

*ÉCOLE DOCTORALE MSII (ED n°269)*

INSA de Strasbourg

## THÈSE

présentée par :

**Ba Danh LE**

soutenue le : **07 Juin 2013**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : mécanique, génie civil

## Modélisation discrète en mécanique de la rupture des matériaux fragiles

**THÈSE dirigée par :**

**M. CHAZALLON Cyrille**

Professeur, INSA de Strasbourg

**RAPPORTEURS :**

**M. ROUX Jean-Noël**

**M. DONZÉ Frédéric-Victor**

IPEF - Directeur de recherche, IFSTTAR

Professeur, Université Joseph Fourier

---

**AUTRES MEMBRES DU JURY :**

**M. KOVAL Georg**

**M. DAOUADJI Ali**

**M. DECK Olivier**

Maître de conférences, INSA de Strasbourg

Maître de conférences (HDR), Université de Lorraine

Maître de conférences (HDR), École des Mines de Nancy

# Remerciements

Je souhaite remercier en premier lieu mon directeur de thèse, M. Cyrille CHAZAL-LON, Professeur de l'INSA de Strasbourg pour m'avoir accueilli au sein de son Groupe Comportement des Ouvrages sous Sollicitations Complexes. Je lui suis également reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise et sa sympathie. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon co-encadrant de thèse, M. Georg KOVAL, Maître de conférences de l'INSA de Strasbourg, pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour ses conseils avisés et son écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. Grâce à lui, j'ai appris beaucoup de choses de dans le domaine de recherche scientifique. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Je voudrais également adresser mes remerciements à Monsieur Jean-Nöel ROUX, Ingénieur en Chef des Ponts et des Eaux et Forêts, Chercheur (HDR) à IFSTTAR, et Monsieur Frédéric-Victor DONZÉ, professeur à l'université Joseph Fourier, qui ont accepté de juger ce travail et d'en être les rapporteurs. Mes remerciements vont aussi à Monsieur Ali DAOUADJI, Maître de conférences (HDR) à l'université de Lorraine, et à Monsieur Olivier DECK, Maître de conférences (HDR) à l'école des Mines de Nancy, pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et avoir participé à l'évaluation de ce travail. Je tiens à remercier aussi Monsieur Yannick DESCANTES, Chargé de recherches (HDR) à IFSTTAR, d'avoir accepté notre invitation pour la soutenance.

Mes remerciements vont également à tous mes collègues dans le Groupe Comportement des Ouvrages sous Sollicitations Complexes, l'équipe de Génie Civil du laboratoire ICUBE, et plus particulièrement Saida, Hossein, Nam, Tuan, Ioana, Andrea, Kai, Saeid, Lucile pour leur amitié et leur encouragement. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec eux. Le cadre de travail était idéal.

Enfin, mes plus profonds remerciements vont à ma famille et plus particulièrement à ma femme qui sont toujours à côté de moi pendant trois années de la thèse et leurs encouragements pour que je puisse finir bien la thèse.



# Sommaire

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Notations principales</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>I État des connaissances</b>	<b>7</b>
<b>1 Fissuration et rupture</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	11
1.2 Historique . . . . .	11
1.3 Notions fondamentales de la mécanique de la rupture . . . . .	12
1.3.1 Les modes d'ouverture d'une fissure . . . . .	13
1.3.2 Analyse asymptotique . . . . .	14
1.3.2.1 Lien entre description énergétique et singularité . . . . .	15
1.4 Propagation de fissures . . . . .	16
1.4.1 Propagation de la fissure en mode $I$ - ténacité du matériau . . . . .	16
1.4.2 Propagation de fissures en mode mixte ( $2D$ ) . . . . .	17
1.4.2.1 Critère de la contrainte d'ouverture maximale . . . . .	17
1.4.2.2 Critère de densité d'énergie minimale . . . . .	18
1.4.3 Critère de taux de restitution d'énergie maximale . . . . .	19
1.4.4 Comparaison des différents critères . . . . .	20
1.5 De l'apparition des fissures à la rupture du matériau . . . . .	20
1.6 Modélisation de la rupture fragile des matériaux . . . . .	23
1.6.1 Critère de Rankine ou de la contrainte normale maximale . . . . .	24
1.6.2 Critère de Mohr-Coulomb . . . . .	24
1.7 Méthodes expérimentales pour la caractérisation des matériaux . . . . .	26
1.7.1 Mesure de ténacité ( $K_{IC}$ ) . . . . .	26
1.7.2 Compression simple . . . . .	27
1.7.3 Essai triaxial . . . . .	27
1.7.4 Compression diamétrale . . . . .	28

1.8	Méthodes numériques pour la modélisation de la fissuration et de la rupture des matériaux . . . . .	30
1.8.1	Méthode des éléments finis (MEF) . . . . .	30
1.8.2	Méthode des éléments finis étendus (X-FEM) . . . . .	31
1.8.3	Méthode des éléments de frontières . . . . .	31
1.8.4	Méthode sans maillage . . . . .	31
1.8.5	Méthode des zones cohésives . . . . .	32
1.8.6	Méthode des éléments discrets (MED) . . . . .	32
1.9	Conclusions partielles . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Modélisation par la méthode des éléments discrets (MED)</b>	<b>35</b>
2.1	Introduction . . . . .	36
2.2	Description générale de la méthode . . . . .	36
2.3	Forme des particules . . . . .	36
2.4	Loi d'interaction des grains . . . . .	37
2.5	Force de contact entre les particules . . . . .	37
2.5.1	Force normale . . . . .	38
2.5.2	Force tangentielle . . . . .	38
2.6	Dissipation visqueuse d'énergie . . . . .	39
2.7	Algorithme de calcul . . . . .	39
2.8	L'utilisation de la méthode des éléments discrets dans l'étude de la rupture des matériaux . . . . .	40
2.8.1	Effet de la structure microscopique . . . . .	40
2.8.2	Rupture des contacts . . . . .	41
2.8.3	Rupture et propagation des fissures . . . . .	42
2.9	Synthèse de l'étude bibliographique . . . . .	44
<b>II</b>	<b>Développements</b>	<b>45</b>
<b>3</b>	<b>Modélisation discrète en mécanique de la rupture - approche initiale</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	MED en élasticité . . . . .	49
3.2.1	Analyse de la cellule élémentaire périodique . . . . .	50
3.2.1.1	Matrice de rigidité de contact - Système de coordonnées locale . . . . .	51
3.2.1.2	Matrice de rigidité de contact - Système de coordonnées globales . . . . .	52
3.2.1.3	Matrice de rigidité globale . . . . .	53
3.2.2	Essai bi-axial . . . . .	54
3.2.2.1	Vecteur de force globale . . . . .	54
3.2.2.2	Conditions de périodicité et de symétrie . . . . .	54
3.2.2.3	Identification des paramètres discrets $k_n$ et $k_t$ . . . . .	55
3.2.3	Comportement élastique au cisaillement . . . . .	56

3.2.4	Vérification du comportement élastique - essai œdométrique . . . .	57
3.3	MED en mécanique de la rupture fragile . . . . .	58
3.3.1	Champ de contrainte à la proximité d'une pointe de fissure en mode I . . . . .	58
3.3.2	Propagation de la fissure en MED - calcul de $K_I$ . . . . .	59
3.3.3	Simulations numériques - rupture de plaques pré-fissurées en mode I	60
3.3.3.1	Système d'unités et paramètres utilisés . . . . .	61
3.3.3.2	Charge de rupture . . . . .	62
3.3.3.3	Effet de l'orientation angulaire de la structure de particules	63
3.3.3.4	Conclusions partielles . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Modélisation discrète en mécanique de la rupture - Approche isotrope en mode mixte</b>	<b>67</b>
4.1	Introduction . . . . .	68
4.2	Propagation de fissures en mode mixte - critère de la contrainte d'ouverture maximale . . . . .	68
4.3	Contraintes principales agissant entre deux contacts . . . . .	68
4.3.1	Rapport entre forces et contraintes moyennes . . . . .	68
4.3.1.1	Rapport entre les déplacements et les déformations moyennes	70
4.3.2	Contraintes principales . . . . .	70
4.3.3	Déformations principales . . . . .	72
4.3.4	Calcul de $\beta$ . . . . .	73
4.3.5	Évaluation des contraintes principales moyennes $\bar{\sigma}_I$ et $\bar{\sigma}_{II}$ . . . .	73
4.3.6	Critère de rupture - Calcul du facteur d'intensité des contraintes effectif $K_{\theta\theta}$ . . . . .	73
4.4	Vérification numérique . . . . .	74
4.4.1	Rupture en mode I - Traction simple . . . . .	74
4.4.2	Fissure biaxiale . . . . .	75
4.4.3	Fissuration de la poutre pré-fissurée - essai de flexion 4 points . . .	77
4.5	Conclusions partielles . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Rupture des matériaux sains</b>	<b>79</b>
5.1	Introduction . . . . .	80
5.2	Comportement uniaxial d'un matériau fragile . . . . .	80
5.2.1	Forces de contact . . . . .	80
5.2.2	Résistance à traction . . . . .	82
5.2.3	Résistance à compression . . . . .	83
5.2.4	Enveloppe de rupture . . . . .	85
5.3	Vérification du critère de rupture sous un état de contrainte homogène bi-axial . . . . .	86
5.4	Rupture par flexion . . . . .	88
5.5	Rupture par compression diamétrale . . . . .	91
5.6	Conclusion . . . . .	94

---

III Synthèses	97
A Compression diamétrale	105
Annexes	104
B Algorithme de calcul en DEM	109
C Matrice de rigidité globale du milieu discret	111
D Calcul de l'angle de branchement en fonction de facteurs d'intensité de contrainte par le critère de la contrainte d'ouverture maximale	119
Références	121

# Table des figures

1.1	Rupture fragile d'une structure maçonnée. . . . .	12
1.2	Fissure dans un milieu continu. . . . .	13
1.3	Modes de sollicitations d'une fissure. . . . .	14
1.4	Définition du repère local au voisinage de la pointe d'une fissure. . . . .	15
1.5	Champs de contraintes au voisinage d'une fissure. . . . .	16
1.6	Fissure sollicitée en mode mixte. . . . .	17
1.7	Fissure existante et bifurcation infinitésimale $\delta$ suivant un angle $\theta$ . . . . .	20
1.8	(a) Angle de propagation d'une fissure en mode mixte, et (b) le rapport entre les facteurs d'intensité $K_I$ et $K_{II}$ et la ténacité $K_{IC}$ correspondants [85]. Comparaison des différents critères. . . . .	21
1.9	Bande de fissure $h$ selon le gradient de contraintes : (a) sous fort gradient, proche d'une fissure, (b) sous faible gradient proche d'un défaut géométrique et (c) sous absence de gradient, en contrainte uniforme, [63].	22
1.10	Exemple d'éprouvette entaillée en $V$ , [63]. . . . .	23
1.11	(a) Contraintes principales et (b) l'enveloppe de rupture selon le critère de Rankine. . . . .	24
1.12	Enveloppe de rupture du critère de Mohr-Coulomb dans le plan de Mohr.	25
1.13	Enveloppe de rupture pour les critères de Mohr-Coulomb et Rankine. . .	25
1.14	Éprouvette de flexion en trois points. . . . .	26
1.15	Éprouvette compacte. . . . .	27
1.16	Essai de compression simple : (a) éprouvette de roche avant l'essai et (b) fissuration après l'essai. . . . .	28
1.17	(a) Schéma d'un essai de compression diamétral et les contraintes développées. (b) Exemple d'une éprouvette après l'essai, [2]. . . . .	29
1.18	Plaque carrée pré-fissurée et le maillage associé pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte, [18]. . . . .	30
1.19	(a) Fissuration d'une roche en compression. Comparaison d'une simulation par la MED : (b) dilatation d'échantillon, et (c) la distribution des fissures, [27]. . . . .	33
2.1	(a) Particules de forme circulaire [96] et (b) polygonale, [30]. . . . .	36
2.2	Les particules en interaction, [96] . . . . .	37

2.3	(a) Modèle d'interaction entre deux particules. Poutre encastrée modélisée par des approches (b) continue et (c) discrète [96]. . . . .	38
2.4	Déplacement normal (a), déplacement tangentiel (b) et les forces de contact (c) entre particule $i$ et $j$ . . . . .	39
2.5	Algorithme de calcul en MED. . . . .	40
2.6	Différentes structures microscopiques. (a) Distribution régulière et (b) irrégulière, [96]. . . . .	41
2.7	Loi de comportement du contact proposé par Potyondy et Cundall, [80]. . . . .	42
2.8	La distribution des forces et déplacements à la proximité d'une fissure, [80]. . . . .	43
2.9	Simulation numérique en $2D$ d'un matériau intact sous compression bi-axiale à (a) 3% , (b) 4% et (c) 8% de déformation, [35]. . . . .	43
3.1	Transition entre échelle micro à l'échelle macro, [51]. . . . .	49
3.2	(a) Console composée par un matériau élastique continu et (b) et sa modélisation discrète. . . . .	50
3.3	(a) Disposition compacte périodique de particules pour un modèle discret et (b) la cellule élémentaire associée. . . . .	50
3.4	(a) Force de contact et (b) déplacement associé. . . . .	51
3.5	Cellule élémentaire périodique . . . . .	51
3.6	(a) Déplacements relatifs des particules et (b) les efforts associés dans le système de coordonnées local. . . . .	52
3.7	(a) Déplacements relatifs des particules et (b) les efforts associés dans le système de coordonnées global. . . . .	53
3.8	(a) État bi-axial de contraintes homogènes et (b) les forces correspondantes appliquées sur la cellule élémentaire. . . . .	54
3.9	(a) Déformation appliquée sur la cellule et contrainte de cisaillement associée. (b) Composantes tangentielles des forces aux limites de la cellule. . . . .	56
3.10	Essai oedométrique du (a) milieu continu et (b) milieu discret . . . . .	57
3.11	Résultats théoriques et numériques pour (a) le module d'Young $E$ et pour (b) le coefficient de Poisson $\nu$ . La ligne continue représente la prédiction théorique, tandis que les carrés sont les résultats des simulations. . . . .	58
3.12	(a) Voisinage d'une fissure et (b) singularité de contraintes. . . . .	59
3.13	(a) Fissuration dans un milieu continu et (b) dans un milieu discret. . . . .	60
3.14	(a) Fissure représentée dans l'approche discrète. (b) Détail des particules en pointe de fissure qui composent un segment de propagation potentielle et (c) les forces de contact correspondantes. . . . .	61
3.15	Essai de traction de plaques pré-fissurées : (a) fissure simple et (b) fissure double. . . . .	62
3.16	Contrainte maximale $\Sigma^{max} \sqrt{L}/K_{IC}$ en fonction des longueurs initiales des fissures $a/L$ pour les cas de (a) fissure simple et (b) fissure double. Les lignes continues indiquent les expressions théoriques pour $\Sigma^{max}$ (Équation 3.14), tandis que les symboles représentent les différents niveaux de discrétisation : (■) $L/d = 11$ , (●) $L/d = 22$ , (▲) $L/d = 44$ , (▼) $L/d = 88$ . . . . .	63

3.17	Périodicité angulaire de la structure discrète. . . . .	64
3.18	Comportement du modèle discret en fonction de l'orientation angulaire de la structure. (a) Comportement élastique ( $E/E_0$ et $\nu/\nu_0$ ). (b) Comportement à la rupture ( $\Sigma^{max}/\Sigma_0^{max}$ ) pour (+) fissure simple et (▲) fissure double. . . . .	64
4.1	(a) Contacts adjacents à une (b) fissure en milieu discret. . . . .	69
4.2	Distribution des forces de contact dans le binôme considéré (a) et les forces résultantes de réaction (b). . . . .	69
4.3	(a) Dimensions pour le calcul des déformations moyennes. (b) Déplacements des contacts et déformations moyennes normale $\bar{\varepsilon}_{nn}$ et transversale $\bar{\varepsilon}_{tt}$ . . . . .	70
4.4	(a) Contraintes moyennes $\bar{\sigma}_n$ et $\bar{\sigma}_t$ et (b) leur rapport avec le champ de contraintes d'un milieu continu équivalent. . . . .	71
4.5	Cercles de Mohr associés à un état de contrainte $\bar{\sigma}_n$ et $\bar{\sigma}_t$ . . . . .	71
4.6	(a) Déformations moyennes dans un milieu discret et (b) dans un milieu continu. . . . .	72
4.7	Contrainte maximale $\Sigma^{max}\sqrt{L}/K_{IC}$ en fonction des longueurs initiales des fissures a/L pour les cas de (a) fissure simple et (b) fissure double pour différents niveaux de discrétisation (□) $L/d = 11$ , (○) $L/d = 22$ , (△) $L/d = 44$ , (▽) $L/d = 88$ , et (▼) $L/d = 88$ avec une rotation de la structure de particules d'un angle $\pi/6$ radians. Les lignes continues indiquent les expressions théoriques pour $\Sigma^{max}$ correspondant à l'Équation 3.14. . . . .	75
4.8	(a) Échantillon carré avec une fissure inclinée sous un chargement bi-axial. Les lignes pointillées indiquent la trajectoire de la propagation de la fissure. (b) Simulation de cette configuration et, en détail, (c) la prédiction théorique du branchement de la fissure. . . . .	76
4.9	(a) Poutre asymétrique pré-fissurée en flexion 4 points et (b) sa configuration finale de rupture pour $L/d = 22$ . . . . .	77
5.1	Diagramme contrainte-déformation uniaxial de la rupture fragile. . . . .	81
5.2	Les deux types de contacts et les combinaisons résultantes pour (a) un chargement vertical et (b) pour un chargement horizontal. . . . .	81
5.3	Fissuration orthogonal à la direction de traction maximale pour les cas (a) vertical et (b) horizontal. . . . .	83
5.4	(a) Fermeture et (b) ouverture de défauts elliptiques par compression. . . . .	84
5.5	Fissuration parallèle à la direction de compression maximale pour les cas (a) vertical et (b) horizontal. . . . .	85
5.6	(a) État de contrainte bi-axial et (b) l'enveloppe de la rupture correspondant. . . . .	86
5.7	(a) Schéma d'un essai de rupture bi-axiale et (b) modèle discret utilisé. . . . .	87
5.8	(a) Enveloppe de rupture fragile pour $\Sigma^c/\Sigma^{tr} = -10$ et (b) zoom sur le comportement en traction pour divers échantillons : (■) $L/d = 44$ , (▲) $L/d = 88$ , (●) $L/d = 176$ . . . . .	88

5.9	Comportement en traction pour $\Sigma^c/\Sigma^{tr} = -10$ et $\Sigma^c/\Sigma^{tr} = -5$ pour divers échantillons : (■) $L/d = 44$ , (▲) $L/d = 88$ , (●) $L/d = 176$ . . . . .	89
5.10	Configuration de la poutre en flexion 3 points. . . . .	89
5.11	Propagation de la fissure durant l'essai en flexion 3 points de la poutre en béton pour (a) $e = 0,086mm$ , (b) $e = 0,090mm$ , (c) $e = 0,11mm$ et (d) $e = 0,12mm$ . . . . .	90
5.12	Configuration de la poutre renforcée par une plaque métallique. . . . .	91
5.13	Fissuration dans la poutre en béton renforcé par une plaque métallique pour différents niveau de charge : (a) $q=19,50KN/m$ , (b) $q=19,56KN/m$ et (c) détail sur la fissuration horizontale due à la compression. . . . .	91
5.14	Configuration adopté pour l'essai de compression diamétrale. . . . .	92
5.15	Fissuration par traction durant un essai de compression diamétrale. $\Sigma^c = -50\Sigma^{tr}$ . . . . .	93
5.16	Propagation de la fissure de l'essai diamétral avec $\Sigma^c = -5\Sigma^{tr}$ . . . . .	94
5.17	Exemple de discrétisation variable pour optimiser le nombre de particules d'un modèle discret. . . . .	101
5.18	Comportement force-déplacement d'un contact élastoplastique. . . . .	102
5.19	(a) Poutre bi-appuyée chargée uniformément et (b) les zones plastifiés durant son chargement. . . . .	102
A.1	Géométrie et la notation de l'essai diamétral avec la charge répartie sur un arc. . . . .	105
A.2	Variation de la contrainte de traction le long l'axe $y$ pour l'essai de compression diamétrale sous la charge de répartition. Résultat pour l'équation de Hondros (ligne continue) et élément finis (dot). . . . .	106
A.3	Essai diamétral avec un chargement réparti. . . . .	107
A.4	Essai diamétral avec une éprouvette aplatie soumise à une charge uniforme. . . . .	108

# Liste des tableaux

1.1	Exemple de valeurs de la ténacité des matériaux. . . . .	17
5.1	Forces et déplacements relatifs des contacts sous un chargement uniaxial vertical $P_y$ . . . . .	82
5.2	Forces et déplacements relatifs des contacts sous un chargement uniaxial horizontal $P_x$ . . . . .	82
5.3	Valeurs des contraintes moyennes $\bar{\sigma}_n$ et $\bar{\sigma}_t$ , déformations moyennes $\bar{\varepsilon}_{nn}$ et $\bar{\varepsilon}_{tt}$ , $ \beta $ , des contraintes principales moyennes $\bar{\sigma}_I$ et $\bar{\sigma}_{II}$ pour chaque binôme de contacts sous le chargement vertical uniaxial $P_y = \sigma_{yy}d$ . . . . .	82
5.4	Valeurs des contraintes moyennes $\bar{\sigma}_n$ et $\bar{\sigma}_t$ , déformations moyennes $\bar{\varepsilon}_{nn}$ et $\bar{\varepsilon}_{tt}$ , $\beta$ , et des contraintes principales moyennes $\bar{\sigma}_I$ et $\bar{\sigma}_{II}$ pour chaque binôme de contacts sous le chargement horizontal uniaxial $P_x = \sqrt{3}\sigma_{xx}d$ . . . . .	82
5.5	Valeurs des contraintes principales moyennes $\bar{\sigma}_I$ et $\bar{\sigma}_{II}$ pour chaque binôme de contacts sous un chargement bi-axial. . . . .	86



# Notations principales

$d$	diamètre des particules
$\varepsilon$	déformation
$N$	force normale de contact entre particules
$T$	force tangentielle de contact entre particules
$k_n$	raideur normale de particule
$k_t$	raideur tangentielle de particule
$c_n$	amortisseur normal
$c_t$	amortisseur tangentiel
$m$	masse d'une particule
$E$	module d'Young du matériau
$\nu$	coefficient de Poisson du matériau
$K_I$	facteur d'intensité des contraintes en mode $I$
$K_{II}$	facteur d'intensité des contraintes en mode $II$
$K_{rr}, K_{r\theta}, K_{\theta\theta}$	facteurs d'intensité effectifs en mode mixte
$K_{IC}$	ténacité du matériau
$K^*$	ténacité fictive en compression du matériau
$G_C$	taux de restitution de l'énergie
$\theta_0$	angle de propagation de la fissure
$\Sigma^{tr}$	résistance en traction du matériau
$\Sigma^c$	résistance en compression du matériau
$\delta$	déplacement des particules
$\underline{\underline{K}}^l$	matrice de rigidité locale
$\underline{\underline{R}}$	matrice de rotation
$\underline{\underline{K}}^g$	matrice de rigidité globale
$\Sigma^{max}$	contrainte maximale avant la rupture
$\bar{\sigma}_n$	contrainte normale moyenne
$\bar{\sigma}_t$	contrainte tangentielle moyenne
$\bar{\varepsilon}_{nn}$	déformation normale moyenne
$\bar{\varepsilon}_{tt}$	déformation tangentielle moyenne
$\bar{\sigma}_I, \bar{\sigma}_{II}$	contraintes principales moyennes
$\bar{\varepsilon}_I, \bar{\varepsilon}_{II}$	déformations principales moyennes



# Introduction

Cette thèse a été réalisée dans le groupe comportement des ouvrages sous sollicitations complexe de l'équipe de Génie Civil du laboratoire ICube UMR 7357, à l'Institut de Sciences Appliquées de Strasbourg, avec un financement de la Région Alsace, Communauté Urbaine de Strasbourg.

