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, F) = QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, F')$, tandis que $QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, F \cap F') \neq QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, F)$.

Nous allons montrer dans la Proposition 5.2.8 que sous certaines conditions sur \mathcal{E} et \mathfrak{p} , $\mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$ est stable aussi par intersection.

La notion que nous introduisons maintenant nous permet de caractériser un ensemble Q-convexe.

Définition 5.2.3. Soient \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$. Un point $M \in \mathcal{E}$ est un *point saillant* de \mathcal{E} relativement à \mathfrak{p} si $M \notin QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E} \setminus \{M\})$.

Nous noterons $\xi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E})$ l'ensemble des points saillants d'un ensemble \mathcal{E} relativement à un ensemble de sources ponctuelles \mathfrak{p} .

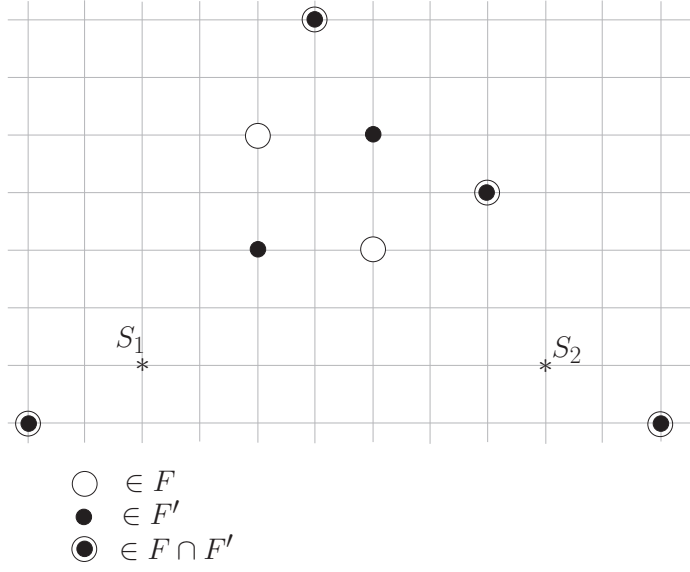


FIGURE 5.15 – $F, F' \in \mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})$; $F \cap F' \notin \mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})$

Corollaire 5.2.1. Soient \mathbf{p} un ensemble de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{E} \in \mathcal{D}_{\mathbb{S}}(\mathbf{p})$. Un point $M \in \mathcal{E}$ est un point saillant de \mathcal{E} si et seulement si

1. $M \notin \mathfrak{L}_{\mathbf{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\})$ et
2. pour tout $S_1, S_2 \in \mathbf{p}$ deux sources ponctuelles distinctes

$$\exists t \in \{0, 1, 2, 3\}, \text{ tel que } Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathbf{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}) = \emptyset.$$

Démonstration. Comme $\mathcal{E} \in \mathcal{D}_{\mathbb{S}}(\mathbf{p})$, alors pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E} \setminus \{M\} \in \mathcal{D}_{\mathbb{S}}(\mathbf{p})$. D'après la Proposition 5.2.3 $QH_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E} \setminus \{M\}) = \mathcal{F}_{\mathbf{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}) = \mathfrak{L}_{\mathbf{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}) \cup \mathfrak{F}(\mathfrak{L}_{\mathbf{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}))$. Donc $(M \notin QH_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E} \setminus \{M\}))$ est équivalent à $(M \notin \mathfrak{L}_{\mathbf{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}))$ et $(M \notin \mathfrak{F}(\mathfrak{L}_{\mathbf{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\})))$ sachant que $(M \notin \mathfrak{F}(\mathfrak{L}_{\mathbf{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\})))$ est équivalent à : pour tout $S_1, S_2 \in \mathbf{p}$ deux sources ponctuelles distinctes on a :

$$\exists t \in \{0, 1, 2, 3\}, Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathbf{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}) = \emptyset.$$

□

Il en découle le résultat suivant dans le cas où $\mathfrak{L}_{\mathbf{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

Corollaire 5.2.2. Soient \mathbf{p} un ensemble de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{E} \in \mathcal{D}_{\mathbb{S}}(\mathbf{p})$ tels que $\mathfrak{L}_{\mathbf{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. Alors, un point $M \in \mathcal{E}$ est un point saillant de \mathcal{E} relativement à \mathbf{p} si et seulement si

1. $\mathfrak{L}_{\mathbf{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}) = \mathcal{E} \setminus \{M\}$ et

2. pour tout $S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ deux sources ponctuelles distinctes $\exists t \in \{0, 1, 2, 3\}$, tel que $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} = \{M\}$.

Démonstration. D'après le Corollaire 5.2.1, il suffit de montrer que la condition $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}) = \mathcal{E} \setminus \{M\}$ est équivalente à $M \notin \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E} \setminus \{M\})$.

En effet, on a $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}) \subseteq \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ car $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ et donc $M \notin \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E} \setminus \{M\})$ est équivalent à $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}) = \mathcal{E} \setminus \{M\}$ d'où le résultat. \square

Remarque 5.2.3. Soient \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{p})$.

Supposons que pour tout $S_1, S_2 \in \mathfrak{p}$ sources ponctuelles distinctes on a $(S_1 S_2) \cap CH(\mathcal{E}) = \emptyset$. On a alors pour tout $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E}') = \mathcal{E}'$ et dans ce cas d'après le Corollaire 5.2.2, $M \in \mathcal{E}$ est un point saillant de \mathcal{E} si et seulement si

$$\forall S_1, S_2 \in \mathfrak{p}, S_1 \neq S_2 \implies \exists t \in \{0, 1, 2, 3\}, \text{ tel que } Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} = \{M\}.$$

Lemme 5.2.5. Soient $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^2$ deux sources ponctuelles distinctes et $\mathcal{E} \in \mathfrak{QC}_{\mathfrak{s}}(\{S_1, S_2\}, \star)$. S'il existe $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E} \cap (S_1 S_2) \subseteq [A, B]$, alors $M \in \mathcal{E} \cap (S_1 S_2)$ est un point saillant relativement à $\{S_1, S_2\}$ si et seulement si $M = A$ ou $M = B$.

Démonstration. • Soit $M \in]A, B[\cap \mathcal{E}$. Comme $A, B \in \mathcal{E}$, alors $M \in CH((\mathcal{E} \setminus \{M\}) \cap (S_1 S_2))$ et donc $M \in QH_{\mathfrak{s}}(\{S_1, S_2\}, \mathcal{E} \setminus \{M\})$.

- Comme $A \notin CH(\mathcal{E} \setminus \{A\} \cap (S_1 S_2))$, alors $A \notin \mathfrak{L}_{\{S_1, S_2\}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E} \setminus \{A\})$. Comme $A \in (S_1 S_2)$, alors $A \notin \mathfrak{F}(\mathfrak{L}_{\{S_1, S_2\}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E} \setminus \{A\}))$ et donc $A \notin \mathfrak{F}_{\{S_1, S_2\}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E} \setminus \{A\})$. Comme $\mathcal{E} \in \mathfrak{QC}_{\mathfrak{s}}(\{S_1, S_2\}, \star)$, alors $\mathcal{E} \setminus \{A\} \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}(\{S_1, S_2\})$ et donc $QH_{\mathfrak{s}}(\{S_1, S_2\}, \mathcal{E} \setminus \{A\}) = \mathfrak{F}_{\{S_1, S_2\}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E} \setminus \{A\})$. Par conséquent, $A \notin QH_{\mathfrak{s}}(\{S_1, S_2\}, \mathcal{E} \setminus \{A\})$ et donc A est un point saillant de \mathcal{E} relativement à $\{S_1, S_2\}$.

De la même façon, on montre que B est un point saillant de \mathcal{E} relativement à $\{S_1, S_2\}$. \square

Théorème 5.2.6. Soient $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^2$ deux sources ponctuelles distinctes et $\mathcal{E} \in \mathfrak{QC}_{\mathfrak{s}}(\{S_1, S_2\}, \star)$. Alors, $M \in \mathcal{E}$ est point saillant relativement à $\{S_1, S_2\}$ si et seulement si

1. M est une des deux bornes de l'intervalle $CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2))$ (i.e. il existe $M' \in \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E} \cap (S_1 S_2) \subseteq [M, M']$) ou
2. il existe $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ tel que $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} = \{M\}$.

Démonstration. Posons $\mathfrak{p} = \{S_1, S_2\}$ et supposons tout d'abord qu'il existe $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $[A, B] = CH((S_1 S_2) \cap \mathcal{E})$. Comme $\mathcal{E} \in \mathfrak{QC}_{\mathfrak{s}}(\{S_1, S_2\}, \star)$, alors $M \in \mathcal{E}$ est un point saillant relativement à \mathfrak{p} si et seulement si $M \notin \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E} \setminus \{M\})$ ce qui est équivalent à $M \notin \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}) \cup \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{s}}(\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{s}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}))$

1. D'après le Lemme 5.2.5, $(M \notin \mathfrak{L}_{\mathbf{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}))$ est équivalent à $(M \text{ est égal à } A \text{ ou à } B)$.

2. Supposons que $M \notin \{A, B\}$.

$(M \notin \mathfrak{F}_{\mathbf{p},\mathbb{S}}(\mathfrak{L}_{\mathbf{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\})))$ est équivalent à $(\exists t \in \{0, 1, 2, 3\}$ tel que $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathbf{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}) = \emptyset$). Montrons que

$$\forall t \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathbf{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}) = \emptyset \iff Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap (\mathcal{E} \setminus \{M\}) = \emptyset.$$

Comme $\mathcal{E} \setminus \{M\} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathbf{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\})$, il suffit alors de montrer que

$$Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap (\mathcal{E} \setminus \{M\}) = \emptyset \implies Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathbf{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\}) = \emptyset.$$

Supposons que $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap (\mathcal{E} \setminus \{M\}) = \emptyset$ et qu'il existe au moins un point M' dans la zone $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathbf{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E} \setminus \{M\})$ et donc $M' \in ([A, B] \cap \mathbb{S}) \setminus \mathcal{E}$. Comme $A, B \in \mathcal{E}$, alors on a nécessairement $S_1, S_2 \in [A, B]$ ce qui implique que $S_1, S_2 \in CH(\mathcal{E})$, ce qui est absurde car $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\{S_1, S_2\}, \star)$.

□

Nous montrons par la proposition suivante que pour une paire de sources ponctuelles \mathbf{p} , un ensemble dans $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\mathbf{p})$ est défini d'une manière unique par ses points saillants.

Proposition 5.2.7. *Soient \mathbf{p} une paire de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\mathbf{p})$. Alors,*

1. $QH_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E}) = QH_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}))$;
2. $\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) = \xi_{\mathbf{p}}(QH_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E}))$.

Démonstration. 1. Tout d'abord, comme $\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}$, alors $\mathcal{F}_{\mathbf{p},\mathbb{S}}(\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E})) \subseteq \mathcal{F}_{\mathbf{p},\mathbb{S}}(\mathcal{E})$ et donc $QH_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E})) \subseteq QH_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})$.

Considérons maintenant un point $M \in QH(\mathbf{p}, \mathcal{E})$.

- Si $M \in (S_1 S_2)$, comme $QH_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})$ est Q-convexe, alors $M \in [A, B]$ où $[A, B] = QH_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E}) \cap (S_1 S_2) \neq \emptyset$. Or d'après le Lemme 5.2.5, $A, B \in \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E})$, on a nécessairement $M \in CH(\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) \cap (S_1 S_2))$ et donc $M \in QH_{\mathbb{S}}(\mathbf{p}, \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}))$.
- Si $M \notin (S_1 S_2)$ alors $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ pour tout t . Par exemple, pour $t = 3$, considérons $N_3 \in Z_{S_1, S_2}^3(M) \cap \mathcal{E}$ tel que

$$\begin{cases} \theta_{N_3}^{S_1} &= \max \text{Supp}_{\mathbb{Z}}(Z_{S_1, S_2}^3(M) \cap \mathcal{E}, S_1) \\ \theta_{N_3}^{S_2} &= \max \text{Supp}_{\mathbb{Z}}(R_{S_1, \theta_{N_3}^{S_1}} \cap \mathcal{E}, S_2) \end{cases}$$

(voir Figure 5.16).

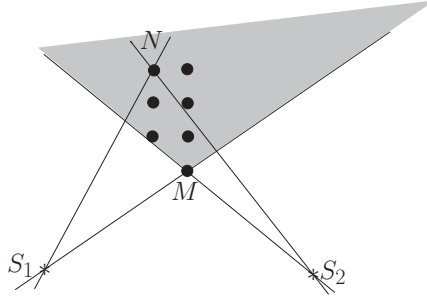


FIGURE 5.16 – $N_3 \in Z_{S_1, S_2}^3(M) \cap \mathcal{E}$ et $\theta_{N_3}^{S_1} = \max \text{Supp}_{\mathbb{Z}}(Z_{S_1, S_2}^3(M) \cap \mathcal{E}, S_1)$.

On a alors nécessairement $Z_{S_1, S_2}^3(N_3) \cap \mathcal{E} = \{N_3\}$ car sinon il existerait un point $N'_3 \neq N_3$ tel que $N'_3 \in Z_{S_1, S_2}^3(N_3) \cap \mathcal{E}$ et dans ce cas on a $\theta_{N'_3}^{S_1} < \theta_{N_3}^{S_1}$ ou $(\theta_{N'_3}^{S_1} = \theta_{N_3}^{S_1}$ et $\theta_{N'_3}^{S_2} < \theta_{N_3}^{S_2})$, ce qui est absurde vu la définition du point N_3 . Donc $N_3 \in \xi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E})$. Comme $N_3 \in Z_{S_1, S_2}^3(M) \cap \mathcal{E}$ et $N_3 \in \xi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E})$ alors $Z_{S_1, S_2}^3(M) \cap \xi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$.

De manière similaire, nous montrons que pour tout $t \in \{0, 1, 2\}$, il existe un point $N_t \in Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E}$ tel que $N_t \in \xi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E})$ et par conséquent, $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \xi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$. Tout ceci implique que $M \in QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \xi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E}))$ et on a alors

$$QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \xi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E})).$$

2. Soit $M \in \xi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E})$. D'après le Théorème 5.2.6 deux cas sont possibles :

- M est une des deux bornes de l'intervalle $CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2))$ et comme $QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E}) \cup \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}(\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E}))$ on a donc $CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2)) = CH(QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \cap (S_1 S_2))$ et par conséquent, $M \in \xi_{\mathfrak{p}}(QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}))$ ou
- M n'est pas un point de l'intervalle $CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2))$. Il existe alors $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ tel que $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} = \{M\}$.

Supposons que $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$ contient d'autres points que le point M . Comme $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$, on a alors aussi $QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$. En utilisant la même construction que précédemment, il existe alors un point $N_t \in Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = \{N_t\}$. Ainsi, $N_t \in \xi_{\mathfrak{p}}(QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}))$.

Supposons que $N_t \notin \mathcal{E}$, alors d'après le premier cas $N_t \notin CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2))$ donc $M \notin \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E})$, alors $Z_{S_1, S_2}^t(N_t) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E}) \subseteq Z_{S_1, S_2}^t(N_t) \cap (QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \setminus \{N_t\}) = \emptyset$, alors $N_t \in QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$, ce qui est absurde. Donc $N_t = M$ et par conséquent, $M \in \xi_{\mathfrak{p}}(QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}))$.

Soit $M \in \xi_{\mathfrak{p}}(QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}))$. Alors, d'après le Théorème 5.2.6 deux cas sont possibles :

- M est une des deux borne de l'intervalle $CH(QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \cap (S_1 S_2))$ et comme $CH(QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \cap (S_1 S_2)) = CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2))$, alors $M \in \xi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E})$.
- M n'est pas un point de l'intervalle $CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2))$. Il existe alors $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ tel que $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = \{M\}$.

Supposons que $M \notin \mathcal{E}$, alors $M \notin CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2)) \cup \mathcal{E}$ et donc $M \notin \mathfrak{L}_{\mathbf{p},\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ et Comme $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathfrak{L}_{\mathbf{p},\mathcal{S}}(\mathcal{E}) \subseteq Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap QH(\mathbf{p}, \mathcal{E} \setminus \{M\}) = \emptyset$, alors $M \notin QH(\mathbf{p}, \mathcal{E})$ ce qui est absurde et donc $M \in \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E})$ par conséquent, $\xi_{\mathbf{p}}(QH(\mathbf{p}, \mathcal{E})) \subseteq \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E})$.

□

Une conséquence immédiate de la Proposition 5.2.7 est la suivante :

Corollaire 5.2.3. *Soient \mathbf{p} une paire de sources ponctuelles \mathbb{R}^2 et $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathfrak{D}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p})$. On a*

$$\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) = \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}') \iff QH_{\mathbb{Z}}(\mathbf{p}, \mathcal{E}) = QH_{\mathbb{Z}}(\mathbf{p}, \mathcal{E}').$$

Nous rappelons que pour $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$, $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E}) = \{\mathcal{E}' \subseteq \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2) \mid QH(\mathbf{p}, \mathcal{E}') = QH(\mathbf{p}, \mathcal{E})\}$. Le Corollaire 5.2.3 montre que quand $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p})$ on a $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E}) = \{\mathcal{E}' \subseteq \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2) \mid \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}') = \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E})\}$. D'après la Proposition 5.2.4, si $H \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})$ alors $\bigcup_{\mathcal{E}' \in H} \mathcal{E}' \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})$ donc $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})$ est fermé par union. Nous montrons maintenant que pour les sous-ensembles $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p})$, $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})$ est aussi fermé par intersection.

Proposition 5.2.8. *Soient \mathbf{p} une paire de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 , $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p})$ et $H \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})$. Alors,*

$$\bigcap_{\mathcal{E}' \in H} \mathcal{E}' \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E}).$$

De plus, on a $\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{E}' \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})} \mathcal{E}'$, et donc $\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})$.

Démonstration. Pour tout $\mathcal{E}' \in H$, on a $\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}') = \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}' \subseteq QH(\mathbf{p}, \mathcal{E}')$ et donc $\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) \subseteq \bigcap_{\mathcal{E}' \in H} \mathcal{E}' \subseteq QH(\mathbf{p}, \mathcal{E}')$. Ainsi, $QH(\mathbf{p}, \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E})) \subseteq QH(\mathbf{p}, \bigcap_{\mathcal{E}' \in H} \mathcal{E}') \subseteq QH(\mathbf{p}, \mathcal{E})$. On a alors $QH(\mathbf{p}, \bigcap_{\mathcal{E}' \in H} \mathcal{E}') = QH(\mathbf{p}, \mathcal{E})$. □

Ces résultats nous donnent plus de précision concernant l'ensemble $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})$.

Corollaire 5.2.4. *Soient \mathbf{p} une paire de sources ponctuelles de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p})$. Alors,*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, \mathcal{E}) = \left\{ \mathcal{E}' \subseteq \mathfrak{R}(\mathbb{S}^2) \mid \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{F}_{\mathbf{p},\mathcal{S}}(\mathcal{E}) = QH(\mathbf{p}, \mathcal{E}) \right\}. \quad (5.1)$$

5.3 Génération aléatoire d'ensembles Q-convexes discrets

Pour simuler le processus du problème direct et avoir des données pour tester l'algorithme de reconstruction que nous proposons, nous présentons une méthode de génération aléatoire d'ensembles \mathbb{Z} -Q-convexes pour un ensemble de sources ponctuelles $\mathbf{p} = \{S_1, S_2\}$. Nous fixons à chaque fois une fenêtre $W = \llbracket -k_1, k_1 \rrbracket \times \llbracket -k_2, k_2 \rrbracket$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, à l'intérieur de laquelle sera généré l'ensemble. W ne doit contenir aucune des sources ponctuelles (voir la Figure 5.17).

La première étape consiste à générer un ensemble de points $\mathcal{E} \subseteq W$ aléatoirement suivant une loi uniforme et de compléter \mathcal{E} au fur et à mesure par les opérateurs de complétion pour construire $QH_{\mathbb{Z}}(\mathbf{p}, \mathcal{E})$. L'ensemble Q-convexe généré est ainsi l'enveloppe Q-convexe de F pour les deux sources ponctuelles considérées : Nous appliquons alors d'abord une fois l'opérateur

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{p}, \mathbb{Z}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \cup \left(\bigcup_{S_1, S_2 \subseteq \mathbf{p}; S_1 \neq S_2} (CH(\mathcal{E} \cap (S_1 S_2)) \cap \mathbb{Z}^2) \right),$$

puis itérons l'opérateur

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{p}, \mathbb{Z}}(\mathcal{E}) = \left\{ M \in \mathbb{Z}^2 \mid \forall S_1, S_2 \in \mathbf{p}; S_1 \neq S_2; \theta_M^{S_1} \neq \theta_M^{S_2}, \forall t \in \{0, 1, 2, 3\}, Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset \right\}$$

sur l'ensemble obtenu à chaque itération.

Le calcul de $\mathfrak{F}_{\mathbf{p}, \mathbb{Z}}(\mathcal{E})$ se fait comme suit :

On initie $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$. Ensuite, pour chaque point $M \in W \cap \mathbb{Z}^2$ avec $\theta_M^{S_1} \neq \theta_M^{S_2}$ (rappelons que $\theta_M^{S_1}$ et $\theta_M^{S_2}$ sont les angles des rayons issus respectivement par S_1 et S_2 et passant par M) et $M \notin \mathcal{E}$; nous vérifions si $Z_{S_1, S_2}^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ en vérifiant à quelle zone $Z_{S_1, S_2}^t(M)$ appartient chaque point $P \in \mathcal{E}$. Cette vérification s'arrête dès qu'un point viole la condition de Q-convexité ou lorsque tous les points de \mathcal{E} ont été traités.

À chaque itération, si un point de \mathcal{E} viole les conditions de Q-convexité, alors il est ajouté à l'ensemble $\mathfrak{F}_{\mathbf{p}, \mathbb{Z}}(\mathcal{E})$. Le même traitement est appliqué ensuite à $\mathfrak{F}_{\mathbf{p}, \mathbb{Z}}(\mathcal{E})$ jusqu'à ce qu'aucun point ne puisse être ajouté. Nous aurons alors obtenu l'ensemble $QH_{\mathbb{Z}}(\mathbf{p}, (\mathcal{E}))$.

L'algorithme suivant est un algorithme de génération aléatoire d'ensembles \mathbb{Z} -Q-convexes.

Algorithme 1 : Génération aléatoire d'ensembles Q-convexes

Entrée : $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^2$ tels que $S_1 \neq S_2$; $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ et $S_1, S_2 \notin W = \llbracket -k_1, k_1 \rrbracket \times \llbracket -k_2, k_2 \rrbracket$

Sortie : un ensemble \mathbb{Z} -Q-convexe \mathcal{E} .

Générer uniformément un ensemble de points aléatoire $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}^2$ contenu dans $W =$

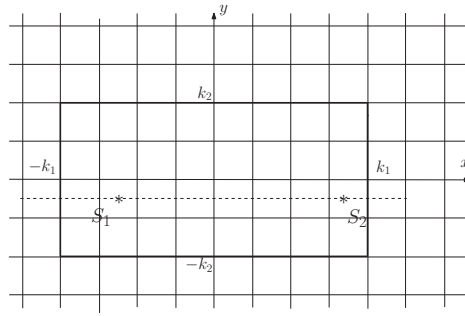


FIGURE 5.17 – L'ensemble \mathbb{Z} -Q-convexe sera généré dans la fenêtre $W = \llbracket -k_1, k_1 \rrbracket \times \llbracket -k_2, k_2 \rrbracket$.

$\llbracket -k_1, k_1 \rrbracket \times \llbracket -k_2, k_2 \rrbracket$ ne contenant pas S_1 et S_2

$\mathcal{E}' = \mathfrak{L}_{p, \mathbb{Z}}(\mathcal{E})$

répéter

$\mathcal{E} = \mathcal{E}'$

$\mathcal{E}' = \mathfrak{F}_{p, \mathbb{Z}}(\mathcal{E})$

jusqu'à $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$

retourner \mathcal{E}'

D'après la Proposition 5.1.5, comme \mathcal{E} est un ensemble fini de points, la condition d'arrêt $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ de l'algorithme est atteinte après $|W \setminus \mathcal{E}|$ étapes au plus.

L'algorithme suivant permet de calculer $\mathfrak{F}_{p, \mathbb{Z}}(\mathcal{E})$:

Calcul de $\mathfrak{F}_{p, \mathbb{Z}}(\mathcal{E})$:

Initialisation $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$

pour tout $M \in (W \setminus \mathcal{E})$ **faire**

si $\langle \vec{v}_{\theta^{S_1}}, \vec{u}_{\theta^{S_2}} \rangle \neq 0$ **alors**

$V_0 = \text{Faux}$; $V_1 = \text{Faux}$; $V_2 = \text{Faux}$; $V_3 = \text{Faux}$

pour tout $P \in \mathcal{E}$ **faire**

selon ($\text{Zone}(P, M)$)

cas 0 :

$V_0 \leftarrow \text{vrai}$

cas 1 :

$V_1 \leftarrow \text{vrai}$

cas 2 :

$V_2 \leftarrow \text{vrai}$

cas 3 :

$V_3 \leftarrow \text{vrai}$

fin selon

si $V_0 \wedge V_1 \wedge V_2 \wedge V_3$ **alors**

```

     $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \cup M$ 
    arrêt
  fin si
  fin pour
  fin si
  fin pour
  retourner  $\mathcal{E}'$ 

```

La procédure **Zone**(P, M) qui indique le quadrant $Z_{S_1, S_2}^t(M)$ auquel appartient le point P est comme suit :

```

Zone( $P, M$ ) :
 $z \leftarrow 4$ 
  pour  $t$  de 0 à 3 faire
    si  $\langle \vec{u}_{\theta_P^{S_1}}, \vec{v}_{\theta_M^{S_1}} \rangle \prec_t 0 \wedge \langle \vec{u}_{\theta_P^{S_2}}, \vec{v}_{\theta_M^{S_2}} \rangle \prec_{\prec_t} 0$  alors
       $z \leftarrow t$ 
    arrêt
  fin si
  fin pour
  retourner  $z$ ;

```

où, pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, on a :

- $a \prec_t b \Leftrightarrow a \leq b$ si $t \in \{0, 1\}$ et $a \prec_t b \Leftrightarrow a \geq b$ si $t \in \{2, 3\}$.
- $a \prec_{\prec_t} b \Leftrightarrow a \geq b$ si $t \in \{0, 3\}$ et $a \prec_{\prec_t} b \Leftrightarrow a \leq b$ si $t \in \{1, 2\}$.

5.3.1 Complexité algorithmique et probabilité de génération

Le calcul de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}, \mathbb{Z}}(\mathcal{E})$ est effectué en $O(k_1 * k_2)^2$. En effet, comme pour chaque point $M \in (W \setminus \mathcal{E})$ ($|W \setminus \mathcal{E}| < |W| = O(k_1 * k_2)$), on teste si M viole la condition de \mathbb{Q} -convexité en vérifiant la position des points de \mathcal{E} relativement aux quatre quadrants correspondant au point M . Ceci se fait en $O(k_1 * k_2)$ ce qui donne $O(k_1 * k_2)^2$ comme complexité pour le calcul de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}, \mathbb{Z}}(\mathcal{E})$.

D'après la Proposition 5.1.5, l'opérateur $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}, \mathbb{Z}}$ est itéré au plus $O(k_1 * k_2)$ fois, ce qui donne une complexité globale pour la complétion qui est égale à $O(k_1 * k_2)^3$.