## Problématique

Divers matériaux peuvent être assimilés à des matériaux fragiles selon le type de sollicitation auxquelles ils sont soumis ou la condition dans laquelle ils se présentent. Les roches, les céramiques, les verres, les bétons (non armés), par exemple, présentent normalement des niveaux de déformation très réduits avant leur rupture (perte de capacité à transmettre des efforts), s'ils sont comparés à des matériaux comme l'acier et certains polymères. On suppose usuellement qu'ils sont élastiques et linéaires jusqu'à un certain niveau d'effort limite au-delà duquel on admet une chute brutale de la résistance. Cette chute de résistance est souvent associée à l'apparition et à la propagation de fissures au sein du matériau, qui peuvent compromettre la stabilité globale ou partielle d'une structure.

Parmi les approches permettant de modéliser la propagation de fissures, la mécanique linéaire de la rupture reste aujourd'hui la plus utilisée en pratique. Les méthodes numériques en mécanique de la rupture se basent sur la comparaison de certaines grandeurs (taux de restitution de l'énergie ou facteurs d'intensité de contraintes) évaluées pour une géométrie et des sollicitations données, et comparées à des valeurs limites (énergie de rupture  $G_C$  ou ténacité du matériau  $K_{IC}$ ) propres à chaque matériau. Ce type de comparaison est en particulier mis en œuvre de façon répétitive pour la simulation pas à pas de la propagation d'une fissure pour une histoire de chargement donnée. Cette comparaison nécessite une évaluation précise de l'énergie ou des facteurs d'intensité de contrainte pour une configuration donnée.

À partir de ces critères, diverses méthodes numériques issues de la mécanique des milieux continus ont été adaptées pour étudier le comportement à la rupture des matériaux, comme par exemple, les méthodes des différences finies, des équations intégrales, des éléments finis, des éléments finis étendus (XFEM)... Les schémas les plus utilisés

se fondent sur la méthode des éléments finis (FEM). Son domaine d'application est le plus large : statique, dynamique, thermodynamique,... Néanmoins, certaines difficultés existent telles que la nécessité d'un raffinement important du maillage en fond de fissure ou le remaillage progressif lors de l'avancement du front de fissure. La méthode des éléments finis étendus (XFEM) simplifie considérablement ces aspects en particulier, par contre des questions au niveau de la convergence restent d'actualité. Une autre difficulté inhérente aux approches continues est l'intégration des critères de rupture macroscopiques (en l'absence de pré-fissuration) à la mécanique de la rupture classique.

En tenant compte des difficultés associées aux approches continues, on se propose d'utiliser la méthode des éléments discrets (ou distincts) dans l'étude de la rupture des matériaux fragiles. Dans cette approche, le matériau est décrit comme un ensemble de particules en contact, ce qui rend la rupture du matériau et la propagation de fissures assez intuitives. Les efforts dans le matériau sont transmis par des forces de contact. Un désavantage des modèles discrets, est l'absence usuelle de rapport direct entre les propriétés au niveau des contacts et les propriétés habituellement utilisées dans les approches continues. Cette différence conceptuelle demande souvent des essais de calibration des modèles discrets vis-à-vis des comportements attendus pour les matériaux.

## Objectif et démarche adoptée

Le principal objectif de cette thèse est de proposer une approche discrète capable de relier la rupture macroscopique (amorçage de fissures) à la propagation de fissures (mécanique de la rupture classique) du matériau fragile. Parallèlement ce modèle doit avoir un caractère pratique, en étant totalement compatible avec les approches continues, et ainsi, éviter des essais de calibration.

En adoptant donc un assemblage compact unique pour les particules (en deux dimensions), le comportement élastique d'un assemblage dépend uniquement des modules de raideur normale et tangentielle des contacts. Ces deux paramètres peuvent être directement définis en fonction des paramètres de l'élasticité linéaire isotrope, module d'Young et coefficient de Poisson (sans calibration). La bonne représentation du comportement élastique isotrope dans l'approche discrète est une base du comportement à la rupture fragile.

L'étude du comportement à la rupture est divisée en deux parties. La première partie concerne la propagation de fissures préexistantes, tandis que la deuxième partie traite de la résistance des matériaux sains (en absence de fissures apparentes).

La propagation d'une fissure se caractérise par la perte des forces de contacts qui assurent la cohésion du matériau. Dans l'approche discrète, on adopte le critère de la contrainte maximale, classiquement utilisé dans les approches continues pour les problèmes de fissuration en mode mixte (traction et cisaillement). L'analyse des forces des

---

deux contacts adjacents au voisinage d'une fissure permet l'obtention des expressions des facteurs d'intensité de contraintes au niveau des contacts. Ceci rend possible l'introduction directe de la ténacité comme paramètre du matériau. Si le facteur d'intensité normal atteint la valeur de la ténacité du matériau, le contact le plus tendu est rompu. La validation de la formulation est faite avec la comparaison des simulations numériques à des solutions classiques pour le mode  $I$  (ouverture de la fissure), le mode  $II$  (cisaillement) et le mode mixte.

Dans la deuxième partie, on commence par l'analyse de la cohérence du critère de rupture pour un matériau sain soumis à des états de contraintes bi-axiales de traction et compression homogènes. On identifie immédiatement le rapport direct entre la ténacité et la taille des particules, et la résistance à la traction. Pour les contraintes de compression, le critère discret admet des valeurs négatives pour les facteurs d'intensité de contraintes. Cette apparente incohérence permet de dissocier clairement l'effet des efforts de compression et l'effet des efforts de traction, à l'échelle des contacts. En imposant des limites négatives pour ces facteurs de contraintes apparents négatifs, on devient capable de contrôler directement la résistance à la compression.

## Plan de la thèse

Ce mémoire s'articule en cinq chapitres. Le premier chapitre a pour but de présenter les notions essentielles de la mécanique de la rupture. On présente les méthodes numériques les plus utilisées pour la modélisation des matériaux fragiles, ses avantages et désavantages.

Dans le deuxième chapitre, on approfondit la discussion sur l'utilisation de la méthode des éléments discrets (MED) à l'étude du comportement à la rupture. Des notions fondamentales sur cet outil de modélisation sont présentées ainsi que les difficultés plus couramment rencontrées.

Le troisième chapitre traite de l'approche discrète en mécanique de la rupture initialement étudiée. Globalement, l'analyse repose sur le rapport entre les paramètres du modèle discret et ceux de la mécanique des milieux continus. À partir de cet aspect, on propose un critère de rupture fragile en mode  $I$  basé sur l'étude des forces agissantes sur deux contacts adjacents. À la fin, on discute le problème d'anisotropie observé dans ce cas.

On généralise le critère de rupture au cas de sollicitations en mode mixte (mode  $I$  et mode  $II$ ) dans le chapitre quatre. La prise en compte additionnelle des déplacements relatifs des particules au niveau des contacts permet le calcul des contraintes principales (aussi bien que leurs orientations), en apportant ainsi une réponse à la question de l'anisotropie rencontrée avec l'approche initiale (Chapitre 3).

Au cinquième chapitre, on aborde l'extension du modèle de rupture discret à l'étude du comportement des matériaux sains (non pré-fissurés) soumis à des états de contraintes (traction et compression) bi-axiaux. On déduit ainsi leur enveloppe de rupture en proposant un critère d'amorçage des fissures pertinent.

On termine la thèse en présentant les conclusions du travail et ses perspectives.

Première partie

**État des connaissances**



# Chapitre 1

## Fissuration et rupture

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1.2</b>	<b>Historique</b>	<b>11</b>
<b>1.3</b>	<b>Notions fondamentales de la mécanique de la rupture</b>	<b>12</b>
1.3.1	Les modes d'ouverture d'une fissure	13
1.3.2	Analyse asymptotique	14
1.3.2.1	Lien entre description énergétique et singularité	15
<b>1.4</b>	<b>Propagation de fissures</b>	<b>16</b>
1.4.1	Propagation de la fissure en mode $I$ - ténacité du matériau	16
1.4.2	Propagation de fissures en mode mixte ( $2D$ )	17
1.4.2.1	Critère de la contrainte d'ouverture maximale	17
1.4.2.2	Critère de densité d'énergie minimale	18
1.4.3	Critère de taux de restitution d'énergie maximale	19
1.4.4	Comparaison des différents critères	20
<b>1.5</b>	<b>De l'apparition des fissures à la rupture du matériau</b>	<b>20</b>
<b>1.6</b>	<b>Modélisation de la rupture fragile des matériaux</b>	<b>23</b>
1.6.1	Critère de Rankine ou de la contrainte normale maximale	24
1.6.2	Critère de Mohr-Coulomb	24
<b>1.7</b>	<b>Méthodes expérimentales pour la caractérisation des matériaux</b>	<b>26</b>
1.7.1	Mesure de ténacité ( $K_{IC}$ )	26
1.7.2	Compression simple	27
1.7.3	Essai triaxial	27
1.7.4	Compression diamétrale	28
<b>1.8</b>	<b>Méthodes numériques pour la modélisation de la fissuration et de la rupture des matériaux</b>	<b>30</b>
1.8.1	Méthode des éléments finis (MEF)	30
1.8.2	Méthode des éléments finis étendus (X-FEM)	31
1.8.3	Méthode des éléments de frontières	31
1.8.4	Méthode sans maillage	31

---

1.8.5	Méthode des zones cohésives . . . . .	32
1.8.6	Méthode des éléments discrets (MED) . . . . .	32
<b>1.9</b>	<b>Conclusions partielles . . . . .</b>	<b>33</b>

---

## 1.1 Introduction

La rupture des matériaux est un problème important en science des matériaux et en ingénierie. La capacité portante d'une structure et sa durée de vie y sont fortement liées. Ce premier chapitre a pour but de présenter les notions essentielles de la rupture linéaire et les critères de propagation de fissures adaptés aux matériaux fragiles. On y discute certains points de la caractérisation expérimentale des matériaux ainsi que les méthodes numériques le plus utilisées dans l'analyse de structures vis à vis de la rupture.

## 1.2 Historique

Durant la seconde moitié du 19<sup>ème</sup> siècle, l'usage de l'acier et d'autres alliages métalliques se développa considérablement. Avec cet essort se multiplièrent aussi les accidents dus à l'utilisation inadéquate de ces matériaux, à des faiblesses de conception et dimensionnement. Certains de ces accidents, de part leur soudaineté et leur brutalité, défrayèrent à raison la chronique.

L'un des premiers incidents enregistré sur une structure importante fut la rupture d'une chaîne du pont suspendu Montrose en mars 1830 en Grande Bretagne. Depuis, il y a eu un nombre important d'effondrements de ponts, dont le King's Bridge à Melbourne (1962) ou encore le Point Pleasant Bridge en Virginie (1967). Les accidents ferroviaires dus à une rupture brutale des essieux, des roues ou encore des rails ont également été très nombreux. Entre 1860 et 1870, le nombre de personnes victimes d'accidents de train en Grande Bretagne s'élevait environ à 200 par an. De nombreux accidents intervinrent également sur des pipelines, ou encore sur des avions. En janvier 1919, un énorme réservoir de molasse, de 27 mètres de diamètre et 15 mètres de hauteur se déchira soudainement, répandant 7,5 millions de litres de molasse dans les rues de Boston (USA). Douze personnes trouvèrent la mort et une quarantaine furent blessées dans cet accident. Dans les années 30 et 40, plusieurs ponts franchissant le canal Albert, en Belgique, furent victimes de rupture. De nombreux autres accidents ont été rapportés, ce ne fut qu'au cours de la seconde guerre mondiale que l'on commença à sérieusement considérer le problème de la rupture.

Les débuts de l'étude de la rupture des matériaux fragiles (qui se déforment peu avant de se rompre) remontent aux années 1920, avec les travaux précurseurs de Griffith [42], ses études réalisées dans un milieu élastique fissuré, d'un point de vue énergétique. Il a ainsi mis en évidence une variable (appelée plus tard taux de restitution d'énergie) caractérisant la rupture, et dont la valeur critique est une caractéristique du matériau. Mais ces travaux sont tombés dans un oubli relatif avant d'être exhumés dans les années 1950 – 1960, lorsque la discipline a réellement pris son essor (travaux d'Irwin et de Rice). Ces études ont donné la définition des facteurs d'intensité de contraintes, caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit.

Entre 1960 et 1980, la mécanique de la rupture connaît un grand succès scientifique, avec notamment l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui a permis de mieux prendre en compte le comportement plastique des matériaux. De nombreux travaux sont publiés à cette période ; on peut citer par exemple Rice [84] et Bui [22] qui introduisent la notion d'intégrales indépendantes du contour telles que l'intégrale  $J$ , dont les propriétés ont permis de caractériser la ténacité d'un matériau lorsque la plasticité n'est plus confinée à la pointe de fissure. Tous les développements théoriques réalisés à cette époque ont permis de déterminer la forme exacte de la singularité, et des champs asymptotiques en pointe de fissure nécessaires à l'analyse et à l'interprétation des résultats expérimentaux. De plus, ils représentent une solution précise à de nombreux problèmes de géométries simples, et peuvent donc être utilisés comme solutions approchées pour des problèmes plus complexes.

Le domaine d'application de cette théorie ne se limite pas aux structures métalliques. Elle s'applique également aux roches, aux bétons, aux céramiques et aux polymères (dans une certaine gamme de température). Les échelles d'application sont également très diverses puisqu'elles vont des microsystèmes (Silicium) à la géomécanique de l'écorce terrestre (création et propagation de failles). La Figure 1.1 présente la rupture fragile d'une structure en maçonnerie.



**Figure 1.1** – *Rupture fragile d'une structure maçonnée.*

### 1.3 Notions fondamentales de la mécanique de la rupture

La rupture des structures ou des composants de systèmes a, en effet, des conséquences colossales en termes de coût. Tous les matériaux contiennent des défauts. Certains de ces

défauts perturbent le champ des contraintes et créent des concentrations de contraintes qui favorisent la formation des fissures. Les matériaux fragiles sont particulièrement sensibles à la présence des défauts.

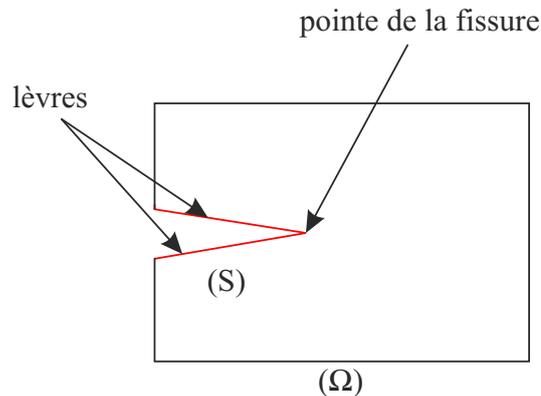
La mécanique de la rupture permet de prévoir les conditions de la rupture des matériaux et des structures, lorsqu'ils contiennent une fissure. La mécanique de la rupture est l'étude des fissures macroscopiques. Elle permet de déterminer les champs de contraintes et de déformations et d'exprimer les conditions de propagation des fissures. Elle propose des relations entre les contraintes et la longueur des fissures macroscopiques en fonction des caractéristiques du matériau. La longueur et la position de la fissure au sein du solide ou de la structure doivent être préalablement connues.

La mécanique linéaire de la rupture par fissuration est fondée sur une analyse élastique du champ des contraintes en petites déformations. L'analyse des contraintes et des déformations au voisinage des pointes ou fronts de fissures constitue une base nécessaire pour étudier le comportement des fissures.

### 1.3.1 Les modes d'ouverture d'une fissure

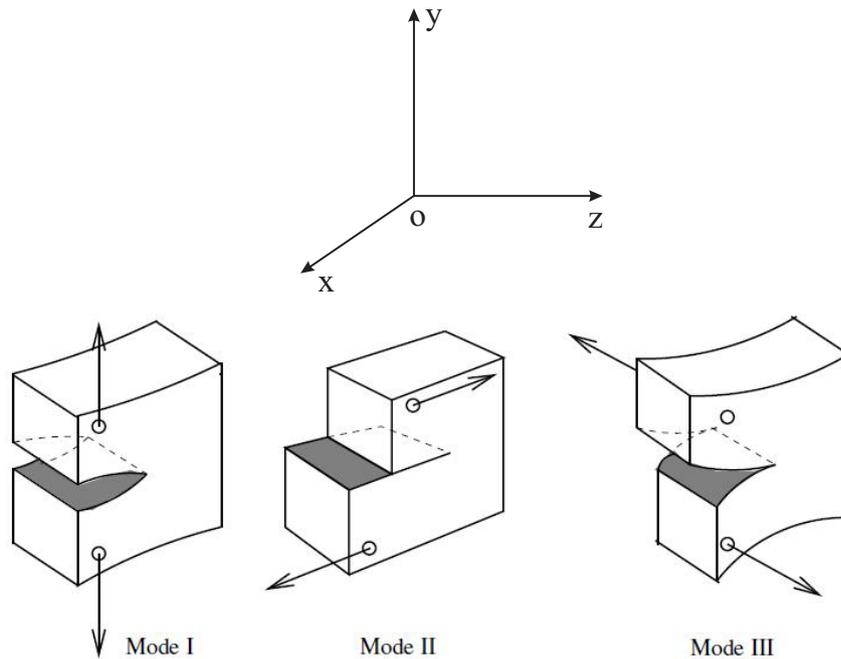
La théorie de la fissuration décrit le comportement des solides ou structures présentant des discontinuités linéiques dans les milieux considérés comme bidimensionnels (plaques, coques), discontinuités surfaciques dans les milieux tridimensionnels et permet de prévoir son évolution jusqu'à la rupture complète de la structure.

Localement, la rupture est caractérisée par la séparation irréversible d'un milieu continu ( $\Omega$ ) en deux parties distinctes. On définit alors une fissure comme étant la surface géométrique ( $S$ ) de séparation (Figure 1.2)



**Figure 1.2** – *Fissure dans un milieu continu.*

La forme de la discontinuité du champ de déplacements à travers cette surface définit alors trois modes de rupture (Figure 1.3) [48] :



**Figure 1.3** – *Modes de sollicitations d'une fissure.*

- **Mode I** : un déplacement unique suivant  $Oy$  correspond à un problème plan particulier, désigné par le mode  $I$ . Ce mode est, le plus souvent, le plus dangereux. Il s'apparente au déplacement produit par une dislocation rectiligne coin parallèle au front de la fissure.

- **Mode II** : il est engendré par un cisaillement dans le plan de la fissure et parallèle à l'axe  $Ox$ . Il s'apparente au déplacement produit par une dislocation rectiligne coin parallèle au front de la fissure.

- **Mode III** : il est produit par un cisaillement antiplan, situé dans le plan de la fissure  $Oxz$  parallèle à l'axe  $Oz$ . Il s'apparente au déplacement produit par une dislocation vis parallèle au front de la fissure.

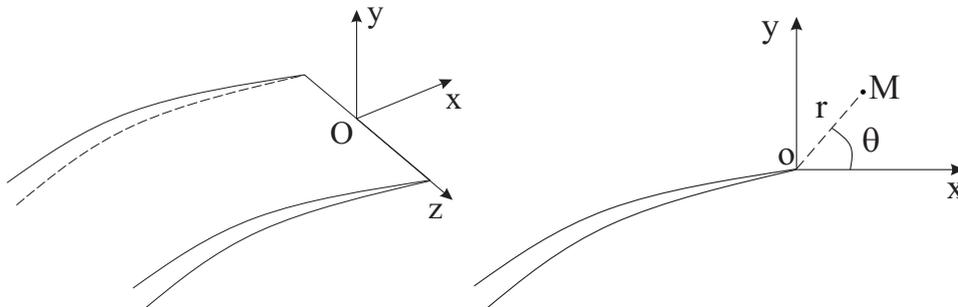
Ce dernière mode est résolu par une représentation  $3D$  anti-plane, tandis que les deux précédents sont résolus par une analyse  $2D$  en contrainte ou en déformation plane.

### 1.3.2 Analyse asymptotique

On considère un matériau homogène et isotrope dont le comportement est élastique linéaire. On note  $E$  son module d'Young et  $\nu$  son coefficient de Poisson.

Conformément à la Figure 1.4, on se place dans le plan  $Oxy$ , plan de symétrie de

la fissure. L'axe  $Ox$  est tangent au plan de la fissure et normal au front. L'axe  $Oy$  est perpendiculaire au plan de la fissure. On définit également les coordonnées locales  $(r, \theta)$ . Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x, y)$  dans le plan  $Oxy$ , on a  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ .



**Figure 1.4** – Définition du repère local au voisinage de la pointe d'une fissure.

En élasticité plane, l'approche de Westergaard [101], reprise dans les ouvrages de Bui [23] et Tada [94], permet d'obtenir, à l'aide des fonctions d'Airy, les déplacements et les contraintes au voisinage de la pointe de la fissure.

Les déplacements s'écrivent (en coordonnées polaires) [59] :

$$\begin{cases} u_r = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [(5 - 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2}] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [(-5 + 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2}], \\ u_\theta = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [(-7 + 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2}] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [(-7 + 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2}]. \end{cases} \quad (1.1)$$

Pour les contraintes (en coordonnées polaires, Figure 1.5), on a :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2}\right), \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $K_I$  et  $K_{II}$  sont les facteurs d'intensité des contraintes en mode  $I$  (ouverture de la fissure) et mode  $II$  (cisaillement pur) respectivement. Les termes dominants de l'Équation 1.2 sont proportionnels à  $1/\sqrt{r}$ . Les contraintes sont théoriquement infinies en pointe de fissure ( $r = 0$ ). Les facteurs d'intensité de contrainte, fonctions à la fois du chargement et de la géométrie, permettent de caractériser la sévérité des contraintes en pointe de fissure.

### 1.3.2.1 Lien entre description énergétique et singularité

Dans la cadre de l'élasticité linéaire quasi-statique et des petites perturbations, le taux de restitution d'énergie (par unité de surface de propagation d'une fissure)  $G$  et les facteurs d'intensité de contraintes associés à une pointe de fissure sont reliés par la formule d'Irwin (en contrainte plane) :

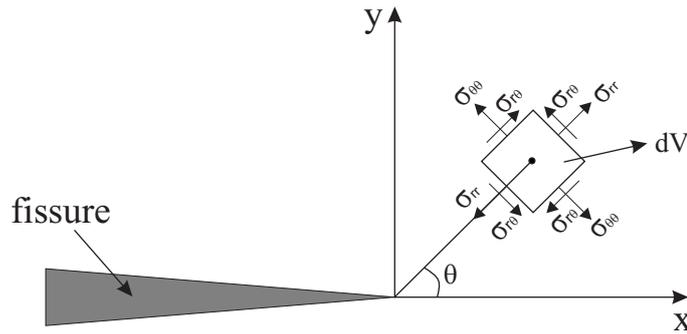


Figure 1.5 – Champs de contraintes au voisinage d'une fissure.

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E}. \quad (1.3)$$

## 1.4 Propagation de fissures

On présente ici quelques critères classiques utilisés dans la détermination du niveau de sollicitation qui entraîne la propagation d'une fissure, ainsi que la direction que cette propagation se donne.

### 1.4.1 Propagation de la fissure en mode $I$ - ténacité du matériau

Le critère de propagation de fissure proposé par G.Irwin [48] porte sur les facteurs d'intensité des contraintes, et plus précisément sur le mode  $I$ , qui est le mode d'ouverture, caractérisé par le facteur d'intensité  $K_I$ . Ce mode est intuitivement le plus dangereux.

Irwin postule qu'il existe une valeur critique de  $K_I$ , appelée ténacité (et notée  $K_{IC}$ ), en deçà de laquelle la fissure n'évolue pas. Une fois cette valeur critique atteinte, la fissure avance. La ténacité  $K_{IC}$  est une caractéristique du matériau, indépendante de la géométrie ou du chargement de l'éprouvette. En résumé :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } K_I < K_{IC} & \text{aucune évolution de la fissure} \\ \text{si } K_I = K_{IC} & \text{la fissure avance} \end{array} \right. \quad (1.4)$$

On trouvera dans le Tableau 1.1 des ordres de grandeur de la ténacité de quelques matériaux courants [93].

Cette relation établit en particulier un lien entre la ténacité  $K_{IC}$  associée à la propagation en mode  $I$  (ouverture de la fissure) pur et le taux de restitution d'énergie critique

Alliage d'aluminium	$K_{IC} \simeq 30MPa\sqrt{m}$
Alliage de titane	$K_{IC} \simeq 100MPa\sqrt{m}$
Acier trempé	$K_{IC} \simeq 120MPa\sqrt{m}$
Polymère	$K_{IC} \simeq 3MPa\sqrt{m}$
Bois	$K_{IC} \simeq 2MPa\sqrt{m}$
Béton	$K_{IC} \simeq 1MPa\sqrt{m}$

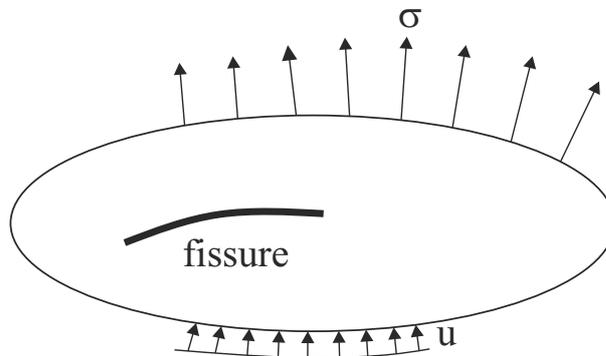
**Table 1.1** – Exemple de valeurs de la ténacité des matériaux.

$G_C$  qui représente l'énergie nécessaire à la création d'une unité de nouvelles surfaces libres en pointe de fissure (en contrainte plane) :

$$G_C = \frac{K_{IC}^2}{E}. \quad (1.5)$$

### 1.4.2 Propagation de fissures en mode mixte (2D)

Lorsqu'une fissure est soumise en même temps à plusieurs modes de chargement (Figure 1.6), on cherche l'intensité de la sollicitation à laquelle la rupture se produit, et la direction dans laquelle la fissure se propage. Pour cela, on doit faire appel à un critère de rupture. On va détailler un critère qui dépend du champ de contrainte uniquement et deux critères énergétiques. Ensuite on présente une comparaison des trois critères.



**Figure 1.6** – Fissure sollicitée en mode mixte.

#### 1.4.2.1 Critère de la contrainte d'ouverture maximale

Par analogie avec le critère de Irwin, Erdogan et Sih [37] ont proposé le critère suivant :

*"Au moment de la rupture, la propagation de la fissure se fera dans le plan passant par le front de la fissure et au travers duquel la contrainte de tension est maximale et*

pour une valeur critique de cette contrainte".

Le critère peut s'écrire simplement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} \leq 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

La contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale lorsque la contrainte de cisaillement s'annule, vu que celle-là est une contrainte principale. En simplifiant  $\sigma_{r\theta} = 0$  (à partir de Équation 1.2) on obtient :

$$K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0, \quad (1.7)$$

dont la solution permet de calculer l'angle de propagation  $\theta_0$  de la fissure. La formule prévoit pour le mode  $I$  pur ( $K_{II} = 0$ )  $\theta_0 = 0^\circ$ , tandis que pour le mode  $II$  pur ( $K_I = 0$ ),  $\theta_0 = 70,5^\circ$ .

Mandel, d'après [23] réécrit les contraintes sous la forme :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_{\theta\theta}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}}, \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \frac{K_{r\theta}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}}, \end{cases} \quad (1.8)$$

en définissant des facteurs d'intensité effectifs :

$$\begin{cases} K_{\theta\theta}(\theta) = K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + K_{II} \left(-\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2}\right); \\ K_{r\theta}(\theta) = K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + K_{II} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2}\right). \end{cases} \quad (1.9)$$

La fissure se propage donc selon la direction où la valeur  $K_{r\theta}(\theta)$  est nulle, et lorsque  $K_{\theta\theta}(\theta)$  atteint la valeur de la ténacité du matériau  $K_{IC}$  ( $K_{r\theta}(\theta_0) = 0$  et  $K_{\theta\theta}(\theta_0) = K_{IC}$ ).

#### 1.4.2.2 Critère de densité d'énergie minimale

Sih [91] a proposé le critère de la densité d'énergie minimale : "*l'amorçage de la propagation se produit dans la direction radiale le long de laquelle la densité d'énergie de déformation est minimale et atteint sa valeur critique*". Dans un élément de volume  $dV$  (Figure 1.5) centré au point de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , l'énergie de déformation  $dW$  peut s'écrire :

$$\frac{dW}{dV} = \frac{S(\theta)}{r}, \quad (1.10)$$

avec  $S(\theta)$  la densité d'énergie de déformation s'écrivant :

$$S(\theta) = \frac{1}{\pi} (a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2),$$

où

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{1}{16\mu}[(1 + \cos \theta)(\kappa - \cos \theta)], \\ a_{12} = \frac{\sin \theta}{16\mu}[2 \cos \theta - (\kappa - 1)], \\ a_{22} = \frac{1}{16\mu}[(\kappa + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)], \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \kappa = 3 - 4\nu, & \text{en déformation plane,} \\ \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, & \text{en contrainte plane.} \end{cases}$$

Le critère de propagation s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \geq 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

à  $\theta = \theta_0$ .

La valeur critique de la densité d'énergie de déformation vaut

$$S(\theta_0) = S_{cr} = \frac{(1 - 2\nu)K_{IC}^2}{4\pi\mu}. \quad (1.12)$$

Ce critère prévoit pour le mode I pur  $\theta_0 = 0^\circ$ , tandis que pour le mode II pur il prévoit  $\theta_0 = 79,2^\circ$ .

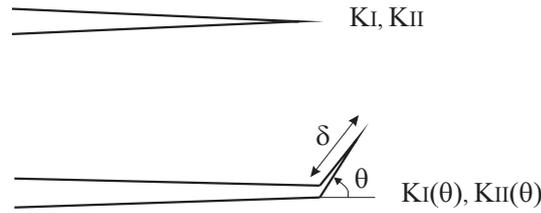
### 1.4.3 Critère de taux de restitution d'énergie maximale

Dans son modèle original, Erdogan et Sih [37] ont considéré que :

*Si nous acceptons la théorie de l'énergie de Griffith comme critère valable qui explique la propagation d'une fissure, alors celle-ci devra se développer dans la direction le long de laquelle le taux de restitution de l'énergie élastique engendrée par son extension sera maximal. La fissure commence à se propager lorsque cette énergie  $G$  atteint une valeur critique.*

On suppose une fissure soumise à un chargement qui induit des facteurs d'intensité  $K_I$  et  $K_{II}$ . Lors de la propagation de cette fissure, une bifurcation infinitésimale  $\delta$  se produit selon un angle  $\theta$  (Figure 1.7). Hussain et al. [47] montrent que les nouvelles valeurs des facteurs d'intensité de contrainte dépendent uniquement de  $\theta$  ( $K_I(\theta)$  et  $K_{II}(\theta)$ ) et des facteurs d'intensité de la fissure d'origine [85] :

$$\begin{pmatrix} K_I(\theta) \\ K_{II}(\theta) \end{pmatrix} = \left( \frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \right) \left( \frac{1 - \frac{\theta}{\pi}}{1 + \frac{\theta}{\pi}} \right)^{\frac{\theta}{2\pi}} \begin{pmatrix} K_I \cos \theta + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \\ K_{II} \cos \theta - \frac{1}{2} K_I \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.13)$$



**Figure 1.7** – Fissure existante et bifurcation infinitésimale  $\delta$  suivant un angle  $\theta$ .

Le taux de restitution d'énergie vaut, selon la direction de propagation  $\theta$  :

$$G(\theta) = \frac{1}{E}(K_I(\theta)^2 + K_{II}(\theta)^2). \quad (1.14)$$

L'angle de propagation de la fissure est celui pour lequel  $G(\theta)$  est maximal

$$\begin{cases} \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial \theta^2} < 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

La propagation de la fissure se produit lorsque  $G$  atteint une valeur critique ( $G_C = K_{IC}^2/E$ ). Pour le mode I pur, ce critère prédit  $\theta_0 = 0^\circ$ , tandis que pour le mode II pur,  $\theta_0 = 75,2^\circ$ .

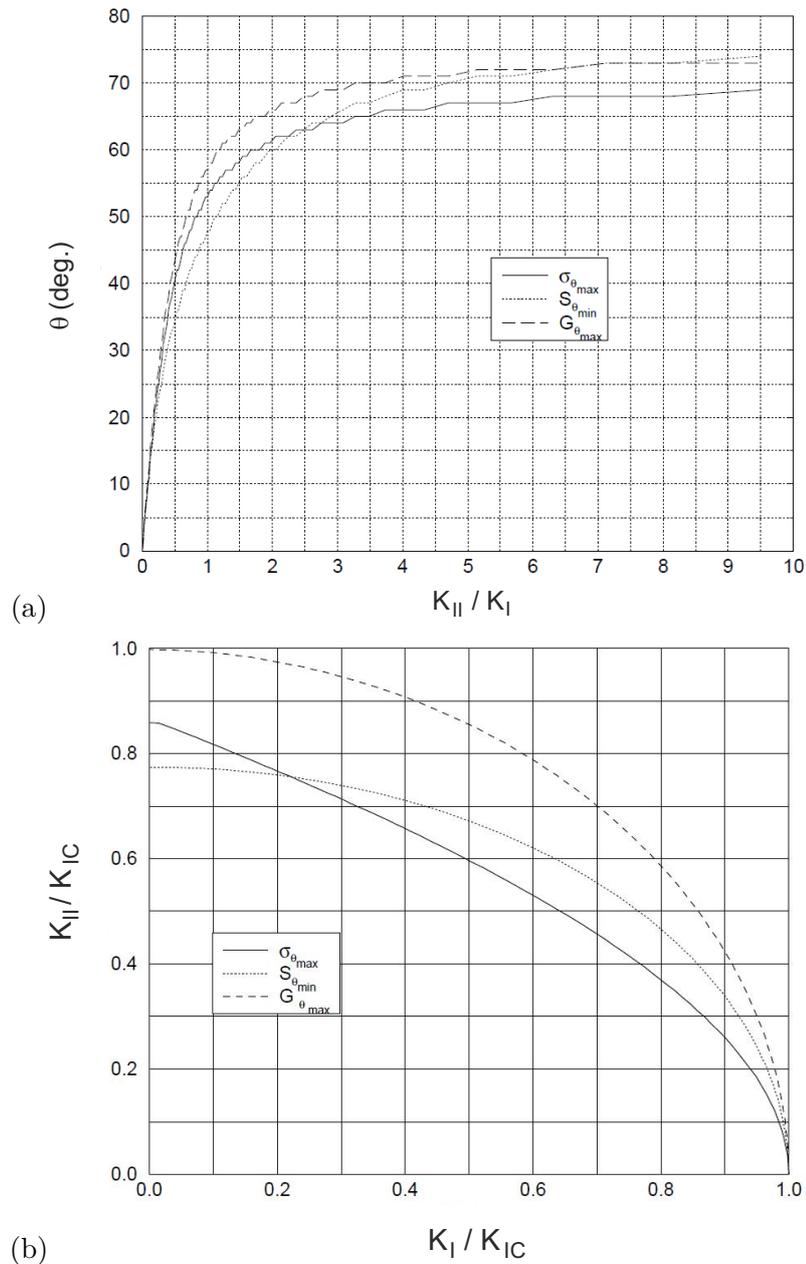
#### 1.4.4 Comparaison des différents critères

On présente sur la Figure 1.8 une comparaison des résultats des trois critères discutés précédemment au niveau de l'angle de propagation  $\theta_0$  et du rapport entre les facteurs d'intensité  $K_I$  et  $K_{II}$  et la ténacité  $K_{IC}$  lors de la fissuration. On y observe que les prévisions pour la direction de propagation ne diffèrent pas substantiellement entre les différents critères. Malgré certaines différences par rapport aux sollicitations capables de déclencher la fissuration, les trois critères concordent bien pour des rapports  $K_{II}/K_I$  relativement petits. En outre, sachant qu'une fissure tend à s'orienter selon la direction qui minimise  $K_{II}/K_I$ , dans les cas pratiques les différences observées peuvent être négligées [85].

## 1.5 De l'apparition des fissures à la rupture du matériau

Un matériau (ou une structure) sans défauts ne peut pas être étudié dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, vu que celle-ci prévoit une résistance infinie, dans ce cas, ce qui n'est pas réaliste. Par contre, tous les matériaux (et donc les structures) présentent des défauts, même invisibles à l'œil (micro-fissures), et qui induisent des valeurs limites de résistance.

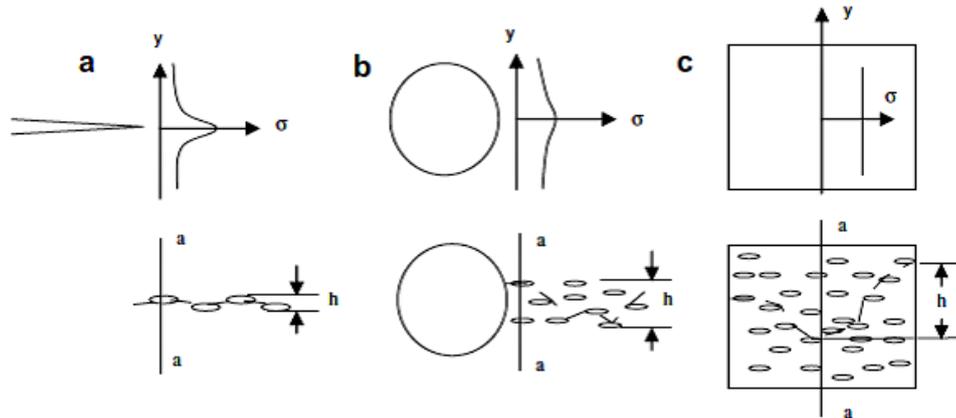
Bazant et al. [11, 12] ont étudié la concentration de contraintes causée par des micro-fissures en proposant la notion de bande de fissures (de l'épaisseur  $h$ ). Lorsque le gradient



**Figure 1.8** – (a) Angle de propagation d'une fissure en mode mixte, et (b) le rapport entre les facteurs d'intensité  $K_I$  et  $K_{II}$  et la ténacité  $K_{IC}$  correspondants [85]. Comparaison des différents critères.

de contraintes est élevé (proche d'une fissure, par exemple)  $h$  tend à être petit, tandis qu'en contrainte homogène,  $h$  comprend tout le matériau (Figure 1.9).

Lorsque  $h$  est petit, la mécanique de la rupture s'applique bien ; le comportement du matériau dépend globalement de la ténacité. D'un autre côté, lorsque  $h$  est grand, la prise en compte de micro-fissures individuellement n'est pas viable, et donc l'utilisation des critères (phénoménologiques) de rupture des matériaux (Rankine, Mohr-Coulomb...) est plus pratique. La difficulté réside normalement dans la description des situations intermédiaires entre les deux approches (micro et macroscopique).



**Figure 1.9** – Bande de fissure  $h$  selon le gradient de contraintes : (a) sous fort gradient, proche d'une fissure, (b) sous faible gradient proche d'un défaut géométrique et (c) sous absence de gradient, en contrainte uniforme, [63].

Certains auteurs proposent des critères permettant de traiter la rupture en traction [75, 60, 61, 63]. Novozhilov [75] propose un critère de rupture simple basé sur la contrainte normale moyenne le long de la trajectoire prévue de la formation de fissures. Ce critère est examiné par Seweryn [89] par des expérimentations effectuées sur des échantillons à entaille en  $V$  (Figure 1.10).

Dans cette géométrie, la variation de l'angle  $\beta$  permet l'étude systématique de la transition entre rupture par fissuration ou rupture du matériau, la rupture à la rupture en contrainte homogène. Pour  $\beta = 0^\circ$ , on se trouve exactement dans le cadre de la mécanique de la rupture, tandis que pour  $\beta = 90^\circ$ , on est plutôt dans le cadre d'une rupture en contrainte homogène.

En combinant le critère d'énergie de Griffith pour une fissure et un critère de résistance en l'absence de défauts, Leguillon [60, 61] propose un critère similaire à celui de Novozhilov et qui montre une bonne cohérence avec des valeurs expérimentales. Par contre, selon l'étude de Li [62], ces prévisions pour les défauts intermédiaires sous-estiment la charge de rupture du matériau fragile.

En se basant sur les études précédentes, Zhang [63] présente une bonne cohérence avec

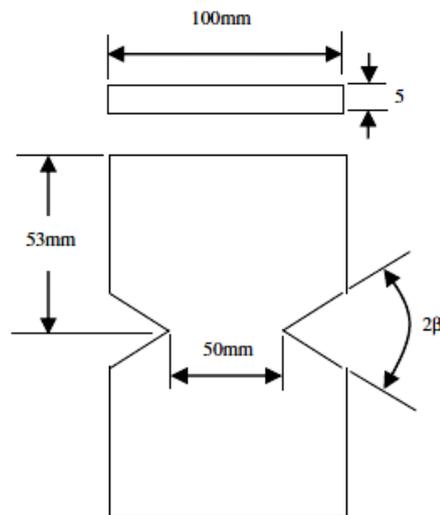


Figure 1.10 – Exemple d'éprouvette entaillée en V, [63].

des résultats expérimentaux de traction d'éprouvettes entaillées en V avec un modèle à trois paramètres. En plus de la résistance à traction et de la ténacité pour la caractérisation du matériau, le modèle nécessite une valeur de ténacité, dite sous contrainte uniforme.

Tous ces critères représentent des avancées dans la caractérisation des matériaux et la modélisation des défauts, par contre ceux-la restent associés uniquement aux cas de rupture par traction. La rupture et la propagation des fissures induites par des contraintes de compression constitue un problème encore plus complexe.

## 1.6 Modélisation de la rupture fragile des matériaux

En absence de fissures, la rupture des matériaux fragiles dépend surtout du champ de contraintes. Durant la rupture, lorsque le matériau dépasse sa limite élastique, le matériau tend à se déformer d'avantage. Diverses études [26, 38, 45, 58, 77, 102] utilisent la théorie de la plasticité pour prédire la rupture d'un matériau fragile. Bien que les déformations plastiques soient négligeables en rupture fragile, la théorie de la plasticité peut être appliquée à partir du point de vue phénoménologique. Dans ce cadre, la modélisation de la rupture fragile demande l'utilisation d'une approche en déformation avec adoucissement, avec une chute brutale de la contrainte (à partir de sa valeur maximale) [55, 56].

On discute dans la suite, les critères de rupture de Rankine et de Mohr-Coulomb et leurs comportements sous contraintes bi-axiales, étant donnée leur simplicité. Bien évidemment que d'autres critères méritent d'être mentionnés pour leur intérêt pratique,

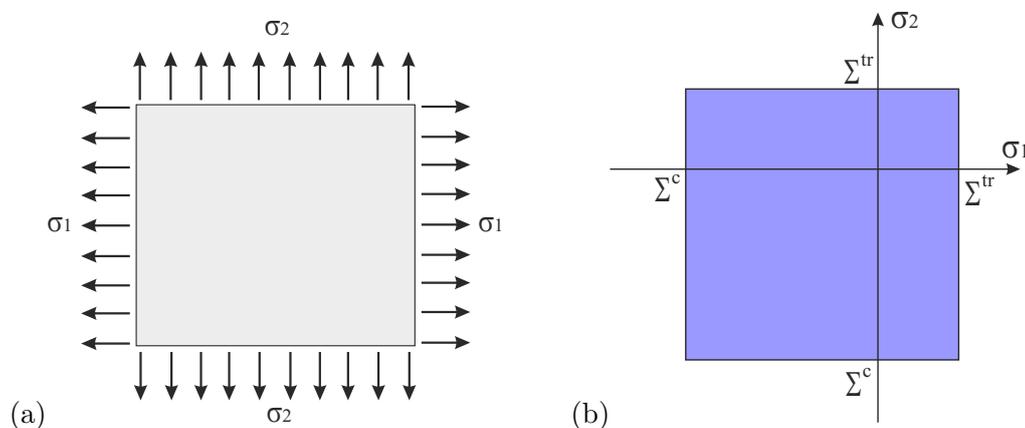
comme Drucker-Prager (et ses dérivés), utilisé dans la modélisation du béton ; ou le critère de Hoek-Brown en mécanique des roches, par exemple.

### 1.6.1 Critère de Rankine ou de la contrainte normale maximale

Selon le critère de Rankine [83], le solide reste dans le domaine élastique tant que la contrainte principale maximale est inférieure à la résistance à la traction uniaxiale ( $\Sigma^{tr}$ ), ou à la résistance en compression ( $\Sigma^c$ ) :

$$\Sigma^c < \{\sigma_1, \sigma_2\} < \Sigma^{tr} \quad (1.16)$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des contraintes principales (en  $2D$ ). L'enveloppe de rupture donnée par la théorie de Rankine est présentée sur la Figure 1.11.