Remarque 5.3.1. D'après le Corollaire 5.2.3, un ensemble \mathbb{Z} - \mathbb{Q} -convexe $\mathcal{E} \subseteq W$ peut être généré par tout ensemble $F \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(\{S_1, S_2\}, \mathcal{E})$. Ainsi, un ensemble \mathbb{Z} - \mathbb{Q} -convexe \mathcal{E} a une probabilité d'être généré égale à $\frac{|\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(\{S_1, S_2\}, \mathcal{E})|}{2^{(2k_1+1)(2k_2+1)}}$.

5.3.2 Génération aléatoire d'ensembles de $\mathcal{QC}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{p}, \star)$

D'après Proposition 5.2.3, pour $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{p})$, on a $QH_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}, \mathbb{Z}}(\mathcal{E})$. Ainsi, la boucle *répéter* dans **Algorithme 1** est exécutée une seule fois.

Corollaire 5.3.1. Soient un rectangle $W = \llbracket -k_1, k_1 \rrbracket \times \llbracket -k_2, k_2 \rrbracket$, deux sources ponctuelles $S_1, S_2 \notin \llbracket -k_1, k_1 \rrbracket \times \llbracket -k_2, k_2 \rrbracket$ et $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}(\{S_1, S_2\})$ tels que $\mathcal{E} \subseteq W$. La probabilité pour \mathcal{E} d'être généré par **Algorithme 1** est proportionnelle à $2^{|\mathcal{E}| - |\xi_p(\mathcal{E})|}$.

En effet, comme $S_1, S_2 \notin \llbracket -k_1, k_1 \rrbracket \times \llbracket -k_2, k_2 \rrbracket$ et $\mathcal{E} \subseteq W$ alors on a nécessairement $\mathcal{E} \in \mathcal{D}_{\mathbb{Z}}(\{S_1, S_2\})$. Par conséquent, d'après le Corollaire 5.2.4, on a

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) = \left\{ \mathcal{E}' \subseteq \mathfrak{R}(\mathbb{Z}^2) \mid \xi_p(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{F}_{p, \mathbb{Z}}(\mathcal{E}) = QH(\mathfrak{p}, \mathcal{E}) \right\}$$

et donc on a $|\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(\{S_1, S_2\}, \mathcal{E})| = 2^{|\mathcal{E}| - |\xi_p(\mathcal{E})|}$.

De plus, avec la propriété d'inclusion de quadrants (proposition 5.2.2), le temps de calcul de $\mathfrak{F}_{p, \mathbb{Z}}$ peut être optimisé comme le montre la proposition suivante.

Proposition 5.3.1. Soit $\mathcal{E} \in \mathcal{D}_{\mathbb{Z}}(\{S_1, S_2\}) \cap W = \llbracket -k_1, k_1 \rrbracket \times \llbracket -k_2, k_2 \rrbracket$, $n = |\text{Supp}_{\mathbb{Z}}(W, S_1)|$ et $m = |\text{Supp}_{\mathbb{Z}}(W, S_2)|$. L'ensemble $\mathfrak{F}_{\{S_1, S_2\}, \mathbb{Z}}(\mathcal{E})$ peut être calculé en $O(m * n)$.

Démonstration. Afin d'alléger les notations, nous désignerons par j le rang du rayon $R_{S_1, \theta_j^{s_1}}$ issu de S_1 et par i le rang du rayon $R_{S_2, \theta_i^{s_2}}$ issu de S_2 . Le quadrant t résultant de l'intersection d'un rayon de rang j et d'un rayon de rang i sera noté Z^t . Pour deux rayons $R_{S_1, \theta_j^{s_1}}$ de S_1 et $R_{S_2, \theta_i^{s_2}}$ de S_2 non parallèles et dont l'intersection est à l'intérieur de W , nous notons $\{\mathcal{I}(i, j)\} = R_{S_1, \theta_j^{s_1}} \cap R_{S_2, \theta_i^{s_2}}$. Nous remarquons que $\mathcal{I}(i, j)$ n'est pas toujours un point de \mathbb{Z}^2 . Pour un point M à l'intérieur de W , i_M et j_M désignent les rangs des rayons passant par M issus respectivement de S_1 et S_2 .

Nous obtenons alors une nouvelle présentation des quadrants :

$$\begin{aligned} Z^0(\mathcal{I}(i, j)) &= \left\{ \mathcal{I}(i', j') \in \mathbb{Z}^2 : i' \leq i \text{ et } j' \leq j \right\}, \\ Z^1(\mathcal{I}(i, j)) &= \left\{ \mathcal{I}(i', j') \in \mathbb{Z}^2 : i' \geq i \text{ et } j' \leq j \right\}, \\ Z^2(\mathcal{I}(i, j)) &= \left\{ \mathcal{I}(i', j') \in \mathbb{Z}^2 : i' \geq i \text{ et } j' \geq j \right\}, \\ Z^3(\mathcal{I}(i, j)) &= \left\{ \mathcal{I}(i', j') \in \mathbb{Z}^2 : i' \leq i \text{ et } j' \geq j \right\}. \end{aligned}$$

Pour chaque point $M = \mathcal{I}(i_M, j_M) \in W$ tel que $M \notin (S_1 S_2)$, on associe à chacun des quadrants $Z^t(M), t \in \{0, 1, 2, 3\}$, une variable booléenne $(V_t(M))$ telle que $V_t(M) = \mathbf{vrai}$ si et seulement si $Z^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$. Les variables booléennes sont déduites par induction grâce à la propriété d'inclusion de quadrants entre points adjacents. On a $V_t(\mathcal{I}(i, j)) = \mathbf{vrai}$ si et seulement si $Z^t(\mathcal{I}(i, j)) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$. D'après la Proposition 5.2.2, comme $\mathcal{E} \in \mathcal{D}_{\mathbb{Z}}(\{S_1, S_2\})$, on a pour le quadrant « 0 » par exemple $Z^0(\mathcal{I}(i-1, j)) \subset Z^0(\mathcal{I}(i, j))$ et $Z^0(\mathcal{I}(i, j-1)) \subset Z^0(\mathcal{I}(i, j))$. En fait, on a exactement $Z^0(\mathcal{I}(i, j)) = Z^0(\mathcal{I}(i-1, j)) \cup Z^0(\mathcal{I}(i, j-1)) \cup \{\mathcal{I}(i, j)\}$. En effet, s'il existe un point $N \in Z^0(\mathcal{I}(i, j) \setminus (Z^0(\mathcal{I}(i-1, j)) \cup \{\mathcal{I}(i, j)\}))$ alors on a

nécessairement $i - 1 < i_N < i$ ce qui est impossible. De même pour $Z^0(\mathcal{I}(i, j - 1))$ (voir la Figure 5.18).

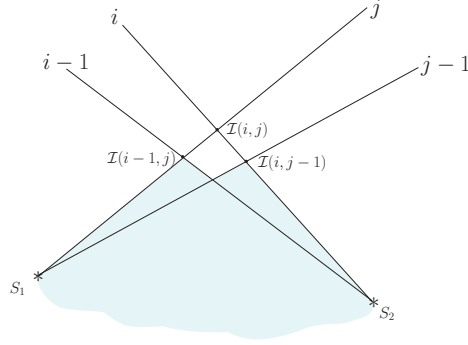


FIGURE 5.18 – $Z^0(\mathcal{I}(i, j)) = Z^0(\mathcal{I}(i - 1, j)) \cup Z^0(\mathcal{I}(i, j - 1)) \cup \{I(i, j)\}$.

Ainsi, $V_0(\mathcal{I}(i, j))$ est vraie si et seulement si $V_0(\mathcal{I}(i - 1, j)) = \text{vrai}$ ou si $V_0(\mathcal{I}(i, j - 1)) = \text{vrai}$ ou si $\mathcal{I}(i, j) \in \mathcal{E}$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} V_0(\mathcal{I}(i, j)) &= V_0(\mathcal{I}(i - 1, j)) \vee V_0(\mathcal{I}(i, j - 1)) \vee (\mathcal{I}(i, j) \in \mathcal{E}); \\ V_1(\mathcal{I}(i, j)) &= V_1(\mathcal{I}(i + 1, j)) \vee V_1(\mathcal{I}(i, j - 1)) \vee (\mathcal{I}(i, j) \in \mathcal{E}); \\ V_2(\mathcal{I}(i, j)) &= V_2(\mathcal{I}(i + 1, j)) \vee V_2(\mathcal{I}(i, j + 1)) \vee (\mathcal{I}(i, j) \in \mathcal{E}); \\ V_3(\mathcal{I}(i, j)) &= V_3(\mathcal{I}(i - 1, j)) \vee V_3(\mathcal{I}(i, j + 1)) \vee (\mathcal{I}(i, j) \in \mathcal{E}). \end{aligned}$$

Pour initialiser la récurrence, Les variables booléennes correspondant aux points de \mathcal{E} sont mis à « vrai » avec $V_t(\mathcal{I}(0, j)) = \text{vrai}$ si et seulement si $\mathcal{I}(0, j) \in \mathcal{E}$.

Finalement, on a

$$\mathfrak{F}_{\{S_1, S_2\}, \mathbb{Z}}(\mathcal{E}) = \{\mathcal{I}(i, j) \in W \setminus (S_1 S_2) \mid V_0(\mathcal{I}(i, j)) \wedge V_1(\mathcal{I}(i, j)) \wedge V_2(\mathcal{I}(i, j)) \wedge V_3(\mathcal{I}(i, j))\}.$$

Ainsi, le calcul $\mathfrak{F}_{\mathbf{p}, \mathbb{Z}}(\mathcal{E})$ est fait en $O(m * n)$. □

5.4 Reconstruction d'ensembles Q-convexes discrets pour des sources ponctuelles

Nous considérons dans cette partie un ensemble de sources ponctuelles colinéaires \mathbf{p} tel que $|\mathbf{p}| = l$, situées sur une même droite orientée L munie d'une origine. Pour simplifier les notations, on peut supposer, sans perte de généralité, que L est la droite des abscisses ($x = 0$). Les sources de \mathbf{p} sont ordonnées dans le sens croissant de leurs abscisses (c'est à dire que $x_{S_r} < x_{S_{r+1}}$).

Nous présentons dans ce qui suit le problème de reconstruction pour des ensembles Q-

convexes vérifiant la condition (\star) d'abord pour $l = 2$, ensuite pour $l \geq 2$, pour des ensembles n'intersectant par la droite L et pour des ensembles qui intersectent L .

5.4.1 Présentation du problème pour deux sources ponctuelles

Nous présentons le problème de reconstruction tomographique **RECONS₂** pour un ensemble de sources ponctuelles $\mathbf{p} = \{S_1, S_2\}$ ($l = 2$). L'objectif est de reconstruire un ensemble \mathbb{Z} -Q-convexe \mathcal{E} à partir de ses projections relativement aux deux sources ponctuelles S_1 et S_2 .

Les données du problème **RECONS₂** sont donc :

- les coordonnées des deux sources ponctuelles S_1 et S_2 ,
- deux ensembles d'angles $\Theta_1 = \{\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_n\}$ où les angles sont dans l'ordre croissant et $\Theta_2 = \{\theta'_1, \dots, \theta'_i, \dots, \theta'_m\}$ où les angles sont dans l'ordre décroissant,
- deux vecteurs d'entiers non nuls $\mathfrak{S}_1 = (s_1, \dots, s_j, \dots, s_n)$ et $\mathfrak{S}_2 = (s'_1, \dots, s'_i, \dots, s'_m)$ d'entiers positifs où s_j est la projection par le $j^{\text{ème}}$ rayon issu de S_1 et s'_i est la projection par le $i^{\text{ème}}$ rayon issu de S_2 .

Ainsi l'ensemble recherché $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{Z}}(S_1, S_2)$ doit satisfaire

$$\text{Supp}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_1) = \Theta_1 \text{ et } \text{Supp}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_2) = \Theta_2$$

et

$$(X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_1, \theta_1), \dots, X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_1, \theta_j), \dots, X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_1, \theta_n)) = \mathfrak{S}_1$$

et

$$(X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_2, \theta'_1), \dots, X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_2, \theta'_i), \dots, X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_2, \theta'_m)) = \mathfrak{S}_2.$$

Nous définissons à présent des ensembles et des notations que nous utiliserons par la suite.

Nous définissons d'abord les ensembles suivants :

- $\Delta = \{\mathcal{I}(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$; appelé *domaine de construction*,
- $A(S_1, \mathfrak{S}_1) = \sum_{j=1}^n s_j$, $A(S_2, \mathfrak{S}_2) = \sum_{i=1}^m s'_i$.

Pour un ensemble $F \subset \mathbb{Z}^2$, on note $F_i(S_2)$ l'intersection entre F et le $i^{\text{ème}}$ rayon issu de S_2 et par $F^j(S_1)$ l'intersection entre F et le $j^{\text{ème}}$ rayon issu de S_1 .

Pour un rayon R_{S_1, θ_j} , nous utiliserons les notations suivantes :

- $r(F^j(S_1)) = \max \{i \mid \mathcal{I}(i, j) \in F^j(S_1)\}$, $l(F^j(S_1)) = \min \{i \mid \mathcal{I}(i, j) \in F^j(S_1)\}$;

- $\sigma_r^F(i, s_j) = i_1 - i$ avec i_1 le plus petit entier vérifiant $|(\bigcup_{i \leq i' \leq i_1} R_{S_1, \theta_{i'}}) \cap F^j(S_1)| = s_j$;
 - $\sigma_l^F(i, s_j) = i - i_2$ avec i_2 le plus grand entier vérifiant $|(\bigcup_{i_2 \leq i' \leq i} R_{S_1, \theta_{i'}}) \cap F^j(S_1)| = s_j$.
- $\sigma_r^F(i, s_j)$ (respectivement $\sigma_l^F(i, s_j)$) est le nombre de rayons séparant R_{S_1, θ_j} du rayon qui passe par le $s_j^{\text{ème}}$ point de \mathbb{Z}^2 à droite (respectivement à gauche) du point $\mathcal{I}(i, j)$.

Comme \mathbf{p} ne contient que deux sources ponctuelles, nous noterons un quadrant t par Z^t au lieu de Z_{S_1, S_2}^t .

Une solution \mathcal{E} au problème posé doit nécessairement vérifier les conditions suivantes :

1. $\mathcal{E} \subseteq \Delta$ (contrainte de convexité).
2. $A(S_1, \mathfrak{S}_1) = A(S_2, \mathfrak{S}_2) = |\mathcal{E}|$ (contrainte de conservation).
3. Soit R_{S_1, θ_j} un rayon issu de S_1 et $M_1, M_2 \in \mathcal{E} \cap R_{S_1, \theta_j}$, alors, par la Q-convexité de \mathcal{E} , tout point $M \in R_{S_1, \theta_j} \cap \mathbb{Z}^2$ situé entre M_1 et M_2 est nécessairement un point de \mathcal{E} car on a $\{M_1, M_2\} \cap Z_{S_1, S_2}^t(M) \neq \emptyset$ pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ (voir la Figure 5.19) et on a donc en particulier $\theta_M^{S_2} \in \Theta'$. La même propriété est vérifiée par les rayons issus de S_2 (contrainte de fermeture du support).

Il suffit donc que la deuxième condition ne soit pas vérifiée (ce qui peut être testé directement à partir des données $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$), pour en déduire qu'il n'y a pas de solutions au problème posé.

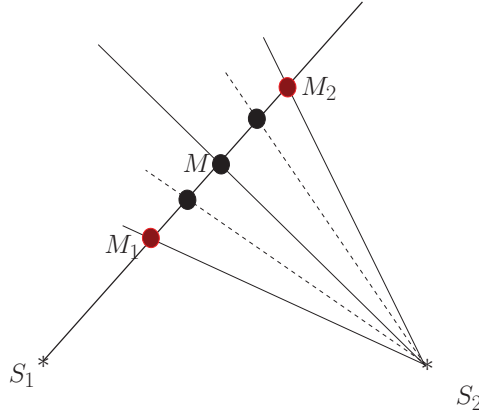


FIGURE 5.19 – M est nécessairement un point de \mathcal{E} car on a $\{M_1, M_2\} \cap Z_{S_1, S_2}^t(M) \neq \emptyset$ pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Notre approche consiste à considérer un ensemble inférieur appelé « noyau », noté α , qui est sûrement contenu dans le ou les ensembles solutions et un ensemble supérieur appelé « coquille », noté β , qui contient sûrement le ou les ensembles solutions. On a

donc :

$$\alpha \subseteq \mathcal{E} \subseteq \beta.$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$ on a :

$$\begin{aligned} |R_{S_1, \theta_j} \cap \alpha| &\leq s_j; & |R_{S_2, \theta'_i} \cap \alpha| &\leq s'_i; \\ |R_{S_1, \theta_j} \cap \beta| &\geq s_j; & |R_{S_2, \theta'_i} \cap \beta| &\geq s'_i. \end{aligned}$$

L'algorithme de reconstruction vise à atteindre une solution en augmentant α et en diminuant β . Ceci est réalisé par le biais des opérations de complétion que nous présentons ultérieurement. Avant cela, α et β doivent être initialisés.

5.4.2 Initialisation du noyau et de la coquille

Comme les ensembles que nous cherchons à reconstruire dans cette partie vérifient la condition (\star) , on peut se baser sur la propriété d'inclusion de quadrants dans ce qui suit. Rappelons le domaine de construction $\Delta = \{\mathcal{I}(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. L'ensemble α peut être initialisé avec deux points U_1 et U_2 de Δ tels que $i_{U_1} = 1$ et $i_{U_2} = m$. Nous pouvons choisir j_{U_1} et j_{U_2} avec $j_{U_1} < j_{U_2}$. En fait, nous pouvons choisir $\alpha = \{U_1, U_2\}$ pour tout $U_1 \in R_{S_2, \theta'_1} \cap \Delta$ et $U_2 \in R_{S_2, \theta'_m} \cap \Delta$. On a donc un nombre fini de possibilités d'initialisation de α qui est égal à $|R_{S_2, \theta'_1} \cap \Delta| \times |R_{S_2, \theta'_m} \cap \Delta|$.

Quant à β , on pourrait l'initialiser par $\beta_0 = \Delta$. Cependant, une meilleure initialisation est possible (voir [BD03] et [BD08]). Pour ce faire, la notion de *sommes partielles* pour chaque point $\mathcal{I}(i, j)$ est nécessaire. Nous introduisons alors les quatre sommes $\mathcal{S}^0, \mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2, \mathcal{S}^3$ (voir la Figure 5.20) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^0(\mathcal{I}(i, j)) &= \mathcal{S}^0(i) = \sum_{i' \leq i} s'_{i'} & ; & \quad \mathcal{S}^2(\mathcal{I}(i, j)) = \mathcal{S}^2(i) = \sum_{i' \geq i} s'_{i'}, \\ \mathcal{S}^1(\mathcal{I}(i, j)) &= \mathcal{S}^1(j) = \sum_{j' \geq j} s_{j'} & ; & \quad \mathcal{S}^3(\mathcal{I}(i, j)) = \mathcal{S}^3(j) = \sum_{j' \leq j} s_{j'}. \end{aligned}$$

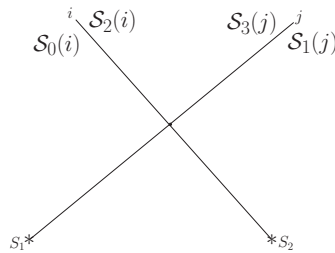


FIGURE 5.20 – Quatre sommes partielles pour i et j donnés.

La relation entre les quadrants et les sommes partielles est mise en évidence par la proposition suivante.

Proposition 5.4.1. *Si $\mathcal{S}^t(M) + \mathcal{S}^{t+1}(M) > |\mathcal{E}|$, alors $Z^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$.*

Démonstration. Si $Z^t(M) \cap \mathcal{E} = \emptyset$ alors $|\mathcal{E} \cap (Z^t(M) \cup Z^{t+1}(M))| = \mathcal{S}^t(M) + \mathcal{S}^{t+1}(M) \leq |\mathcal{E}|$. \square

Considérons un rayon de rang i issu de S_2 . Rappelons que les données contiennent exclusivement les rayons qui passent par au moins un point de la solution. On a donc toujours $s_j \neq 0$ et $s'_i \neq 0$. Nous définissons alors deux indices :

$$\begin{aligned} a_i &= \min\{j : \mathcal{S}^1(j) + \mathcal{S}^2(i) > A(S_1, \mathfrak{S}_1)\}, \\ b_i &= \max\{j : \mathcal{S}^0(j) + \mathcal{S}^3(i) > A(S_1, \mathfrak{S}_1)\}. \end{aligned}$$

Nous prouvons ici qu'on a toujours $a_i \leq b_i$:

Proposition 5.4.2. *Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a $a_i \leq b_i$.*

Démonstration. Comme $a_i = \min\{j : \mathcal{S}^1(j) + \mathcal{S}^2(i) > A(S_1, \mathfrak{S}_1)\}$, alors on a $\mathcal{S}^1(a_i - 1) + \mathcal{S}^2(i) \leq A(S_1, \mathfrak{S}_1)$. Or $\mathcal{S}^1(a_i - 1) = A(S_1, \mathfrak{S}_1) - \mathcal{S}^3(a_i)$ et $\mathcal{S}^2(i) = A(S_1, \mathfrak{S}_1) - \mathcal{S}^0(i - 1)$. Ainsi, on a $\mathcal{S}^3(a_i) + \mathcal{S}^0(i - 1) \geq A(S_1, \mathfrak{S}_1)$. Puisque $s'_i \neq 0$, on a $\mathcal{S}^0(i - 1) < \mathcal{S}^0(i)$ et $\mathcal{S}^3(a_i) + \mathcal{S}^0(i) > A(S_1, \mathfrak{S}_1)$ d'où $a_i \leq b_i$. \square

Un troisième indice c_i peut être défini comme suit :

$$c_i = \begin{cases} j_{U_1} & \text{si } a_i < j_{U_1} \\ a_i & \text{si } j_{U_1} \leq a_i \leq b_i \leq j_{U_2} \\ j_{U_2} & \text{si } b_i > j_{U_1} \end{cases} \quad (5.2)$$

Proposition 5.4.3. *Soit \mathcal{E} une solution au problème de reconstruction, $i \in \{1, \dots, m\}$ et $C = \mathcal{I}(i, c_i)$. On a : $Z^t(C) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$, $\forall t \in \{0, 1, 2, 3\}$.*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que comme $\mathcal{S}^1(a_i) + \mathcal{S}^2(i) > A(S_1, \mathfrak{S}_1)$ on a, d'après la Proposition 5.4.1, $Z^1(\mathcal{I}(i, a_i)) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$. De plus, on a $\mathcal{S}^0(b_i) + \mathcal{S}^3(i) > A(S_1, \mathfrak{S}_1)$ et donc d'après la même proposition on a $Z^3(\mathcal{I}(i, b_i)) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$

- Si $a_i < j_{U_1}$, alors $C = \mathcal{I}(i, j_{U_1})$. Par conséquent $U_1 \in Z^0(C) \cap Z^3(C)$, et $U_2 \in Z^2(C)$. De plus, avec la propriété d'inclusion des quadrants, on a $Z^1(\mathcal{I}(i, a_i)) \cap \mathcal{E} \subset Z^1(C) \cap \mathcal{E}$. Or, nous savons que $Z^1(\mathcal{I}(i, a_i)) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ et donc $Z^1(C) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$.

- Si $j_{U_1} \leq a_i \leq b_i \leq j_{U_2}$, alors $C = \mathcal{I}(i, a_i)$. Par conséquent $U_1 \in Z^0(C)$, et $U_2 \in Z^2(C)$. De plus, avec la propriété d'inclusion des quadrants, on a $Z^3(\mathcal{I}(i, b_i)) \cap \mathcal{E} \subset Z^3(C) \cap \mathcal{E}$. Or, nous savons que $Z^3(\mathcal{I}(i, b_i)) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ et donc $Z^3(C) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$.
- Si $b_i > j_{U_1}$, alors $C = \mathcal{I}(i, j_{U_1})$. Par conséquent $U_2 \in Z^1(C) \cap Z^2(C)$, et $U_1 \in Z^0(C)$. De plus, avec la propriété d'inclusion des quadrants, on a $Z^3(\mathcal{I}(i, b_i)) \cap \mathcal{E} \subset Z^1(C) \cap \mathcal{E}$. Or, nous savons que $Z^3(\mathcal{I}(i, b_i)) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ et donc $Z^3(C) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$.

□

Par conséquent, si $\mathcal{I}(i, c_i) \in \mathbb{Z}^2$ alors $\mathcal{I}(i, c_i) \in \mathcal{E}$ pour toute solution \mathcal{E} , et le point serait donc ajouté à α . Cependant, $\mathcal{I}(i, c_i)$ n'est pas toujours un point de \mathbb{Z}^2 . Dans ce cas, β est mis à jour :

$$\beta_i(S_2) = \left\{ \mathcal{I}(i, j) \in \Delta \mid c_i - \sigma_r^\Delta(c_i, s'_{c_i}) < j < c_i + \sigma_l^\Delta(c_i, s'_{c_i}) \right\}.$$

L'algorithme qui suit permet d'initialiser α et β .

Algorithme : Initialiser α, β :

$\beta \leftarrow \emptyset, \alpha \leftarrow \{U_1, U_2\}$

pour i de 1 à m **faire**

pour tout $\mathcal{I}(i, j) \in \Delta$ **faire**

 Calculer $\mathcal{S}^0(i), \mathcal{S}^1(j), \mathcal{S}^2(i)$ et $\mathcal{S}^3(j)$

fin pour

$a_i \leftarrow \min\{j : \mathcal{S}^1(j) + \mathcal{S}^2(i) > A(S_1, \mathfrak{S}_1)\}$

$b_i \leftarrow \max\{j : \mathcal{S}^0(j) + \mathcal{S}^3(i) > A(S_1, \mathfrak{S}_1)\}$

si $a_i < j_{U_1}$ **alors**

$c_i \leftarrow j_{U_1}$

sinon

si $b_i \leq j_{U_2}$ **alors**

$c_i \leftarrow a_i$

sinon

$c_i \leftarrow j_{U_2}$

fin si

fin si

si $\mathcal{I}(i, c_i) \in \mathbb{Z}^2$ **alors**

$\alpha_i(S_2) \leftarrow \alpha_i(S_2) \cup \mathcal{I}(i, c_i)$

sinon

pour j de $c_i - \sigma_r^\Delta(c_i, s'_{c_i})$ à $c_i + \sigma_l^\Delta(c_i, s'_{c_i})$ **faire**

$\beta_i(S_2) \leftarrow \beta_i(S_2) \cup \mathcal{I}(i, c_i)$

fin pour

fin si

fin pour

Le même traitement est appliqué aux rayons issus de S_1 . Nous obtenons alors le résultat suivant :

Proposition 5.4.4. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ (respectivement $\forall j \in \{1, \dots, m\}$), $|\beta_i(S_2)| \leq 2s'_i$ (respectivement $|\beta_i(S_1)| \leq 2s_j$).

Après l'initialisation de α et β , nous présentons les opérations de complétion.

5.4.3 Opérations de complétion

Chaque opération de complétion retourne deux nouveaux ensembles α' et β' tels que, pour $\mathcal{E} \in \mathcal{QC}_{\mathbb{Z}}(\{S_1, S_2\})$ ayant les projections \mathfrak{S}_1 et \mathfrak{S}_2 , on a :

$$\alpha \subseteq \alpha' \subseteq \mathcal{E} \subseteq \beta' \subseteq \beta.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} |R_{S_1, \theta_j} \cap \alpha| &\leq |R_{S_1, \theta_j} \cap \alpha'| \leq s_j; & |R_{S_2, \theta'_i} \cap \alpha| &\leq |R_{S_2, \theta'_i} \cap \alpha'| \leq s'_i; \\ |R_{S_1, \theta_j} \cap \beta| &\geq |R_{S_1, \theta_j} \cap \beta'| \geq s_j; & |R_{S_2, \theta'_i} \cap \beta| &\geq |R_{S_2, \theta'_i} \cap \beta'| \geq s'_i. \end{aligned}$$

Des opérations de complétion ont été introduites pour le cas de rayons parallèles dans [BLNP96] pour les directions horizontale et verticale et adaptées à n'importe quelles directions dans [BD03]. Nous les adaptons, dans ce qui suit, ces opérations de complétion à notre cas de sources ponctuelles.

On peut distinguer deux groupes d'opérations de complétion : \oplus et \otimes qui rajoutent des points à α et \ominus , \odot et \odot'' qui suppriment des points de β .

Opérations pour augmenter α

- Si $\alpha^j(S_1) \neq \emptyset$, alors $\oplus \alpha^j(S_1) = \{\mathcal{I}(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid l(\alpha^j(S_1)) \leq i \leq r(\alpha^j(S_1))\}$ (voir la Figure 5.21-(a)). (i.e Contrainte de fermeture du support)
- $\otimes \alpha^j(S_1) = \{\mathcal{I}(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid r(\beta^j(S_1)) - \sigma_l^\beta(r(\beta^j(S_1)), s_j) \leq i \leq l(\beta^j(S_1)) + \sigma_r^\beta(l(\beta^j(S_1)), s_j)\}$ (voir la Figure 5.21-(b)). Cette opération n'ajoute pas de points à $\alpha^j(S_1)$ si $r(\beta^j(S_1)) - \sigma_l^\beta(r(\beta^j(S_1)), s_j) > l(\beta^j(S_1)) + \sigma_r^\beta(l(\beta^j(S_1)), s_j)$.

Remarque 5.4.1. Soit un rayon R_{S_1, θ_j} issu de S_1 et posons $\mathcal{I}(l(\beta^j(S_1)), j) = (x_1, y_1)$ et $\mathcal{I}(r(\beta^j(S_1)), j) = (x_2, y_2)$. Alors, le nombre de points de $R_{S_1, \theta_j} \cap \mathbb{Z}^2$ situés entre $\mathcal{I}(l(\beta^j(S_1)), j)$ et $\mathcal{I}(r(\beta^j(S_1)), j)$ est égal à $\lfloor \frac{x_2 - x_1}{b} \rfloor$, où $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a}{b}$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$ (pgcd désigne le plus grand diviseur commun). Par conséquent, si $\lfloor \frac{x_2 - x_1}{b} \rfloor > 2s_j$ l'opération \otimes n'ajoute pas de points à $\alpha^j(S_1)$.

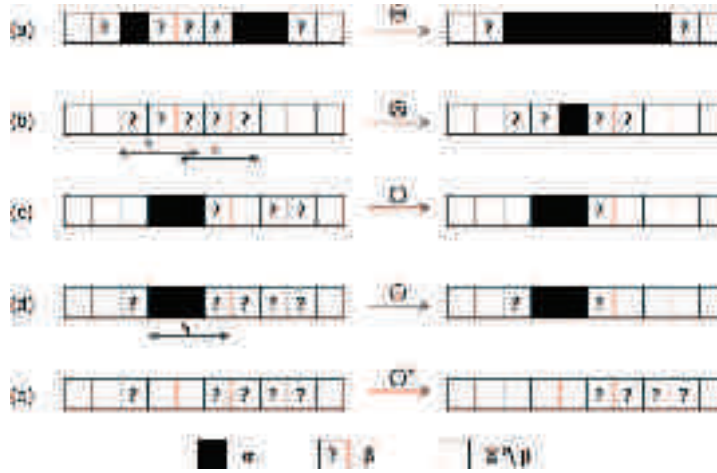


FIGURE 5.21 – Opérations de complétion sur les rayons (a) La solution étant Q-convexe, ses points situés sur un même rayon sont nécessairement consécutifs. Ainsi, les points de β situés entre deux points de α sont ajoutés à α . (b) $s_j = 3$ et ces trois points sont nécessairement consécutifs. Ainsi trois configurations sont possibles et le point du milieu en fait toujours partie. Ce point est donc ajouté à α . (c) Avec des points fixés de α , Les points de β qui ne sont pas connectés à ces points sont éliminés de β . (d) $s_j = 3$ dont deux sont fixés. Le point qui reste doit être directement connecté à ceux fixés. Les autres points de β sont éliminés. (e) Les séquences de β contenant moins de s_j points sont éliminés de β .

Opérations pour diminuer β

- – Si $\alpha^j(S_1) \neq \emptyset$, $\mathcal{I}(i', j) \notin \beta^j(S_1)$ avec $i' \leq l(\alpha^j(S_1))$, alors

$$\ominus \beta^j(S_1) = \{\mathcal{I}(i, j) \in \beta^j(S_1) \mid i > i'\}.$$

- Si $\alpha^j(S_1) \neq \emptyset$, $\mathcal{I}(i', j) \notin \beta^j(S_1)$ avec $i' \geq r(\alpha^j(S_1))$, alors

$$\ominus \beta^j(S_1) = \{\mathcal{I}(i, j) \in \beta^j(S_1) \mid i < i'\} \text{ (voir la Figure 5.21-(c)).}$$

- Si $\alpha^j(S_1) \neq \emptyset$, alors

$$\odot \beta^j(S_1) = \{\mathcal{I}(i, j) \in \beta^j(S_1) \mid r(\alpha^j(S_1)) - \sigma_l^\alpha(r(\alpha^j(S_1)), s_j) < i < l(\alpha^j(S_1)) + \sigma_r^\alpha(l(\alpha^j(S_1)), s_j)\}.$$

(voir la Figure 5.21-(d))

Nous définissons aussi l'opération \odot'' appelée opération de cohérence sur $\beta^j(S_1)$:

- Si $s_j \neq 0$ et $\mathcal{I}(i', j), \mathcal{I}(i'', j) \notin \beta$ avec $i' < i''$ et il existe moins que s_j points de \mathbb{Z}^2 séparant $\mathcal{I}(i', j)$ et $\mathcal{I}(i'', j)$, alors $\odot'' \beta^j(S_1) = \{\mathcal{I}(i, j) \in \beta^j(S_1) \mid i < i' \text{ ou } i > i''\}$. Cette opération élimine toute séquence de $\beta^j(S_1)$ contenant moins de s_j points (voir la Figure 5.21-(e)).

Les mêmes opérations sont définies pour $\alpha_i(S_2)$ et $\beta_i(S_2)$.

Proposition 5.4.5. *Pour tout $\odot_1 \in \{\oplus, \otimes\}$, $\odot_2 \in \{\ominus, \odot, \odot''\}$, pour tous α et β et pour toute solution \mathcal{E} , on a :*

$$\text{si } \alpha \subseteq \mathcal{E} \subseteq \beta, \text{ alors } \alpha \subseteq \alpha' \subseteq \mathcal{E} \subseteq \beta' \subseteq \beta.$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\alpha \setminus \alpha^j(S_1)) \cup \odot_1 \alpha^j(S_1), \\ \beta' &= (\beta \setminus \beta^j(S_1)) \cup \odot_2 \beta^j(S_1). \end{aligned}$$

Démonstration. Les opérations de complétion changent α et β en se basant sur les contraintes de convexité, de la conservation et de la fermeture du support de projections que nous avons introduites . Ainsi, les points qui sont ajoutés à α sont nécessairement des point de \mathcal{E} et tous les points qui sont éliminés de β ne peuvent pas être des points de \mathcal{E} (voir la Figure 5.21). \square

5.4.4 Reconstruction d'ensembles n'intersectant pas la droite des sources

Dans cette partie, nous supposons que l'ensemble que nous cherchons à reconstruire n'intersecte pas la droite $L = (S_1 S_2)$. C'est le cas quand $L \cap \Delta = \emptyset$ par exemple. La version de l'algorithme de reconstruction que nous présentons ici est une version optimisée par rapport à celle que nous avons présenté dans [ADT11a]. L'idée est d'initialiser en un premier temps les ensembles α_0 et β_0 puis d'appliquer les opérations de complétion jusqu'à ce qu'on obtienne deux ensembles α_k et β_k qui sont invariants relativement aux opérations de complétion.

Pour optimiser l'application des opérations de complétion, nous définissons un ensemble de rayons à traiter \mathcal{R} qui contient initialement tous les rayons des deux sources. À chaque étape, un de ces rayons est éliminé de \mathcal{R} et les opérations de complétion lui sont appliquées. Ce rayon peut être remis dans \mathcal{R} ultérieurement si un de ses points est modifié lorsqu'un autre rayon est traité. En effet, quand un rayon R_{S_1, θ_j} est traité et qu'un point $\mathcal{I}(i, j)$ est ajouté à α ou supprimé de β , alors le rayon R_{S_2, θ'_i} est remis dans \mathcal{R} s'il a déjà été supprimé dans une étape précédente.

Quand les opérations de complétion n'ajoutent plus aucun point à α et n'enlèvent plus aucun point de β (état de stabilité), trois cas sont possibles :

1. $\alpha = \beta$, et donc la solution au problème de reconstruction est atteinte.
2. $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, et donc il reste des points de β pour lesquels la question d'appartenir à la solution reste indéci. Pour ce faire, le problème est traduit en une formule booléenne 2-SAT. Cette étape que nous appelons *la complétion booléenne*, sera expliquée ultérieurement.

3. $\alpha \not\subseteq \beta$, et donc il n'y a pas de solutions possibles pour les ensembles initiaux α_0 et β_0 . Dans ce cas, nous réinitialisons ces ensembles et relançons l'algorithme.

On obtient alors l'algorithme suivant :

Algorithme 2 : Reconstruction d'ensembles Q-convexes discrets

Initialiser α, β
pour j de 1 à n **faire**
 si $s_j \neq 0$ **alors**
 ajouter R_{S_1, θ_j} à \mathcal{R}
 sinon
 $\beta^j(S_1) \leftarrow \emptyset$
 fin si
fin pour
pour i de 1 à m **faire**
 si $s'_i \neq 0$ **alors**
 ajouter R_{S_2, θ'_i} à \mathcal{R}
 sinon
 $\beta_i(S_2) \leftarrow \emptyset$
 fin si
fin pour
tant que $\mathcal{R} \neq \emptyset$ **faire**
 Choisir $R \in \mathcal{R}$
 si $R = R_{S_1, \theta_j}$ **alors**
 $\gamma^k = (\alpha^j(S_1), \beta^j(S_1))$
 fin si
 si $R = R_{S_2, \theta'_i}$ **alors**
 $\gamma^k = (\alpha_i(S_2), \beta_i(S_2))$
 fin si
 $\mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R} \setminus \{R\}$
 $(\alpha', \beta', \mathcal{R}) \leftarrow (\alpha, \beta, \mathcal{R})$
 répéter
 $(\alpha, \beta, \mathcal{R}) \leftarrow (\alpha', \beta', \mathcal{R})$
 $(\alpha, \beta, \mathcal{R}) \leftarrow \oplus(\gamma^k)$
 $(\alpha, \beta, \mathcal{R}) \leftarrow \ominus(\gamma^k)$
 $(\alpha, \beta, \mathcal{R}) \leftarrow \otimes(\gamma^k)$
 $(\alpha, \beta, \mathcal{R}) \leftarrow \odot(\gamma^k)$
 $(\alpha, \beta, \mathcal{R}) \leftarrow \odot''(\gamma^k)$
 jusqu'à $(\alpha, \beta, \mathcal{R}) = (\alpha', \beta', \mathcal{R})$
fin tant que

```

si  $\alpha = \beta$  alors
  retourner  $\alpha$ 
fin si
si  $\alpha \subset \beta$  alors
   $\alpha \leftarrow$  Complétion booléenne( $\alpha, \beta, S_1, S_2$ ) { // c.f. paragraphe suivant }
  retourner  $\alpha$ 
fin si
si  $\alpha \not\subseteq \beta$  alors
  retourner “Pas de solution pour  $\alpha, \beta$ ”
  Réinitialiser  $\alpha$  et  $\beta$  et relancer l’algorithme
fin si

```

Remarques 10. • En faisant varier α_0 , on peut avoir différentes solutions au problème **RECONS**₂.

- Si on n’a obtenu aucune solution avec toutes les initialisations possibles de l’ensemble α_0 , alors il n’y a pas de solution possible au problème **RECONS**₂.

Nous montrons dans l’Annexe C que ces opérations de complétion sont exécutées en $O(n_{max}^2)$ où $n_{max} = \max(n, m)$.

Complétion booléenne

Quand l’application des opérations de complétion n’ajoute plus de points à α , n’enlève plus de points de β et $\alpha \subseteq \beta$, nous avons atteint ce qu’on appelle « état de stabilité ». Dans le meilleur des cas, cet état est obtenu quand le noyau atteint la coquille $\alpha = \beta$. L’ensemble obtenu est alors une solution au problème de reconstruction.

Sinon, on est dans une situation où $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$. Pour les points manquant à la solution, on a besoin de trouver une combinaison qui forme un sous ensemble \mathcal{E} de $\beta \setminus \alpha$ tel que $\alpha \cup \mathcal{E}$ est une solution du problème posé.

Pour cela on associe à chaque point $M \in \beta \setminus \alpha$ une variable booléenne V_M qui est vraie si M est un point d’une solution éventuelle du problème de reconstruction présenté et fausse sinon. On obtient alors un ensemble $\alpha_c = \{M \in \beta \setminus \alpha \mid V_M = \text{vrai}\}$. Nous noterons la solution obtenue par $\mathcal{E} = \alpha \cup \alpha_c$

Nous avons donc à traduire le problème en une formule booléenne avec les variables $(V_M)_{M \in \beta \setminus \alpha}$ qui garantit que la solution \mathcal{E} est un ensemble Q-convexe qui a les projections données par S_1 et S_2 .

Notons qu’à ce stade, il y a trois états possibles pour les rayons. Dans ce qui suit, les points consécutifs de α (respectivement de $\beta \setminus \alpha$) sont une séquence de points de α (respectivement de $\beta \setminus \alpha$) non interrompue par des points de $\beta \setminus \alpha$ (respectivement de α) ou de \mathbb{Z}^2 .

Étant donnée une source ponctuelle S_1 , un rayon R_{S_1, θ_j} issu de S_1 est dit de type :

1. T_1 si $\alpha^j(S_1) \neq \emptyset$. Dans ce cas, $\alpha^j(S_1)$ est une série de points consécutifs.
2. T_2 si $\alpha^j(S_1) = \emptyset$ et $\beta^j(S_1)$ est une série de $2s_j$ points consécutifs.
3. T_3 si $\alpha^j(S_1) = \emptyset$ et $\beta^j(S_1)$ est formé par deux séries de points consécutifs de s_j points chacune (voir la Figure 5.22).

En effet, il résulte de la façon utilisée pour initialiser (α, β) qu'on a nécessairement $|\beta^j(S_1)| = 2s_j - |\alpha^j(S_1)|$ pour tous les rayons issus de S_1 , et $|\beta_i(S_2)| = 2s_i - |\alpha_i(S_2)|$ pour tous les rayons issus de S_2 . Par conséquent, après l'application des opérations de complétion tous les rayons issus de S_1 et S_2 sont de type T_1 , T_2 ou T_3 comme illustré par la Figure 5.22.

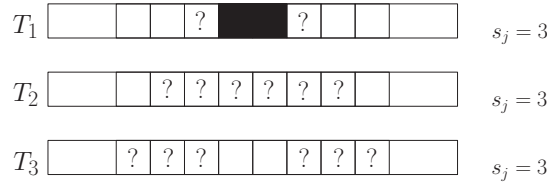


FIGURE 5.22 – Trois cas sont possibles à l'état de stabilité : T_1 , T_2 et T_3 .

1. Traduction de $(X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_1, \theta_1), \dots, X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_1, \theta_j), \dots, X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_1, \theta_n)) = \mathfrak{S}_1$:

Nous noterons la formule booléenne exprimant $(X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_1, \theta_1), \dots, X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_1, \theta_j), \dots, X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_1, \theta_n)) = \mathfrak{S}_1$ par FS_1 . Pour obtenir $FS_1 = \text{vrai}$, on doit avoir $X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}, S_1, \theta_j) = s_j$, pour $j = 1..n$. On va donc exprimer cette égalité pour chaque rayon j par la formule $(FS_1)_j$ et on a $FS_1 = (FS_1)_1 \wedge \dots \wedge (FS_1)_j \wedge \dots \wedge (FS_1)_n$.

Nous pouvons distinguer deux cas :

- Si le rayon R_{S_1, θ_j} est de type T_1 ou T_2 , alors deux points de \mathcal{E} ne doivent pas être séparés par plus que s_j points. La formule FS_j est donc exprimée comme suit :

$$(FS_1)_j = \bigwedge_{\mathcal{I}(i,j), \mathcal{I}(i_1,j); \max(i, i_1) - \min(i, i_1) > \sigma_r^{\beta^j}(\min(i, i_1), s_j)} V_{\mathcal{I}(i,j)} \Leftrightarrow \neg V_{\mathcal{I}(i_1,j)}$$

Rappelons que pour un ensemble F , $\sigma_r^F(i, s_j)$ (respectivement $\sigma_l^F(i, s_j)$) donne le nombre de rayons issus de S_2 séparant le rayon j (passant par $\mathcal{I}(i, j)$) de celui qui passe par le $s_j^{\text{ème}}$ point de \mathbb{Z}^2 à droite (respectivement à gauche) de $\mathcal{I}(i, j)$.

- Si le rayon R_{S_1, θ_j} est de type T_3 , alors une seule des deux séquences de s_j points de β peut être retenue dans la solution. Dans ce cas, dès qu'un des points d'une des ces séquences est retenu (la variable booléenne correspondante est vraie) tous les points de l'autre séquence sont exclus. La formule $(FS_1)_j$ est alors exprimée

comme suit :

$$(FS_1)_j = \bigwedge_{\mathcal{I}(i,j), \mathcal{I}(i_1,j); \max(i,i_1) - \min(i,i_1) > \sigma_r^{\beta j}(\min(i,i_1), s_j)} V_{\mathcal{I}(i,j)} \Leftrightarrow \neg V_{\mathcal{I}(i_1,j)}$$

De la même manière, la formule FS_2 est exprimée pour les rayons issus de S_2 .

2. Traduction de la Q-convexité :

La solution recherchée doit être Q-convexe pour S_1 et S_2 . Pour tout point $M \notin \mathcal{E}$ il doit donc exister au moins un $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ tel que $Z^t(M) \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Trois cas sont possibles :

– $M \in \beta \setminus \alpha$

Soit $\Delta_t = (Z^t(M) \cap Z^{t+1}(M)) \cap (R_{S_2, \theta'_i} \cup R_{S_2, \theta''_i})$.

Si $\alpha^j(S_1) \neq \emptyset$, alors $\Delta_1 \cap \alpha^j(S_1) \neq \emptyset$ ou $\Delta_3 \cap \alpha^j(S_1) \neq \emptyset$ et il existe donc nécessaire-

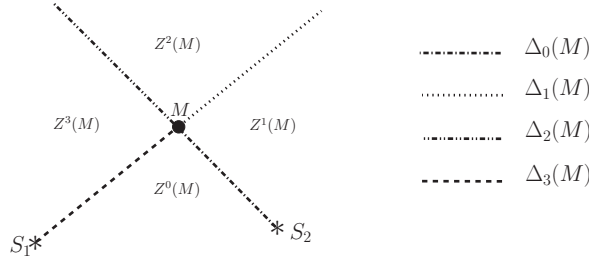


FIGURE 5.23 – $\Delta_t = (Z^t(M) \cap Z^{t+1}(M)) \cap (R_{S_2, \theta'_i} \cup R_{S_2, \theta''_i})$.

ment un t tel que $Z^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$. On suppose alors que $\alpha^j(S_1) = \emptyset$. Soit $t \in \{1, 3\}$ tel que $|\Delta_t \cap \beta^j(S_1)| = \max(|\Delta_1 \cap \beta^j(S_1)|, |\Delta_3 \cap \beta^j(S_1)|)$. Comme $|\beta^j(S_1)| = 2s_j$, on a $|\beta^j(S_1) \setminus \Delta_t| < s_j$ d'où Δ_t contient nécessairement au moins un point de la solution recherchée. D'une manière similaire, on peut trouver $t' \in \{0, 2\}$ tel que $\Delta_{t'}$ contient nécessairement au moins un point de la solution recherchée. Ainsi, il existe un k tel que pour tout $t \neq k$, $Z^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$.

La formule exprimant la Q-convexité est alors :

Pour tout $N \in (\beta \setminus \alpha) \cap Z^k(M)$:

$$V_N \Rightarrow V_M \tag{5.3}$$

– $M \notin \beta$ et les rayons R_{S_1, θ_j} et R_{S_2, θ'_i} sont de types T_1 , T_2 ou T_3 avec dans le dernier cas les séries des points consécutifs de β sont du même coté du point M :

Dans ce cas, on peut aussi trouver k tel que pour tout $t \neq k$, $Z^t(M) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$. La formule exprimant la Q-convexité est alors :

Pour tout $N \in (\beta \setminus \alpha) \cap Z^k(M)$:

$$\neg V_N \tag{5.4}$$

- $M \notin \beta$ et les rayons R_{S_1, θ_j} et R_{S_2, θ'_i} sont de type T_3 tels que les séquences de points consécutifs de β sont de part et d'autre du point M :

Comme on a déjà fixé les points $U_1 = \mathcal{I}(i_1, j_{U_1})$ et $U_2 = \mathcal{I}(i_m, j_{U_2})$, alors il y a au plus deux quadrants $Z^{k_1}(M)$ et $Z^{k_2}(M)$ qui ne contiennent aucun point de α . La formule exprimant la Q-convexité dans ce cas est :

$\forall N_1 \in (\beta \setminus \alpha) \cap Z^{k_1}(M), N_2 \in (\beta \setminus \alpha) \cap Z^{k_2}(M)$:

$$\neg V_{N_1} \vee \neg V_{N_2} \tag{5.5}$$

Finalement, l'ensemble $\mathcal{E}_{\alpha_0, \beta_0}$ est une solution au problème si la formule qui est la conjonction des formules FS_1, FS_2 , (5.3), (5.4) et (5.5) exprimées pour tous les rayons et les points de $\beta \setminus \alpha$, est vraie. Il s'agit bien d'une formule 2-SAT qui peut être résolu par exemple par l'algorithme de Tarjan (voir l'Annexe B).

Remarque 5.4.2. La complétion booléenne que nous venons de décrire est similaire à celle décrite dans [Dau03] pour le cas de rayons parallèles. La formule 2-SAT peut être formulée et résolue en un temps linéaire dépendant du nombre des clauses qu'elle contient, qui est $O(n_{max}^2)$.

Nous obtenons alors un algorithme de reconstruction qui suit les mêmes étapes de celui pour les sources parallèles [BD08], qui résout le problème de la reconstruction pour des ensembles (α, β) donnés en $O(n_{max}^2)$ (voir l'Annexe C) avec au plus n_{max}^2 réinitialisations possibles de (α, β) . On peut donc affirmer le résultat suivant :

Proposition 5.4.6. *Les solutions au problème **RECONS**₂, dans le cas où le domaine de reconstruction n'intersecte pas la droite $L = (S_1 S_2)$, sont reconstruits en un temps $O(n_{max}^4)$ où $n_{max} = \max(n, m)$.*

5.4.5 Reconstruction avec plus que deux sources ponctuelles

Considérons dans cette partie que $l = |\mathfrak{p}| > 2$ et présentons le problème **RECONS**. Pour une source S_r , les données du problème **RECONS** sont

- la position de la source $(x_r, 0)$;
- un ensemble des angles Θ_r ;
- un vecteur d'entiers non nuls \mathfrak{S}_t .

L'algorithme de reconstruction opère de la même manière que **Algorithme 2**. La différence réside dans l'initialisation de l'ensemble \mathcal{R} qui contient alors les rayons de toutes les sources ponctuelles.

Si $n_r = |\mathfrak{S}_r|$ et $n_{max} = \max_k(n_r)$, les opérations de complétion sont exécutées comme montré dans l'Annexe C en un temps $O(n_{max}^2)$ et le problème peut être résolu en $O(n_{max}^4)$.

5.4.6 Reconstruction d'ensembles intersectant la droite des sources

Nous supposons dans cette partie que le domaine de reconstruction Δ intersecte la droite liant les sources ponctuelles L . Si \mathcal{E} est l'ensemble que l'on cherche à reconstruire, alors posons D_1, D_2 et D_3 tels que $\mathcal{E} = D_1 \sqcup D_2 \sqcup D_3$ avec $D_3 = \mathcal{E} \cap L$, D_1 et D_2 se situant chacun de part et d'autre de la droite L (voir la Figure 5.24).

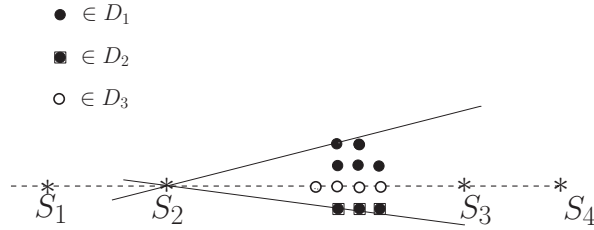


FIGURE 5.24 – $\mathcal{E} = D_1 \sqcup D_2 \sqcup D_3$ avec $D_3 = \mathcal{E} \cap L$, D_1 et D_2 situés chacun dans un demi-plan délimité par L .

Par cette séparation de \mathcal{E} , la résolution du problème **RECONS** se ramène alors à la résolution de trois problèmes de reconstruction :

- un problème de reconstruction de D_1 **RECONS^g**
- un problème de reconstruction de D_2 **RECONS^d**
- un problème de reconstruction de D_3

Soit pour une source S_r θ_k l'angle du rayon passant par D_3 . Les données du problème **RECONS^g** pour la source S_r sont alors

$$\Theta_{r,1} = \{\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_{k-1}\};$$

$$\mathfrak{S}_{r1} = (s_1, \dots, s_j, \dots, s_{k-1})$$

Les données du problème **RECONS^d** pour la source S_r sont

$$\Theta_{r,2} = \{\theta_{k+1}, \dots, \theta_j, \dots, \theta_n\};$$

$$\mathfrak{S}_{r2} = (s_{k+1}, \dots, s_j, \dots, s_n)$$

Pour que les données de reconstruction du problème **RECONS** soient cohérentes, on

a une contrainte supplémentaire à celles que nous avons présentées précédemment qui est que s_k doit être le même pour toutes les sources.

De la même manière que l'on a résolu **RECONS** (c.f. Paragraphe 5.4.5), on résout **RECONS^g** et **RECONS^d**. On aura donc reconstruit l'ensemble $\mathcal{E} \setminus D_3 = D_1 \cup D_2$ et il nous reste donc à reconstruire D_3 .

Reconstruction de D_3

Il existe plusieurs possibilités pour placer les s_k points consécutifs de D_3 sur la droite L . En effet, on peut les placer n'importe où de part et d'autre des sources extrêmes de \mathfrak{p} (voir la Figure 5.25). On peut aussi les placer entre deux sources consécutives S_r et S_{r+1} à condition que l'on a $||[S_r, S_{r+1}]|| > s_k$.

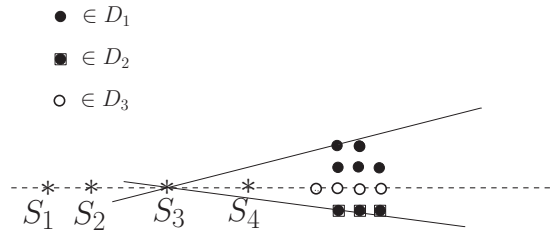


FIGURE 5.25 – $\mathcal{E} = D_1 \sqcup D_2 \sqcup D_3$ avec $D_3 = \mathcal{E} \cap L$, D_1 et D_2 situés chacun dans un demi-plan délimité par L .