**Figure 1.11** – (a) Contraintes principales et (b) l'enveloppe de rupture selon le critère de Rankine.

La théorie de Rankine peut s'appliquer aux matériaux fragiles qui présentent une défaillance en traction et en compression. Son principal point négatif est l'absence de prise en compte de l'effet de la contrainte de cisaillement ou de la différence des contraintes principales.

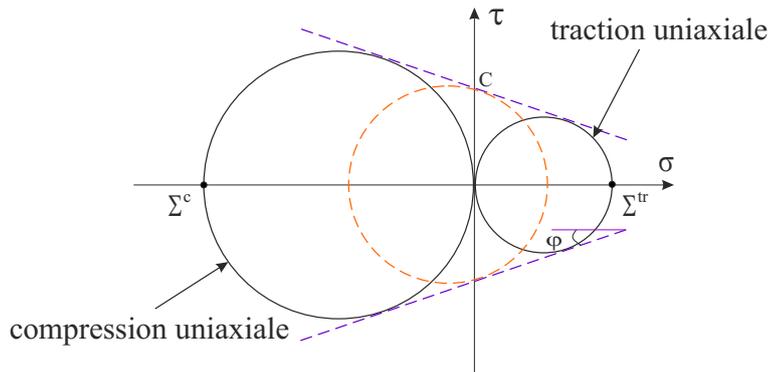
### 1.6.2 Critère de Mohr-Coulomb

Le critère de Mohr-Coulomb suggère que la défaillance d'un matériau fragile se produit lorsque le cercle de Mohr (associé à un état de contraintes) dépasse l'enveloppe créée par deux autres cercles de Mohr : un pour la résistance à la traction uniaxiale (contrainte de traction limite  $\Sigma^{tr}$ ) et l'autre pour la résistance à la compression uniaxiale (contrainte de compression limite  $\Sigma^c$ ), comme indiqué sur la Figure 1.12. Le cercle de Mohr au milieu (ligne pointillée) représente un état de contrainte critique, à la limite de l'enveloppe, on a :

$$\Sigma^c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (1.17)$$

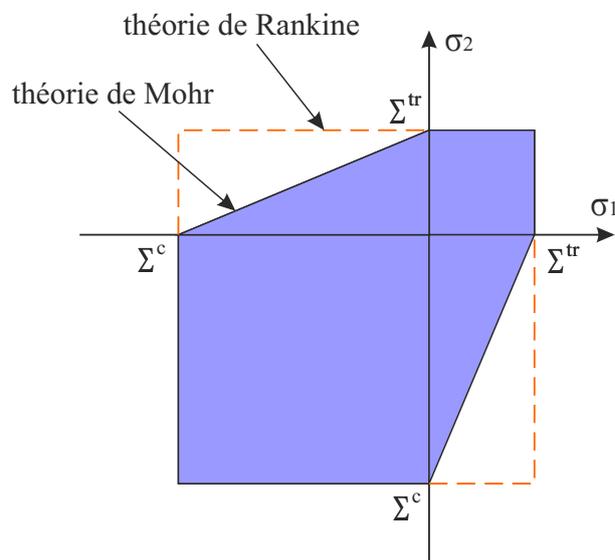
$$\Sigma^{tr} = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (1.18)$$

La constante  $c$  est la cohésion, correspondant à la contrainte de cisaillement qui peut être supportée par le matériau. L'angle  $\varphi$  désigne le frottement interne du matériau.



**Figure 1.12** – Enveloppe de rupture du critère de Mohr-Coulomb dans le plan de Mohr.

Graphiquement, le critère de Mohr-Coulomb nécessite que les deux contraintes principales se trouvent dans la zone décrite sur la Figure 1.13. Par rapport au critère de Rankine, on observe que le critère de Mohr-Coulomb prend en compte la contrainte de cisaillement.



**Figure 1.13** – Enveloppe de rupture pour les critères de Mohr-Coulomb et Rankine.

## 1.7 Méthodes expérimentales pour la caractérisation des matériaux

### 1.7.1 Mesure de ténacité ( $K_{IC}$ )

La ténacité est une grandeur qui caractérise la résistance à la propagation brutale d'une fissure dans un matériau. Elle est une propriété du matériau et on peut la déterminer par des essais expérimentaux. De nombreux types d'éprouvettes furent essayés durant les années 1960 avant que ne soient définies des éprouvettes normalisées, adoptées d'abord par l'ASTM (American Society for Testing and Materials), et puis par l'AFNOR (Association Française de Normalisation).

La nécessité de normalisation des éprouvettes provient de la variation de  $K_I$  (facteur d'intensité de contrainte en mode I) avec l'épaisseur de celles-ci. Les plus utilisées sont l'éprouvette en flexion en trois points et l'éprouvette compacte en traction. Ses dimensions générales sont indiqués sur les Figures 1.14 et 1.15.

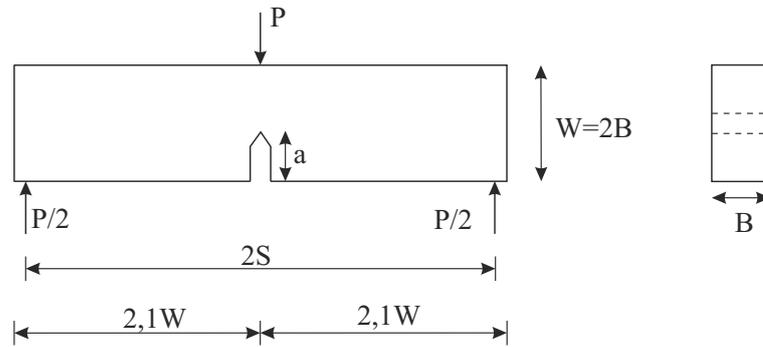


Figure 1.14 – Éprouvette de flexion en trois points.

La charge maximale atteinte pour la rupture  $P_c$  permet la détermination de la ténacité du matériau selon les formules suivantes :

- Éprouvette de flexion en trois points, pour  $a/W \leq 1$  :

$$K_{IC} = \frac{P_c S}{BW^{3/2}} \frac{3(\frac{a}{W})^{1/2} [1,99 - (\frac{a}{W})(1 - \frac{a}{W})(2,15 - 3,93\frac{a}{W} + 2,7\frac{a^2}{W^2})]}{2(1 + 2\frac{a}{W})(1 - \frac{a}{W})^{3/2}}, \quad (1.19)$$

avec  $2S = 4W$ .

- Éprouvette compacte, pour  $0,2 \leq a/W \leq 1$  :

$$K_{IC} = \frac{P_c}{BW^{1/2}} \frac{(2 + \frac{a}{W})(0,886 + 4,64\frac{a}{W} - 13,32\frac{a^2}{W^2} + 14,72\frac{a^3}{W^3} - 5,64\frac{a^4}{W^4})}{(1 - \frac{a}{W})^{3/2}}, \quad (1.20)$$

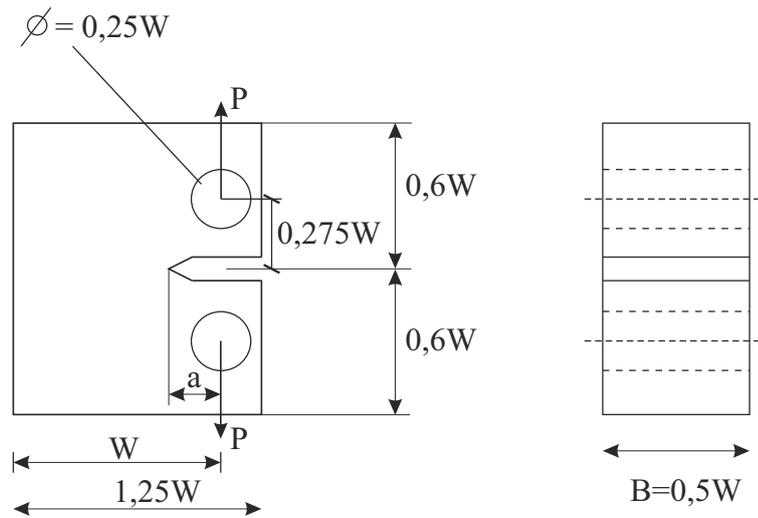


Figure 1.15 – Éprouvette compacte.

avec  $2S = 4W$ .

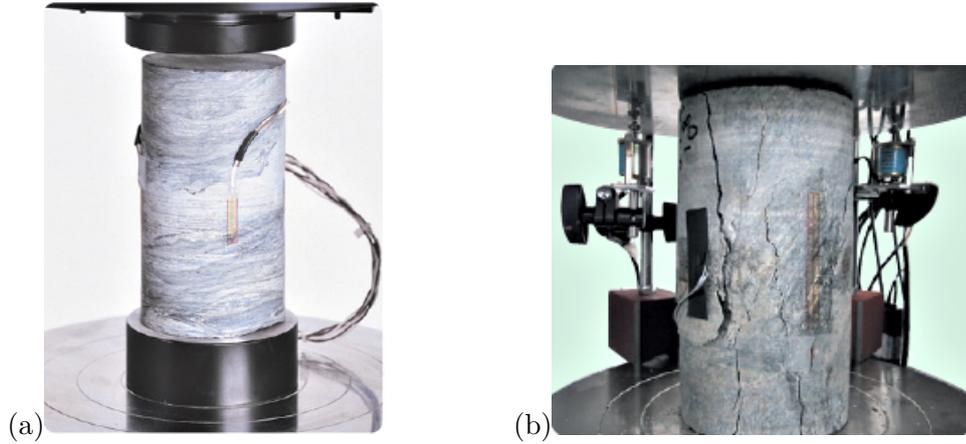
### 1.7.2 Compression simple

L'essai de compression uniaxiale ou de compression simple consiste à comprimer un échantillon entre deux plateaux parallèles d'une presse rigide. Au cours de l'essai, un enregistreur permet de relever l'évolution de la contrainte axiale grâce à un capteur de force ou de pression, ainsi que celle des déformations soit par des capteurs de déplacement soit par des jauges de déformation. Cet enregistrement permet de déterminer différentes caractéristiques mécaniques selon le besoin : la résistance à la compression uniaxiale, la limite élastique, le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ .

Dans cet essai, à la rupture, les fissures apparaissent dans la direction parallèle à la charge de compression (Figure 1.16).

### 1.7.3 Essai triaxial

Semblable à l'essai de compression simple, l'essai triaxial permet une étude plus détaillée de la résistance d'un matériau. L'application d'une pression de confinement latérale rapproche l'échantillon de sa condition réelle de travail. Cela peut être utilisé dans la détermination de la résistance à la compression ainsi que dans l'identification d'autres états de contraintes limites (enveloppe de rupture). En  $2D$ , cet essai devient un essai bi-axial.



**Figure 1.16** – *Essai de compression simple : (a) éprouvette de roche avant l'essai et (b) fissuration après l'essai.*

#### 1.7.4 Compression diamétrale

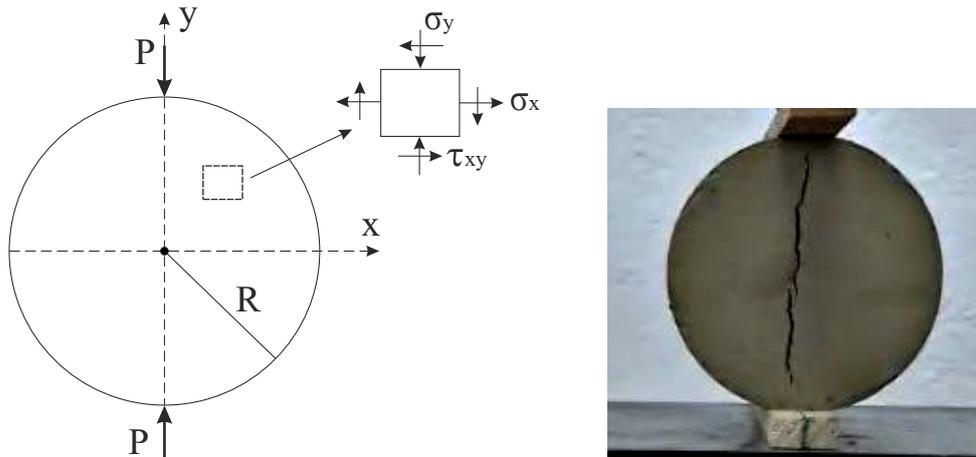
L'essai de traction directe est l'essai le plus approprié pour la détermination du comportement en traction des matériaux. Cependant, cet essai reste techniquement très difficile à réaliser pour des matériaux fragiles à cause de problèmes de fixation de l'échantillon et le risque de ruptures locales qui faussent les résultats. Donc, un essai de traction indirecte a été proposé dans les années 1950 (et standardisé vers la fin des années 1970) pour déterminer la résistance en traction d'un matériau fragile, l'essai de compression diamétrale ou essai brésilien.

Cet essai consiste à comprimer une éprouvette cylindrique le long de deux génératrices diamétralement opposées (Figure 1.17a). L'effort appliqué induit des contraintes de traction et de compression au sein de l'éprouvette. La contrainte de traction maximale est perpendiculaire au plan à la direction du chargement et se détermine à partir de la charge appliquée.

En se basant sur la théorie de l'analyse des contraintes d'un disque soumis à deux forces concentrées diamétrales [39, 97], l'état de contrainte dans tous les points du disque peut s'écrire en  $2D$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{2P}{\pi D} - \frac{2P}{\pi} \left\{ \frac{x^2(R-y)}{[x^2+(R-y)^2]^2} + \frac{x^2(R+y)}{[x^2+(R+y)^2]^2} \right\}, \\ \sigma_y = \frac{-2P}{\pi D} - \frac{2P}{\pi} \left\{ \frac{(R-y)^3}{[x^2+(R-y)^2]^2} + \frac{x^2(R+y)^3}{[x^2+(R+y)^2]^2} \right\}, \\ \tau_{xy} = \frac{2P}{\pi} \left\{ \frac{x(R-y)^2}{[x^2+(R-y)^2]^2} - \frac{x(R+y)^2}{[x^2+(R+y)^2]^2} \right\}. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

où  $P$  est la charge appliquée,  $D$  est le diamètre du disque testé,  $R$  est le rayon du disque,



**Figure 1.17** – (a) Schéma d'un essai de compression diamétral et les contraintes développées. (b) Exemple d'une éprouvette après l'essai, [2].

$\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont des contraintes normales dans les directions perpendiculaires et parallèles à la charge (respectivement) et  $\tau_{xy}$  est la contrainte de cisaillement, comme l'indique la Figure 1.17a.

Les équations ci-dessus montrent que dans la plan d'application de la charge ( $x = 0$ ), les contraintes normales ( $\sigma_x$ ) sont constantes et en traction :

$$\Sigma^{tr} = \frac{2P}{\pi D} \quad (1.22)$$

La contrainte  $\sigma_y$  est parallèle avec la charge en compression et vaut  $\sigma_y = -3\sigma_x$  au centre du disque. La contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  est nulle le long du diamètre vertical ( $x = 0$ ).

Ainsi, pour déterminer la résistance à la traction par fendage d'un matériau à partir de ces équations, il faut que les hypothèses d'un comportement élastique linéaire fragile et d'un chargement uniforme appliqué sur la génératrice du cylindre soit respectées. La résistance à la compression du matériau testé doit, par ailleurs, être au moins trois fois supérieure à la résistance à la traction pour que la rupture s'initie par traction et non pas par compression. Pour plus de détails sur le champs de contraintes pour l'essai de compression diamétrale, voir l'Annexe A.

Cet essai présente l'avantage d'être simple à réaliser. D'ailleurs, l'équipement nécessaire pour la compression diamétrale est le même que celui utilisé dans l'essai de compression simple si on ne s'intéresse qu'à la détermination de la résistance à la traction. Dans le cas où l'on souhaite déterminer, en plus, les modules de rigidité et d'autres paramètres, des mesures supplémentaires des déplacements sont nécessaires [100].

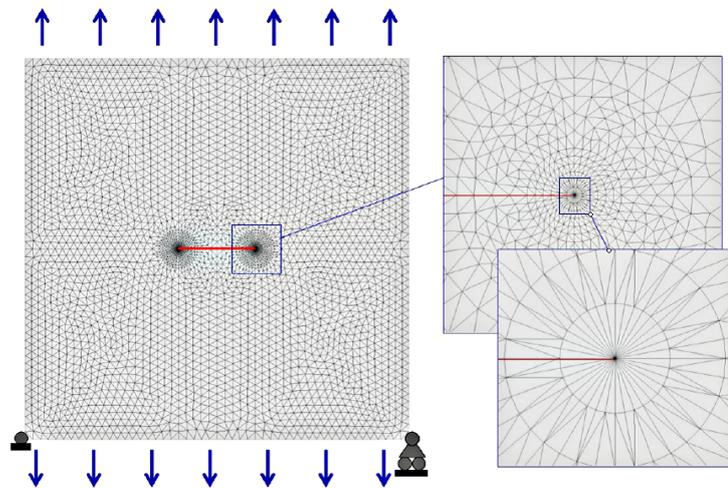
## 1.8 Méthodes numériques pour la modélisation de la fissuration et de la rupture des matériaux

Dans cette section, on présente les notions fondamentales des méthodes numériques les plus utilisées en mécanique de la rupture en discutant brièvement de leurs avantages et inconvénients.

### 1.8.1 Méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments finis est la principale méthode pour le calcul des structures en mécanique. Elle a donc été naturellement adaptée pour résoudre des problèmes de fissuration et rupture. Parmi les références les plus récentes on retrouve [18, 20, 40, 71], qui étudient la propagation de fissures en  $2D$  et des études en  $3D$  comme [31, 87].

Le principal inconvénient de cette méthode est que la fissure doit être explicitement décrite par le maillage. L'utilisation de la méthode des éléments finis (MEF) nécessite souvent une préparation lourde des maillages, et la précision n'est pas toujours excellente pour l'évaluation des facteurs d'intensité de contraintes. La Figure 1.18 présente une plaque fissurée avec un maillage structuré autour des pointes de la fissure [18]. Ces pointes sont entourées par un cercle d'éléments identiques qui se raccordent avec le maillage externe.



**Figure 1.18** – Plaque carrée pré-fissurée et le maillage associé pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte, [18].

Dans le cas où la fissure est droite et sollicitée en mode  $I$  durant toute la propagation, le trajet de la fissuration est connu à priori et on peut mettre en œuvre des méthodes de déboutonnage [25], relâchant progressivement les nœuds se situant sur le trajet de

fissure. La difficulté réside alors dans les oscillations numériques induites et dans la pertinence des lois physiques de déboutonnage. Dans le cas de sollicitations en mode mixte, le déboutonnage devient plus compliqué et il faut procéder parallèlement à des étapes de remaillage avec toutes les difficultés que cela induit en terme de coûts de calcul et de projections de champs.

### 1.8.2 Méthode des éléments finis étendus (X-FEM)

Plus connue sous le sigle XFEM (pour Extended Finite Element Method), elle est appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1999. Cette méthode consiste à enrichir une approximation classique par la méthode des éléments finis avec différentes fonctions qui représentent bien la discontinuité et la singularité d'une fissure dans un milieu matériel [8]. Le grand avantage de ce principe est l'absence de procédures de remaillage pour la description de la propagation des fissures.

Pourtant, les fonctions utilisées (non-polynomiales) entraînent certaines difficultés dans l'intégration élémentaire et dans l'adaptation des critères de rupture, ainsi que la présence d'une zone de transition qui limite le taux de convergence en maillage. La mise à jour de la géométrie de la fissure peut aussi être difficile lors de brusques changements topologiques.

Comme référence des travaux sur la X-FEM : en 2D [1, 14, 54, 69], et en 3D [6, 41, 70, 92].

### 1.8.3 Méthode des éléments de frontières

Une alternative intéressante pour l'étude de la mécanique de la rupture est la méthode des éléments de frontières qui présente pour principale caractéristique de ne demander qu'une discrétisation de la frontière des domaines et donc le travail de remaillage est beaucoup moins lourd et la présentation de la fissure est naturelle [3, 78, 88]. Les quelques limitations sont des problèmes de conditionnement des matrices et le stockage de données.

### 1.8.4 Méthode sans maillage

Appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1994, cette méthode est plus proche de la méthode des éléments finis que la méthode des éléments de frontières. Elle se base sur la résolution de la forme faible des équations aux dérivées partielles par une méthode de Galerkin (comme pour la méthode des éléments finis), par contre l'approximation du champ de déplacement qui est construite pour être introduite dans la forme faible ne nécessite pas de maillage. Seul un ensemble de noeuds est réparti dans le domaine et l'approximation du champ de déplacement en un point ne dépend que de la distance de ce point par rapport aux noeuds qui l'entourent et non de l'appartenance à un certain élément fini. En mécanique de la rupture, la fissure se propage parmi cet

ensemble de noeuds et la présence d'une fissure est simplement prise en compte en diminuant le poids que possède un noeud sur l'approximation du déplacement en un certain point si la ligne joignant ce noeud et ce point est coupée par la fissure [13, 15, 99]. L'inconvénient de cette méthode est que les calculs mis en œuvre peuvent s'avérer lourds (calcul des voisins) et il est parfois délicat de modéliser les conditions aux limites.

### 1.8.5 Méthode des zones cohésives

A la fin des années 1990, les modèles de zone cohésive étaient perçus comme une alternative numérique efficace et simple à la mécanique de l'endommagement et de la rupture [17, 19, 36, 52]. Les modèles de zones cohésives, basés sur la mécanique de l'endommagement, permettent de modéliser l'amorçage et la propagation d'une fissure grâce à des éléments d'interface insérés entre deux éléments solides classiques. Dans cette méthode, l'évolution de la fissuration est décrite par l'intermédiaire de critères locaux, le plus souvent énergétiques, et en termes de relation entre la contrainte appliquée sur les lèvres de la fissure et la discontinuité de déplacement qui apparaît à l'interface. En décrivant, au moyen d'une loi surfacique, l'effort de résistance à la séparation en fonction de l'écartement de lèvres de fissures ou de cavités en train de se créer, ces modèles apparaissaient particulièrement commodes pour rendre compte de certains mécanismes d'endommagement et de fissuration pouvant aller de l'amorçage de microfissures à la ruine du matériau. De nombreuses lois d'interface ont été proposées dans la littérature : elles diffèrent selon la nature du matériau considéré (ductile, fragile, composite), du type de chargement envisagé (monotone croissant ou cyclique)... L'avantage de cette méthode est d'offrir la possibilité de suivre l'amorçage et la propagation de la fissure pour un coût numérique réduit. De plus, il permet de prendre en compte les phénomènes physiques mettant en jeu les lèvres de la fissure, tout en se libérant de la condition de bords libres. La modification de certains coefficients du modèle ou l'introduction de paramètres physiques supplémentaires dans le comportement cohésif rendent également possible le suivi de l'évolution temporelle des trajets de fissuration. Le principal inconvénient de cette méthode est la difficulté pour déterminer une longueur caractéristique qui permet d'étudier la propagation de la fissure, puisque la notion de discontinuité du déplacement en présence de la fissure est remplacée par celle de déformation de la surface matérielle.