Le cas où l'ensemble recherché \mathcal{E} est convexe est traité dans le paragraphe suivant.

Ensembles convexes

Quand l'ensemble recherché \mathcal{E} est convexe, une fois l'ensemble $D_1 \sqcup D_2$ reconstruit, on considère :

$$x_{min} = \min_x \{x \mid M = (x, y) \in D_1 \cup D_2\} \quad (5.6)$$

$$x_{max} = \max_x \{x \mid M = (x, y) \in D_1 \cup D_2\} \quad (5.7)$$

On considère deux points $A = (x_{min}, 0)$ et $B = (x_{max}, 0)$. Comme \mathcal{E} est convexe, on est sûr que D_3 est convexe aussi et donc $[[A, B]] \subseteq D_3$.

Soit $k = [[A, B]]$ et s_0 la projection sur la droite L . On peut distinguer différents cas :

- Si $k < s_0$ alors il n'y a pas de solution possible.
- S'il existe r tel que $x_A \leq x_{S_r} \leq x_B$, alors il n'y a pas de solution possible.
- Si $k = s_0$ et $\mathfrak{p} \cap [[A, B]] = \emptyset$ alors il n'y a qu'une seule possibilité pour D_3 qui est $D_3 = [[A, B]]$.

- Si $k \leq s_0$, $\mathfrak{p} \cap \llbracket A, B \rrbracket = \emptyset$ et $x_A \geq x_{S_i}$ (rappelons que $l = |\mathfrak{p}|$) ou $x_B \leq x_{S_1}$, alors il y a une infinité de solutions possibles car on peut placer les s_0 points de D_3 n'importe où sur $L \setminus [S_1, S_l]$.

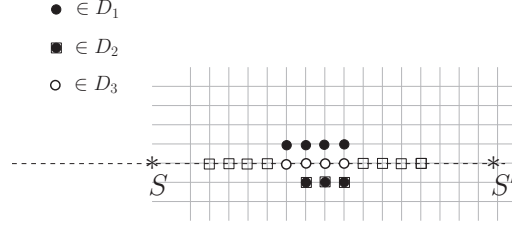


FIGURE 5.26 – $s_0 = 8$; $k = 4$. \square point éventuel de D_3 . Il y a 2^4 solutions possibles.

- Si $k \leq s_0$ et il existe r tel que $\llbracket A, B \rrbracket \subset [S_r, S_{r+1}]$ alors, posons $a = \llbracket S_r, A \rrbracket$ et $b = \llbracket B, S_{r+1} \rrbracket$.

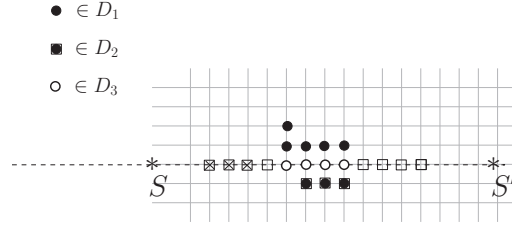


FIGURE 5.27 – $s_0 = 8$; $k = 4$. \square point éventuel de D_3 , \boxtimes ne peuvent pas être dans D_3 .

Soit Γ_a une liste de $\min(a, s_0 - k)$ points consécutifs de $(L \cup \mathbb{Z}^2) \setminus \llbracket A, B \rrbracket$ connectés à A tels que pour un $i \in \llbracket 1, \min(a, s_0 - k) \rrbracket$ donné on a $\Gamma_a[i] = (x_A - i, 0)$. D'une manière similaire, on considère une liste Γ_b de $\min(b, s_0 - k)$ points consécutifs de $(L \cup \mathbb{Z}^2) \setminus \llbracket a, b \rrbracket$ connectés à B tels que pour un $i \in \llbracket 1, \min(b, s_0 - k) \rrbracket$ donné on a $\Gamma_b[i] = (x_B + i, 0)$. Rappelons que $A(S_1, \mathfrak{S}_1) = \sum_{j=1}^n s_j$ est invariant quelque soit la source considérée.

Calculer D_3 :

si $a \leq b$ alors

$\Gamma'_a \leftarrow \Gamma_a, \Gamma'_b \leftarrow \emptyset$

pour i de 1 à $(s_0 - k) - \min(a, s_0 - k)$ faire

$\Gamma'_b[i] \leftarrow \Gamma_b[i]$

fin pour

si $|CH(D_1 \sqcup \Gamma'_a \cup \llbracket A, B \rrbracket \cup \Gamma'_b \sqcup D_2) \cap \mathbb{Z}^2| = A$ alors

$D_3 \leftarrow \Gamma'_a \cup \llbracket a, b \rrbracket \cup \Gamma'_b$;

retourner D_3 (solution 1) ;

fin si

pour i de $(s_0 - k) - \min(a, s_0 - k)$ à 1 faire

```

 $\Gamma'_a \leftarrow \Gamma'_a \setminus \Gamma_a[i];$ 
 $\Gamma'_b \leftarrow \Gamma'_b \cup \Gamma_b[(s_0 - k) - i + 1];$ 
si  $|CH(D_1 \cup \Gamma'_a \cup \llbracket A, B \rrbracket \cup \Gamma'_b \cup D_2) \cap \mathbb{Z}^2| = A$  alors
     $D_3 \leftarrow \Gamma'_a \cup \llbracket a, b \rrbracket \cup \Gamma'_b;$ 
    retourner  $D_3$  (solution 2);
fin si
fin pour
fin si
si  $b \leq b$  alors
     $\Gamma'_b \leftarrow \Gamma_b, \Gamma'_a \leftarrow \emptyset$ 
    pour  $i$  de 1 à  $(s_0 - k) - \min(b, s_0 - k)$  faire
         $\Gamma'_a[i] \leftarrow \Gamma_a[i]$ 
    fin pour
    si  $|CH(D_1 \cup \Gamma'_a \cup \llbracket A, B \rrbracket \cup \Gamma'_b \sqcup D_2) \cap \mathbb{Z}^2| = A$  alors
         $D_3 \leftarrow \Gamma'_a \cup \llbracket a, b \rrbracket \cup \Gamma'_b;$ 
        retourner  $D_3$  (solution 3);
    fin si
    pour  $i$  de  $(s_0 - k) - \min(b, s_0 - k)$  à 1 faire
         $\Gamma'_b \leftarrow \Gamma'_b \setminus \Gamma_b[i];$ 
         $\Gamma'_a \leftarrow \Gamma'_a \cup \Gamma_b[(s_0 - k) - i + 1];$ 
        si  $|CH(D_1 \cup \Gamma'_a \cup \llbracket A, B \rrbracket \cup \Gamma'_b \sqcup D_2) \cap \mathbb{Z}^2| = A$  alors
             $D_3 \leftarrow \Gamma'_a \cup \llbracket a, b \rrbracket \cup \Gamma'_b;$ 
            retourner  $D_3$  (solution 4);
        fin si
    fin pour
fin si
    Pas de solution

```

Si cet algorithme de renvoie pas de solution, alors on refait la reconstruction des ensembles D_1 et D_2 et on le relance. Si on a essayé avec toutes les solutions possibles des problèmes **RECONS**^g et **RECONS**^d alors il n'y a pas de solution à **RECONS**.

Chapitre 6

Reconstruction tomographique d'ensembles convexes par la Q-convexité

Sommaire

6.1	Unicité de la reconstruction d'ensembles Q-convexes	86
6.1.1	Presque semi-plan, \mathfrak{p} -polygone et \mathfrak{p} -séquence	86
6.1.2	Détermination des ensembles convexes et Q-convexes	89
6.2	Reconstruction d'ensembles convexes par la Q-convexité . . .	103

Nous avons présenté un algorithme de reconstruction d'ensembles Q-convexes discrets qui reconstruit une solution parmi les solutions possibles. Afin de pouvoir utiliser cet algorithme pour reconstruire des ensembles convexes, nous cherchons dans ce chapitre des conditions nécessaires et suffisantes pour garantir l'unicité de la solution reconstruite par l'algorithme déjà présenté. Pour cela, nous supposons que les sources sont colinéaires et que l'ensemble recherché n'intersecte pas la droite portant les sources et qu'il vérifie la condition (\star) (voir la sous-section 5.2.1).

Dans tout ce qui suit, \mathfrak{p} désigne un ensemble de n sources ponctuelles colinéaires ($n \geq 2$), de coordonnées rationnelles et ordonnées par ordre croissant de leurs coordonnées relativement à la droite orientée L munie d'une origine O et contenant \mathfrak{p} (voir l'illustration sur la Figure 6.1).

Comme dans le chapitre précédent, nous désignons par k_M le rang du rayon R_{S_k, θ_M^k} issu de la $k^{\text{ème}}$ source S_k et passant par un point M (les rayons étant ordonnés selon leurs angles dans le sens trigonométrique). Quand le point M est l'intersection d'un rayon de rang i_M issu de S_i et d'un rayon de rang j_M issu de S_j , il sera noté $\mathcal{I}(i_M, j_M)$.

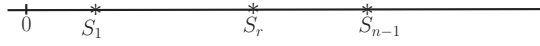


FIGURE 6.1 – Les sources sont colinéaire et ordonnées par ordre croissant de leurs abscisses.

6.1 Unicité de la reconstruction d'ensembles Q-convexes

Quelques notions sont nécessaires à introduire avant de donner les conditions de l'unicité de la reconstruction d'ensembles Q-convexes

6.1.1 Presque semi-plan, p-polygone et p-séquence

Définition 6.1.1 (Presque semi-plan). On appelle presque semi-plan (PSP) pour un ensemble de sources \mathfrak{p} tout quadrant $\Pi = Z_{S_j, S_i}^t(M)$ avec $S_i, S_j \in \mathfrak{p}$ et $M \in \mathbb{S}^2$, tel que pour tout $S_r \in \mathfrak{p}$ une des demi-droites $(S_r M]$ et $(S_r M) \setminus (S_r M[$ est incluse dans Π (voir la Figure 6.2).

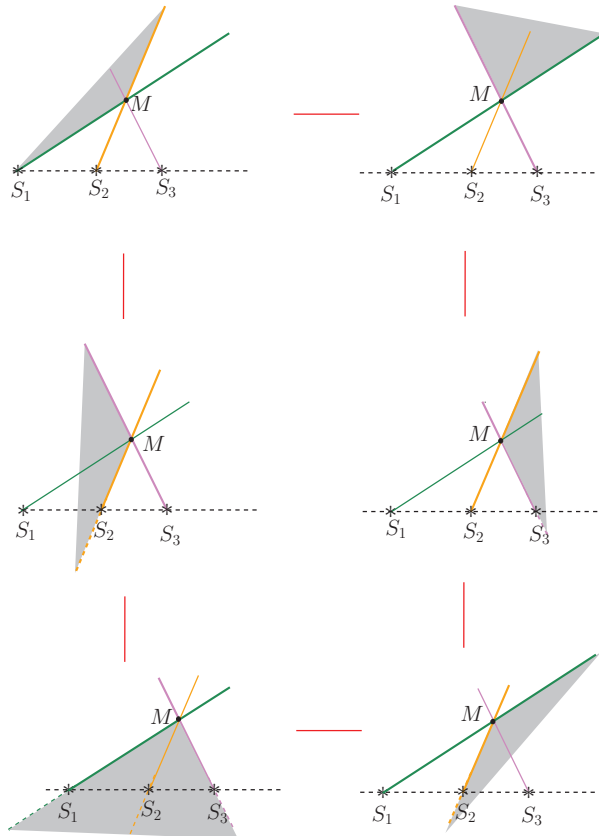


FIGURE 6.2 – Les PSP autour du point M avec $\mathfrak{p} = \{S_1, S_2, S_3\}$. Par exemple, $Z_{S_1, S_3}^2(M)$ est un PSP alors que $Z_{S_2, S_3}^2(M)$ n'est pas un PSP

Un PSP peut être vu comme un élément maximal par inclusion de l'ensemble $\{Z_{S_j, S_i}^t; S_i, S_j \in \mathfrak{p}\}$. Quand un quadrant est un PSP, il vérifie la propriété de définition précédente indé-

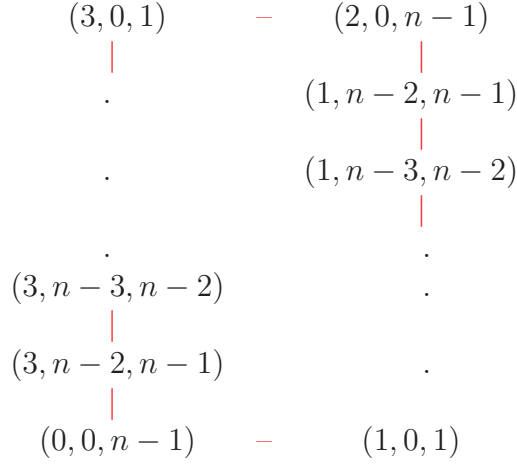


TABLE 6.1 – Graphe $G(\mathfrak{A}_{\mathbf{p}})$ associé à la relation de consécuitivité des PSP. Les arêtes du graphe sont en rouge.

pendamment du point M . En effet, pour les sources ponctuelles colinéaires, la propriété de PSP dépend uniquement de la position relative du couple de sources considérées.

Définition 6.1.2. Deux quadrants PSP sont dits consécutifs si leur union est un demi-plan.

On notera $\mathfrak{A}_{\mathbf{p}}$ l'ensemble de tous les triplets (t, j, i) tels que Z_{S_j, S_i}^t est un PSP pour \mathbf{p} . Le graphe $G(\mathfrak{A}_{\mathbf{p}})$ associé à la relation de consécuitivité des PSP est cyclique et on obtient, pour un ensemble de n sources ponctuelles $\{S_0, S_1, \dots, S_{n-1}\}$ ordonnées par ordre croissant de leurs coordonnées relativement L , le graphe représenté dans Table 6.1 :

Un exemple pour 3 sources ponctuelles est illustré dans la Figure 6.2. Rappelons la Remarque 5.1.1 du chapitre 5

Remarque. 5.1.1

Soient $S_i, S_j \in \mathbf{p}$. La fonction $(t, j, i) \mapsto Z_{S_j, S_i}^t$ avec $\{M\} = R_{S_j, \theta_M} \cap R_{S_i, \theta'_M}$ retourne le même quadrant pour tous les triplets suivants :

$(0, j, i), (1, j, \bar{i}), (3, \bar{j}, i), (2, \bar{j}, \bar{i}), (0, \bar{i}, \bar{j}), (1, \bar{i}, j), (3, i, \bar{j})$ et $(2, i, j)$;

avec \bar{j} est tel que, si Z_{S_j, S_i}^t est le quadrant résultant de l'intersection des deux rayons R_{S_j, θ^j} issu de S_j et R_{S_i, θ^i} issu de S_i alors Z_{S_j, S_i}^t le quadrant résultant de l'intersection des rayons $R_{S_j, \theta^{j+\pi}}$ issu de S_j et R_{S_i, θ^i} issu de S_i (respectivement Z_{S_j, S_i}^t est le quadrant résultant de l'intersection des deux rayons R_{S_j, θ^j} issu de S_j et $R_{S_i, \theta^{i+\pi}}$ issu S_i (voir la Figure 5.2)).

Nous définissons maintenant les \mathbf{p} -polygones.

Définition 6.1.3 (\mathbf{p} -polygone). Soit \mathbf{p} un ensemble de sources ponctuelles. Un polygone convexe non dégénéré K est un \mathbf{p} -polygone si la propriété suivante est vérifiée : Si V est

un sommet de K et $S \in \mathfrak{p}$, alors la droite (SV) passe par un autre sommet V' de K (voir la Figure 6.3).

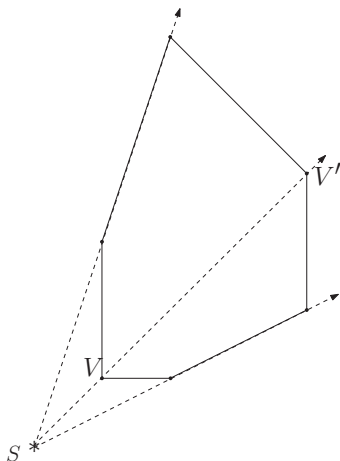


FIGURE 6.3 – \mathfrak{p} -polygone : la droite (SV) passe par un autre sommet V' .

Rappelons que $\mathbb{F}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers modulo un entier $m > 0$. Une \mathfrak{p} -séquence est définie comme suit.

Définition 6.1.4 (\mathfrak{p} -séquence). Soit \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles. Une \mathfrak{p} -séquence est une séquence $(A_k)_{k \in \mathbb{F}_m}$ de m points de \mathbb{R}^2 tels que m est pair et pour tout $S \in \mathfrak{p}$ il existe $t \in \mathbb{F}_m$ tel qu'on a :

$$\begin{aligned} \theta_{A_{t-1}}^S &< \theta_{A_{t-2}}^S < \dots < \theta_{A_{t-\frac{m}{2}}}^S \\ \theta_{A_t}^S &< \theta_{A_{t+1}}^S < \dots < \theta_{A_{t+\frac{m}{2}-1}}^S \end{aligned}$$

avec $\theta_{A_{t-1}}^S = \theta_{A_t}^S, \theta_{A_{t-2}}^S = \theta_{A_{t+1}}^S \dots \theta_{A_{t-\frac{m}{2}}}^S = \theta_{A_{t+\frac{m}{2}-1}}^S$.

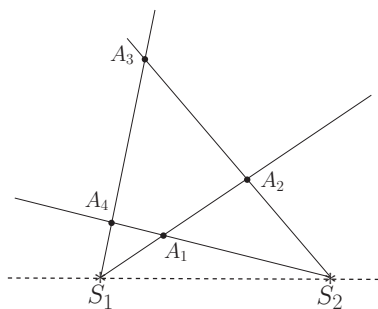


FIGURE 6.4 – \mathfrak{p} -séquence pour $\mathfrak{p} = \{S_1, S_2\}$. On prend $t = 2$ pour S_1 et $t = 1$ pour S_2 .

6.1.2 Détermination des ensembles convexes et Q-convexes

Pour montrer que la classe des ensembles convexes et celle des ensembles Q-convexes ont les mêmes conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité de la reconstruction tomographique, il suffit de montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Un ensemble de sources ponctuelles colinéaires \mathfrak{p} ne détermine pas la classe des ensembles convexes
2. Un ensemble de sources ponctuelles colinéaires \mathfrak{p} ne détermine pas la classe des ensembles Q-convexes

L'implication (1) \Rightarrow (2) découle du fait que tout ensemble convexe est Q-convexe pour tout ensemble \mathfrak{p} de sources ponctuelles.

Pour la deuxième implication (2) \Rightarrow (1), nous allons montrer que (2) implique l'existence d'une \mathfrak{p} -séquence, et nous allons proposer une conjecture qui si elle est vraie alors on a bien (2) \Rightarrow (1).

Le résultat principal de cette partie est formulé par le théorème suivant.

Théorème 6.1.1. *Soit \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles colinéaires. Si \mathfrak{p} ne détermine pas la classe des ensembles Q-convexes alors il existe une \mathfrak{p} -séquence.*

Pour montrer ce théorème, nous allons utiliser neuf lemmes. Cette preuve est inspirée du travail de Alain Daurat [Dau05] pour le cas des rayons parallèles.

On suppose que \mathfrak{p} ne détermine pas la classe des ensembles Q-convexes. Il existe donc deux ensembles Q-convexes pour \mathfrak{p} , F^+ et F^- , qui ont les mêmes projections par \mathfrak{p} .

On définit $E^+ = F^+ \setminus F^-$ et $E^- = F^- \setminus F^+$. Nous remarquons ce qui suit.

Remarques 11. • On a $F^+ \neq F^-$ si et seulement si $E^+ \cup E^- \neq \emptyset$.

- $E^+ \cap E^- = \emptyset$.
- Comme pour tout $S \in \mathfrak{p}$ on a $X_S F^+ = X_S F^-$ alors on a $X_S E^+ = X_S E^-$.

Les neuf lemmes participant à la preuve du Théorème 6.1.1, portent sur les propriétés des ensembles E^+ et E^- .

Lemme 6.1.2. *Il n'existe aucun point $M \in E^-$ tel qu'il existe $S_i, S_j \in \mathfrak{p}$ pour lesquels $Z_{S_j, S_i}^t(M) \cap E^- = \{M\}$ et $Z_{S_j, S_i}^{t+2}(M) \cap E^+ = \emptyset$ (symétriquement, il n'existe aucun point $M \in E^+$ tel que $Z_{S_j, S_i}^t(M) \cap E^+ = \{M\}$ et $Z_{S_j, S_i}^{t+2}(M) \cap E^- = \emptyset$.)*

Démonstration. Soient $M \in E^-$ et t tels que $Z_{S_j, S_i}^t(M) \cap E^- = \{M\}$ et $Z_{S_j, S_i}^{t+2}(M) \cap E^+ = \emptyset$. D'après la Remarque 5.1.1, on peut se ramener au cas $t = 0$ simplement en remplaçant

j par $j + \pi$ et/ou i par $i + \pi$. Soient

$$\begin{aligned} n_0^+ &= |\{N \in E^+ : i_N > i_M \text{ et } j_N < j_M\}|, \\ n_2^- &= |\{N \in E^- : i_N < i_M \text{ et } j_N > j_M\}|, \\ n_1^+ &= |\{N \in E^+ : i_N < i_M \text{ et } j_N < j_M\}|, \\ n_1^- &= |\{N \in E^- : i_N < i_M \text{ et } j_N < j_M\}|. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v &= X_{S_j} E^+(j_M) = X_{S_j} E^-(j_M), \\ u &= X_{S_i} E^+(i_M) = X_{S_i} E^-(i_M), \end{aligned}$$

Or, on a $X_S E^+ = X_S E^-$, et donc :

$$n_0^+ + n_1^+ + u = \sum_{k < j_M} X_S E^+(k) = \sum_{k < j_M} X_S E^-(k) = n_1^- \quad (6.1)$$

De même, $X_{S_i} E^+ = X_{S_i} E^-$, donc :

$$n_1^- + (v - 1) + n_2^- = \sum_{k < i_M} X_{S_i} E^+(k) = \sum_{k < i_M} X_{S_i} E^-(k) = n_1^+ \quad (6.2)$$

Les deux égalités 6.1 et 6.2 nous mènent donc à l'égalité suivante

$$n_0^+ + u + (v - 1) + n_2^- = 0$$

Cependant, $M \in E^-$, d'où $u \geq 1$ et $v \geq 1$ ce qui est en contradiction avec $n_0^+ + u + (v - 1) + n_2^- = 0$. \square

Soit $S_i \in \mathfrak{p}$. Comme $X_{S_i} E^+ = X_{S_i} E^-$, alors pour tout point $M \in E^+$, il existe un point $N \in E^-$ tel que $i_M = i_N$. Nous noterons un de ces points M_i . De manière similaire, pour tout point $M \in E^-$, il existe un point $M_i \in E^+$ tel que $i_{M_i} = i_M$.

Lemme 6.1.3. *Pour tout point $M \in E^+$, il existe un et un seul $(t, j, i) \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ tel que $Z_{S_j, S_i}^t(M) \cap E^- = \emptyset$. De même, pour tout point $M \in E^-$, il existe un et un seul $(t, j, i) \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ tel que $Z_{S_j, S_i}^t(M) \cap E^+ = \emptyset$.*

Démonstration. Supposons que M est un point de E^+ . Pour toute paire de sources ponctuelles S_i et S_j , si pour tout t on a $Z_{S_j, S_i}^t(M) \cap E^- \neq \emptyset$, alors la Q-convexité de F^- , implique

que $M \in F^-$ ce qui est en contradiction avec $M \in E^+$. Ainsi, pour tout $S_i, S_j \in \mathfrak{p}$, il existe t tel que $Z_{S_j, S_i}^t(M) \cap E^- = \emptyset$. Soit (t, j, i) le triplet tel que $Z_{S_j, S_i}^t(M)$ est maximal au sens de l'inclusion parmi tous les quadrants Z_{S_j, S_i}^t tels que $Z_{S_j, S_i}^t(M) \cap E^- = \emptyset$. D'après la Remarque 5.1.1, on peut supposer que $t = 0$. Supposons que $(0, j, i) \notin \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$. Il existe alors une source ponctuelle $S_r \in \mathfrak{p}$ telle que $[S_r M] \cap Z_{S_j, S_i}^0(M) = \{M\}$. Ceci revient à dire que $S_r \in (S_j S_i) \setminus [S_j, S_i]$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $S_r \in [S_j, S_i] \setminus [S_j, S_i]$ (voir la Figure 6.5). On a $Z_{S_j, S_r}^0(M) = Z_{S_j, S_i}^0(M) \cup Z_{S_i, S_r}^0(M)$. Supposons que $i_{M_r} > i_M$

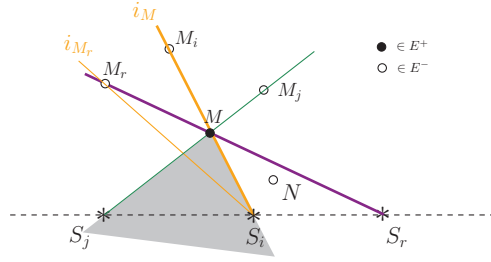


FIGURE 6.5 – Si $i_{M_r} > i_M$, alors $M \in QH_{\{S_i, S_r\}}(\{N, M_j, M_r\})$.

(voir la Figure 6.5). Alors $Z_{S_i, S_r}^0(M)$ ne peut contenir aucun point $N \in E^-$ car sinon on aurait $M \in QH_{\{S_i, S_r\}}(\{N, M_j, M_r\})$ et comme F^- est Q-convexe pour $\{S_i, S_r\}$ on aurait $M \in F^-$, ce qui est impossible. Ainsi $Z_{S_j, S_r}^0(M) \cap E^- = \emptyset$ ce qui contredit la maximalité de $Z_{S_j, S_i}^0(M)$. Donc, $(0, j, i) \notin \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ est incompatible avec $i_{M_r} > i_M$.

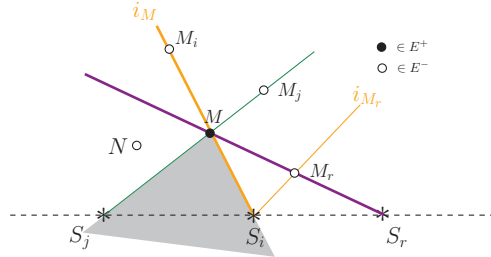


FIGURE 6.6 – Si $i_{M_r} < i_M$, $M \in QH_{\{S_i, S_r\}}(\{N, M_r, M_i\})$.

Supposons que $i_{M_r} < i_M$ (voir la Figure 6.6). On a $Z_{S_i, S_r}^3(M) = Z_{S_j, S_r}^3(M) \cup Z_{S_j, S_i}^0(M)$. $Z_{S_j, S_r}^3(M)$ ne peut contenir aucun point $N \in E^-$ car sinon on aurait $M \in QH_{\{S_i, S_r\}}(\{N, M_r, M_i\})$ et comme F^- est Q-convexe pour $\{S_i, S_r\}$ on aurait $M \in F^-$, ce qui est impossible. Donc, $Z_{S_i, S_r}^3(M) \cap E^- = \emptyset$ ce qui contredit la maximalité de $Z_{S_j, S_i}^0(M)$. Donc, $(0, j, i) \notin \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ est incompatible avec $i_{M_r} < i_M$. Par conséquent, $(0, j, i)$ est nécessairement un PSP.