### 1.8.6 Méthode des éléments discrets (MED)

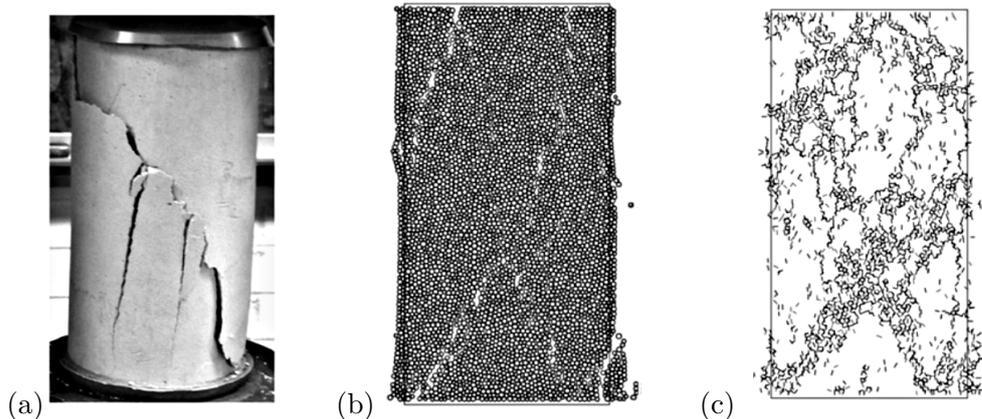
La méthode des éléments discrets (MED) à l'origine développée par Cundall et Strack [29] est une méthode très utile pour la modélisation numérique du comportement des systèmes granulaires et des particules [24, 28, 50, 57, 68, 90]. Dans la MED, les matériaux sont discrétisés par des éléments de formes simples qui interagissent avec les éléments voisins par contact, ce qui donne aux éléments discrets la capacité de facilement construire des milieux avec des vides, des imperfections et des hétérogénéités. Des propriétés comme l'élasticité, la plasticité, la viscosité... sont directement liées aux lois de contact entre les particules. En associant un comportement cohésif aux parti-

cules, elle s'adapte bien à l'étude des matériaux comme le béton [33, 43, 67, 95] et les roches [46, 80, 81].

En mécanique de la rupture, l'approche discrète s'est développée de plus en plus depuis quelques années [27, 34, 53, 80, 96]. Dans cette approche, la fissuration est étudiée par l'analyse des forces de liaison entre des particules en contact. Donc, le problème de singularité de contraintes n'existe pas. La propagation d'une fissure se produit par la perte de la cohésion des contacts, ce qui évite aussi des procédures comme le remaillage lorsqu'une fissure se propage, par exemple.

La quantité de fissures n'entraîne aucune difficulté supplémentaire, ce qui permet l'utilisation de la MED dans les cas de multi-fissuration. La fermeture des fissures peut être aisément modélisée, ce qui rend possible l'étude de géométries et chargements complexes, même dans le cas de grandes déformations.

La Figure 1.19 présente un exemple de fissuration en compression uniaxiale d'une roche, modélisée par la méthode des éléments discrets [27].



**Figure 1.19** – (a) Fissuration d'une roche en compression. Comparaison d'une simulation par la MED : (b) dilatation d'échantillon, et (c) la distribution des fissures, [27].

Par contre, une difficulté importante de la méthode est le besoin d'une calibration des paramètres du modèle discret (associés aux contacts) par rapport aux caractéristiques du matériau (rigidité, ténacité, résistance...) à modéliser.

## 1.9 Conclusions partielles

Dans ce premier chapitre, on présente les aspects fondamentaux de la mécanique de la rupture fragile, qui est bien adaptée pour l'analyse de structures pré-fissurées. On observe que, d'un autre côté, lorsque des défauts ne sont pas identifiables visuellement, on

dispose de divers critères phénoménologiques capables de prévoir le niveau des sollicitations au moment de la rupture du matériau. En reliant ces deux points de vu, on discute des critères capables de décrire, à la fois, l'amorçage des fissures et aussi leur propagation.

À partir de cette problématique à propos de la modélisation de la rupture à différentes échelles (matériaux et structure), on donne un aperçu rapide des méthodes expérimentales pour la caractérisation des matériaux. Ensuite on discute les avantages et désavantages des méthodes numériques les plus courantes.

L'identification d'une série d'avantages liés à la méthode des éléments discrets dans la modélisation de la rupture fragile (notamment la possibilité de traiter des multiples fissures sous des conditions de chargement et géométrie complexes) permet de justifier le choix de cette méthode numérique pour la suite de l'étude.

## Chapitre 2

# Modélisation par la méthode des éléments discrets (MED)

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>2.2</b>	<b>Description générale de la méthode</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>2.3</b>	<b>Forme des particules</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>2.4</b>	<b>Loi d'interaction des grains</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>2.5</b>	<b>Force de contact entre les particules</b> . . . . .	<b>37</b>
2.5.1	Force normale . . . . .	38
2.5.2	Force tangentielle . . . . .	38
<b>2.6</b>	<b>Dissipation visqueuse d'énergie</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>2.7</b>	<b>Algorithme de calcul</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>2.8</b>	<b>L'utilisation de la méthode des éléments discrets dans l'étude de la rupture des matériaux</b> . . . . .	<b>40</b>
2.8.1	Effet de la structure microscopique . . . . .	40
2.8.2	Rupture des contacts . . . . .	41
2.8.3	Rupture et propagation des fissures . . . . .	42
<b>2.9</b>	<b>Synthèse de l'étude bibliographique</b> . . . . .	<b>44</b>

---

## 2.1 Introduction

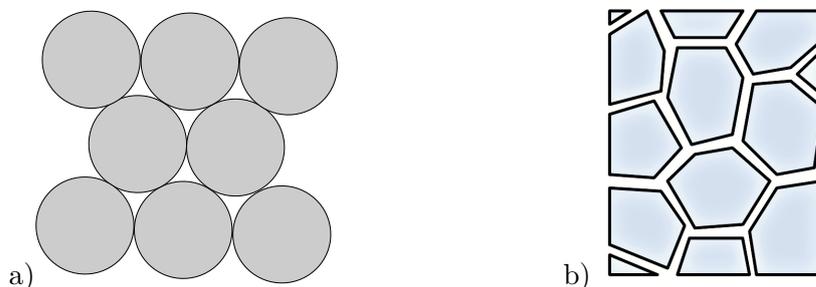
Dans ce chapitre on présente les notions fondamentales de la méthode des éléments discrets, ainsi que la modélisation du comportement des matériaux par cette méthode. On discute aussi à propos des quelques travaux précédents de l'étude du comportement à la rupture, des avancés et des limites.

## 2.2 Description générale de la méthode

Comme nous avons présenté dans le chapitre 1, la MED développée par Cundall et Strack [29] est une méthode numérique adaptée initialement à l'étude du comportement des systèmes granulaires. La prise en compte de la cohésion entre les particules a permis la modélisation du comportement des matériaux tels que le béton [33, 43, 67, 95] et les roches [46, 80, 81]. Dans les méthodes discrètes, des assemblages d'éléments (déformables ou non) reliés par des lois de contact relativement simples permettent de représenter le comportement d'un matériau. Ses propriétés mécaniques sont définies au niveau de chaque contact ce qui permet de modéliser le comportement mécanique à une échelle locale. Dans cette méthode, à chaque pas de temps, les positions et vitesses, ainsi que les forces appliquées sur chaque particule sont calculées. Basée sur la méthode de la dynamique moléculaire [4, 29, 98], la formulation qu'on adopte consiste à intégrer le mouvement de chacune des particules par l'algorithme de prédiction-corrrection d'ordre trois de Gear [4].

## 2.3 Forme des particules

Dans la MED, on utilise souvent des éléments de forme simple qui interagissent par contact avec des éléments voisins. Malgré toutes les possibilités, les plus souvent utilisées sont les formes circulaires ( $2D$ ) et sphériques ( $3D$ ). Cela se comprend par la simplicité de programmation et, surtout, par la rapidité des calculs. Ces raisons justifient l'intérêt porté par la communauté scientifique sur cette géométrie particulière d'éléments discrets [27, 35, 80, 96] (Figure 2.1a). Certains travaux utilisent des éléments avec des formes plus complexes comme des éléments elliptiques ou polyédriques [5, 7, 73, 74, 79] (Figure 2.1b).



**Figure 2.1** – (a) Particules de forme circulaire [96] et (b) polygonale, [30].

## 2.4 Loi d'interaction des grains

L'interaction de deux éléments est définie lorsqu'ils sont séparés par une distance inférieure à un rayon d'interaction  $r_s$  (Figure 2.2).

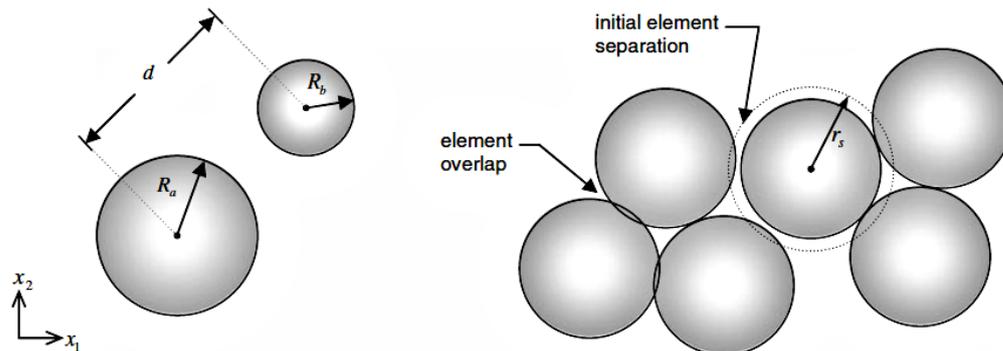


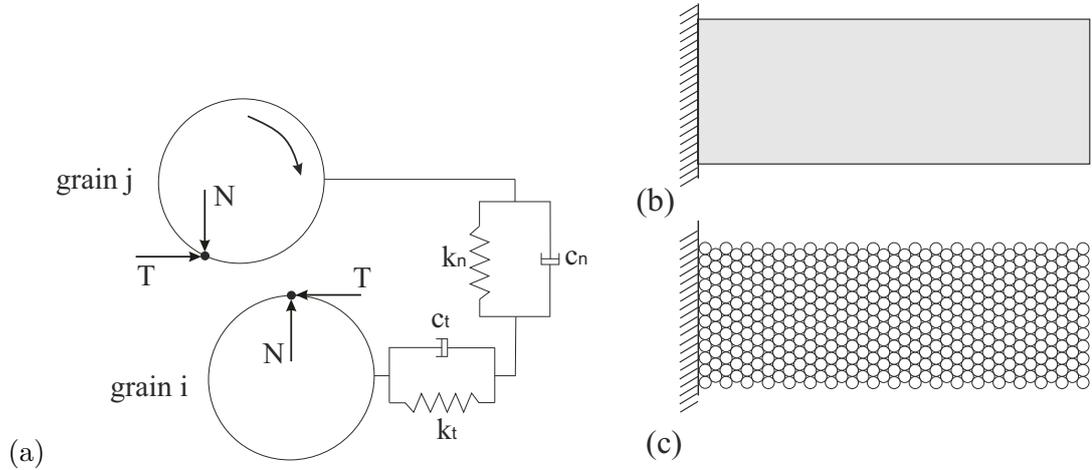
Figure 2.2 – Les particules en interaction, [96]

Contrairement aux modèles continus qui imposent à chaque élément du matériau un comportement macroscopique constant, les modèles discrets utilisent des lois d'interaction locales à chaque contact des particules. Ces lois dépendent du rayon des éléments en interaction et ses raideurs de rigidités.

Les lois d'interaction proposées par Cundall servent de point de départ [10, 29]. Elles caractérisent la liaison entre grains par des ressorts linéaires fragiles, un ressort de raideur  $k_n$  est utilisé pour représenter la raideur normale et un ressort de raideur  $k_t$  représente la raideur tangentielle (Figure 2.3a). Le modèle choisi présenté ci-dessous est un modèle relativement simple, qui compte un terme élastique linéaire et un terme de dissipation visqueuse d'énergie. Les Figures 2.3b et 2.3c présentent l'exemple d'une poutre encadrée modélisée par une approche continue et par une approche discrète.

## 2.5 Force de contact entre les particules

L'interaction des particules en contact se traduit par l'action des forces. Chaque force se décompose selon les directions normale et tangentielle, respectivement appelées forces normale et tangentielle. Dans la suite, on va décrire les forces entre deux grains  $i$  et  $j$  en contact.



**Figure 2.3** – (a) Modèle d'interaction entre deux particules. Poutre encastree modélisée par des approches (b) continue et (c) discrète [96].

### 2.5.1 Force normale

Le grain  $j$  applique au grain  $i$  deux forces selon  $\vec{n}_{ij}$ , le vecteur normal qui pointe du centre de la particule  $i$  au centre de particule  $j$  (Figure 2.4a) :

- une force élastique linéaire  $\vec{N}_{ij}^e = k_n \delta_n \vec{n}_{ij}$ , où  $\delta_n$  est le déplacement relatif normal, et  $k_n$  est le coefficient de raideur normale de la particule.

- une force visqueuse  $\vec{N}_{ij}^v = c_n \dot{\delta}_n \vec{n}_{ij}$ , où  $c_n$  est le coefficient d'amortissement visqueux normal,  $\dot{\delta}_n$  est la dérivé du déplacement relatif normal selon le temps.

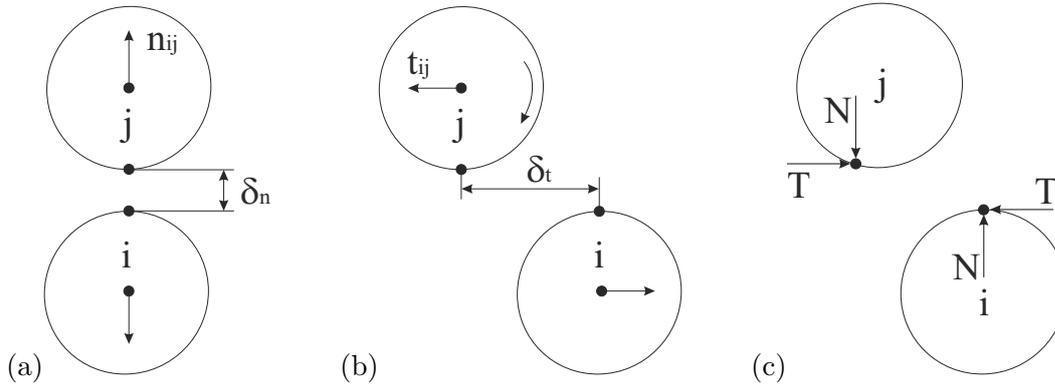
### 2.5.2 Force tangentielle

La force de contact tangentielle s'écrit à partir de deux contributions :

- une force élastique linéaire  $\vec{T}_{ij}^e = k_t \delta_t \vec{t}_{ij}$ , où  $\delta_t$  est le déplacement tangential relatif entre deux particules et  $k_t$  est le coefficient de raideur tangentielle (Figure 2.4b).

- une force visqueuse  $\vec{T}_{ij}^v = c_t \dot{\delta}_t \vec{t}_{ij}$ , où  $c_t$  est le coefficient d'amortissement visqueux tangential,  $\dot{\delta}_t$  est la dérivé du déplacement tangential relatif selon le temps.

La distribution des forces de contact est présentée dans la Figure 2.4c.



**Figure 2.4** – Déplacement normal (a), déplacement tangentiel (b) et les forces de contact (c) entre particule  $i$  et  $j$

## 2.6 Dissipation visqueuse d'énergie

Les matériaux peuvent dissiper de l'énergie cinétique quand ils sont déformés par divers mécanismes : plasticité, frottement, viscosité... On s'intéresse particulièrement à la dissipation visqueuse, qui collabore, en plus, à la stabilité de l'algorithme en évitant la propagation d'erreurs intrinsèques à la procédure itérative.

## 2.7 Algorithme de calcul

Dans la MED, l'interaction des éléments est traitée par un algorithme qui alterne entre l'application de la deuxième loi de Newton et l'évaluation d'une loi de déplacement-force au niveau des contacts. Le principe fondamental de la dynamique donne l'accélération d'un élément résultant des forces qui agissent sur lui, y compris les forces de gravitation, les forces extérieures prescrites par les conditions aux limites, et les forces internes développées entre élément aux contacts. Les équations du mouvement des particules discrètes sont résolues par un algorithme prédicteur-correcteur d'ordre trois [4].

Les éléments fondamentaux pour le calcul sont les dimensions (le rayon pour des disques ou des sphères) des particules, leurs positions spatiales et leurs propriétés ( $k_n$ ,  $k_t$ ,  $c_n$  et  $c_t$ ).

La MED (basée sur la dynamique moléculaire) utilise un algorithme assez simple et intuitif. Elle consiste, à chaque itération et pour chaque particule, à :

- rechercher les particules qui interagissent avec elle ;
- traiter de façon binaire ces interactions de façon à calculer la force totale qu'elle subit comme somme de leurs contributions respectives ;

- intégrer les relations fondamentales de la dynamique afin d'obtenir les caractéristiques de son mouvement, qui seront considérées uniformes jusqu'au pas de temps suivant.

Pour réaliser ces opérations, l'algorithme que l'on utilise se présente de la manière suivante (Figure 2.5) (voir l'annexe B) :

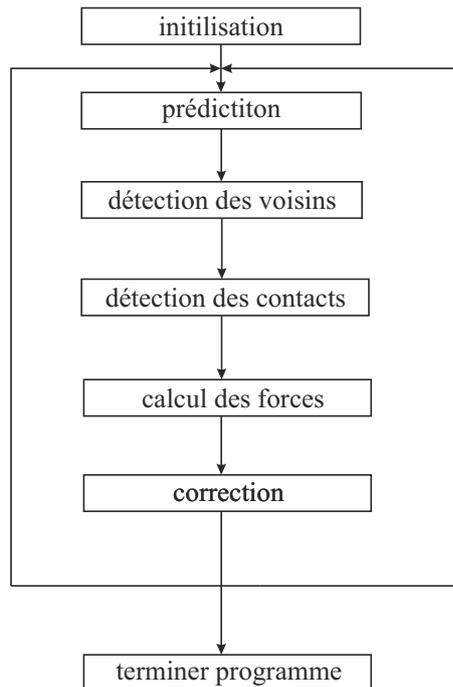


Figure 2.5 – Algorithme de calcul en MED.

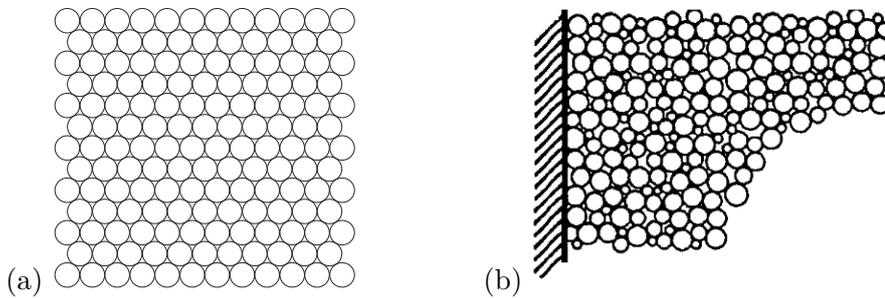
## 2.8 L'utilisation de la méthode des éléments discrets dans l'étude de la rupture des matériaux

Comme mentionné au premier chapitre, les approches discrètes présentent certains avantages lors du traitement de milieux multifissurés, de la refermeture de fissures... On discute ici quelques aspects importants de leur utilisation générale pour l'étude de la rupture des matériaux comme l'effet de la structure microscopique, les différents modèles de rupture des contacts et la propagation des fissures.

### 2.8.1 Effet de la structure microscopique

L'approche par éléments discrets permet, naturellement, de représenter des discontinuités et hétérogénéités au sein d'un matériau. En effet, le comportement d'un domaine

discret à l'échelle de la structure est le résultat d'une multitude d'interactions élémentaires à l'échelle microscopique. Ainsi, les comportements macroscopiques ne sont que difficilement prédictibles. En ce sens, il peuvent être qualifiés de propriétés émergentes [72]. Il est donc nécessaire de calibrer les propriétés microscopiques (coefficient de raideur  $k_n, k_t$ , forces de contact maximale...) de façon à obtenir les propriétés désirées à l'échelle macroscopique (module d'Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\nu$ , résistance en traction, en compression, ténacité...) [80]. Une distribution irrégulière des particules qui composent le matériau génère un échantillon unique de comportement non homogène, ce qui pose automatiquement des problèmes dans la modélisation de matériaux homogènes (Figure 2.6b). Dans le cas de domaines discrets ordonnés, une approche analytique peut résoudre ce problème [49, 76].



**Figure 2.6** – *Différentes structures microscopiques. (a) Distribution régulière et (b) irrégulière, [96].*

Tavarez [96] utilise la MED avec une distribution régulière de particules (Figure 2.6a). Il démontre clairement la relation entre les paramètres microscopiques ( $k_n, k_t$ ) et macroscopiques ( $E, \nu$ ) en élasticité. Malgré une structure anisotrope (comme celle de la Figure 2.6a) un comportement isotrope et indépendant de la taille de particules est observé.

L'utilisation de structures régulières permet aussi l'étude systématique de la convergence du résultat des simulations. La diminution de la taille des particules entraîne des effets maîtrisés sur le comportement des échantillons dans la plupart de cas.

### 2.8.2 Rupture des contacts

La plupart des travaux en MED limitent la force de traction pour caractériser la rupture d'un contact [21, 32, 66, 86]. Autrement dit, si la force de traction d'un certain contact dépasse une valeur limite, le contact va être rompu et il ne supportera plus de forces de traction. Cette force limite est normalement déterminée par calibration des résultats des simulations et des résultats expérimentaux (essais de traction, compression, cisaillement...). D'autres travaux ont imposé parallèlement des résistances limites en traction et en cisaillement pour la rupture des contacts [65, 81].

Potyondy et Cundall [80] proposent un modèle plus complexe. Dans ce modèle, la roche se comporte comme un matériau granulaire cimenté, constitué par des grains et du ciment. Le comportement en force-déplacement du système grain-ciment est présenté dans la Figure 2.7. La rupture d'un contact dans ce modèle ne dépend pas uniquement des relations entre les forces normale et tangentielle, mais aussi des moments calculés à partir des déplacements angulaires relatifs entre les particules en contact. On dispose ainsi d'une gamme de paramètres plus importante pour calibrer le comportement macroscopique du matériau simulé.

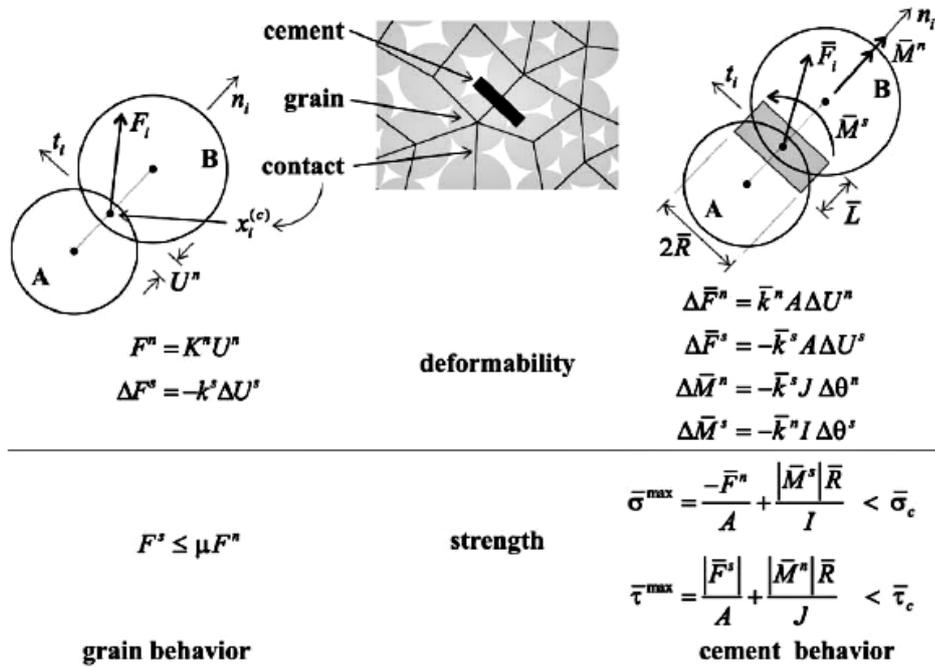


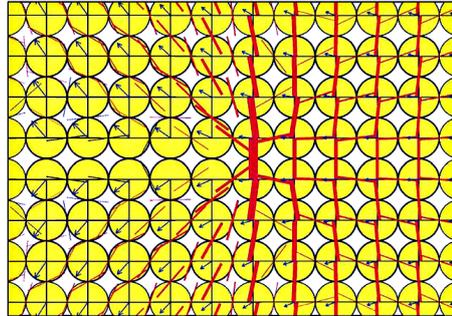
Figure 2.7 – Loi de comportement du contact proposé par Potyondy et Cundall, [80].

### 2.8.3 Rupture et propagation des fissures

Dans les modèles discrets, la rupture du matériau et la propagation des fissures sont naturellement couplées étant donné que les propriétés des matériaux sont définies au niveau des contacts, ce qui diffère des approches continus, où les résistances en traction, compression et cisaillement sont indépendantes de la ténacité.

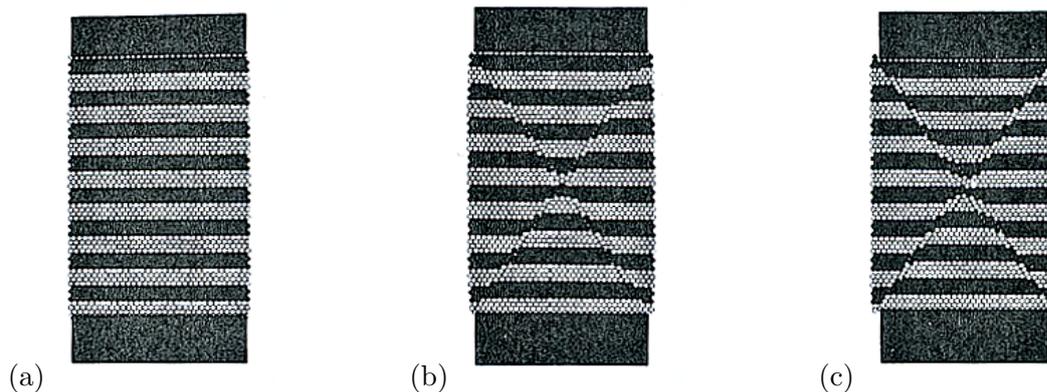
En utilisant une structure régulière, Potyondy et Cundall [80] proposent un modèle qui limite la force maximale supportée par les contacts avant la rupture (Figure 2.8). Malgré la régularité de la structure discrète, la trajectoire rectiligne de propagation des fissures en mode I n'est pas reproduite exactement, où des instabilités sont observés.

En rupture pour des contraintes homogènes, cette étude montre une relation entre la résistance en traction, la ténacité du matériau et la taille des particules.



**Figure 2.8** – La distribution des forces et déplacements à la proximité d'une fissure, [80].

Donzé et al. [35] présentent un modèle pour la fissuration de roches en compression bi-axiale. Le matériau est constitué par des sphères en contact avec une distribution régulière (Figure 2.9a). Les forces de contact peuvent être attractives ou répulsives, selon la distance relative entre des particules en contact. Un contact est rompu si la distance entre deux particules dépasse une distance critique. Dans ce cas, seulement les interactions de répulsion sont possibles. La Figure 2.9 présente le résultat de la rupture d'un échantillon initialement intact par compression bi-axiale. Selon les auteurs, l'angle de rupture (visible sur les Figures 2.9b et c) était limité dans certains cas par l'orientation des particules de la structure discrète, en indiquant un effet d'anisotropie.



**Figure 2.9** – Simulation numérique en 2D d'un matériau intact sous compression bi-axiale à (a) 3% , (b) 4% et (c) 8% de déformation, [35].

## 2.9 Synthèse de l'étude bibliographique

La méthode des éléments discrets (MED) est particulièrement utile pour l'étude de l'amorçage et de la propagation des fissures complexes (même en grand nombre) et susceptibles de se fermer dus à une évolution du chargement et/ou de la géométrie. Ces situations de rupture sont courantes dans l'analyse de structures du génie civil (structures en maçonnerie, béton,...), mécanique des roches (zone de failles, massifs rocheux...), par exemple.

La gestion simple et intuitive des multiples contacts, point fort de la MED, est accompagnée, pourtant, un effort au niveau de la caractérisation des matériaux. Des vrais expériences numériques sont parfois nécessaires pour ajuster un modèle discret aux propriétés réelles des matériaux. Ces difficultés peuvent nuire à la capacité prédictive des simulations discrètes vu que certains aspects simples des matériaux considérés homogènes, tels que l'isotropie ne sont pas automatiques, par exemple.

La suite du travail consiste à essayer d'intégrer certains éléments plus usuellement associés aux approches continues dans une approche discrète adaptée, en maximisant les avantages du point de vue numérique. Pour pouvoir associer un comportement convergent aux simulations, on adopte une structure discrète régulière en essayant de minimiser le comportement anisotrope souvent lié à ce type de structure. Finalement, en incorporant la mécanique de la rupture linéaire à la base du comportement des contacts, on se propose de rendre plus direct le lien entre les paramètres du modèle discret et les propriétés des matériaux tels que : module d'Young, coefficient de Poisson, ténacité, résistances en traction et compression, etc.

Deuxième partie

**Développements**



## Chapitre 3

# Modélisation discrète en mécanique de la rupture - approche initiale

### Sommaire

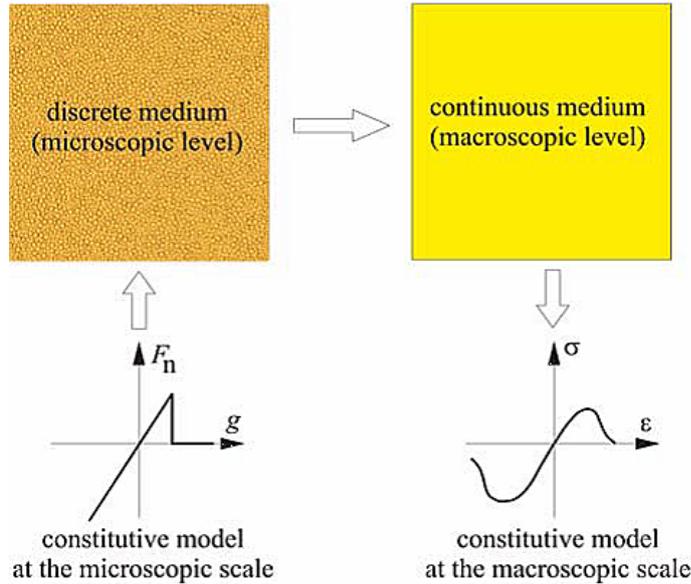
---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>49</b>
<b>3.2</b>	<b>MED en élasticité</b>	<b>49</b>
3.2.1	Analyse de la cellule élémentaire périodique	50
3.2.1.1	Matrice de rigidité de contact - Système de coordonnées locale	51
3.2.1.2	Matrice de rigidité de contact - Système de coordonnées globales	52
3.2.1.3	Matrice de rigidité globale	53
3.2.2	Essai bi-axial	54
3.2.2.1	Vecteur de force globale	54
3.2.2.2	Conditions de périodicité et de symétrie	54
3.2.2.3	Identification des paramètres discrets $k_n$ et $k_t$	55
3.2.3	Comportement élastique au cisaillement	56
3.2.4	Vérification du comportement élastique - essai œdométrique	57
<b>3.3</b>	<b>MED en mécanique de la rupture fragile</b>	<b>58</b>
3.3.1	Champ de contrainte à la proximité d'une pointe de fissure en mode I	58
3.3.2	Propagation de la fissure en MED - calcul de $K_I$	59
3.3.3	Simulations numériques - rupture de plaques pré-fissurées en mode I	60
3.3.3.1	Système d'unités et paramètres utilisés	61
3.3.3.2	Charge de rupture	62
3.3.3.3	Effet de l'orientation angulaire de la structure de particules	63



### 3.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter une première approche en utilisant la MED en mécanique de la rupture pour répondre aux questions soulevées à partir des travaux précédents. Globalement, notre analyse repose sur le rapport entre les paramètres des milieux discrets et leur rapport avec la mécanique des milieux continus (Figure 3.1).

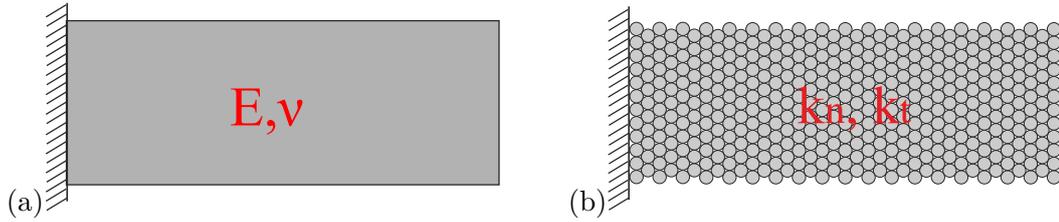


**Figure 3.1** – Transition entre échelle micro à l'échelle macro, [51].

La mécanique de la rupture des matériaux fragiles est basée sur le comportement élastique à la proximité d'une pointe de fissure. C'est pour cela que le point initial de notre approche est le travail de Tavarez [96], qui examine l'équivalence des approches discrètes et continues en élasticité isotrope. En étudiant, ensuite, la région au voisinage d'une fissure, on dérive une expression pour le facteur d'intensité de contraintes au niveau des contacts, paramètre fondamental dans l'étude de la propagation des fissures au sein d'un matériau fragile. On analyse ensuite la convergence des résultats en mode I, ainsi que l'effet de l'anisotropie.

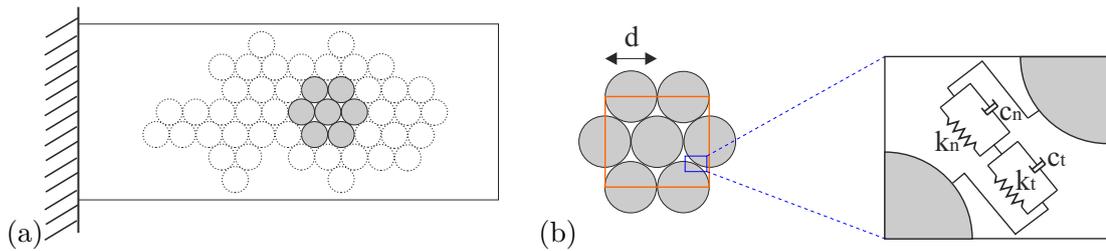
### 3.2 MED en élasticité

Pour les matériaux solides et continus, le comportement macroscopique élastique en petites déformations peut être caractérisé par le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  (Figure 3.2a). Dans une modélisation discrète, le comportement élastique équivalent dépend des coefficients de raideur normale  $k_n$  et raideur tangentielle  $k_t$  (Figure 3.2b).



**Figure 3.2** – (a) Console composée par un matériau élastique continu et (b) et sa modélisation discrète.

Pour pouvoir modéliser un matériau homogène, on choisit une distribution régulière pour ces particules. La disposition compacte représentée sur la Figure 3.3a est adéquate à la modélisation d'un matériau élastique isotrope et permet d'établir une relation directe entre les paramètres du modèle discret et les paramètres élastiques continus du matériau. En considérant la périodicité de la structure, on associe une cellule élémentaire représentative de tout le milieu discret, composée par des particules de rayon  $d$  (Figure 3.3b).



**Figure 3.3** – (a) Disposition compacte périodique de particules pour un modèle discret et (b) la cellule élémentaire associée.

La force de contact présente deux composantes : une normale et une tangentielle, respectivement  $(N, T)$  (Figure 3.4a). Ces composantes sont proportionnelles aux deux composantes du déplacement relatif  $(\delta_n, \delta_t)$ , respectivement normal et tangentiel (Figure 3.4b). Pour le paramètre visqueux  $c_n$ , on adopte une fraction de  $\sqrt{mk_n}$  (où  $m$  est la masse d'une particule), qui induit, finalement, un effet inélastique négligeable.

### 3.2.1 Analyse de la cellule élémentaire périodique

L'étude du comportement bi-axial de la cellule élémentaire représenté sur la Figure 3.3 permet l'obtention des paramètres d'élasticité (module d'Young et coefficient de Poisson). En intégrant analytiquement les termes élastiques de la loi de contact, afin de décrire les interactions statiques entre les particules de la cellule périodique, on est capable d'associer au système une matrice de rigidité globale, qui relie les forces aux

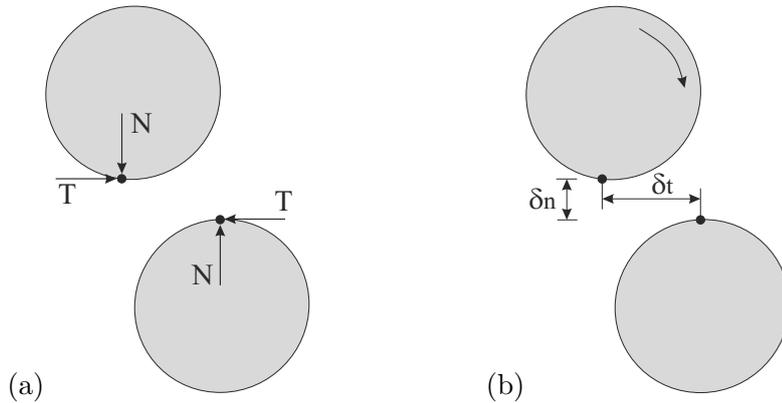


Figure 3.4 – (a) Force de contact et (b) déplacement associé.

déplacements. En effet, cette matrice n'est rien plus que le somme des matrices locales (associées à chaque contact) dans un système de coordonnées unique.

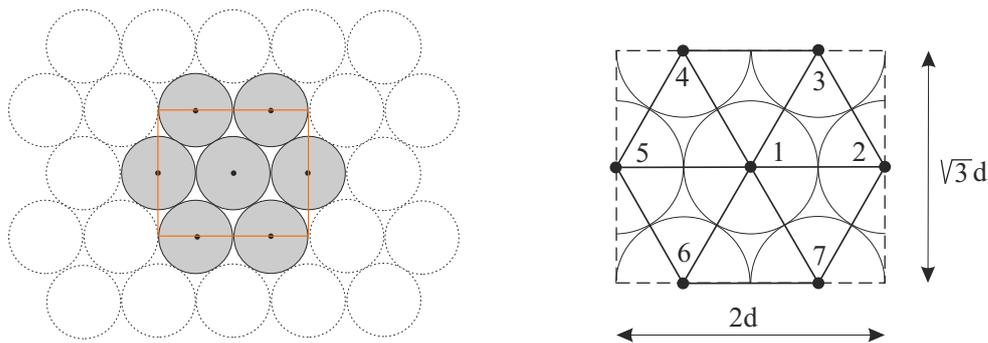
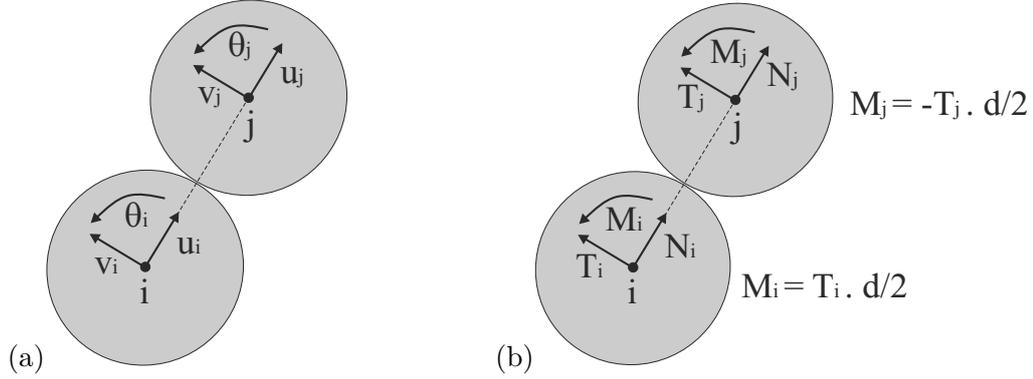


Figure 3.5 – Cellule élémentaire périodique

L'application d'un système de forces convenable permet de reproduire l'effet des contraintes sur le système. La prise en compte des conditions de symétrie permet, par la suite, le calcul des déplacements relatifs des particules qui pourront être assimilés aux déformations.

### 3.2.1.1 Matrice de rigidité de contact - Système de coordonnées locale

Dans le plan, chaque particule présente trois degrés de liberté : deux translations (normale  $u_i$  et tangentielle  $v_i$ ) et une rotation  $\theta_i$  (Figure 3.6a). À chaque degré de liberté en déplacement, on peut associer un effort, résultat du transfert des forces de contact vers le centre de chaque particule (Figure 3.6b). Les efforts  $M_i$  et  $M_j$  représentent donc les moments appliqués par les forces tangentielles aux particules.



**Figure 3.6** – (a) Déplacements relatifs des particules et (b) les efforts associés dans le système de coordonnées local.

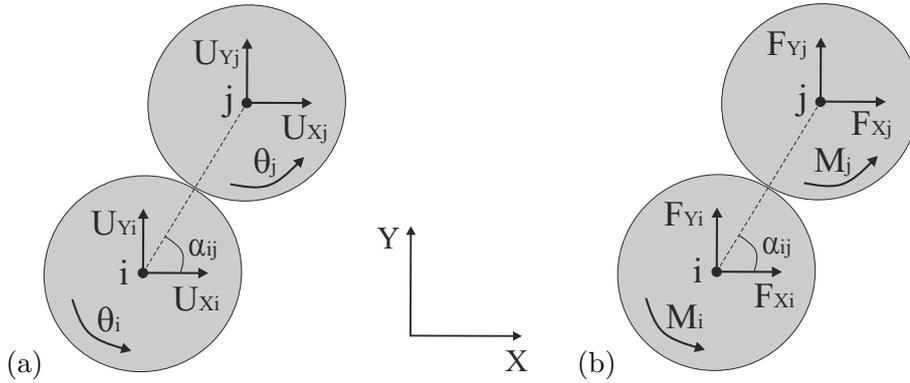
Les déplacements peuvent être organisés sous une forme vectorielle, où  $\underline{U}_{ij}^l = \{u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j\}$  est le vecteur de déplacements local. Les efforts peuvent aussi être rassemblés dans le vecteur des forces locales  $\underline{F}_{ij}^l = \{N_i, T_i, M_i, N_j, T_j, M_j\}$ . Ces deux vecteurs sont reliés par le système linéaire  $\underline{K}^l \underline{U}_{ij}^l = \underline{F}_{ij}^l$ , où  $\underline{K}^l$  est la matrice de rigidité locale (fonction des raideurs normale  $k_n$  et tangentielle  $k_t$ , et du diamètre des particules  $d$ ) :

$$\underline{K}^l = \begin{pmatrix} k_n & 0 & 0 & -k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & k_t d/2 & 0 & -k_t & k_t d/2 \\ 0 & k_t d/2 & k_t d^2/4 & 0 & -k_t d/2 & k_t d^2/4 \\ -k_n & 0 & 0 & k_n & 0 & 0 \\ 0 & -k_t & -k_t d/2 & 0 & k_t & -k_t d/2 \\ 0 & k_t d/2 & k_t d^2/4 & 0 & -k_t d/2 & k_t d^2/4 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

### 3.2.1.2 Matrice de rigidité de contact - Système de coordonnées globales

Afin de pouvoir traiter le système de particules, il est convenable d'exprimer les grandeurs locales (associées à chaque paire de particules en contact) dans un seul repère global. On a, dans ce cas, les vecteurs de déplacement  $\underline{U}_{ij} = \{U_{Xi}, U_{Yi}, \theta_i, U_{Xj}, U_{Yj}, \theta_j\}$  et de forces  $\underline{F}_{ij} = \{F_{Xi}, F_{Yi}, M_i, F_{Xj}, F_{Yj}, M_j\}$  dans le système de coordonnées globale (voir Figure 3.7). Chaque système local est incliné d'un angle  $\alpha_{ij}$  par rapport au système global.

Par conséquent, chaque paire de vecteur d'efforts  $\underline{F}_{ij}$  et de déplacements  $\underline{U}_{ij}$  est lié par une matrice de rigidité dans le repaire global  $\underline{K}_{ij} = \underline{R}_{ij}^T \underline{K}^l \underline{R}_{ij}$ , calculé en fonction de la matrice de rigidité locale  $\underline{K}^l$  et de la matrice de passage  $\underline{R}$  :



**Figure 3.7** – (a) Déplacements relatifs des particules et (b) les efforts associés dans le système de coordonnées global.

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{ij} & \sin \alpha_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_{ij} & \sin \alpha_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

### 3.2.1.3 Matrice de rigidité globale

La cellule élémentaire est composée par 7 particules (numérotées de 1 à 7) et contient 12 paires des particules en contact ( $ij$  : 12, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 27, 34, 45, 56, 67) (comme déjà indiqué sur la Figure 3.5). À chaque paire de particules en contact, on associe donc une matrice de rigidité  $\underline{\underline{K}}_{ij}$ , un vecteur de déplacement  $\underline{\underline{U}}_{ij}$  et un vecteur de forces  $\underline{\underline{F}}_{ij}$ .