Ainsi, on a prouvé l'existence de $(t, j, i) \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ tel que $Z_{S_j, S_i}^t(M) \cap E^- = \emptyset$. Il nous reste alors à prouver l'unicité d'un tel triplet. Pour ce faire, supposons qu'il existe un autre triplet différent $(t_1, k, k') \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ qui satisfait $Z_{S_k, S_{k'}}^{t_1}(M) \cap E^- = \emptyset$. $Z_{S_j, S_i}^t(M) \cup Z_{S_k, S_{k'}}^{t_1}(M)$ contient donc un rayon R_{S_r, θ_M^r} qui passe par M tel que $R_{S_r, \theta_M^r} \cap E^- = \emptyset$. Ceci est absurde

puisque $|R_{S_r, \theta_M^r} \cap E^+| = |R_{S_r, \theta_M^r} \cap E^-|$.

Le cas où $M \in E^-$ est prouvé de la même manière. \square

D'après le Lemme 6.1.3, E^+ et E^- peuvent être partitionnés de la manière suivante :

$$E^+ = \bigcup_{(t,j,i) \in \mathfrak{A}_p} E_{t,j,i}^+, \quad E^- = \bigcup_{(t,j,i) \in \mathfrak{A}_p} E_{t,j,i}^-$$

où

$$\begin{aligned} E_{t,j,i}^+ &= \{M \in E^+; Z_{S_j, S_i}^t(M) \cap E^- = \emptyset\} \\ E_{t,j,i}^- &= \{M \in E^-; Z_{S_j, S_i}^t(M) \cap E^+ = \emptyset\} \end{aligned}$$

Nous définissons maintenant une relation binaire entre les points de $E_{t,j,i}^+$ et $E_{t,j,i}^-$ qui va être utile pour la suite de la démonstration.

Définition 6.1.5. Soient deux points $A, B \in E_{t,j,i}^+$. On note $A \sim_+ B$ si il existe $N \in \mathbb{Q}^2$ tel que $A, B \in Z_{S_j, S_i}^t(N)$ et $Z_{S_j, S_i}^t(N) \cap E^- = \emptyset$.

De façon analogue, on définit une relation binaire \sim_- sur $E_{t,j,i}^-$.

On définit ainsi $\sim = \sim_+ \cup \sim_-$.

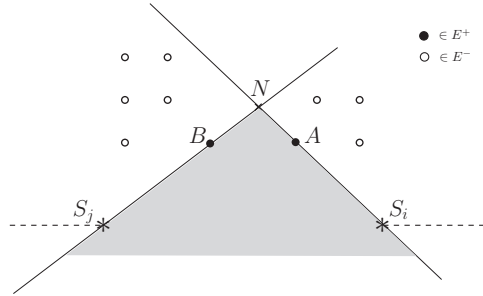


FIGURE 6.7 – $A, B \in E_{t,j,i}^+$, on a $A \sim_+ B$.

Pour vérifier si $A \sim_+ B$, il est suffisant de vérifier pour un seul point N si $Z_{S_j, S_i}^t(N) \cap E^- = \emptyset$. Par exemple, si $t = 0$, N est choisi tel que $i_N = \min(i_A, i_B)$ et $j_N = \max(j_A, j_B)$ (voir la Figure 6.7).

Lemme 6.1.4. La relation \sim est une relation d'équivalence sur $E^+ \cup E^-$.

De plus, pour toute classe d'équivalence Δ de \sim , il existe $(t, j, i) \in \mathfrak{A}_p$ et $N \in \mathbb{Q}^2$ tels que $\Delta = (E^+ \cup E^-) \cap Z_{S_j, S_i}^t(N)$.

Démonstration. Soient $A, B, C \in E_{t,j,i}^+$ trois points tels que $A \sim B$ et $B \sim C$

- \sim est réflexive : $A \sim A$
- \sim est symétrique : $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

– Il reste à prouver que \sim est transitive. Sans perte de généralité, supposons que $t = 0$ et soient

$$N_1 = \mathcal{I}(\min(i_A, i_B), \max(j_A, j_B)),$$

$$N_2 = \mathcal{I}(\min(i_B, i_C), \max(j_B, j_C)) \text{ et}$$

$$N = \mathcal{I}(\min(i_{N_1}, i_{N_2}), \max(j_{N_1}, j_{N_2})) = \mathcal{I}(\min(i_A, i_B, i_C), \max(j_A, j_B, j_C)).$$

On a $Z_{S_j, S_i}^0(N_1) \cap E^- = \emptyset$ et $Z_{S_j, S_i}^0(N_2) \cap E^- = \emptyset$. Pour prouver que $A \sim C$, il suffit de prouver que $Z_{S_j, S_i}^0(N) \cap E^- = \emptyset$ (comme $A, C \in Z_{S_j, S_i}^0(N)$). Si $Z_{S_j, S_i}^0(N_1) \subseteq Z_{S_j, S_i}^0(N_2)$ alors on a $N \in \{N_1, N_2\}$ et donc $Z_{S_j, S_i}^0(N) \cap E^- = \emptyset$. On suppose alors que $i_{N_1} > i_{N_2}$ et $j_{N_1} > j_{N_2}$ (en inversant A et C si nécessaire). Par conséquent, $\min(i_A, i_B) > \min(i_B, i_C)$ et $\max(j_A, j_B) > \max(j_B, j_C)$, ainsi $i_B > \min(i_B, i_C)$. De même, on obtient $j_A > j_C$.

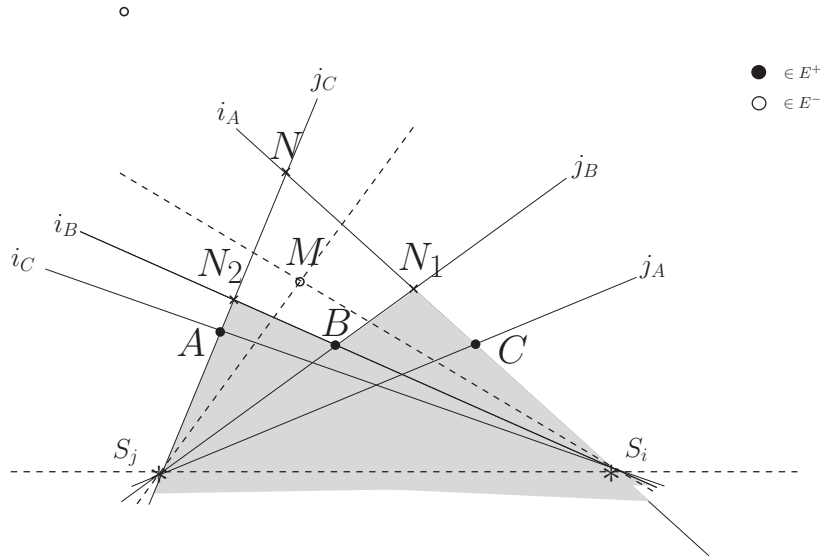


FIGURE 6.8 – si $A \sim B$ et $B \sim C$ alors $A \sim C$.

Quatre cas sont alors possibles :

$$i_A \geq i_B = i_{N_1} > i_C = i_{N_2} \text{ ou } i_B \geq i_A = i_{N_1} > i_C = i_{N_2}$$

Similairement

$$j_A = j_{N_1} > j_B = j_{N_2} \geq j_C \text{ ou } j_A = j_{N_1} > j_C = j_{N_2} \geq j_B$$

Dans tous les cas, on a $A \in Z_{S_j, S_i}^3(N_1) \cap Z_{S_j, S_i}^0(N_1)$, $B \in Z_{S_j, S_i}^0(\mathcal{I}(i_{N_1}, j_{N_2}))$, $C \in Z_{S_j, S_i}^1(N_2) \cap Z_{S_j, S_i}^0(N_2)$. Supposons que $Z_{S_j, S_i}^0(N) \cap E^- \neq \emptyset$. Quelque soit le point $M \in Z_{S_j, S_i}^0(N) \cap E^-$, on a $i_{N_1} > i_M > i_{N_2}$, d'où $B \in Z_{S_j, S_i}^0(\mathcal{I}(i_{N_1}, j_{N_2})) \subseteq Z_{S_j, S_i}^0(M)$ et $C \in Z_{S_j, S_i}^1(N_2) \subseteq Z_{S_j, S_i}^1(M)$. Considérons alors un point M tel que $(Z_{S_j, S_i}^0(M) \setminus Z_{S_j, S_i}^0(B)) \cap E^- = \{M\}$. Ainsi, $Z_{S_j, S_i}^0(M) \cap E^- = \{M\}$. D'après le

Lemme 6.1.2, on a alors nécessairement $Z_{S_j, S_i}^2(M) \cap E^+ \neq \emptyset$. Par la Q-convexité de F^+ , on aurait alors $M \in E^+$ ce qui est absurde. Ainsi, $Z_{S_j, S_i}^0(M) \cap E^- = \emptyset$ et $A \sim C$.

Considérons à présent la classe d'équivalence $\Delta \subseteq E_{t,j,i}^+$, un point $A \in \Delta$ tel que $i_A = \min_{\mathcal{I}(i,j) \in \Delta} i$ et un point $B \in \Delta$ tel que $j_B = \max_{\mathcal{I}(i,j) \in \Delta} j$. On a $A \sim B$ et donc pour $N = \mathcal{I}(i_A, j_B)$ on a $Z_{S_j, S_i}^0(N) \cap E^- = \emptyset$. construction, on a $\Delta \subseteq Z_{S_j, S_i}^0(N)$. Si $M \in E^+ \cap Z_{S_j, S_i}^0(N)$ alors $M \sim A$. Ainsi, $\Delta = Z_{S_j, S_i}^0(N) \cap (E^+ \cup E^-)$.

□

Le résultat suivant nous sera utile par la suite.

Lemme 6.1.5. *Soient $A, B \in E_{t,j,i}^+$ tels que $A \sim B$. Pour toute source ponctuelle $S_r \in \mathfrak{p}$ et tout point $M \in E^+$ tels que $r_A \leq r_M \leq r_B$, on a $M \in Z_{S_j, S_i}^t(M_r)$ et $M \sim A \sim B$.*

Démonstration. Supposons que $t = 0$ (ainsi on a nécessairement $S_r \in [S_j, S_i]$). Soit $N = \mathcal{I}(\min(i_A, i_B), \max(j_A, j_B))$. Si $M \in Z_{S_j, S_i}^0(N)$, alors $M \sim A \sim B$. Supposons alors que $M \notin Z_{S_j, S_i}^0(N)$ i.e. $i_M < \min(i_A, i_B)$ et/ou $j_M > \max(j_A, j_B)$ (voir la Figure 6.9).

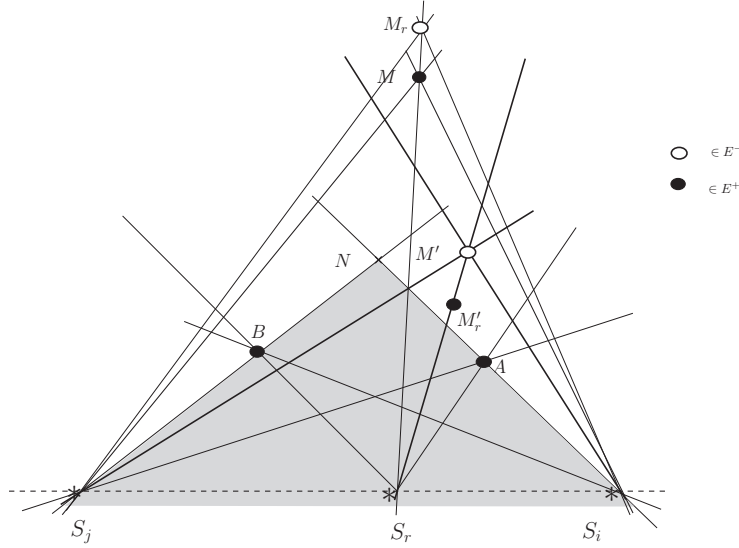


FIGURE 6.9 – Le point M n'appartient pas au quadrant $Z_{S_j, S_i}^0(N)$.

Si $i_{M_r} \geq i_M$ alors $M_r \in QH_{S_i, S_r}(\{M, A, B\})$. On a donc nécessairement $i_{M_r} < i_M$. Or, comme on a $S_r \in [S_j, S_i]$, on a nécessairement $j_{M_r} > j_M$. Par conséquent, on a bien $M \in Z_{S_j, S_i}^0(M_r)$.

Montrons à présent la deuxième partie du lemme. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $r_A \leq r_M \leq r_B$ (en inversant A et B si nécessaire). Supposons que $Z_{S_j, S_i}^0(M) \cap E^- \neq \emptyset$ et soit $M' \in Z_{S_j, S_i}^0(M) \cap E^-$ tel que $Z_{S_j, S_i}^0(M') \cap E^- = \{M'\}$. Ceci est équivalent à $Z_{S_j, S_r}^0(M') \cap E^- = \{M'\}$ et $Z_{S_r, S_i}^0(M') \cap E^- = \{M'\}$. Le point $M'_r \in E^+$

vérifie $r_B \leq r_{M_r}$, donc, d'après la première partie de ce lemme, on a $M'_r \in Z_{S_j, S_i}^0(M')$. On peut séparer deux cas :

- Si $r_M \geq r_{M'}$, alors comme $j_M \geq j_{M'}$ on a $M \in Z_{S_j, S_r}^3(M') \cap E^+$. De plus on a $M'_r \in Z_{S_j, S_r}^0(M') \cap E^+$ et $M'_r \in Z_{S_j, S_r}^1(M') \cap E^+$. Ainsi, on a nécessairement $Z_{S_j, S_r}^2(M') \cap E^+ = \emptyset$ sinon on aurait $M' \in E^+$. Or, ceci est impossible d'après le Lemme 6.1.2.
- Si $r_M \leq r_{M'}$, alors comme $i_M \leq i_{M'}$ on a $M \in Z_{S_r, S_i}^1(M') \cap E^+$. De plus on a $M'_r \in Z_{S_r, S_i}^0(M') \cap E^+$ et $M'_r \in Z_{S_r, S_i}^3(M') \cap E^+$. Ainsi, on a nécessairement $Z_{S_r, S_i}^2(M') \cap E^+ = \emptyset$ sinon on aurait $M' \in E^+$. Or, ceci est impossible d'après le Lemme 6.1.2.

D'où $Z_{S_j, S_i}^0(M) \cap E^- = \emptyset$.

Si $i_M < \min(i_A, i_B)$, alors $A \in Z_{S_j, S_i}^0(M)$ donc $A \sim M$ et par conséquent on a bien $M \sim A \sim B$.

Si $i_M > \min(j_A, j_B)$, alors $B \in Z_{S_j, S_i}^0(M)$ donc $B \sim M$ et par conséquent on a bien $M \sim A \sim B$. \square

Lemme 6.1.6. *Soit $S_r \in \mathfrak{p}$. Si $A \sim B$, alors $A_r \sim B_r$.*

Démonstration. On notera $A' = A_r$ et $B' = B_r$. On a alors $A', B' \in E^-$ et on peut supposer $A, B \in E_{0, j, i}^+$. Comme Z_{S_j, S_i}^0 est un PSP, on a nécessairement $S_r \in [S_j S_i]$. Soit $N = \mathcal{I}(\min(i_A, i_B), \max(j_A, j_B))$. On peut supposer que $r_{A'} = r_A \leq r_N \leq r_{B'} = r_B$ (en inversant B et A si nécessaire). Il existe t_1 et t_2 tel que $Z_{S_j, S_i}^{t_1}(A') \cap E^+ = \emptyset$ et $Z_{S_j, S_i}^{t_2}(B') \cap E^+ = \emptyset$. On a nécessairement $t_1 \neq 0$ et $t_2 \neq 0$ puisque $A \in Z_{S_j, S_i}^0(A') \cap E^+$ et $B \in Z_{S_j, S_i}^0(B') \cap E^+$. Nous distinguons alors neuf cas possibles :

1. $t_1 = 1, t_2 = 1$: Dans ce cas $Z_{S_j, S_i}^1(A') \cap E^+ = \emptyset$ et donc $A'_i \in Z_{S_j, S_i}^2(A') \cap Z_{S_j, S_i}^3(A')$. Supposons que $Z_{S_r, S_i}^1(A') \cap E^+ = \emptyset$ et soit $M \in Z_{S_r, S_i}^1(A') \cap E^+$. On a alors $A' \in QH_{S_r, S_i}(\{A, A'_i, M\})$, et donc $A' \in E^+$, ce qui est impossible. Donc $Z_{S_r, S_i}^1(A') \cap E^+ = \emptyset$. De la même manière, on montre que $Z_{S_r, S_i}^1(B') \cap E^+ = \emptyset$:
 - Si $i_{B'} \geq i_{A'}$, alors comme E^+ vérifie la condition (\star) , on a $\Rightarrow Z_{S_r, S_i}^1(A') \cap E^+ \subseteq Z_{S_r, S_i}^1(B') \cap E^+$. Par conséquent, on a bien $\Rightarrow A' \sim B'$.
 - Si $i_{B'} \leq i_{A'}$ (voir la Figure 6.10), on distingue deux sous-cas.

Dans le cas où $[S_i A']$ et $[S_r B']$ intersectent, soit $N' = \mathcal{I}(i_{A'}, r_{B'})$. On suppose que $Z_{S_r, S_i}^1(N') \cap E^+ \neq \emptyset$. Soit un point $M \in Z_{S_r, S_i}^1(N') \cap E^+$ tel que $Z_{S_r, S_i}^1(N') \cap E^+ = \{M\}$. On a $r_B \leq r_M \leq r_A$, alors d'après le Lemme 6.1.5, on a $M \in Z_{S_j, S_i}^0(M_r)$. Ainsi on a $M_r \in (Z_{S_r, S_i}^1(M) \cap Z_{S_r, S_i}^2(M)) \cap E^-$. De plus, on a $A' \in Z_{S_r, S_i}^0(M) \cap E^-$. Ainsi, on a nécessairement $Z_{S_r, S_i}^3(M) \cap E^- = \emptyset$ sinon on aurait $M \in E^-$ par Q-convexité de E^- . On a ainsi $Z_{S_r, S_i}^1(N') \cap E^+ = \{M\}$ et $Z_{S_r, S_i}^3(M) \cap E^- = \emptyset$ ce

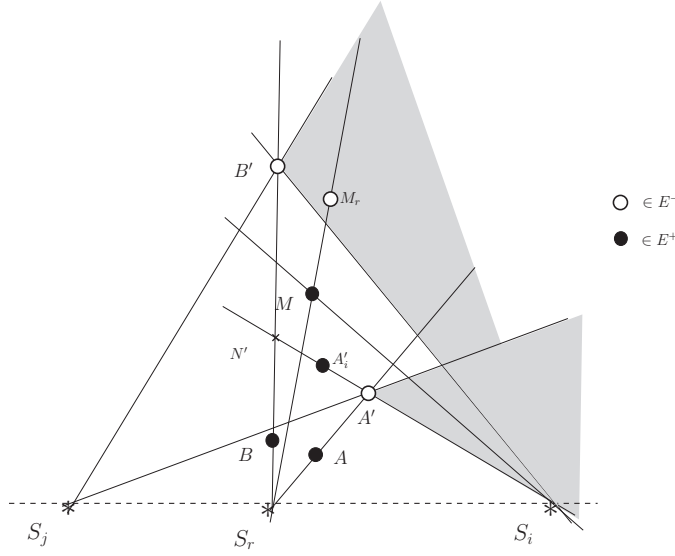


FIGURE 6.10 – $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ et $i_{B'} \leq i_{A'}$.

qui est impossible d'après le Lemme 6.1.2.

Si $[S_i A']$ et $[S_r B']$ sont parallèles, on suppose que $j_A \geq j_B$ (en inversant A et B si nécessaire) alors on a $Z_{S_r, S_i}^1(A') \cap E^+ \subseteq Z_{S_r, S_i}^1(B') \cap E^+$. On a en plus $Z_{S_r, S_i}^1(B') \subseteq Z_{S_j, S_i}^1(B')$ où $Z_{S_j, S_i}^1(B') \cap E^+ = \emptyset$ alors $Z_{S_r, S_i}^1(B') \cap E^+ = \emptyset$ et donc $A' \sim B'$.

2. $t_1 = 1$, $t_2 = 2$: Dans ce cas, on a $Z_{S_j, S_i}^1(A') \cap E^+ = \emptyset$ et $Z_{S_r, S_i}^2(B') \cap E^+ = \emptyset$. Ainsi, on a nécessairement $Z_{S_r, S_i}^1(A') \cap E^+ = \emptyset$ (sinon $A' \in QH_{S_r, S_i}(\{A, A_i, M\})$).
 - Si $i_{B'} \geq i_{A'}$ alors d'après le lemme 6.1.5, $i_{(A'_i)_r} \leq i_{A'_i}$ et donc $A'_i \in QH_{S_r, S_i}(\{A', B', (A'_i)_r\})$ ce qui est impossible.
 - Si $i_{B'} < i_{A'}$, de manière similaire, on a $B'_i \in QH_{S_r, S_i}(\{B', A', (B'_i)_r\})$ ce qui est impossible.
3. $t_1 = 1$, $t_2 = 3$: on a dans ce cas $Z_{S_j, S_i}^3(B') \cap E^+ = \emptyset$, et $Z_{S_j, S_i}^1(A') \cap E^+ = \emptyset$, par conséquent on a $B'_i \in [B' S_i]$ et on a $Z_{S_r, S_i}^2(B') \cap E^+ = \emptyset$. A'_i vérifie la condition du lemmme 6.1.5 pour A et B d'où $B'_j \in Z_{S_j, S_i}^0((B'_i)_r)$ et $i_{(B'_i)_r} \geq i_{B'_i}$. De manière similaire, $i_{(A'_i)_r} \leq i_{A'_i}$.
 - Si $i_{A'} \geq i_{B'}$ alors $B'_i \in QH_{S_r, S_i}(\{A', B', (B'_i)_r\})$ ce qui est impossible.
 - Si $i_{A'} \leq i_{B'}$ alors $A'_i \in QH_{S_r, S_i}(\{A', B', (A'_i)_r\})$ ce qui est impossible.
4. $t_1 = 2$, $t_2 = 1$:

On a $Z_{S_j, S_i}^1(B') \cap E^+ = \emptyset$ donc $B'_i \in [S_i B'] \setminus [S_i B']$. Par conséquent $B \in Z_{S_r, S_i}^0(B') \cap E^+$, $B \in Z_{S_r, S_i}^3(B') \cap E^+$ et $B'_i \in Z_{S_r, S_i}^2(B')$. On a alors nécessairement $Z_{S_r, S_i}^1(B') \cap E^+ = \emptyset$.

 - Si $i_{A'} \geq i_{B'}$, alors $B' \in Z_{S_r, S_i}^1(A')$ car sinon on aurait $B' \in E^+$. Par la propriété d'inclusion des quadrants (Proposition 5.2.2) on a alors $Z_{S_r, S_i}^1(B') \cap E^+ \subseteq$

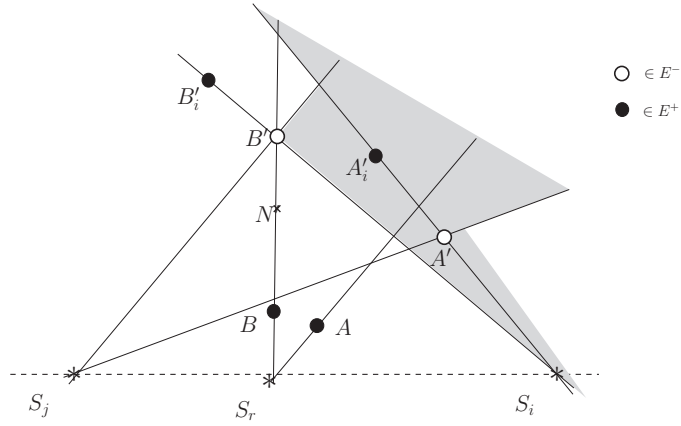


FIGURE 6.11 – $t_1 = 2, t_2 = 1$.

$Z_{S_r, S_i}^1(A') \cap E^+, A' \sim B'$.

– De même, si $i_{B'} \geq i_{A'}$, on a $A' \in Z_{S_r, S_i}^1(B')$ et donc, $A' \sim B'$.

5. $t_1 = 2, t_2 = 2$: On distingue ici trois situations :

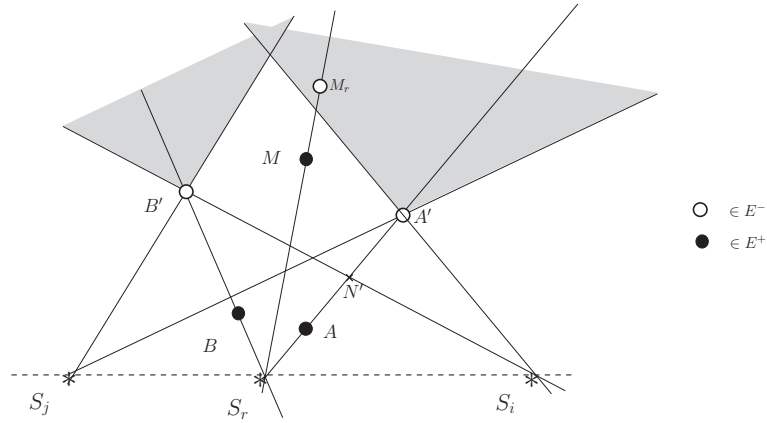


FIGURE 6.12 – $t_1 = 2, t_2 = 2$ et $i_{A'} \leq i_{B'}$.

– Si $i_{A'} \geq i_{B'}$ et comme on a $r_A = r_{A'} \leq r_B = r_{B'}$ alors on a $B' \in Z_{S_j, S_i}^2(A')$. Par la propriété d'inclusion de quadrants (Proposition 5.2.2) on a $Z_{S_j, S_i}^2(B') \subseteq Z_{S_j, S_i}^2(A')$ et donc $A' \sim B'$.

– Si $i_{A'} \leq i_{B'}$ (voir l'illustration dans la Figure 6.12) alors on considère le point $N' = \mathcal{I}(i_{B'}, r_{A'})$. Il suffit de montrer que $Z_{S_r, S_i}^2(N') \cap E^+ = \emptyset$. Supposons que $Z_{S_r, S_i}^2(N') \cap E^+ \neq \emptyset$ et soit $M \in Z_{S_r, S_i}^2(N') \cap E^+$ tel que $Z_{S_r, S_i}^2(M) \cap E^+ = \{M\}$. Le point M vérifie les conditions du Lemme 6.1.5 et donc $M \in Z_{S_j, S_i}^0(M_r)$. Ainsi, si $Z_{S_r, S_i}^0(M) \neq \emptyset$ alors on aurait $M \in E^-$ ce qui est absurde. Donc, $Z_{S_r, S_i}^0(M) = \emptyset$ ce qui est aussi impossible d'après le Lemme 6.1.2. D'où, $Z_{S_r, S_i}^2(N') \cap E^+ = \emptyset$.

6. $t_1 = 2, t_2 = 3$: de même que pour $(t_1 = 1, t_2 = 2)$ en remplaçant S_i par S_j .

7. $t_1 = 3, t_2 = 1$: on a $Z_{S_j, S_r}^2(A') \cap E^+ \subseteq Z_{S_j, S_i}^2(A') \cap E^+$, et $Z_{S_r, S_i}^1(B') \cap E^+ \subseteq Z_{S_j, S_i}^1(B') \cap E^+$. Par conséquent, on a $Z_{S_j, S_r}^2(A') \cap E^+ = \emptyset$ et $Z_{S_r, S_i}^1(B') \cap E^+ = \emptyset$.

- Si $i_{A'} \leq i_{B'}$ alors $A' \in Z_{S_r, S_i}^1(B')$ et donc $A' \sim B'$.
- Si $i_{A'} \geq i_{B'}$ alors $B' \in Z_{S_j, S_r}^2(A')$ et donc $A' \sim B'$.

8. $t_1 = 3, t_2 = 2$: de même que pour $(t_1 = 2, t_2 = 1)$

9. $t_1 = 3, t_2 = 3$: de même que pour $(t_1 = 1, t_2 = 1)$

□

Pour $(t, j, i) \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$, on définit $\mathcal{C}_{(t,j,i)}^+$ (respectivement $\mathcal{C}_{(t,j,i)}^-$) comme l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation \sim sur $E_{t,j,i}^+$ (respectivement $E_{t,j,i}^-$) et $\mathcal{C}_{(t,j,i)} = \mathcal{C}_{(t,j,i)}^+ \cup \mathcal{C}_{(t,j,i)}^-$. Ainsi, les ensembles des classes d'équivalence sur E^+, E^- et $E^+ \cup E^-$ sont :

$$\mathcal{C}^+ = \bigcup_{(t,j,i) \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}} \mathcal{C}_{(t,j,i)}^+, \quad \mathcal{C}^- = \bigcup_{(t,j,i) \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}} \mathcal{C}_{(t,j,i)}^-,$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-.$$

On a alors

$$\mathcal{C} = \bigcup_{(t,j,i) \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}} \mathcal{C}_{(t,j,i)}.$$

Le lemme précédent montre que pour toute classe d'équivalence $C \in \mathcal{C}^+$ et pour tout $S_r \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$, il existe une autre classe d'équivalence, notée $(C)_r \in \mathcal{C}^-$ telle que $X_{S_r} C = X_{S_r} (C)_r$. La fonction $C \mapsto (C)_r$ est une bijection de \mathcal{C}^+ vers \mathcal{C}^- . La fonction inverse (notée aussi $C \mapsto C_r$) est définie de la même manière. En particulier, $|\mathcal{C}|$ est pair.

On associe maintenant un graphe structurel à l'ensemble \mathcal{C} .

Définition 6.1.6. Pour une source $S_r \in \mathfrak{p}$, on définit la relation \prec_r comme suit :

Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. $C_1 \prec_r C_2$ si pour tout $M_1 \in C_1$ et $M_2 \in C_2$, on a $r_{M_1} < r_{M_2}$.

On définit également la relation $\succ_r : C_1 \succ_r C_2 \Leftrightarrow C_2 \prec_r C_1$.

Lemme 6.1.7. Pour tout $(t, j, i) \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{C}_{(t,j,i)}$ contient au moins une classe d'équivalence.

Démonstration. On peut prendre $t = 0$. Soit $M \in E^+ \cup E^-$ tel que $j_M + i_M$ est maximal (voir la construction dans la démonstration de la Proposition 5.2.7). On a alors $Z_{S_0 S_{n-1}}^0 \cap E^+ = \emptyset$ ou $Z_{S_0 S_{n-1}}^0 \cap E^- = \emptyset$. La classe qui contient un tel point M est dans $\mathcal{C}_{(0,0,n-1)}$. □

Lemme 6.1.8. Pour tout $(t, j, i) \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ et $S_r \in \mathfrak{p}$, la relation \prec_r est une relation d'ordre total sur $\mathcal{C}_{(t,j,i)} = \mathcal{C}_{(t,j,i)}^+ \cup \mathcal{C}_{(t,j,i)}^-$. De plus, le graphe non orienté associé à $(\mathcal{C}_{(t,j,i)}, \prec_r)$ est une chaîne qui ne dépend pas de r .

Démonstration. On suppose que $t = 0$. Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{(0,j,i)}$ avec $C_1 \neq C_2$. D'après le lemme 6.1.4, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{Q}^2$ tels que $C_1 = (E^+ \cup E^-) \cap Z_{S_j, S_i}^0(N_1)$ et $C_2 = (E^+ \cup E^-) \cap Z_{S_j, S_i}^0(N_2)$. Ainsi, si $i_{N_1} \geq i_{N_2}$ alors on a nécessairement $j_{N_2} > j_{N_1}$ et donc

$$C_1 \prec_j C_2 \text{ et } C_1 \prec_i C_2$$

Ou

$$C_1 \succ_j C_2 \text{ et } C_1 \succ_i C_2.$$

Comme pour toute source ponctuelle $S_r \in \mathfrak{p} \setminus \{S_j, S_i\}$ on a $S_r \in [S_j S_i]$ (voir le graphe Table 6.1). Pour $k = i, j$ si $k_{N_1} \geq k_{N_2}$ alors on a aussi $r_{N_1} \geq r_{N_2}$. Donc, on a soit $C_1 \prec_r C_2$ ou $C_1 \succ_r C_2$. Ainsi, \prec_r est une relation d'ordre total.

De plus, on a pour tout $S_r \in \mathfrak{p} \setminus \{S_j, S_i\}$:

$$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{(0,j,i)}, C_1 \prec_j C_2 \Leftrightarrow C_1 \prec_i C_2 \Leftrightarrow C_1 \prec_r C_2$$

Ainsi, pour les classes de $\mathcal{C}_{(0,j,i)}$, on a le même graphe indépendamment de la source considérée, c'est à dire $\prec_j = \prec_r, \forall S_r \in \mathfrak{p}$.

En fait, pour les classes de $\mathcal{C}_{(2,j,i)}$, on a aussi $\prec_j = \prec_r, \forall S_r \in \mathfrak{p}$.

Pour $t = 1, 3$

$$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{(t,j,i)}, C_1 \prec_j C_2 \Leftrightarrow C_2 \prec_i C_1 \Leftrightarrow C_1 \prec_r C_2$$

ou

$$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{(t,j,i)}, C_1 \prec_j C_2 \Leftrightarrow C_2 \prec_i C_1 \Leftrightarrow C_2 \prec_r C_1$$

le graphe correspondant à $C_1 \neq C_2$ et $\nexists C$ tel que $C_1 \prec_r C \prec_r C_2$ ou $C_2 \prec_r C \prec_r C_1$ ne dépend donc pas de S_r . \square

Lemme 6.1.9. *Soit S_r une source ponctuelle de \mathfrak{p} et $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. On a $C_1 \prec_r C_2$ ou $C_2 \prec_r C_1$ ou $C_1 = C_2$ ou $(C_1)_r = C_2$.*

Démonstration. Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}^+$ tels que $C_1 \neq C_2$, $M \in C_1$ et $N \in C_2$. D'après le Lemme 6.1.5, on a nécessairement $r_N \notin [\min_{P \in C_1} r_P, \max_{P \in C_1} r_P]$ et $r_M \notin [\min_{P \in C_2} r_P, \max_{P \in C_2} r_P]$. On a alors soit $r_M < r_N$ soit $r_N < r_M$, ce qui implique que $C_1 \prec_r C_2$ ou $C_2 \prec_r C_1$. En considérant $(C_1)_r$ ou $(C_2)_r$, les cas $C_1 \in \mathcal{C}^-$ ou $C_2 \in \mathcal{C}^-$ sont ramenés au cas $C_1, C_2 \in \mathcal{C}^+$. \square

Nous définissons à présent la consécuité inter classes de \mathcal{C} .

Définition 6.1.7. Deux classes d'équivalence distinctes $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ sont dites consécutives (notées $C_1 \text{ CONSC}_2$) si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{(t,j,i)}$ et $\nexists C \in \mathcal{C}_{(t,j,i)}$ tel que $C_1 \prec_j C \prec_j C_2$ ou $C_2 \prec_j C \prec_j C_1$;
2. $C_1 \in \mathcal{C}_{(t_1,j,i)}$, $C_2 \in \mathcal{C}_{(t_2,j,r)}$, $C_1 = \min_{\prec_j} \mathcal{C}_{(t_1,j,i)}$, $C_2 = \min_{\prec_j} \mathcal{C}_{(t_2,j,r)}$ et pour un point M donné on a $Z_{S_j S_i}^{t_1}(M) \cup Z_{S_j S_r}^{t_2}(M) = \mathcal{D}(R_{\theta_M^j})$;
3. $C_1 \in \mathcal{C}_{(t_1,j,i)}$, $C_2 \in \mathcal{C}_{(t_2,j,r)}$, $C_1 = \max_{\prec_j} \mathcal{C}_{(t_1,j,i)}$, $C_2 = \max_{\prec_j} \mathcal{C}_{(t_2,j,r)}$ et pour un point M donné on a $Z_{S_j S_i}^{t_1}(M) \cup Z_{S_j S_r}^{t_2}(M) = \mathcal{G}(R_{\theta_M^j})$.

Lemme 6.1.10. Soient C_1 et C_2 deux classes d'équivalence consécutives $C_1 \text{CONSC}_2$ par la deuxième propriété de la définition, c'est à dire

$$C_1 \in \mathcal{C}_{(t_1,j,i)}, \quad C_2 \in \mathcal{C}_{(t_2,j,r)}$$

et

$$C_1 = \min_{\prec_0} \mathcal{C}_{(t_1,j,i)}, \quad C_2 = \min_{\prec_0} \mathcal{C}_{(t_2,j,r)}$$

et pour un point M donné on a $Z_{S_j S_i}^{t_1}(M) \cup Z_{S_j S_r}^{t_2}(M) = \mathcal{D}(R_{\theta_M^j})$;

Alors on a $C_1 = (C_2)_j$ et pour toute autre classe $C \in \mathcal{C}$ on a $C_1 \prec_j C$ et $C_2 \prec_j C$.

Démonstration. Soit $M \in E^+ \cup E^-$ tel que j_M est minimal. Il existe alors $C \in \mathcal{C}_{(t_1,j,i)}$ ou $C \in \mathcal{C}_{(t_2,j,r)}$ tel que $M \in C$. Ainsi $M \in C_1$ ou $M \in C_2$.

On a j_{M_j} est minimal, donc on a aussi $M_j \in C_1$ ou $M_j \in C_2$. Donc, si $M \in C_1$ alors $M_j \in C_2$ et vice versa. Par conséquent, d'après le Lemme 6.1.9, on a $C_1 = (C_2)_j$. \square

D'après le Lemme 6.1.7 et le Lemme 6.1.8 et le caractère cyclique du graphe $G(\mathfrak{A}_p)$ (voir le graphe Table 6.1), le graphe $(\mathcal{C}, \text{CONS})$ est cyclique. Posons $m = |\mathcal{C}|$, on a alors alors $\mathcal{C} = \{C_k, k \in \mathbb{F}_m\}$ tel que $C_k \text{CONSC}_{k+1}$.

Rappelons que m est pair.

Lemme 6.1.11. Pour toute source ponctuelle $S_r \in \mathfrak{p}$, il existe $s \in \mathbb{F}_m$ tel que

$$\begin{aligned} C_{s-1} \prec_r C_{s-2} \prec_r \dots \prec_r C_{s-\frac{m}{2}} \\ C_s \prec_r C_{s+1} \prec_r \dots \prec_r C_{s+\frac{m}{2}-1} \end{aligned}$$

et $C_s = (C_{s-1})_r$, $C_{s+1} = (C_{s-2})_r, \dots$, $C_{s+\frac{m}{2}-1} = (C_{s-\frac{m}{2}})_r$

Démonstration. Supposons que $G(\mathfrak{A}_p)$ est de la forme suivante

$$\begin{array}{ccc}
(3, 0, 1) & - & (2, 0, n-1) \\
| & & | \\
. & & (1, n-2, n-1) \\
| & & | \\
. & & (1, n-3, n-2) \\
| & & | \\
. & & . \\
(3, n-3, n-2) & . & . \\
| & & | \\
(3, n-2, n-1) & . & . \\
| & & | \\
(0, 0, n-1) & - & (1, 0, 1)
\end{array}$$

Soit $S_r = S_0$. Soient $D = \min_{\prec_0} \mathcal{C}_{(0,0,n-1)}$ et $D' = \min_{\prec_0} \mathcal{C}_{(1,0,1)}$ deux classes consécutives. D'après 6.1.10. Il existe s tel que $\{C_{s-1}, C_s\} = \{D, D'\}$ et pour tout C on a $C_s \prec_0 C$ et $C_{s-1} \prec_0 C$. Posons par exemple $D = C_{s-1}$ et $D' = C_s$.

Pour tout $j \geq 1$, on a $S_j \in [S_0, S_{j+1}]$. Soit $C_{s_1} = \max_{\prec_{n-1}} \mathcal{C}_{(0,0,n-1)}$ et $C_{s_1+1} = \max_{\prec_{n-1}} \mathcal{C}_{(3,n-2,n-1)}$. On a alors, d'après le Lemme 6.1.10, $C_{s_1+1} = (C_{s_1})_{n-1}$. Pour un point $M \in C_{s_1}$, on a $M_{n-1} \in C_{s_1+1}$. Donc, on a nécessairement $0_M < 0_{M_{n-1}}$ (sinon $Z_{S_{n-2}S_{n-1}}^3(M_{n-1})$). D'où, $C_{s_1} \prec_0 C_{s_1+1}$.

Plus généralement, si $C_{s_k} = \max_{\prec_{j+1}} \mathcal{C}_{(3,j,j+1)}$ et $C_{s_k+1} = \max_{\prec_{j+1}} \mathcal{C}_{(3,j+1,j+2)}$ alors $(C_{s_k})_{j+1} = C_{s_k+1}$ et si $M \in C_{s_k}$ alors $0_M < 0_{M_{j+1}}$, donc $C_{s_k} \prec_0 C_{s_k+1}$. Il existe alors s' tel que

$$C_{s'} = \max_{\prec_0} \mathcal{C}_{(3,0,1)} \text{ et } C_s \prec_0 C_{s+1} \prec_0 \dots \prec_0 C_{s'}$$

De la même manière, on montre qu'il existe s'' tel que

$$C_{s''} = \max_{\prec_0} \mathcal{C}_{(2,0,n-1)} \text{ et } C_{s-1} \prec_0 C_{s-2} \prec_0 \dots \prec_0 C_{s''}$$

On a $s'' = (s' + 1) \bmod m$ et $s' = s + \frac{m}{2} - 1$ donc $s'' = s - \frac{m}{2}$.

Soit maintenant k tel que $0 \leq k \leq \frac{m}{2}$. Supposons que $C_{s+k} \prec_0 C_{s-1-k}$. On a alors

$$C_{s+k} \prec_0 C_{s+k+1} \prec_0 \dots C_{s'} \prec_0 C_{s-1-k}.$$

Or $(C_{s'})_0 = C_{s'}$, $C_{s-1-k} \prec_0 C_{s'}$ ce qui est absurde. Comme $C_{s+k} \neq C_{s-1-k}$, alors d'après le Lemme 6.1.9, on a bien $(C_{s+k})_0 = C_{s-1-k}$. \square

Preuve du Théorème 6.1.1

Soit $(C_k)_{k \in \mathbb{F}_m}$ la suite des classes d'équivalence obtenue en utilisant les Lemmes 6.1.2, 6.1.3, 6.1.4, 6.1.5, 6.1.6, 6.1.7, 6.1.8, 6.1.9, 6.1.10 et 6.1.11.

Le barycentre de chaque classe C_k est

$$A_k = \frac{1}{|C_k|} \sum_{M \in C_k} M$$

On a pour une source S_r

$$r_{(A_k)} = \frac{1}{|C_k|} \sum_{M \in C_k} r_M.$$

Si $C_k \prec_r C_l$, alors $r_{A_k} < r_{A_l}$ et si $C_k = (C_l)_r$ alors $r_{A_k} = r_{A_l}$.

On déduit du lemme 6.1.11, que la séquence $(A_k)_{k \in \mathbb{F}_m}$ est une \mathfrak{p} -séquence. \square

Rappelons les deux propriétés (1) et (2) :

1. Un ensemble de sources ponctuelles colinéaires \mathfrak{p} ne détermine pas la classe des ensembles convexes
2. Un ensemble de sources ponctuelles colinéaires \mathfrak{p} ne détermine pas la classe des ensembles Q-convexes

Nous avons montré que (2) implique qu'il existe une \mathfrak{p} -séquence. Pour montrer que (2) \Rightarrow (1), nous avons besoin de la conjecture suivante et du Théorème 6.1.12 (prouvé dans [DGP06], voir ci dessous).

Conjecture 1. Soit \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles colinéaires. Si il existe une \mathfrak{p} -séquence alors il existe un \mathfrak{p} -polygone.

Théorème 6.1.12. Soit \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles de \mathbb{Z}^2 . S'il existe un \mathfrak{p} -polygone $Q \subset \mathbb{Z}^2$, alors il existe deux ensembles convexes distincts $K_1, K_2 \subset \mathbb{Z}^2$ ayant les mêmes projections par les sources de \mathfrak{p} .

Si la Conjecture 1 est vraie, alors on a montré que les conditions de l'unicité de la reconstruction d'ensemble par des sources ponctuelles colinéaires sont les mêmes pour les ensembles convexes et Q-convexes.

6.2 Reconstruction d'ensembles convexes par la Q-convexité

D'après les résultats présentés dans la section précédente, si la Conjecture 1 est vraie, alors les conditions nécessaires et suffisantes pour garantir l'unicité de reconstruction des ensembles convexes et les ensembles Q-convexes sont les mêmes. En d'autres termes, si l'ensemble projeté est un ensemble convexe et si ces conditions sont vérifiées, l'algorithme de reconstruction que nous avons présenté reconstruira la solution unique qui est l'ensemble convexe de départ.

On définit le *birapport* $\langle S_1, S_2, S_3, S_4 \rangle$ de quatre points S_k , $k = 1, \dots, 4$ sur une droite orientée L munie d'une origine comme le rapport suivant :

$$\langle S_1, S_2, S_3, S_4 \rangle = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

où les x_k sont les coordonnées des points S_k , $k = 1, \dots, 4$ relativement à la droite orientée L munie d'une origine.

Remarquons que l'ordre des sources affecte le birapport, par exemple $\langle S_1, S_2, S_3, S_4 \rangle$ n'est pas nécessairement égal à $\langle S_3, S_2, S_1, S_4 \rangle$. Il y a donc 24 valeurs possibles pour le birapport selon l'ordre des sources.

Le théorème suivant, prouvé dans [DGP06], donne des conditions nécessaires et suffisantes sur des sources ponctuelles colinéaires se situant sur une droite L pour garantir l'unicité de la reconstruction tomographique d'un ensemble convexe discret n'intersectant pas L .

Théorème 6.2.1. *Soit \mathfrak{p} un ensemble de sources ponctuelles de \mathbb{Z}^2 sur une droite L . Les ensembles convexes de \mathbb{Z}^2 n'intersectant pas L sont déterminés par leurs projections relativement à \mathfrak{p} si*

1. $|\mathfrak{p}| \geq 7$, ou
2. $|\mathfrak{p}| = 4$ et le birapport des quatre sources de \mathfrak{p} calculé dans tous les ordres possibles des sources est différent de 2, 3, ou 4.

D'autre part, il est possible de trouver un ensemble $|\mathfrak{p}|$ de 6 sources tel qu'il existe deux ensembles convexes discrets distincts ayant des enveloppes convexes n'intersectant pas L et les mêmes projections relativement à \mathfrak{p} .

Le même problème de reconstruction présenté dans la Section 5.4 est posé pour un ensemble convexe avec un ensemble de quatre sources ponctuelles colinéaires sur une droite

L n'intersectant par l'ensemble convexe. Quand il n'existe par d'ordre entre les sources tel que leur birapport est égal à 2,3, ou 4, **Algorithme 2** (c.f. Chapitre 5) permet de reconstruire l'ensemble convexe recherché.

Soit n_k le nombre de tous les rayons issus de la $k^{\text{ème}}$ source ayant des projections non nulles. Posons $n_{max} = \max_k(n_k)$. Les opérations de complétion sont alors exécutées en un temps $O(n_{max}^2)$ comme montré dans l'annexe C.

Si la Conjecture 1 est vraie, alors on a la proposition suivante.

Proposition 6.2.2. *Soit \mathfrak{p} un ensemble de quatre sources ponctuelles colinéaires sur une droite L tel que le birapport des quatre sources de \mathfrak{p} calculé dans tous les ordres possibles des sources est différent de 2, 3, ou 4. Un ensemble convexe discret n'intersectant pas L peut être reconstruit de manière unique à partir de ses projections relativement à \mathfrak{p} en $O(n_{max}^4)$.*

Chapitre 7

Reconstruction de propriétés qualitatives d'images

Sommaire

7.1	Estimation de l'aire	106
7.1.1	Exemple	109
7.2	Approximation du périmètre	109
7.2.1	Bornes inférieures du périmètre	110
7.2.2	Borne supérieure pour le périmètre	111
7.2.3	Exemple	112

Dans les chapitres précédents, les résultats ont été démontrés dans le plan discret \mathbb{Z} . Il est facile de voir que ces résultats restent vrais si on prend comme plan discret $D_r = r\mathbb{Z}$ au lieu de \mathbb{Z} pour un nombre r réel strictement positif. Nous considérerons alors dans ce chapitre pour un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ donné, son discrétisé $\mathcal{E}_r = \Lambda_r(\mathcal{E}) = r\mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{E}$.

Notre objectif dans ce chapitre, est de reconstruire, à partir des projections d'un objet, des informations le concernant sans nécessairement reconstruire l'objet en question. On s'intéresse particulièrement à la reconstruction d'information qualitative : aire et périmètre.

Étant donné un ensemble de sources ponctuelles \mathfrak{p} , le problème que nous allons donc étudier se pose pour tout $r > 0$ pour une source ponctuelle S_j donnée, de la façon suivante :

- la position de la source $(x_j, 0)$;
- un ensemble des angles $\Theta_{j,r} = \{\theta_{1,r}, \dots, \theta_{k,r}, \dots, \theta_{n,r}\}$;
- un vecteur d'entiers non nuls $\mathfrak{S}_{1r} = (s_{1,r}, \dots, s_{k,r}, \dots, s_{n,r})$.

On cherche alors à estimer l'aire ou le périmètre d'un objet \mathcal{E} tel que

$$\text{Supp}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}_r, S_1) = \Theta_{j,r}$$

et

$$(X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}_r, S_1, \theta_{1,r}), \dots, X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}_r, S_1, \theta_{k,r}), \dots, X_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}_r, S_1, \theta_{n,r})) = \mathfrak{S}_{1r}.$$

Autrement dit, on cherche à estimer l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ ou le périmètre $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ directement à partir des données correspondant aux projections des différents discrétisés.

Il y a alors deux questions qui se posent :

1. Est-il possible d'estimer directement $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ ou $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ sans passer par la reconstruction de \mathcal{E} ?
2. Combien de sources sont nécessaires pour estimer l'aire ou le périmètre ?

Nous commençons par étudier l'estimation de l'aire.

7.1 Estimation de l'aire

Considérons un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$, et son discrétisé $\mathcal{E}_r = \Lambda_r(\mathcal{E})$ pour un réel $r > 0$. Nous montrons dans cette partie qu'à partir des projections de \mathcal{E} relativement à une seule source S_1 , nous pouvons obtenir une estimation de l'aire de \mathcal{E} .

Dans $D_r = r\mathbb{Z}^2$, les données au problème sont :

- la position de la source $(x_1, 0)$;
- un ensemble des angles $\Theta_{1,r} = \{\theta_{1,r}, \dots, \theta_{k,r}, \dots, \theta_{n,r}\}$;
- un vecteur d'entiers non nuls $\mathfrak{S}_{1r} = (s_{1,r}, \dots, s_{k,r}, \dots, s_{n,r})$.

Nous allons expliquer dans ce qui suit comment obtenir une estimation de l'aire de \mathcal{E} à partir de ces données.

Rappelons que l'on a

$$|\mathcal{E}_r| = \sum_{j=1}^{n_r} s_{j,r}.$$

Pour toute la suite, nous considérons le bord $\partial(\mathcal{E}) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tel que Γ_1 et Γ_2 sont respectivement les graphes de fonctions continues notées $f_1, f_2 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ (la Figure 7.1 en illustre un exemple).

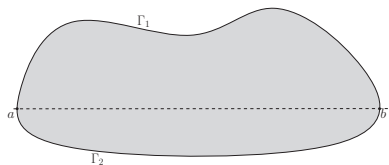


FIGURE 7.1 – $\partial(\mathcal{E}) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tel que Γ_1 et Γ_2 sont les graphes de fonctions continues.

Pour chaque point $P = (x_P, y_P)$ de $r\mathbb{Z}^2$, on considère le pixel centré en P : $W(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_P| \leq r/2; |y - y_P| \leq r/2\}$. L'aire du pixel $W(P)$ est donc r^2 . Ceci sera utilisé pour estimer l'aire de \mathcal{E}_r comme suit :

$$\mathcal{A}_r(\mathcal{E}_r) = r^2 \times \sum_{j=1}^{n_r} s_j^r$$

La proposition suivante présente un nouvel estimateur de l'aire de \mathcal{E} .

Proposition 7.1.1. *Soit un ensemble $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^2$ avec $\partial(\mathcal{E}) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tel que Γ_1 et Γ_2 sont les graphes de deux fonctions continues et $\mathcal{E}_r = \Lambda_r(\mathcal{E})$ avec $r > 0$. On a :*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{A}_r(\mathcal{E}_r) = \mathcal{A}(\mathcal{E})$$

Démonstration. Pour prouver la proposition, nous nous basons sur la théorie des intégrales de Riemann. Considérons pour cela la droite qui divise le bord de \mathcal{E} en deux parties Γ_1 et Γ_2 telles que Γ_1 et Γ_2 sont respectivement les graphes de deux fonctions continues f_1 et f_2 : $[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ (voir la Figure 7.1). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la droite qui divise le bord est l'axe des abscisses, on a alors

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx.$$

Il suffit de montrer comment estimer $\int_a^b f_1(x)$, f_2 pouvant être estimé de la même manière. Commençons par couvrir la surface en question par des rectangles ayant la même largeur qui est égale à r . Le sommet le plus à gauche a pour abscisse $a_r = \lceil \frac{a}{r} \rceil \times r$ et celui le plus à droite $b_r = \lfloor \frac{b}{r} \rfloor \times r$ comme l'illustre la Figure 7.2. Pour un rectangle i , on considère

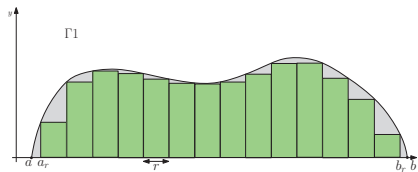


FIGURE 7.2 – La surface à estimer est recouverte par des rectangles de même largeur r .

$n_i = \lfloor \frac{f_1(a_r + i \times r)}{r} \rfloor$ (voir la Figure 7.3).

Par la propriété de l'intégrale de Riemann, on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \times \sum_i n_i \times r = \int_a^b f_1(x) dx$$

Une première erreur est induite en considérant le rectangle de longueur n_i au lieu du rectangle de longueur $f_1(a_r + i \times r)$ sur chaque rectangle de la partition. Cette erreur est

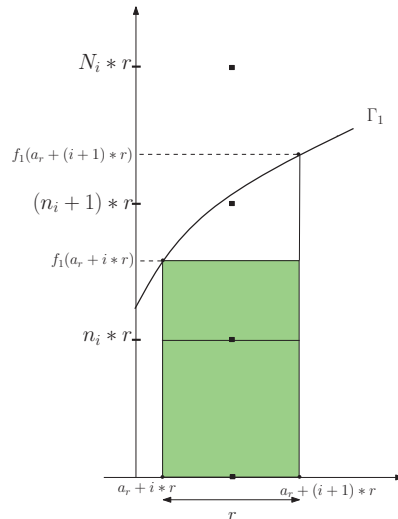


FIGURE 7.3 – L'erreur sur chaque rectangle est $r \times (f_1(a_r + i \times r) - n_i)$.

donc égale à $r \times (f_1(a_r + i \times r) - n_i \times r)$ où $(f_1(a_r + i \times r) - n_i \times r) \leq r$. En sommant sur tous les rectangles, nous obtenons une erreur qui est au plus égale à $(b - a) \times r$. Or, $\lim_{r \rightarrow 0} (b - a) \times r \rightarrow 0$.