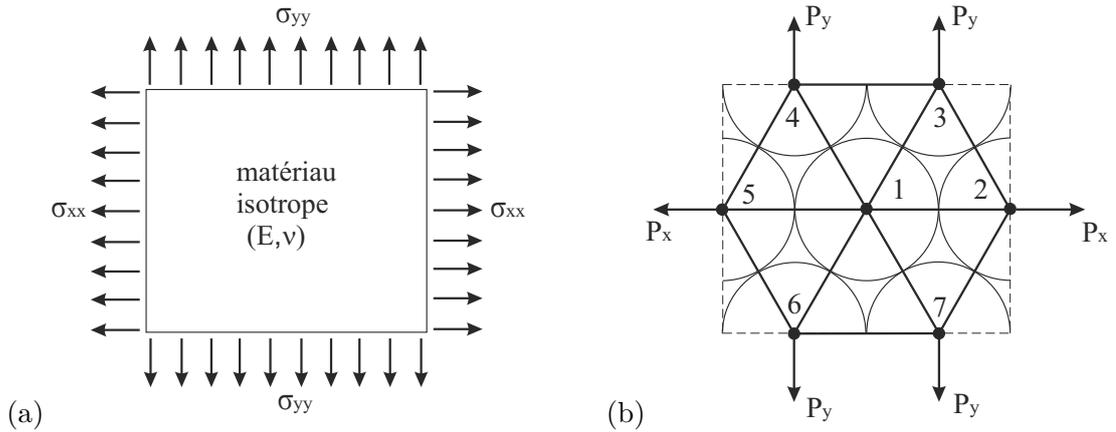
Tous les déplacements peuvent être rassemblés dans un vecteur unique  $\underline{\underline{U}}^g = \{U_{X1}, U_{Y1}, \theta_1, U_{X2}, U_{Y2}, \theta_2, U_{X3}, U_{Y3}, \theta_3, \dots, U_{X7}, U_{Y7}, \theta_7\}$ , appelé vecteur de déplacements global. De même pour les forces, où  $\underline{\underline{F}}^g = \{F_{X1}, F_{Y1}, M_1, F_{X2}, F_{Y2}, M_2, F_{X3}, F_{Y3}, M_3, \dots, F_{X7}, F_{Y7}, M_7\}$  devient le vecteur des forces globales. Les 12 matrices de rigidité (dans le repaire global) sont ensuite assemblées pour composer une matrice de rigidité globale unique  $\underline{\underline{K}}^g$ , qui relie toutes les forces et tous les déplacements sous la forme :

$$\underline{\underline{K}}^g \underline{\underline{U}}^g = \underline{\underline{F}}^g. \quad (3.3)$$

$\underline{\underline{K}}^g$  est une matrice de dimension  $(21 \times 21)$ . Ses termes sont présentés précisément dans l'Annexe C.

### 3.2.2 Essai bi-axial

Pour un matériau isotrope, les paramètres d'élasticité ( $E$ ,  $\nu$ ) peuvent être facilement déterminés à partir de la mesure des déplacements (et puis des déformations) durant un essai bi-axial (Figure 3.8a). Pour une distribution homogène des contraintes, le comportement de la cellule élémentaire (Figure 3.8b) est entièrement représentatif du comportement d'un échantillon quelconque. Une fois les forces (représentant l'état de contraintes homogène) appliquées, les déplacements des particules peuvent être obtenus à partir de l'Équation 3.3.



**Figure 3.8** – (a) État bi-axial de contraintes homogènes et (b) les forces correspondantes appliquées sur la cellule élémentaire.

#### 3.2.2.1 Vecteur de force globale

Les forces horizontales et verticales, respectivement,  $P_x$ ,  $P_y$ , s'appliquent sur les particules 2, 3, 4, 5, 6 et 7 (comme indiqué sur la Figure 3.8b). Elles figurent donc dans le vecteur de forces globale  $\underline{F}^g = \{0, 0, 0, P_x, 0, 0, 0, P_y, 0, 0, P_y, 0, -P_x, 0, 0, 0, -P_y, 0, 0, -P_y, 0\}$ . En considérant la contrainte horizontale  $\sigma_{xx}$ , la contrainte verticale  $\sigma_{yy}$  et les dimensions de la cellule (voir Figure 3.5b), on a  $P_x = \sigma_{xx}\sqrt{3}d$  et  $P_y = \sigma_{yy}d$ .

#### 3.2.2.2 Conditions de périodicité et de symétrie

Compte tenu de la symétrie du système et des conditions de périodicité des déplacements, certaines considérations peuvent être faites afin de rendre le système (Équation 3.3) inversible. La première est de fixer la cellule dans l'espace imposant un déplacement nul à la particule centrale ( $U_{X1} = 0$  et  $U_{Y1} = 0$ ).

Par rapport aux déplacements verticaux, par symétrie : les déplacements  $U_{Y2}$  et  $U_{Y5}$  s'annulent,  $U_{Y4} = U_{Y3}$  et  $U_{Y6} = U_{Y7}$ . Tous les déplacements verticaux peuvent s'exprimer

mer comme fonction de  $U_{Y3}$  vu que par anti-symétrie,  $U_{Y7} = -U_{Y3}$ .

Par rapport aux déplacements horizontaux, par symétrie :  $U_{X7} = U_{X3}$ ,  $U_{X6} = U_{X4}$ ,  $U_{X5} = -U_{X2}$ . Par anti-symétrie :  $U_{X4} = -U_{X3}$ ,  $U_{X6} = -U_{X7}$ . Tous les déplacements latéraux peuvent être décrits en fonction de  $U_{X2}$  une fois que  $U_{X3} = U_{X2}/2$ .

Les particules n'étant pas soumises à des rotations ( $\theta_i = 0$ ), le système (Équation 3.3) se réduit simplement à :

$$\begin{pmatrix} 4k_n + 2k_n c^2 + 2k_t s^2 & 4k_n c s - 4k_t c s \\ 4k_n c s - 4k_t c s & 8k_n s^2 + 8k_t c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{X2} \\ U_{Y3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2P_x \\ 4P_y \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

où  $s = \sin(\pi/3)$  et  $c = \cos(\pi/3)$ .

### 3.2.2.3 Identification des paramètres discrets $k_n$ et $k_t$

La solution du système d'équations 3.4 fournit les valeurs des déplacements  $U_{X2}$  et  $U_{Y3}$ . À partir de ces deux valeurs et en tenant compte des dimensions de la cellule (voir Figure 3.5) les déformations horizontale  $\varepsilon_{xx}$  et verticale  $\varepsilon_{yy}$  s'écrivent simplement :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{U_{X2}}{d}, \\ \varepsilon_{yy} = \frac{2U_{Y3}}{\sqrt{3}d}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Dans un milieu continu homogène et isotrope sous un état de contrainte uniforme, les déformations sont fonctions de la contrainte, du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E^*} - \frac{\sigma_{yy}\nu^*}{E^*}, \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E^*} - \frac{\sigma_{xx}\nu^*}{E^*}, \end{cases} \quad (3.6)$$

où :

- $E^* = E$  et  $\nu^* = \nu$ , en cas de contrainte plane ;
- $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$  et  $\nu^* = \frac{\nu}{1-\nu}$ , en cas de déformation plane.

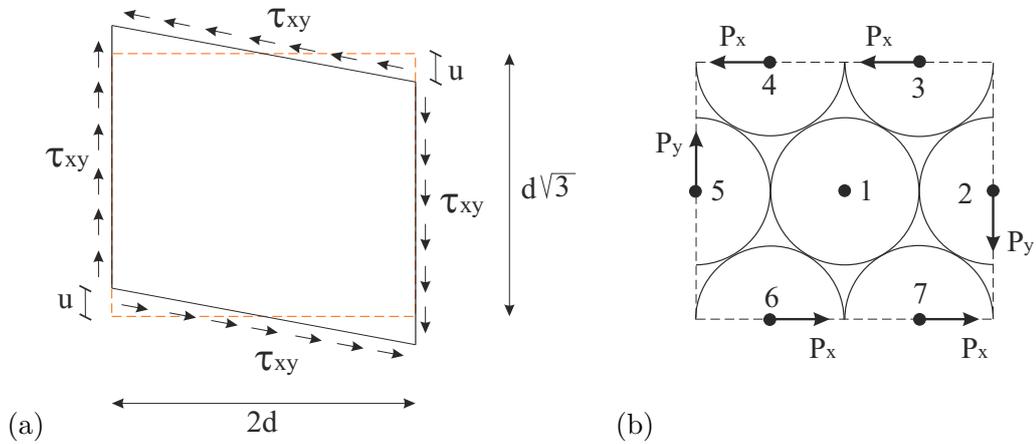
L'égalité entre les Équations 3.5 et 3.6 produit un système d'équations dont la solution est la relation entre les paramètres élastiques d'un milieu continu ( $E$  et  $\nu$ ) et ceux d'un milieu discret ( $k_n$  et  $k_t$ ) [96] :

$$\begin{cases} k_n = \frac{1}{\sqrt{3}(1-\nu^*)} E^* \\ k_t = \frac{1-3\nu^*}{1+\nu^*} k_n = \frac{1-3\nu^*}{\sqrt{3}(1-\nu^{*2})} E^* \end{cases} \quad (3.7)$$

Finalement, pour le cas d'une distribution homogène des contraintes, les valeurs de  $k_n$  et  $k_t$  s'écrivent uniquement en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  du matériau continu équivalent, sans dépendre du diamètre  $d$  des particules.

### 3.2.3 Comportement élastique au cisaillement

La vérification du comportement de la cellule élémentaire au cisaillement permet la confirmation de comportement isotrope de la structure discrète, vu que dans le plan, tout état de contraintes (ou déformations) peut être décrit comme la somme d'un chargement bi-axial et d'un cisaillement. Pour un milieu isotrope, le module de cisaillement est relié au module d'Young  $E$  et au coefficient de Poisson  $\nu$ . Une déformation de cisaillement pure  $\varepsilon_{xy} = u/d$  (Figure 3.9a) peut être imposée à la cellule élémentaire avec un vecteur de déplacement globale  $\underline{U}^g = \{0, 0, \omega, 0, -u, \omega, 0, -u/2, \omega, 0, u/2, \omega, 0, u, \omega, 0, u/2, \omega, 0, -u/2, \omega\}$ , où  $u$  est un déplacement unitaire et  $\omega = -u/(2d)$  est la rotation des particules. Ensuite, en utilisant l'Équation 3.3 (sans aucune simplification appliquée à la matrice de rigidité  $\underline{K}^g$ ), on obtient les composantes tangentielle des forces aux limites de la cellule décrites par  $P_x = u\sqrt{3}(k_n + k_t)/4$  et  $P_y = 3u(k_n + k_t)/4$  (Figure 3.9b).



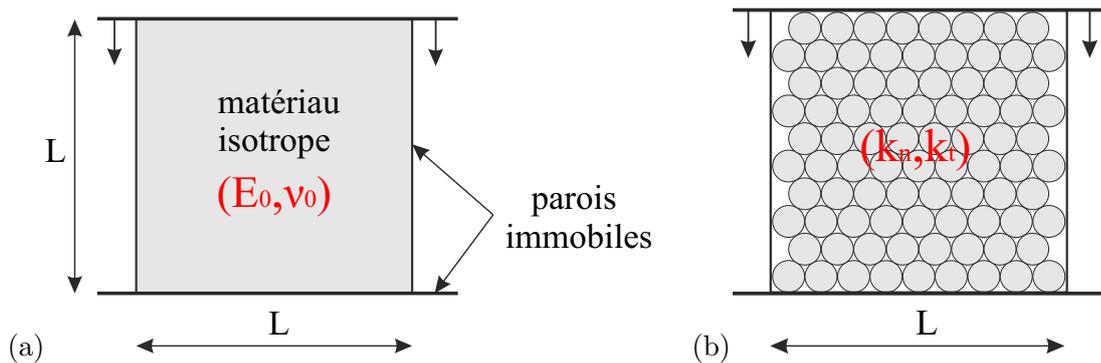
**Figure 3.9** – (a) Déformation appliquée sur la cellule et contrainte de cisaillement associée. (b) Composantes tangentielle des forces aux limites de la cellule.

La contrainte de cisaillement peut être évaluée comme étant  $\tau_{xy} = P_x/d = P_y/(\sqrt{3}d) = \sqrt{3}u(k_n + k_t)/(4d)$ . En calculant le module de cisaillement résultant  $G = \tau_{xy}/\varepsilon_{xy} = \sqrt{3}(k_n + k_t)/4$ , on observe bien le rapport pour les matériaux isotropes  $G = E/(2 + 2\nu)$ .

### 3.2.4 Vérification du comportement élastique - essai œdométrique

On effectue des simulations discrètes pour vérifier la formulation théorique discutée dans la section précédente. Notre approche numérique est basée sur la formulation discutée au Chapitre 2.

La relation entre l'approche continue et l'approche discrète en élasticité (Équation 3.7) est définie en fonction des contraintes homogènes. La sensibilité de la formulation à d'éventuels effets de bord peut être clairement observée avec l'étude d'un système simple. On choisit pour cela, d'effectuer un essai œdométrique en élasticité. Le mouvement vertical de la paroi supérieure est imposée (vitesse constante,  $v = 10^{-5} \text{ mm/s}$ ), tandis que les parois latérales et le fond restent immobiles. Des échantillons carrés de différentes dimensions  $L$ , composés par des particules de diamètre  $d = 5 \text{ mm}$  ont été testés (Figure 3.10). Le niveau de discrétisation est mesuré par le rapport  $L/d$  : 11, 22, 44 et 88. Le matériau continue de référence est décrit par son module d'élasticité  $E_0$  et son coefficient de Poisson  $\nu_0$  ( $E_0 = 1,48 \text{ GPa}$  et  $\nu_0 = 0,14$ ). En appliquant l'Équation 3.7, on détermine les valeurs des paramètres constituant le modèle discret comme étant  $k_n = 1 \text{ GPa}$  et  $k_t = 0,5 \text{ GPa}$ .



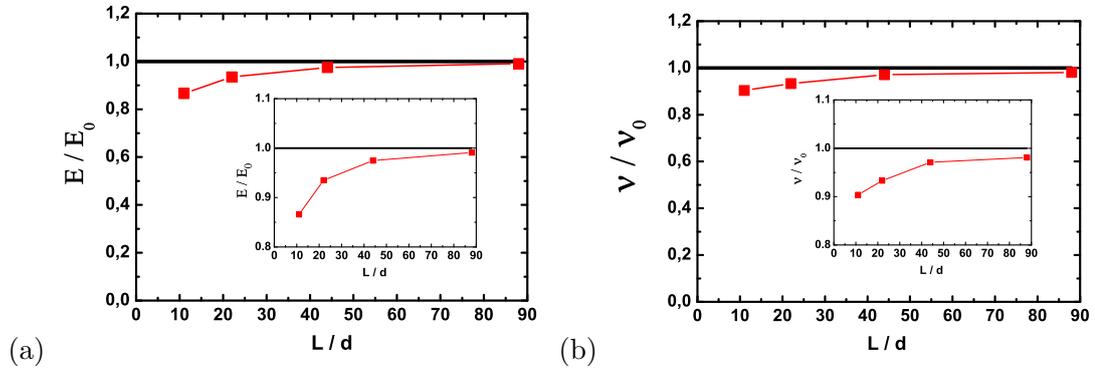
**Figure 3.10** – Essai œdométrique du (a) milieu continu et (b) milieu discret

Basée sur la mesure des contraintes et des déformations aux parois, les paramètres d'élasticité effectifs  $E$ ,  $\nu$  (associés aux systèmes discrets, voir Figure 3.10b) peuvent être déterminés et comparés aux paramètres de référence, associés au milieu continu,  $E_0$  et  $\nu_0$  (voir Figure 3.11).

L'effet de la discrétisation sur les résultats en élasticité confirme l'influence des bords, où l'hypothèse d'un comportement périodique est moins cohérente en raison de la rigidité des parois. Cependant, cet effet s'affaiblit progressivement pour des valeurs croissantes de  $L/d$ , ce qui indique, de manière générale, la convergence de la formulation pour des discrétisations plus précises.

Dans les cas de gradients de contraintes et déformations (près d'une fissure, par

exemple), les conditions de périodicité sont atteintes asymptotiquement pour des niveaux de discrétisation croissants. Ce cas est abordé dans la section suivante.



**Figure 3.11** – Résultats théoriques et numériques pour (a) le module d'Young  $E$  et pour (b) le coefficient de Poisson  $\nu$ . La ligne continue représente la prédiction théorique, tandis que les carrés sont les résultats des simulations.

### 3.3 MED en mécanique de la rupture fragile

La mécanique de la rupture des matériaux fragiles est fondée sur le comportement élastique en pointe de fissure. On exploite l'équivalence entre les approches discrète et continue en élasticité (démontrée dans la Section 3.2) afin d'obtenir une expression pour le facteur d'intensité des contraintes dans l'approche discrète. Ensuite, on associe un critère de propagation des fissures en mode  $I$ . Pour vérifier la cohérence de la formulation proposée, on compare les résultats des simulations avec des exemples classiques de la littérature. Pour finir, nous discutons l'effet de l'anisotropie observé avec ce critère de rupture.

#### 3.3.1 Champ de contrainte à la proximité d'une pointe de fissure en mode I

Comme présenté au chapitre 1, pour une fissure plane ayant un front rectiligne (Figure 3.12a), on associe un repère et des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  avec l'origine en pointe de fissure. En ce point, la contrainte est singulière, c'est-à-dire  $\sigma_{ij} \rightarrow \infty$  lorsque  $r \rightarrow 0$ .

Les composantes du champ de contrainte au voisinage d'une fissure (considérant uniquement le mode  $I$ ), peuvent s'écrire simplement :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}), \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}), \\ \sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $K_I$  est le facteur d'intensité des contraintes [48] associé au mode  $I$  (ouverture de la fissure). En mode  $I$ , la fissure tend à se propager en ligne droite, pour  $\theta = 0$  (selon le repère de la Figure 3.12). Dans ce cas, la contrainte tangentielle est nulle ( $\sigma_{r\theta} = 0$ ), et  $\sigma_{\theta\theta}$  est la contrainte à l'origine de la propagation de la fissure :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (3.9)$$

La propagation de la fissure se produit lorsque  $K_I$  atteint la valeur de la ténacité du matériau  $K_{IC}$ , selon le critère de Irwin [48].

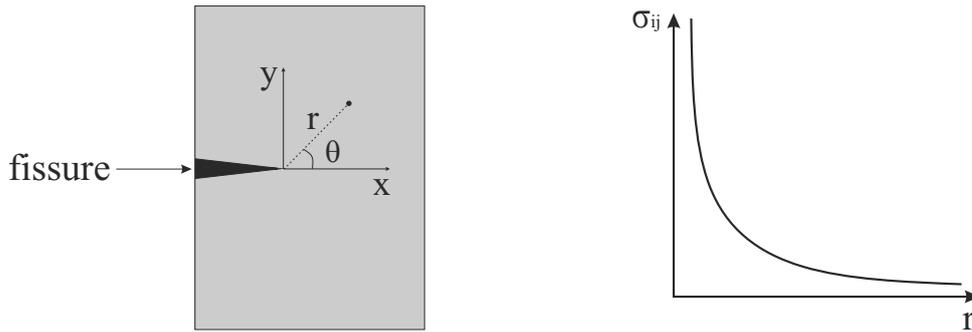


Figure 3.12 – (a) Voisinage d'une fissure et (b) singularité de contraintes.

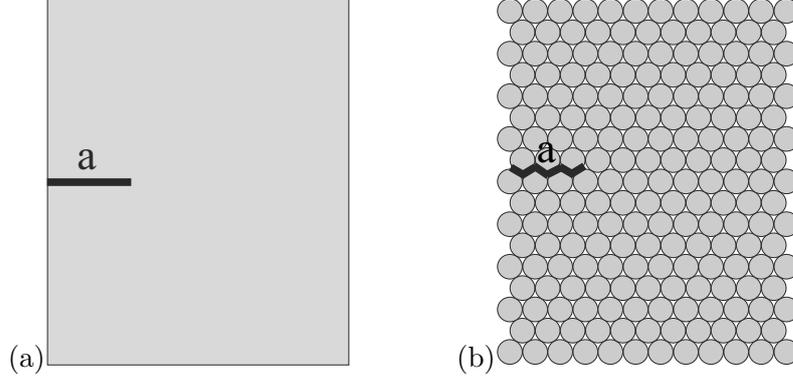
### 3.3.2 Propagation de la fissure en MED - calcul de $K_I$

Pour un milieu discret, qui est formé de particules en contact, la propagation d'une fissure se caractérise par la perte des forces de contacts qui assurent la cohésion du matériau (forces de traction). La Figure 3.13 montre l'analogie directe entre l'approche continue et l'approche discrète.

On observe sur la Figure 3.13, que la représentation d'un segment droit passe par, au moins, deux contacts. Considérons un segment potentiel (composé par deux contacts consécutifs :  $ik$  et  $jk$ ) dans une direction  $\theta = 0$  à la proximité d'une fissure (Figure 3.14). Prenant en compte les forces de contact agissant sur les particules  $i$  et  $j$ , la composante de la force résultante orthogonale à la direction  $\theta$  est égale à

$$f'_\theta = \underline{N}_{ik} \sin \alpha + \underline{T}_{ik} \cos \alpha + \underline{N}_{jk} \sin \alpha - \underline{T}_{jk} \cos \alpha, \quad (3.10)$$

où  $\underline{N}$  et  $\underline{T}$  sont les composantes normales et tangentielles des forces de contact exercées sur la particule  $k$  par les particules  $i$  et  $j$ , et  $\alpha = \pi/3$ .