Pour la suite rappelons le théorème de Heine sur les fonctions continues.

Théorème 7.1.2. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle borné $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Alors la fonction f est uniformément continue. Autrement dit si pour tout réel strictement positif r on pose

$$\omega(r, f) = \sup(\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b] \text{ et } |x - y| \leq r\},$$

alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega(r, f) = 0.$$

$\omega(\cdot, f)$ est appelé module de continuité de la fonction réelle f .

Une deuxième erreur est introduite en remplaçant la surface $\int_{a_r + i \times r}^{a_r + (i+1) \times r} f_1(x) dx$ par le rectangle de largeur r et de hauteur $f_1(a_r + i \times r)$ (le rectangle en vert sur la Figure 7.3). Cette erreur est majorée par $\omega(r, f_1) \times r$ qui tend vers 0 quand r tend vers 0.

Une dernière erreur est due au fait qu'une partie de la surface n'a pas été couverte lorsqu'on a commencé notre partition à a_r et qu'on s'est arrêté à b_r . Or comme f_1 est continue sur l'ensemble compact $[a, b]$, il existe $M(f_1) = \max_{x \in [a, b]} (f_1(x))$. La surface qui n'a pas été couverte est alors au plus égale à $2 \times r \times M(f_1)$ et donc l'erreur tend vers 0 quand r tend vers 0.

Ainsi, l'erreur globale qui est au plus égale à $r \times (f_1(a_r + i \times r) - n_i \times r) + \omega(r, f_1) \times r +$

$2 \times r \times M(f_1)$ tend vers 0 quand r tend vers 0. □

7.1.1 Exemple

Soit $\mathcal{E} = [1, 2]^2$ un carré de coté 1. Quelle que soit la source ponctuelle considérée $S_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}$, les projections de $\mathcal{E}_r = \Lambda_r(\mathcal{E})$, avec $r = 1/p > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$, vérifient ce qui suit :

$$|\mathcal{E}_r| = \sum_{j=1}^{n_r} s_j^r = \left(\frac{1}{r} + 1\right)^2$$

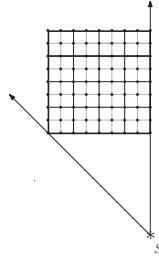


FIGURE 7.4 – Le discrétisé du carré de coté 1 à la résolution $1/r$ contient $(\frac{1}{r} + 1)^2$ points de $r - \mathbb{Z}^2$.

On a donc

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}_r) = r^2 \times \sum_{j=1}^{n_r} s_j^r = r^2 \times \left(\frac{1}{r} + 1\right)^2 = 1 + 2r + r^2.$$

On obtient alors l'estimation suivante de l'aire du carré \mathcal{E}

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{A}(\mathcal{E}_r) = 1 = \mathcal{A}(\mathcal{E}).$$

7.2 Approximation du périmètre

Considérons dans cette partie deux sources ponctuelles S_1 et S_2 . Les données du problème pour la source S_1 sont :

- la position de la source $(x_1, 0)$;
- un ensemble des angles $\Theta_{1,r} = \{\theta_{1,r}, \dots, \theta_{k,r}, \dots, \theta_{n,r}\}$;
- un vecteur d'entiers non nuls $\mathfrak{S}_{1r} = (s_{1,r}, \dots, s_{k,r}, \dots, s_{n,r})$.

Les données du problème pour la source S_2 sont :

- la position de la source $(x_2, 0)$;
- un ensemble des angles $\Theta_{2,r} = \{\theta'_{1,r}, \dots, \theta'_{k,r}, \dots, \theta'_{m,r}\}$;
- un vecteur d'entiers non nuls $\mathfrak{S}_{2r} = (s'_{1,r}, \dots, s'_{k,r}, \dots, s'_{m,r})$.

Rappelons que l'on a $\mathcal{A}(S_1, \mathfrak{S}_1) = \mathcal{A}(S_2, \mathfrak{S}_2)$.

Nous montrons dans cette partie comment obtenir une borne supérieure et deux bornes inférieures au périmètre à partir de ces données.

7.2.1 Bornes inférieures du périmètre

Une des bornes inférieure au périmètre d'un ensemble \mathcal{E} obtenue à partir des projections est donnée grâce à l'inégalité suivante appelée inégalité isopérimétrique [Oss78] :

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{E}) \geq 4\pi\mathcal{A}(\mathcal{E})$$

où $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ est l'aire de la surface entourée par une courbe fermée de longueur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ est donc le périmètre du bord $\partial(\mathcal{E})$ de \mathcal{E} . L'égalité est obtenue quand \mathcal{E} est un disque : $\mathcal{L}^2(\mathcal{E}) = 4\pi\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

De l'inégalité isopérimétrique on peut déduire le résultat suivant.

Proposition 7.2.1. *Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ et $S_1 \in \mathbb{R}^2$. Le périmètre $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ de \mathcal{E} vérifie nécessairement l'inégalité suivante :*

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{E}) \geq 4\pi \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{A}(\mathcal{E}) \tag{7.1}$$

Quand \mathcal{E} est convexe, une autre borne inférieure peut être proposée grâce à la formule de Crofton :

Proposition 7.2.2. [Formule de Crofton] *Soit $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$ une courbe dans le plan. La longueur de γ est donnée par*

$$l(\gamma) = 1/2 \iint_{\mathfrak{q}} \eta_{\gamma}(\rho, \theta) \, d\rho d\theta$$

où $\mathfrak{q} = \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ et pour tout $(\rho, \theta) \in \mathfrak{q}$, $\eta_{\gamma}(\rho, \theta) = |\gamma([0, 1]) \cap D(\rho, \theta)| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ qui donne le nombre des points d'intersections de la courbe γ avec la droite $D(\rho, \theta)$ comme représentée par la Figure 7.5.

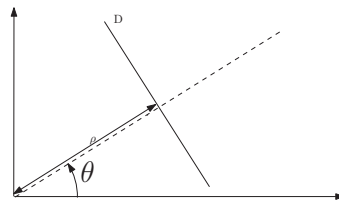


FIGURE 7.5 – Représentation d'un droite avec $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi[$.

Ainsi, si $\eta_{\mathcal{E}}(\rho, \theta)$ est le nombre des points de \mathcal{E} sur la droite $D(\rho, \theta)$, alors on a :

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = 1/2 \iint_{\mathfrak{p}} \eta_{\mathcal{E}}(\rho, \theta) \, d\rho d\theta$$

Or une droite intersecte un ensemble convexe en 0, 1 (si elle est tangente), 2 points ou en une infinité de points. Ce dernier cas se produit pour un ensemble de mesure nulle.

En se limitant à une seule source ponctuelle S_1 , considérons $D(\rho_{max}, \theta_{max})$ la droite portant le rayon maximal de S_1 et $D(\rho_{min}, \theta_{min})$ la droite portant le rayon minimal de S_1 (voir la Figure 7.6). On obtient le résultat suivant.

Proposition 7.2.3. *Soit un ensemble convexe $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ et une source ponctuelle $S_1 \in \mathbb{R}^2$. Le périmètre $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ de \mathcal{E} vérifie nécessairement l'inégalité suivante :*

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{E}) \geq \iint_{I_r, \text{Supp}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}, S_1)} d\rho d\theta = |I_\rho| \times |\Theta_{1,r}| \geq 1/2 |\cos(\theta_{max}) - \cos(\theta_{min})| \times |\theta_{max} + \theta_{min}|$$

où $I_\rho = [\rho_{min}, \rho_{max}]$.

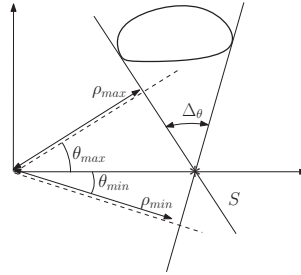


FIGURE 7.6 – Représentation des rayons d’une source ponctuelle S_1 . $\Delta_\theta = \theta_{max} + \theta_{min}$.

7.2.2 Borne supérieure pour le périmètre

Pour trouver une borne supérieure pour le périmètre d’un ensemble convexe \mathcal{E} appartenant à $\mathfrak{R}(\mathbb{R}^2)$, nous avons besoin de deux sources ponctuelles S_1 et S_2 de \mathbb{R}^2 .

Soit $\theta_1, \theta_n, \theta'_1$ et θ'_m tels que :

$$\theta_1 = \min \Theta_{1,r} \quad , \quad \theta_n = \max \Theta_{1,r},$$

$$\theta'_1 = \min \Theta_{2,r} \quad , \quad \theta'_m = \max \Theta_{2,r}.$$

Le résultat suivant est vrai uniquement quand les rayons extrêmes issus de S_1 (R_{S_1, θ_1} et R_{S_1, θ_n}) ont une intersection non vide avec les rayons extrêmes issus de S_2 (R_{S_2, θ'_1} et R_{S_2, θ'_m}). Dans ce cas, on considère les 4 points A, B, C et D résultant de ces intersections (voir la Figure 7.7). Il est clair que \mathcal{E} est inclus dans le polygone convexe $ABCD$. Par conséquent, d’après le Corollaire 5 dans [BTD11], on a le résultat suivant.

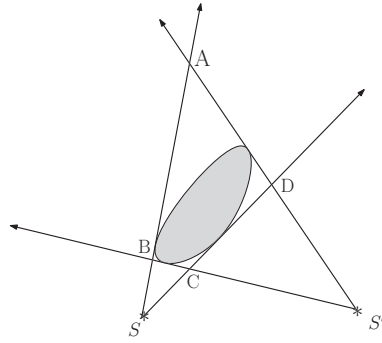


FIGURE 7.7 – A, B, C et D sont les points d'intersection des rayons extrêmes des deux sources ponctuelles.

Proposition 7.2.4. Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ et deux sources ponctuelles $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^2$. Le périmètre $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ de \mathcal{E} vérifie nécessairement l'inégalité suivante :

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) \leq \mathcal{L}(ABCD)$$

où $ABCD$ est le polygone convexe résultant de l'intersection des rayons extrêmes issus des deux sources ponctuelles S_1 et S_2 .

Démonstration. En suivant la même preuve dans [BTD11], comme \mathcal{E} est aussi convexe et qu'on a $\mathcal{E} \subseteq ABCD$, alors $\mathcal{L}(\mathcal{E}) \leq \mathcal{L}(ABCD)$. \square

7.2.3 Exemple

Considérons l'exemple du carré $\mathcal{E} = [1, 2]^2$. On a $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = 4$.

- Première borne inférieure :

D'après l'inégalité isopérimétrique on a :

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{E}) \geq 4\pi \times \mathcal{A}(\mathcal{E}) = 4\pi \times 1 = 12.566$$

et donc

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) \geq \sqrt{12.566} = 3.54$$

- Deuxième borne inférieure :

Pour appliquer la formule de Crofton, considérons une source ponctuelle $S_1 = (2, 0)$ (voir la Figure 7.8).

On a alors $\theta_{max} = \frac{\pi}{4}$ et $\theta_{min} = 0$. Par conséquent on a :

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) \geq \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right| \times \theta_{max} = 0.11$$

- Borne supérieure :

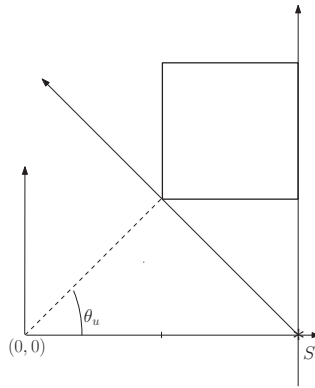


FIGURE 7.8 – Un carré \mathcal{E} et une source ponctuelle $S_1 = (2, 0)$. $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = 4$.

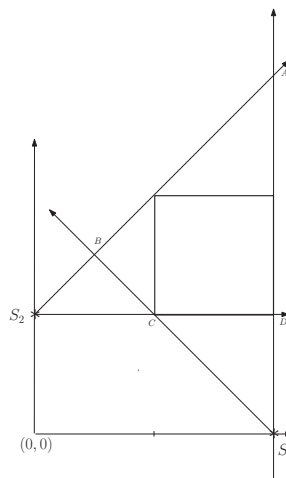


FIGURE 7.9 – Calcul d'une borne supérieure au périmètre du carré. $ABCD = 3 + 2\sqrt{2}$.

Afin de calculer la borne supérieur du périmètre, on considère une deuxième source ponctuelle $S_2 = (0, 1)$ comme illustré dans la Figure 7.9.

On a alors

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) \leq 3 + 2\sqrt{2} = 5.82$$

Le périmètre de \mathcal{E} vérifie donc :

$$3.54 \leq \mathcal{L}(\mathcal{E}) = 4 \leq 5.82$$

Chapitre 8

Conclusion générale

Nous avons réalisé dans cette thèse une étude autour du problème inverse de la tomographie discrète pour des sources ponctuelles.

Pour cela, nous avons abordé deux approches : la reconstruction tomographique d'ensembles convexes grâce à leur propriété de Q -convexité et la reconstruction de propriétés directement à partir de leurs projections.

Concernant la première approche, nos études ont mené à la présentation de la classe des ensembles Q -convexes qui contient celle des ensembles convexes. Une étude sur les différentes propriétés des ensembles Q -convexes et sur l'unicité de la reconstruction a aboutit à deux algorithmes : un premier algorithme de génération aléatoire d'ensembles Q -convexes et un deuxième algorithme qui permet de reconstruire une solution à partir des projections de deux sources ponctuelles ou plus. Quand les conditions de l'unicité sont satisfaites et si la Conjecture 1 est vraie, ce dernier algorithme permet donc de reconstruire les ensembles convexes. Le premier algorithme a été implémenté et testé pour générer des ensembles Q -convexes pour un ensemble de sources ponctuelles pré-définis. Une grande partie du deuxième algorithme a aussi été implémentée. La partie concernant la complétion booléenne reste à implémenter.

En ce qui concerne la deuxième approche que nous avons présentée dans ce travail, nous avons étudié la possibilité d'extraire des informations quantitatives à partir des projections. Nous avons montré qu'avec une seule projection, nous pouvons estimer l'aire de l'ensemble projeté. Nous avons aussi fourni deux bornes inférieures pour le périmètre. La première borne dépendant de l'estimation de l'aire ne nécessite qu'une seule projection. Pour la deuxième borne inférieure, plus on utilise de sources ponctuelles, plus cette borne inférieure est précise.

Nous avons aussi montré qu'une borne supérieure du périmètre de l'ensemble projeté peut

être obtenue à partir de deux projections.

Les résultats obtenus au cours de ces travaux de thèse ouvrent d'intéressantes perspectives de recherche. Par exemple, l'algorithme proposé dans le Chapitre 5 pour simuler un générateur aléatoire d'ensembles Q -convexes n'est pas un générateur aléatoire uniforme. Il serait donc intéressant d'étudier comment obtenir un générateur aléatoire uniforme pour des ensembles Q -convexes.

D'autre part, la propriété des points saillants reste à exploiter. Nous avons montré que les points saillants d'un ensemble Q -convexes le caractérisent. Ceci pourrait constituer un indice supplémentaire afin d'optimiser davantage l'algorithme de reconstruction.

Une autre perspective serait de montrer la Conjecture 1. Ceci résoudrait le problème de reconstruction d'ensembles convexes pour des sources ponctuelles.

Quant à la deuxième approche abordée dans ce travail, nos résultats ne concernent que la reconstruction de propriétés quantitatives. De par la particularité de la présentation des données du problème inverse avec des sources ponctuelles, l'extraction de propriétés qualitatives s'avère être plus compliquée que pour le cas où on a des rayons parallèles. Il est donc intéressant de continuer la recherche pour résoudre cette question.

De plus, nous avons supposé dans cette partie que nous avons les projections des ensembles discrétisés quelle que soit la résolution. Il serait alors intéressant de savoir s'il existe une méthode de discrétisation des projections, telle que les projections du discrétisé d'un ensemble correspondent aux projections obtenues par la discrétisation des projections de cet ensemble.

Dans la littérature, il y a des résultats traitant le cas des sources ponctuelles et d'autres qui traitent le cas des rayons parallèles pour la reconstruction tomographique et pour les estimateurs de périmètres (estimateur de périmètre [BTD11] et [SHB12]). Une autre perspective qu'ouvre cette approche est celle de trouver un lien entre ces deux cas.

Table des figures

1.1	$f(x, y)$ est connue par ses intégrales sur toutes les droites.	8
1.2	Plusieurs projections sont nécessaires pour reconstruire l'objet.	8
2.1	$\mathbb{D}_r = r\mathbb{Z}^2$ pour $r = 4, 2, 1$ et 0.5	14
2.2	Un pixel est représenté par un carré centré sur un point de la grille discrète.	14
2.3	Les points B tels que $\ \overrightarrow{AB}\ = r$ sont en violet. Les points B tels que $\ \overrightarrow{AB}\ < r$ sont en vert. Les points verts forment un ensemble ouvert. L'union des points verts et violet forme un ensemble fermé.	15
2.4	a) ensemble régulier. b) ensemble non régulier.	16
2.5	$\Lambda_r(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_r = \mathcal{E} \cap r\mathbb{Z}^2$	17
2.6	Un rayon R_{S, θ_M^S} issu d'une source ponctuelle $S = (x_0, y_0)$ et parallèle à la direction \overrightarrow{SM}	18
2.7	Dispositif physique de projection.	19
2.8	Projection discrète par des rayons issus d'une source ponctuelle S	19
2.9	Séparation du plan par la droite $D_{\vec{u}_\theta^\perp}(S)$ "portant" le rayon $R_{S, \theta}$	20
2.10	Secteurs angulaire définis par deux rayons issus d'une même source ponctuelle : la composante connexe \mathcal{C}_1 est en bleu et la composante connexe \mathcal{C}_2 est en gris.	21
3.1	Coupe d'abdomen. Image reconstruite par tomo-densiométrie.	24
3.2	À gauche : Projections par des rayons parallèles (source à l'infini). À droite : Projections par des rayons divergents (source ponctuelle).	24
3.3	Projection continue par des rayons issus d'une source ponctuelle S	25
3.4	Structure atomique du diamant.	27
3.5	Machine de tomographie par émission de positrons.	28
3.6	Système de tomo-densiométrie à rayons X (de la marque ImageX).	28
4.1	Exemple d'un ensemble \mathbb{R} -convexe. On a $[A, B] \subseteq \mathcal{E}$ pour tout $A, B \in \mathcal{E}$	30
4.2	Le bord 'orienté' de $CH(\mathcal{E})$ est en rouge.	31
4.3	Le point x est dans le triangle de sommets x_j, x_k, x_n	33

4.4	À gauche, en bleu, l'ensemble fermé $\mathcal{E} = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$. À droite en vert (sans les points en rouges des axes du repère!) l'ensemble non fermé $CH(\mathcal{E})$	34
4.5	a) Le point R est entre les points X_0 et Q . b) Le point Q est entre les points X_0 et R	35
4.6	$\mathcal{E} (\bullet)$ est 2- \mathbb{Z} -convexe mais pas \mathbb{Z} -convexe (\otimes n'appartient pas à \mathcal{E}).	37
4.7	4, 6 et 8-adjacence.	39
4.8	Polyominos avec différentes connexités.	39
5.1	L'intersection de deux rayons issus de deux sources ponctuelles définit quatre quadrants	42
5.2	$(0, j, i), (1, j, \bar{i}), (3, \bar{j}, i), (2, \bar{j}, \bar{i}), (0, \bar{i}, \bar{j}), (1, \bar{i}, j), (3, i, \bar{j})$ et $(2, i, j)$ désignent la même zone (en gris).	43
5.3	(a) Ensemble non \mathbb{Z} -Q-convexe pour S_1 et S_2 et \mathbb{Z} -Q-convexe pour S_2 et S_3 (le point M vérifie la condition (1) de Q-convexité pour S_1 et S_2 mais n'est pas un point de l'ensemble); (b) Ensemble discret Q-convexe pour toute paire de sources ponctuelles de \mathbb{S}^2 ; (c) Ensemble continu Q-convexe pour S_1 et S_2 ; (d) Ensemble continu non Q-convexe pour S_1 et S_2 (le point M vérifie la condition (1) de Q-convexité mais n'est pas un point de l'ensemble).	43
5.4	Le segment $[P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2$ est inclus dans \mathcal{E} par la 2 ^{ème} condition de la Q-convexité.	44
5.5	Le segment $[P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2$ est inclus dans \mathcal{E} par la 1 ^{ème} condition de la Q-convexité.	44
5.6	Le segment $[P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2$ est inclus dans \mathcal{E} par la 2 ^{ème} condition de la Q-convexité.	45
5.7	Le segment $[P_1, P_2] \cap \mathbb{S}^2$ est inclus dans \mathcal{E} par la 1 ^{ère} condition de la Q-convexité.	46
5.8	M appartient à l'enveloppe convexe de $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$	47
5.9	Le point M est à l'intérieur du triangle $CH(\{A, B, C\})$	48
5.10	Illustration de la condition $(\star) : \widehat{ASB} < \pi$	52
5.11	$S \in \mathbb{R}^2 \setminus CH(\mathcal{E}) \implies \mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\{S\})$	53
5.12	$\mathcal{E} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\{S\}) \implies S \in \mathbb{R}^2 \setminus CH(\mathcal{E})$	53
5.13	Le point N est à l'intérieur de la région $\mathcal{G}(D_{(\vec{u}_{\theta_{S_1}^{M'}})^{\perp}}(S_1)) \cap \mathcal{SD}(D_{(\vec{u}_{\theta_{S_1}^M})^{\perp}}(S_1))$	54
5.14	Le point $N \in QH_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$ ne sera ajouté à $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}(\mathcal{E})$ qu'une fois M est ajouté par une itération précédente.	56
5.15	$F, F' \in \mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E}); F \cap F' \notin \mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \mathcal{E})$	58
5.16	$N_3 \in Z_{S_1, S_2}^3(M) \cap \mathcal{E}$ et $\theta_{N_3}^{S_1} = \max Supp_{\mathbb{Z}}(Z_{S_1, S_2}^3(M) \cap \mathcal{E}, S_1)$	61

5.17	L'ensemble \mathbb{Z} -Q-convexe sera généré dans la fenêtre $W = \llbracket -k_1, k_1 \rrbracket \times \llbracket -k_2, k_2 \rrbracket$	64
5.18	$Z^0(\mathcal{I}(i, j)) = Z^0(\mathcal{I}(i - 1, j)) \cup Z^0(\mathcal{I}(i, j - 1)) \cup \{I(i, j)\}$	67
5.19	M est nécessairement un point de \mathcal{E} car on a $\{M_1, M_2\} \cap Z_{S_1, S_2}^t(M) \neq \emptyset$ pour tout $t \in \{0, 1, 2, 3\}$	69
5.20	Quatre sommes partielles pour i et j donnés.	70
5.21	Opérations de complétion sur les rayons (a) La solution étant Q-convexe, ses points situés sur un même rayon sont nécessairement consécutifs. Ainsi, les points de β situés entre deux points de α sont ajoutés à α . (b) $s_j = 3$ et ces trois points sont nécessairement consécutifs. Ainsi trois configurations sont possibles et le point du milieu en fait toujours partie. Ce point est donc ajouté à α . (c) Avec des points fixés de α , Les points de β qui ne sont pas connectés à ces points sont éliminés de β . (d) $s_j = 3$ dont deux sont fixés. Le point qui reste doit être directement connecté à ceux fixés. Les autres points de β sont éliminés. (e) Les séquences de β contenant moins de s_j points sont éliminés de β	74
5.22	Trois cas sont possibles à l'état de stabilité : T_1, T_2 et T_3	78
5.23	$\Delta_t = (Z^t(M) \cap Z^{t+1}(M)) \cap (R_{S_2, \theta'_i} \cup R_{S_2, \theta'_i})$	79
5.24	$\mathcal{E} = D_1 \sqcup D_2 \sqcup D_3$ avec $D_3 = \mathcal{E} \cap L$, D_1 et D_2 situés chacun dans un demi-plan délimité par L	81
5.25	$\mathcal{E} = D_1 \sqcup D_2 \sqcup D_3$ avec $D_3 = \mathcal{E} \cap L$, D_1 et D_2 situés chacun dans un demi-plan délimité par L	82
5.26	$s_0 = 8$; $k = 4$. \square point éventuel de D_3 . Il y a 2^4 solutions possibles.	83
5.27	$s_0 = 8$; $k = 4$. \square point éventuel de D_3 , \boxtimes ne peuvent pas être dans D_3	83
6.1	Les sources sont colinéaire et ordonnées par ordre croissant de leurs abscisses.	86
6.2	Les PSP autours du point M avec $\mathbf{p} = \{S_1, S_2, S_3\}$. Par exemple, $Z_{S_1, S_3}^2(M)$ est un PSP alors que $Z_{S_2, S_3}^2(M)$ n'est pas un PSP	86
6.3	\mathbf{p} -polygone : la droite (SV) passe par un autre sommet V'	88
6.4	\mathbf{p} -séquence pour $\mathbf{p} = \{S_1, S_2\}$. On prend $t = 2$ pour S_1 et $t = 1$ pour S_2	88
6.5	Si $i_{M_r} > i_M$, alors $M \in QH_{\{S_i, S_r\}}(\{N, M_j, M_r\})$	91
6.6	Si $i_{M_r} < i_M$, $M \in QH_{\{S_i, S_r\}}(\{N, M_r, M_i\})$	91
6.7	$A, B \in E_{t,j,i}^+$, on a $A \sim_+ B$	92
6.8	si $A \sim B$ et $B \sim C$ alors $A \sim C$	93
6.9	Le point M n'appartient pas au quadrant $Z_{S_j, S_i}^0(N)$	94
6.10	$t_1 = 1, t_2 = 1$ et $i_{B'} \leq i_{A'}$	96
6.11	$t_1 = 2, t_2 = 1$	97
6.12	$t_1 = 2, t_2 = 2$ et $i_{A'} \leq i_{B'}$	97

7.1	$\partial(\mathcal{E}) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tel que Γ_1 et Γ_2 sont les graphes de fonctions continues. . .	106
7.2	La surface à estimer est recouverte par des rectangles de même largeur r . . .	107
7.3	L'erreur sur chaque rectangle est $r \times (f_1(a_r + i \times r) - n_i)$	108
7.4	Le discrétisé du carré de coté 1 à la résolution $1/r$ contient $(\frac{1}{r} + 1)^2$ points de $r - \mathbb{Z}^2$	109
7.5	Représentation d'un droite avec $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi[$	110
7.6	Représentation des rayons d'une source ponctuelle S_1 . $\Delta_\theta = \theta_{max} + \theta_{min}$. . .	111
7.7	A, B, C et D sont les points d'intersection des rayons extrêmes des deux sources ponctuelles.	112
7.8	Un carré \mathcal{E} et une source ponctuelle $S_1 = (2, 0)$. $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = 4$	113
7.9	Calcul d'une borne supérieure au périmètre du carré. $ABCD = 3 + 2\sqrt{2}$. . .	113
B.1	Graphe orienté représentant une formule 2-SAT	128
B.2	Graphe orienté après l'exécution de l'algorithme de Tarjan	129

Liste des tableaux

4.1	Complexité algorithmique du problème de reconstruction pour des rayons parallèles	40
6.1	Graphe $G(\mathcal{A}_p)$ associé à la relation de consécuitivité des PSP. Les arêtes du graphe sont en rouge.	87

Annexes

Annexe A

Notations

\mathbb{R}, \mathbb{N} et \mathbb{Z}	Ensemble des réels, des entiers naturels et des entiers relatifs
$\mathbb{D}_r = r\mathbb{Z}^2$	Plan discret à la résolution $1/r$
\mathbb{S}	\mathbb{R} ou \mathbb{Z}
\mathbb{F}_m	Ensemble des entiers modulo un entier $m \geq 1$
$\mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$	Ensembles réguliers de \mathbb{S}^2
$\mathcal{P}(\mathcal{E})$	Ensemble des parties de \mathcal{E}
$\overset{\circ}{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{E}}$	Intérieur et fermeture topologiques de \mathcal{E}
$R_{S,\theta}$	Rayon issu de la source S faisant un angle θ avec l'horizontale
$Supp_{\mathbb{S}}(\mathcal{E}, S)$	Support des \mathbb{S} -projections de \mathcal{E} par la source ponctuelle S
$D_{\vec{n}}$	Droite de vecteur normal \vec{n}
$\mathcal{G}(D_{\vec{n}}), \mathcal{D}(D_{\vec{n}})$	Ensembles des points à gauche et à droite de $D_{\vec{n}}(A)$
$\mathcal{SG}(D_{\vec{n}}), \mathcal{SD}(D_{\vec{n}})$	Ensembles des points strictement à gauche et strictement à droite de $D_{\vec{n}}(A)$
Z_{S_j, S_i}^t	Quadrant t relativement aux sources S_j et S_i
$\mathcal{I}(i, j)$	Point intersection entre le rayon de rang j et un rayon de rang i
\mathbb{S} -convexe	Ensemble convexe de \mathbb{S}
$\partial(\mathcal{E}), \mathcal{E} , \mathcal{L}(\mathcal{E}), \mathcal{A}(\mathcal{E})$	Bord, cardinal, périmètre et aire de \mathcal{E}
$CH(\mathcal{E}), CH_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})$	Enveloppe convexe de \mathcal{E} dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{Z}^2
$\mathcal{C}(\mathbb{S}^2)$	Ensemble de tous les ensembles convexes de \mathbb{S}^2
$\mathcal{C}_E(\mathbb{S}^2)$	Ensemble de tous les ensembles \mathbb{S} -convexes qui contiennent \mathcal{E}
$\mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$	Ensemble de tous les ensembles \mathbb{Q} -convexes sur \mathbb{S}^2 pour \mathfrak{p}
$QH_{\mathbb{S}}(\mathcal{E})$	Enveloppe \mathbb{Q} -convexe de \mathcal{E} relativement à \mathfrak{p} dans \mathbb{S}^2
$\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}$ et $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p}, \mathbb{S}}$	Opérateurs de complétion
$\mathcal{H}_{\mathbb{S}}(\mathcal{P}, \mathcal{E})$	Ensemble des ensembles ayant la même enveloppe \mathbb{Q} -convexe que \mathcal{E} pour \mathcal{P}
$\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$	Ensemble des ensembles de $\mathfrak{R}(\mathbb{S}^2)$ qui sont séparables de toute source de \mathfrak{p}
$\mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}, \star)$	$\mathcal{QC}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{p})$
$\xi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E})$	Ensemble des points saillants de \mathcal{E} relativement à \mathfrak{p}
$\mathfrak{S}_S(\mathcal{E})$	Vecteur de projections de \mathcal{E} par la source S
$\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$	l'ensemble de tous les triplets (t, j, i) tels que Z_{S_j, S_i}^t est un PSP pour \mathfrak{p}

Annexe B

Algorithme de Tarjan pour l'évaluation d'une formule 2-SAT

Cet annexe explique l'algorithme de Tarjan [APT79] qui permet d'évaluer une formule booléenne 2-SAT de la forme :

$$Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n C$$

avec chaque Q_i est soit \exists soit \forall et C est une conjonction de clauses ayant au plus 2 littéraux par clause.

Exemple :

$$\exists a \exists b \exists c \exists d (a \vee b) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg d) \wedge (b \vee d) \wedge (d \vee a)$$

Notons que

$$\begin{aligned} a \vee b &\text{ est équivalent à } \neg a \Rightarrow b \text{ ou } \neg b \Rightarrow a \\ \neg a \vee b &\text{ est équivalent à } a \Rightarrow b \text{ ou } \neg b \Rightarrow \neg a \\ a \vee \neg b &\text{ est équivalent à } \neg a \Rightarrow \neg b \text{ ou } b \Rightarrow a \\ \neg a \vee \neg b &\text{ est équivalent à } a \Rightarrow \neg b \text{ ou } b \Rightarrow \neg a \end{aligned}$$

La première étape est la création du graphe correspondant à la formule donnée.

B.1 Formation du graphe orienté

On peut, sans perte de généralité, supposer que toutes les clauses de C ont exactement 2 littéraux, puisque $(x) = (x \vee x)$.

Supposons que la formule contient n variables x_1, \dots, x_n . On crée alors $2n$ sommets tels

que chaque variable et sa négation sont représentées. Les sommets sont donc x_1, \dots, x_n et $\neg x_1, \dots, \neg x_n$.

On ajout ensuite les arcs : pour chaque clause de la forme $(a \vee b)$ on ajoute l'arc $\neg a \rightarrow b$ et l'arc $\neg b \rightarrow a$. De même, les arcs correspondants sont ajoutés pour les clauses $\neg a \vee b$, $a \vee \neg b$ et $\neg a \vee \neg b$.

Exemple :

Si C est

$$\exists a \exists b \exists c \exists d (a \vee b) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg d) \wedge (b \vee d) \wedge (d \vee a)$$

Le graphe correspondant est représenté par la figure B.1

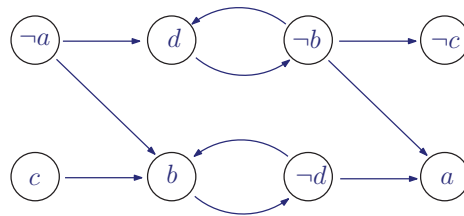


FIGURE B.1 – Graphe orienté représentant une formule 2-SAT

Remarque B.1.1. Le graphe présenté est isomorphe à celui obtenu en inversant tous les arcs et en remplaçant chaque sommet par sa négation.

B.2 Composants fortement connexes

On appelle *composante fortement connexe*, un ensemble maximal de sommets tels qu'il existe un chemin entre chaque couple de ses sommets.

Les sommets d'un même composante fortement connexes peuvent être remplacés par la même valeur booléenne : Si on a $x \rightarrow y \rightarrow \dots \rightarrow x$ alors on a $x = y$

Si une composante fortement connexe contient une variable x et sa négation $\neg x$, alors le problème posé est incohérent. En fait, La formule n'est pas satisfaisable si et seulement si il existe une composante fortement connexe contenant une variable x et $\neg x$.

Notons que si $S_i = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ est une composante fortement connexe alors sa négation $\neg S_i = \{\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_k\}$ est aussi une composante fortement connexe.

L'algorithme de Tarjan (Depth first search [Tar72] permet d'identifier en un temps linéaires les différentes composantes fortement connexes du graphes. Cet algorithme fournit aussi un ordre topologique sur les composantes fortement connexes S_i (il s'agit d'un ordre \prec tel que si il existe un arc de S_i vers S_j alors $S_i \prec S_j$).

On procède alors dans l'ordre inverse : on affecte à la plus grande composante la valeur « vrai » en affectant à tous ses sommets la valeur « vrai » et à sa négation la valeur « faux »,

puis passe à la plus grande composante non évaluée et lui affecte la valeur « vrai » et à sa négation la valeur « faux », et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les composantes connexes soient évaluées. Un exemple est illustré par la figure B.2

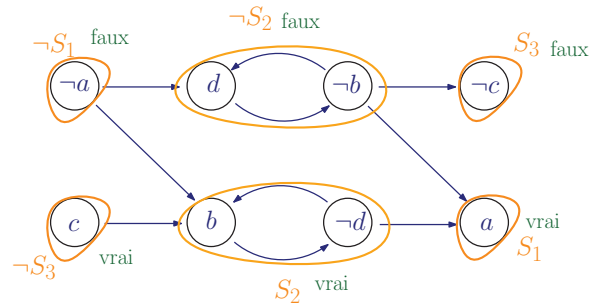


FIGURE B.2 – Graphe orienté après l'exécution de l'algorithme de Tarjan

Annexe C

Complexité de l'algorithme de reconstruction

L'Algorithme 2 de reconstruction présenté dans le Chapitre 5 se déroule en trois étapes majeures :

- l'initialisation des ensembles α , β et \mathcal{R} ;
- les opérations de complétions ;
- la complétion booléenne.

Nous détaillons ici la complexité algorithmique de ces étapes.

1. Calcul de (α_0, β_0)

Pour choisir un ensemble α_0 , on fixe arbitrairement deux points U_1 et U_2 . Il y a alors $\min(m^2, n^2)$ positions possibles pour ces points.

Rappelons l'ensemble $\Delta = \{\mathcal{I}(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. Une initialisation possible de β serait $\beta_0 = \Delta$. L'objectif à ce stade est de reconstruire une solution pour $(\{U_1, U_2\}, \beta_0)$, si une solution existe. Cependant, une initialisation plus optimale pour β est possible. En effet, nous pouvons obtenir un ensemble initial β_0 tel que chaque rayon R_{S_1, θ_j} contient au plus $2 * s_j$ points de $|\beta^j|$ (respectivement chaque rayon R_{S_2, θ'_i} contient au plus $2 * s'_i$ points de $|\beta_i|$). Ceci est fait en un temps $O(mn)$.

Comme $|Supp_{\mathbb{Z}}(D, S_1) \cup Supp_{\mathbb{Z}}(D, S_2)| \leq 2 * n_{max}$, \mathcal{R} contient au plus $2n_{max}$ rayons. Comme l'ajout d'un rayon à \mathcal{R} se fait en un temps $O(1)$, l'initialisation de \mathcal{R} est fait en un temps linéaire.

2. Opérations de complétion

Lorsque les opérations de complétions sont itérées, les ensembles α , β et \mathcal{R} sont mis à jour. Á chaque itération, un rayon est supprimé de \mathcal{R} et pourra être remis dans \mathcal{R} ultérieurement si un de ses points est modifié lors de l'application d'une opération

de complétion sur un rayon l'intersectant. L'ajout d'un rayon à \mathcal{R} a une complexité de $O(1)$ et l'extraction d'un rayon de \mathcal{R} a aussi une complexité de $O(1)$. Ainsi, la complexité de cette deuxième étape dépend d'une part de celle des opérations de complétion et par conséquent du nombre de fois un rayon est modifié d'autre part du coût de ce changement.

Une opération de complétion déplace un point de $\beta \setminus \alpha$ à α ou le supprime complètement de β . Le temps de calcul des opérations de complétion est proportionnel au coût global de l'ajout d'un point à α et de la suppression de β . Un point change d'état une seule fois. Ces procédures sont donc exécutées au plus n_{max}^2 fois. Pour expliquer la complexité d'un changement d'état d'un point $\mathcal{I}(i, j)$, nous expliquons comment ce changement est exécuté. Notons que $r(\alpha^j(S_1)), l(\alpha^j(S_1)), r(\alpha_i(S_2)), l(\alpha_i(S_2))$ sont initialement nuls.

Ajouter $\mathcal{I}(i, j)$ à α avec $R = R_{S_1, \theta_j}$:

si $\mathcal{I}(i, j) \notin \beta$ alors

Sortie de l'algorithme

fin si

si $\mathcal{I}(i, j) \in \alpha$ alors

Sortie de l'algorithme

fin si

$\alpha \leftarrow \alpha \cup \mathcal{I}(i, j)$

si $r(\alpha^j(S_1)) = 0$ alors

$l(\beta^j(S_1)) \leftarrow \max(\{i' : \mathcal{I}(i', j) \notin \beta, i' < i\}) + 1$

$r(\beta^j(S_1)) \leftarrow \min(\{i' : \mathcal{I}(i', j) \notin \beta, i' > i\}) - 1$

fin si

si $r(\alpha_i(S_2)) = 0$ alors

$l(\beta_i(S_2)) \leftarrow \max(\{j' : \mathcal{I}(i, j') \notin \beta, j' < j\}) + 1$

$r(\beta_i(S_2)) \leftarrow \min(\{j' : \mathcal{I}(i, j') \notin \beta, j' > j\}) - 1$

fin si

$\mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R} \cup R_{S_2, \theta_i}$

Contrairement à l'ajout d'un point à α , qui prend un temps $O(n_{max})$ s'il n'y a aucun point de α sur le rayon en question, la suppression d'un point de β prend un temps $O(1)$ car $r(\beta^j(S_1))$ et $l(\beta^j(S_1))$ sont seulement décalés d'une position. Notons que s'il y a déjà des points de α sur le rayon considéré, l'ajout d'autres points est fait en un temps $O(1)$. Le cas où cette opération prend un temps $O(n_{max})$ arrive au plus n_{max} fois.

Par conséquent, les opérations de complétion sont calculées en un temps $O(n_{max}^2)$.

3. **Complétion booléenne** Cette partie est exécutée quand il reste encore des points de $\beta \setminus \alpha$ alors que l'application des opérations de complétion n'apporte plus de modifications à α et β . On associe alors à chaque point $M \in \beta \setminus \alpha$ une variable booléenne V_M qui va prendre la valeur vraie si M appartient à la solution recherchée. Il est clair que $|\beta \setminus \alpha| \leq n_{max}$. Les formules qui traduisent la contrainte Q-convexité de la solution et celle des projections peuvent contenir une ou deux variables, chacune pouvant être V_M ou $\neg V_M$. On aura alors au plus $2n_{max}$ clauses dépendant d'une seule variable et $4n_{max}^2$ clauses dépendant de deux variables. Comme il existe des algorithmes qui résolvent les formules 2-SAT [APT79] en un temps linéaire relativement au nombre de clauses, la complétion booléenne est exécutée en un temps $O(n_{max}^2)$.

Si l'algorithme de reconstruction n'aboutit à aucune solution, on change l'initialisation de α et on le relance. En tout, il existe $|R_{S_2, \theta'_1} \cap \Delta| \times |R_{S_2, \theta'_m} \cap \Delta|$ initialisations possibles pour α , soit au plus n_{max}^2 .

Pour les ensembles qui intersectent la droite des sources; le calcul de l'enveloppe convexe qui est nécessaire pour compléter l'ensemble obtenu peut être fait en un temps $O(n_{max} \log(n_{max}))$. L'algorithme de reconstruction est donc exécuté en un temps quartique.

Bibliographie

- [ADT11a] F. Abdmouleh, A. Daurat, and M. Tajine. Discrete \mathbb{Q} -convex sets reconstruction from discrete point X-rays. In *Combinatorial Image Analysis*, pages 323–336, 2011.
- [ADT11b] F. Abdmouleh, A. Daurat, and M. Tajine. \mathbb{Q} -convex sets for point sources (preprint). hal.archives-ouvertes.fr/hal-00563126, 2011.
- [AFRTV10] A. A. Frosini, S. Rinaldi, K. Tawbe, and L. Vuillon. Reconstruction of 2-convex polyominoes. lama.univ-savoie.fr, 2010.
- [APT79] B. Aspvall, M. F. Plass, and R. E. Tarjan. A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas. *Inform. Process. Lett.*, 8 :121–123, 1979.
- [BBLN00] E. Barucci, S. Brunetti, A. Del Lungo, and M. Nivat. Reconstruction of discrete sets from three or more X-rays. In *Algorithms and complexity*, pages 199–210, 2000.
- [BD03] S. Brunetti and A. Daurat. An algorithm reconstructing convex lattice sets. *Theor. Comput. Sci.*, 304 :35–57, 2003.
- [BD05a] S. Brunetti and A. Daurat. Determination of \mathbb{Q} -convex sets by X-rays. *Theor. Comput. Sci.*, 332 :19–45, 2005.
- [BD05b] S. Brunetti and A. Daurat. Random generation of \mathbb{Q} -convex sets. *Theor. Comput. Sci.*, 347 :393–414, 2005.
- [BD05c] S. Brunetti and A. Daurat. Stability in discrete tomography : some positive results. *Discrete Appl. Math.*, 20 :207–226, 2005.
- [BD08] S. Brunetti and A. Daurat. Reconstruction of convex lattice sets from tomographic projections in quartic time. *Theor. Comput. Sci.*, 406 :55–62, 2008.
- [Ber90] M. Berger. *Géométrie*. Nathan, 1990.
- [BLNP96] E. Barucci, A. Del Lungo, M. Nivat, and R. Pinzani. Reconstructing convex polyominoes from horizontal and vertical projections. *Theor. Comput. Sci.*, 155 :321–347, 1996.

- [BM08] P. Balázs and G. Mihály. Decision trees in binary tomography for supporting the reconstruction of hv-convex connected images. In *ACIVS, LNCS 5259*, pages 433–443, 2008.
- [BTD11] E. Baudrier, M. Tajine, and A. Daurat. Convex-set perimeter estimation from its two projections. In *IWCIA'11, LNCS 6636*, pages 284–297, 2011.
- [BV89] G. Bianchi and A. Volčič. Hammer’s X-ray problem is well-posed. *Annali di Matematica pura ed applicata*, CLV :205–211, 1989.
- [CD99] M. Chrobak and C. Dürr. Reconstructing hv-convex polyominoes from orthogonal projections. *Inform. Process. Lett.*, 69 :283–289, 1999.
- [CD01] M. Chrobak and C. Dürr. Reconstructing polyatomic structures from discrete x-rays : Np-completeness proof for three atoms. *Theor. Comput. Sci.*, 259 :81–98, 2001.
- [CFRR05] G. Castiglione, A. Frosini, A. Restivo, and S. Rinaldi. A tomographical characterization of L-convex polyominoes. In *Discrete geometry for computer imagery*, volume 3429, pages 115–125, 2005.
- [CHM⁺99] B. M. Carvalho, G. T. Herman, S. Matej, C. Salzberg, and E. Bardi. Binary tomography for triplane cardiography. *LNCS*, 1613 :29–41, 1999.
- [CR03a] G. Castiglione and A. Restivo. Reconstruction of L-convex polyominoes. *Electr. Notes Discr. Math.*, 12 :290–301, 2003.
- [CR03b] G. Castiglione and A. Restivo. Reconstruction of l-convex polyominoes. 12, 2003.
- [Dal11] B. Van Dalen. Boundary length of reconstructions in discrete tomography. *SIAM J. Discrete Math.*, 25 :645–659, 2011.
- [Dau01] A. Daurat. Salient points of Q-convex sets. *IJPRAI*, 15 :1023–1030, 2001.
- [Dau03] A. Daurat. *Convexité dans le plan discret. Application à la tomographie*. PhD thesis, Université Paris 7, 2003.
- [Dau05] A. Daurat. Determination of Q-convex bodies by X-rays. *Electr. Notes Discr. Math.*, 20 :67–81, 2005.
- [DGP06] P. Dulio, R. J. Gardner, and C. Peri. Discrete point X-rays. *SIAM J. Discrete Math.*, 20(1) :171–188, 2006.
- [Dor95] C. Dorsett. New characterizations of regular open sets, semi-regular sets, and extremally disconnectedness. *Math. Slovaca*, 45 :435–444, 1995.
- [Dul08] P. Dulio. Convex decomposition of u-polygons. *Theor. Comput. Sci.*, 406 :80–89, 2008.

- [ES88] Herbert Edelsbrunner and Steven S. Skiena. Probing convex polygons with X-rays. *SIAM J. Comput.*, 17 :870–882, 1988.
- [Fal83] K. J. Falconer. X-ray problems for point sources. *P. London Math. Soc.*, 46(3) :241–262, 1983.
- [FG05] F. Feschet and Y. Gérard. Computerized tomography with digital lines and linear programming. In *DGCI 2005, LNCS 3429*, pages 126–135, 2005.
- [Gar83] R. J. Gardner. Symmetrals and X-rays of planar convex bodies. *Arch. Math.*, 41 :183–189, 1983.
- [Gar92] R. J. Gardner. X-rays of polygons. *Discrete Comput. Geom.*, 7(1) :281–293, 1992.
- [Gar06] R. J. Gardner. *Geometric tomography*. Cambridge University Press, 2006.
- [G98] M. Gębala. The reconstruction of convex polyominoes from horizontal and vertical projections. In *SOFSEM’98, LNCS 1521*, pages 350–359, 1998.
- [GG94] R. J. Gardner and P. Gritzmann. Successive determination and verification of polytopes by their X-rays. *J. London Math. Soc.*, 2(50) :375–391, 1994.
- [GG97] R. J. Gardner and P. Gritzmann. Discrete tomography : determination of a finite set by X-rays. *T. Am. Math. Soc.*, 349(6) :2271–2295, 1997.
- [GGP99] R.J. Gardner, P. Gritzmann, and D. Prangenberg. *Uniqueness and complexity in discrete tomography*, pages 88–90. Birkhäuser, 1999.
- [GGZ05] R. J. Gardner, P. Gronchi, and C. Zong. Sums, projections, and sections of lattice sets, and the discrete covariogram. *Discrete Comput. Geom.*, 34 :391–409, 2005.
- [Gie62] O. Giering. Bestimmung von Eibereichen und Eikörpern durch Steiner-Symmetrisierungen. *Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber*, pages 225–253, 1962.
- [GK07] R. J. Gardner and M. Kiderlen. A solution to Hammer’s X-ray reconstruction problem. *Advances in Mathematics*, 214 :323–343, 2007.
- [GM80] R. J. Gardner and P. McMullen. On Hammer’s X-ray problem. *J. London Math. Soc.*, 21(2) :171–175, 1980.
- [Gol94] S. W. Golomb. *Polyominoes : puzzles, patterns, problems and packings*. Princeton University Press, 1994.
- [HK99] G. T. Herman and A. Kuba. *Discrete tomography, foundations, algorithms and applications*. Birkhäuser, 1999.
- [HT01] L. Hajdu and R. Tijdeman. An algorithm for discrete tomography. *Linear Alg. and its App.*, pages 147–169, 2001.

- [IJ94] R. W. Irving and R. Jerrum. Three-dimensional statistical data security problems. *SIAM J. Comput.*, 23 :170–184, 1994.
- [Jar73] R. A. Jarvis. On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane. *Information Processing Letters*, 2(1) :18–21, 1973.
- [KB02a] A. Kuba and E. Balogh. Reconstruction of convex 2d discrete sets in polynomial time. *Theor. Comput. Sci.*, 283 :223–242, 2002.
- [KB02b] A. Kuba and Emese Balogh. Reconstruction of convex 2d discrete sets in polynomial time. *Theor. Comput. Sci.*, 283 :223–242, 2002.
- [KSB⁺95] C. Kisielowski, P. Schwander, F.H. Baumann, M. Seibt¹, Y. Kim, and A. Ourmazd. An approach to quantitative high-resolution transmission electron microscopy of crystalline materials. *Ultramicroscopy*, 58 :131–155, 1995.
- [Kub91] A. Kuba. Reconstruction of measurable plane sets from their two projections taken in arbitrary directions. *Inverse Probl.*, 7 :101–107, 1991.
- [KV88] A. Kuba and A. Volčič. Characterisation of measurable plane sets which are reconstructible from their two projections. *Inverse Probl.*, 4 :513–527, 1988.
- [LC98] D. Lam and W. College. Point-Source geometric tomography. *Proceedings of the REU Program in Mathematics, Oregon State University*, pages 101–121, 1998.
- [Lor49] G. G. Lorentz. A problem of plane measure. *AM. J. Math.*, 71(2) :417–426, 1949.
- [Oss78] R. Osserman. The isoperimetric inequality. *B. AM. SOC.*, 84 :1182–1238, 1978.
- [Rys63] H. J. Ryser. *Combinatorial Mathematics*. Mathematical Association of America, 1963.
- [SHB12] T. Sámuel, M. Hegedüs, and P. Balázs. Perimeter estimation of some discrete sets from horizontal and vertical projections. In *IASTED International Conference, Signal Processing, Pattern Recognition and Applications*, pages 174–182, 2012.
- [SKS⁺93] P. Schwander, C. Kisielowski, M. Seibt, F. H. Baumann, Y. Kim, and A. Ourmazd. Mapping projected potential, interfacial roughness, and composition in general crystalline solids by quantitative transmission electron microscopy. *Phys. Rev. Letters*, 71 :4150–4153, 1993.
- [SV03] A. Soranzo and A. Volčič. When do sections of different dimensions determine a convex body? *Mathematika*, 50 :35–55, 2003.

- [Tar72] R. E. Tarjan. Depth first search and linear graph algorithms. *SIAM J. Computing*, pages 146–160, 1972.
- [Vol86] A. Volčič. A three-point solution to Hammer’s X-ray problem. *J. London Math. Soc.*, 34(2) :349–359, 1986.
- [Woe96] G. H. Woeninger. The reconstruction of polyominoes from horizontal and vertical projections. Technical report, SFB-65, TU Graz, 1996.



Fatma ABDMOULEH

Reconstruction de propriétés qualitatives et quantitatives d'images

La tomographie consiste à reconstruire un objet nD à partir de projections $(n-1)D$. Cette discipline soulève plusieurs questions auxquelles la recherche essaie d'apporter des réponses. On s'intéresse dans cette thèse à trois aspects de cette problématique : 1) la reconstruction de l'image 2D à partir de projections dans un cadre rarement étudié qui est celui des sources ponctuelles ; 2) l'unicité de cette reconstruction ; 3) l'estimation d'informations concernant un objet sans passer par l'étape de reconstitution de son image.

Afin d'aborder le problème de reconstruction pour la classe des ensembles convexes, nous définissons une nouvelle classe d'ensembles ayant des propriétés de convexité qu'on appelle convexité par quadrants pour des sources ponctuelles. Après une étude de cette nouvelle classe d'ensembles, nous montrons qu'elle présente des liens forts avec la classe des ensembles convexes. Nous proposons alors un algorithme de reconstruction d'ensembles convexes par quadrants qui, si l'unicité de la reconstruction est garantie, permet de reconstruire des ensembles convexes en un temps polynomial. Nous montrons que si une conjecture, que nous avons proposée, est vraie, les conditions de l'unicité pour les ensembles convexes par quadrants sont les mêmes que celles pour les ensembles convexes.

Concernant le troisième aspect étudié dans cette thèse, nous proposons une méthode qui permet d'estimer, à partir d'une seule projection, la surface d'un ensemble 2D. Concernant l'estimation du périmètre d'un ensemble 2D, en considérant les projections par une deuxième source d'un ensemble convexe, nous obtenons deux bornes inférieures et une borne supérieure pour le périmètre de l'objet projeté.

Mots clés : Tomographie, Géométrie discrète, sources ponctuelles, convexité, unicité de reconstruction, algorithme de reconstruction

Tomography is about reconstructing an nD object from its $(n-1)D$ projections. This discipline addresses many questions to which research tries to provide answers. In this work, we are interested to three aspects: 1) the 2D image reconstruction from projections in a rarely studied framework that is the point sources; 2) the uniqueness of this reconstruction; 3) estimating information about an object without going through the step of reconstructing its image.

To approach the problem of tomographic reconstruction for the class of convex sets, we define a new class of sets having properties of convexity called quadrant convexity for point sources. After a study of this new class of sets, we show that it presents strong links with the class of convex sets. We propose a reconstruction algorithm for quadrant-convex sets that, if the uniqueness of the reconstruction is guaranteed, allows the reconstruction of convex sets in polynomial time. We also show that if a conjecture we have proposed is true the conditions of uniqueness for quadrant-convex sets are the same as those for convex sets.

Regarding the third aspect studied in this thesis, we focus on two quantitative properties that are the surface and the perimeter. We propose a method to estimate, from only one projection, the surface of a 2D set. We obtain two lower bounds and an upper bound for the perimeter of a projected convex object by considering the projections from a second point source.

Keywords : Tomography, Discrete geometry, point source x-ray, convexity, uniqueness of reconstruction, reconstruction algorithm