**Figure 3.13** – (a) Fissuration dans un milieu continu et (b) dans un milieu discret.

La force  $f_\theta$  traduit l'effet de  $\sigma_{\theta\theta}$  (Équation 3.8) le long d'une distance en ligne droite  $d$ , où  $d$  est le diamètre des particules (voir Figure 3.14) :

$$f_\theta = \int_0^d \sigma_{\theta\theta} dr = \int_0^d \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \sqrt{\frac{2d}{\pi}} K_I \quad (3.11)$$

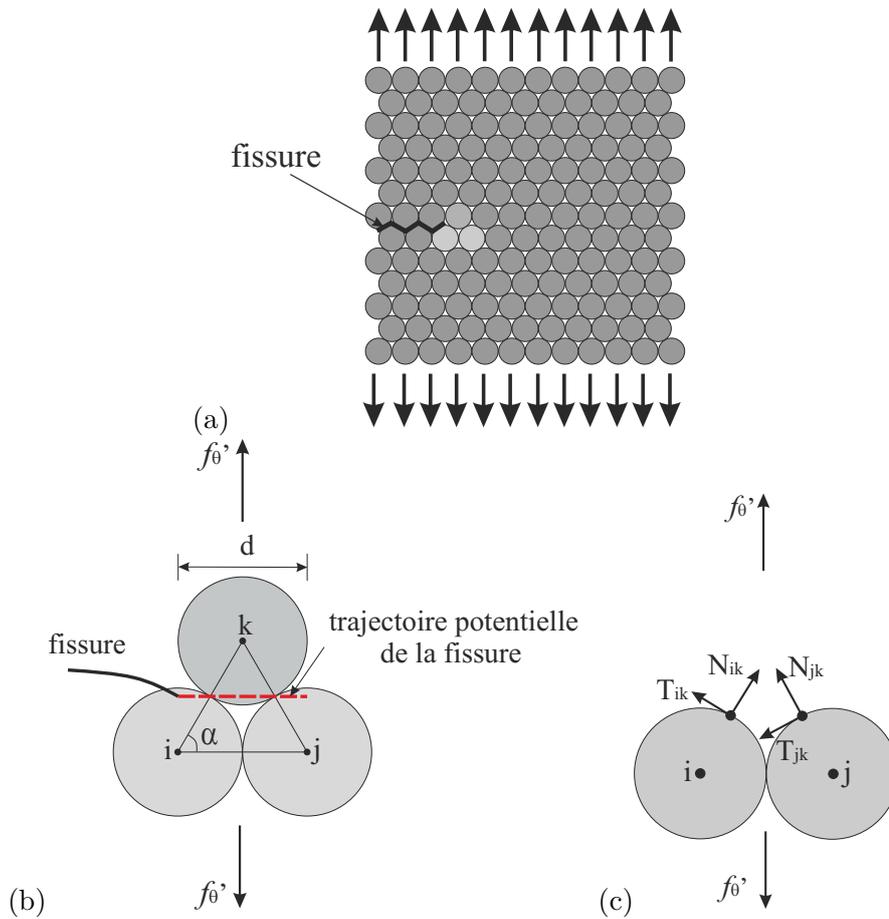
La force  $f'_\theta$ , converge vers  $f_\theta$  pour des valeurs de  $d$  suffisamment petites. La comparaison des Équations 3.10 et 3.11 conduit à une approximation du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  pour le mode  $I$  dans l'approche discrète en fonction des forces de contact :

$$K_I \approx [(\underline{N}_{ik} + \underline{N}_{jk}) \frac{\sqrt{3}}{2} + (\underline{T}_{ik} - \underline{T}_{jk}) \frac{1}{2}] \sqrt{\frac{\pi}{2d}} \quad (3.12)$$

En pratique, toutes les paires de contacts consécutifs sont analysées, ce qui élimine toute difficulté à localiser la pointe d'une fissure (ou de plusieurs). Dans les cas où  $K_I$  atteint la valeur de la ténacité  $K_{IC}$  du matériau, le contact le plus tendu de la paire associée est supprimé, donnant lieu à la propagation de la fissure voisine à ce contact.

### 3.3.3 Simulations numériques - rupture de plaques pré-fissurées en mode $I$

La vérification de la formulation a été faite avec la comparaison des résultats numériques et des solutions de la littérature. Une structure fragile pré-fissurée peut s'effondrer lorsque la charge atteint une valeur maximale (critique). C'est le cas des échantillons présentés sur la Figure 3.15; la charge maximale étant dépendante de la longueur initiale de la fissure, en cas de propagation, la résistance de l'élément diminue progressivement.

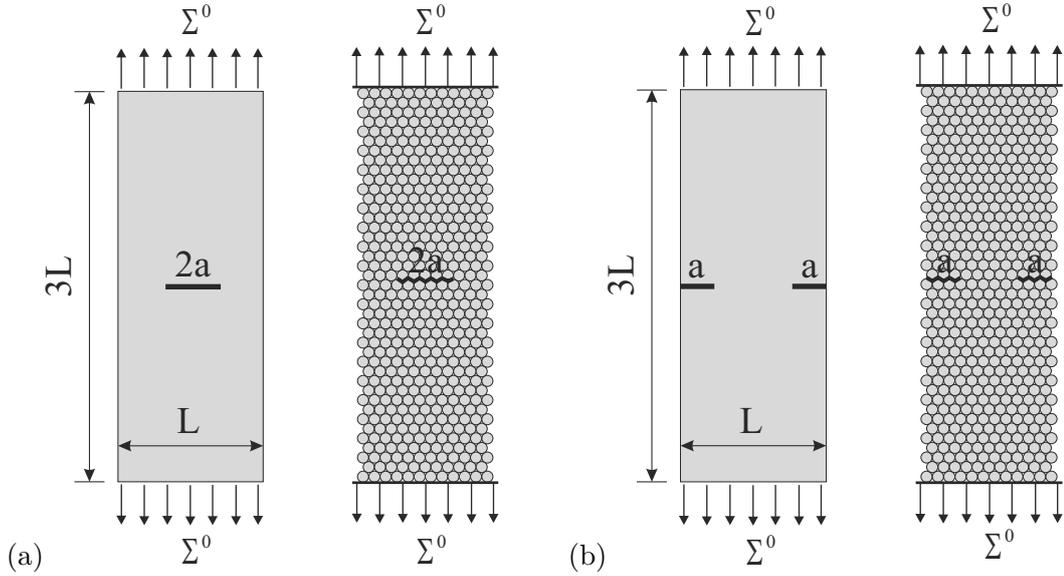


**Figure 3.14** – (a) Fissure représentée dans l’approche discrète. (b) Détail des particules en pointe de fissure qui composent un segment de propagation potentielle et (c) les forces de contact correspondantes.

Nous présentons les résultats numériques pour deux configurations : fissure simple (Figure 3.15a) et fissure double (Figure 3.15b). On impose le déplacement vertical de manière à pouvoir mesurer la contrainte verticale moyenne. L’échantillon est libre de se déformer latéralement. La longueur des échantillons est de trois fois la largeur pour éviter des effets de bord. Quatre tailles de fissure initiale  $a/L$  ont été étudiées :  $3/22$ ,  $4/22$ ,  $5/22$ , et  $6/22$ . La comparaison des résultats pour différentes valeurs du rapport  $L/d$  (11, 22, 44 et 88) permet l’évaluation de la convergence de l’approche.

### 3.3.3.1 Système d’unités et paramètres utilisés

Le système d’unités des simulations est défini par quelques paramètres de base. Le diamètre  $d$  et la masse  $m$  des particules représentent les unités de longueur et de masse,



**Figure 3.15** – Essai de traction de plaques pré-fissurées : (a) fissure simple et (b) fissure double.

respectivement. Par simplicité, en évitant toute différence avec la définition des unités entre des systèmes  $2D$  et  $3D$ , on prend  $d$  comme étant l'épaisseur des éléments simulés en  $2D$ . Prenant  $K_{IC}$  comme l'unité de ténacité des matériaux, on a par conséquent  $T = \sqrt{m/(K_{IC}\sqrt{d})}$  comme unité de temps et  $K_{IC}/\sqrt{d}$  comme unité de contrainte. Comme rigidité normale, on utilise  $k_n = 10^4 K_{IC}/\sqrt{d}$ , ce qui permet la modélisation des petites déformations. Le rapport entre la rigidité tangentielle et normale  $k_t/k_n = 0,2$  implique la valeur  $\nu = 0,25$  pour le coefficient de Poisson (sans effet fondamental sur les résultats en rupture sous contrainte plane). Enfin, une petite valeur d'amortissement visqueux  $c_n = c_t = 0,65\sqrt{mK_{IC}\sqrt{d}}$  est utilisée dans toutes les simulations.

### 3.3.3.2 Charge de rupture

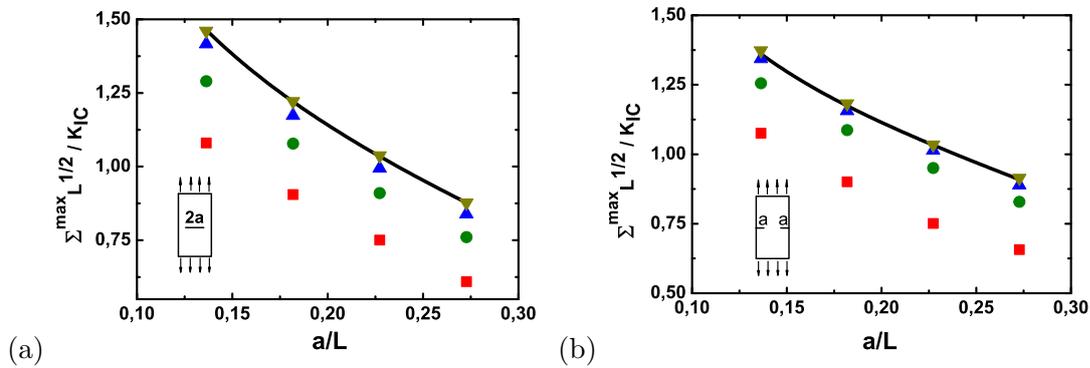
Une analyse des contraintes permet l'identification de la valeur maximale du facteur d'intensité des contraintes, proportionnelle à la charge si la structure est encore intacte (domaine élastique). En considérant que le facteur d'intensité des contraintes est limité par la ténacité du matériau  $K_{IC}$ , la charge maximale peut être simplement obtenue par une règle de trois. À partir de la mesure de la contrainte moyenne  $\Sigma^0$  aux extrémités de l'échantillon, l'application de l'Équation 3.12 conduit à l'obtention de la valeur maximale de  $K_I$ ,  $K_I^{0max}$  parmi toutes les paires de contacts. La valeur maximale supportée par la structure avant la rupture totale vaut finalement

$$\Sigma^{max} = \frac{K_{IC}}{K_I^{0max}} \Sigma^0 \quad (3.13)$$

Les résultats numériques de  $\Sigma^{max}$  (Équation 3.13) sont comparés sur la Figure 3.16 avec l'expression théorique [16] :

$$\Sigma_0^{max} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{1 - \frac{2a}{L} \frac{1}{\phi}} \quad (3.14)$$

avec  $\phi = [1 - 0,5(2a/L) + 0,370(2a/L)^2 - 0,044(2a/L)^3]$  (fissure simple), ou  $\phi = [1,122 - 0,561(2a/L) - 0,205(2a/L)^2 + 0,471(2a/L)^3 - 0,190(2a/L)^4]$  (fissure double).



**Figure 3.16** – Contrainte maximale  $\Sigma^{max} \sqrt{L} / K_{IC}$  en fonction des longueurs initiales des fissures  $a/L$  pour les cas de (a) fissure simple et (b) fissure double. Les lignes continues indiquent les expressions théoriques pour  $\Sigma^{max}$  (Équation 3.14), tandis que les symboles représentent les différents niveaux de discrétisation : (■)  $L/d = 11$ , (●)  $L/d = 22$ , (▲)  $L/d = 44$ , (▼)  $L/d = 88$ .

Dans les deux configurations, les résultats sont convergents lorsque  $L/d$  (lié à la qualité de la discrétisation) augmente. En outre, les lignes parallèles suggèrent que la taille initiale de la fissure  $a/L$  a une influence réduite sur la qualité des résultats, au moins pour les échantillons étudiés.

### 3.3.3.3 Effet de l'orientation angulaire de la structure de particules

La structure discrète présente une périodicité angulaire de  $\pi/3$  radians comme l'indique la Figure 3.17. Concernant le comportement élastique, aucun effet de l'orientation angulaire de la structure n'est observé, car les relations entre milieu continu et milieu discret (Équation 3.7) sont indépendantes de la direction des contraintes (ou des déformations). Dans la Figure 3.18a, on décrit le comportement isotrope élastique du modèle discret au moyen de comparaison entre le module d'Young et le coefficient de Poisson obtenus par des essais oedométriques présentés dans la Section 3.2.4 et des paramètres

continus (respectivement  $E/E_0$  et  $\nu/\nu_0$ ).

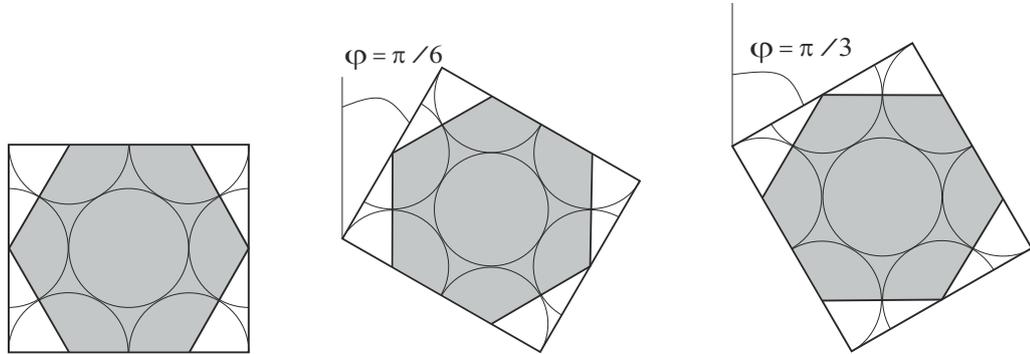


Figure 3.17 – Périodicité angulaire de la structure discrète.

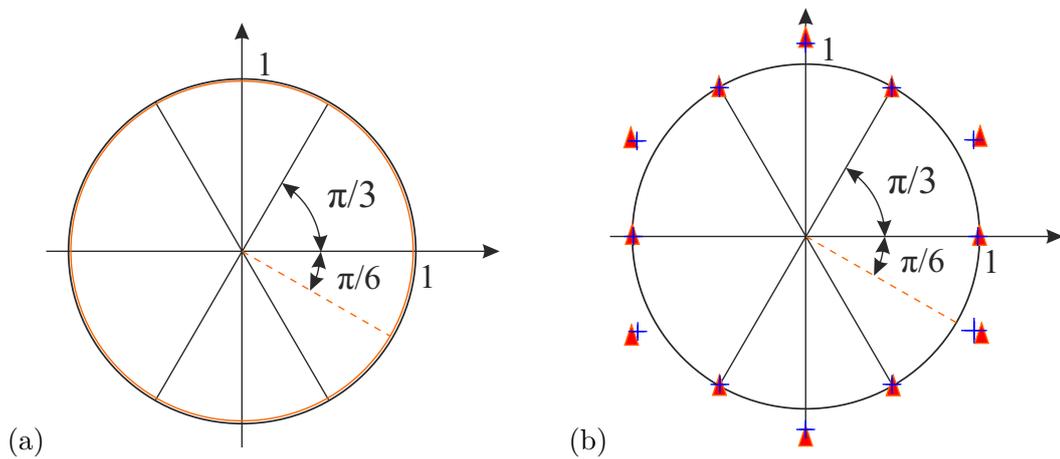


Figure 3.18 – Comportement du modèle discret en fonction de l'orientation angulaire de la structure. (a) Comportement élastique ( $E/E_0$  et  $\nu/\nu_0$ ). (b) Comportement à la rupture ( $\Sigma^{max}/\Sigma_0^{max}$ ) pour (+) fissure simple et (▲) fissure double.

L'effet de l'orientation de la structure en mécanique de la rupture est quantifié par la comparaison de deux configurations différentes. Les résultats présentés dans la section précédente correspondent à  $\varphi = 0$ , (voir la Figure 3.17). Des essais de traction sur les mêmes échantillons avec  $\varphi = \pi/6$  (moitié de la période angulaire) présentent une légère différence pour la contrainte maximale  $\Sigma^{max}$ , malgré une convergence similaire des résultats. Le rapport entre les résultats numériques et la réponse théorique valent  $\Sigma^{max}/\Sigma_0^{max} \approx 1,13$  pour l'échantillon à fissure simple, et  $\Sigma^{max}/\Sigma_0^{max} \approx 1,16$  pour l'échantillon à fissure double. En conséquence, basé sur la symétrie angulaire du milieu discret, le rapport exact est de  $1 \leq \Sigma^{max}/\Sigma_0^{max} \leq 1,13$  (fissure simple) et

$1 \leq \Sigma^{max} / \Sigma_0^{max} \leq 1,16$  (fissure double), comme on peut voir sur la Figure 3.18b.

#### 3.3.3.4 Conclusions partielles

On propose dans cette première étude une approche discrète en mécanique de la rupture des matériaux fragiles isotropes entièrement compatible avec la théorie classique continue. Basée sur l'équivalence entre les approches discrètes et continues en élasticité, on présente une expression pour le facteur d'intensité des contraintes  $K_I$  comme étant une fonction des forces de deux contacts voisins. Ceci permet l'introduction directe de la ténacité  $K_{IC}$  comme étant un paramètre du matériau, sans aucune calibration préalable du modèle discret.

L'approche discrète est testée sur deux cas de traction de plaques pré-fissurées (mode  $I$ ). Les deux cas présente une convergence monotone vers les solutions théoriques pour des niveaux de discrétisation croissants (évalué par le rapport  $L/d$ ). Le modèle est parfaitement isotrope en élasticité, mais il présente une anisotropie limitée en mécanique de la rupture, caractérisée par une légère augmentation de la résistance des échantillons pour des directions de la structure bien définies (13% pour l'échantillon avec une fissure simple et 16% pour l'échantillon avec une fissure double).

Pour corriger ce comportement anisotrope en mécanique de la rupture et généraliser le critère de propagation des fissures pour le mode mixte (mode  $I$  et mode  $II$ ) on étudie en détail les contraintes principales en pointe de fissure. Cette étude est présentée dans le chapitre suivant.

#### ***Publication :***

B. D. Le, G. Koval, C. Chazallon, (2013) "Discrete element approach in brittle fracture mechanics", Engineering Computations, Vol. 30, 2, pp. 263-276.



## Chapitre 4

# Modélisation discrète en mécanique de la rupture - Approche isotrope en mode mixte

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>68</b>
<b>4.2</b>	<b>Propagation de fissures en mode mixte - critère de la contrainte d'ouverture maximale</b>	<b>68</b>
<b>4.3</b>	<b>Contraintes principales agissant entre deux contacts</b>	<b>68</b>
4.3.1	Rapport entre forces et contraintes moyennes	68
4.3.1.1	Rapport entre les déplacements et les déformations moyennes	70
4.3.2	Contraintes principales	70
4.3.3	Déformations principales	72
4.3.4	Calcul de $\beta$	73
4.3.5	Évaluation des contraintes principales moyennes $\bar{\sigma}_I$ et $\bar{\sigma}_{II}$	73
4.3.6	Critère de rupture - Calcul du facteur d'intensité des contraintes effectif $K_{\theta\theta}$	73
<b>4.4</b>	<b>Vérification numérique</b>	<b>74</b>
4.4.1	Rupture en mode $I$ - Traction simple	74
4.4.2	Fissure biaxiale	75
4.4.3	Fissuration de la poutre pré-fissurée - essai de flexion 4 points	77
<b>4.5</b>	<b>Conclusions partielles</b>	<b>77</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé un critère de rupture fragile (en mode I) basé sur l'étude des forces agissant sur deux contacts adjacents. Malgré une convergence monotone des résultats en fonction du niveau de discrétisation, ce critère conduit à un comportement non isotrope, étant donné l'effet de l'orientation de la structure du milieu discret observé.

On discute, dans ce chapitre, la généralisation du critère de rupture au cas de sollicitations en mode mixte (mode I et mode II). La prise en compte des déplacements des contacts (en plus des forces) permet de déterminer les contraintes principales (aussi bien que leurs orientations) et d'apporter une réponse à la question de l'anisotropie. On vérifie le critère en répétant les essais de traction déjà vus dans le chapitre précédent, pour ensuite passer aux simulations en mode mixte (fissure sous chargement bi-axial et flexion 4 points d'une poutre pré-fissurée).

## 4.2 Propagation de fissures en mode mixte - critère de la contrainte d'ouverture maximale

Dans la Section 1.4.2, on argumente que les différences entre les critères classiques de la mécanique de la rupture ne sont pas très importantes. Par rapport aux critères analysés, le critère de la contrainte d'ouverture maximale proposé par Erdogan et Sih [37] semble être le plus intuitif, la direction de propagation de fissure  $\theta_0$  étant alors orthogonale à la direction de la contrainte principale de traction ( $\max \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(\theta_0)$ ). En outre, écrit en fonction des facteurs d'intensités effectifs ( $K_{\theta\theta}$  et  $K_{r\theta}$ ), le critère semble être une généralisation simple du critère pour le mode I, associé directement à la ténacité du matériau  $K_{IC}$ . En rappelant la Section 1.4.2.1, pour le critère de la contrainte d'ouverture maximale, la fissure se propage selon une direction  $\theta_0$  lorsque :

$$K_{r\theta}(\theta_0) = 0 \rightarrow K_{\theta\theta}(\theta_0) = K_{IC}. \quad (4.1)$$

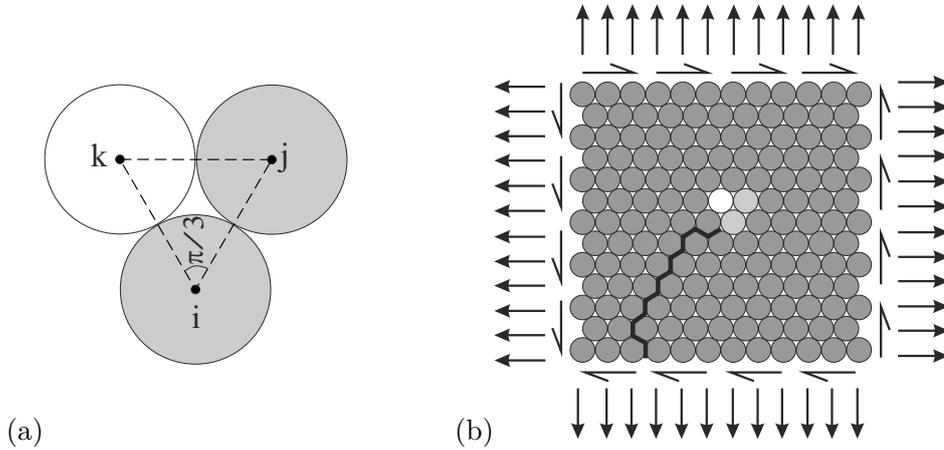
Dans le milieu discret, les efforts sont transmis par des forces de contact entre les particules. La suite du travail commence avec l'écriture d'une équivalence entre les forces de contact (milieu discret) et les contraintes principales (milieu continu). À partir des valeurs des contraintes principales agissant à proximité d'une fissure, on termine la construction du modèle avec la définition des facteurs d'intensité de contraintes pour le milieu discret.

## 4.3 Contraintes principales agissant entre deux contacts

### 4.3.1 Rapport entre forces et contraintes moyennes

Pour établir la relation entre les forces de contact et les contraintes, nous considérons un binôme de contacts constitué par trois particules ( $i$ ,  $j$  et  $k$ ) en contact :  $ik$  et

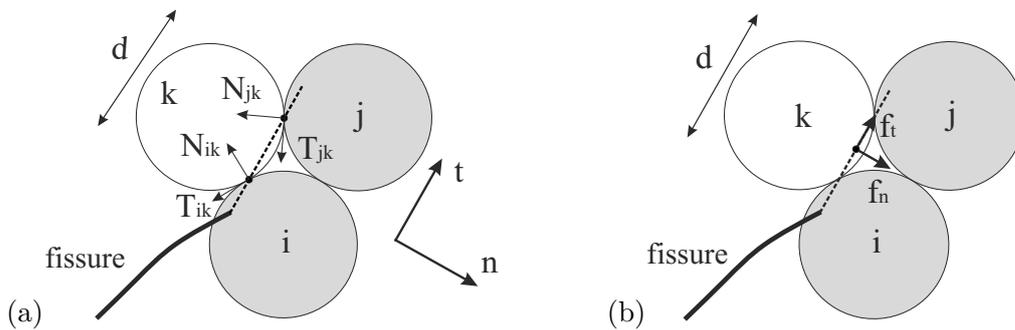
$jk$  (Figure 4.1a), à proximité d'une fissure dans un milieu discret sous un chargement quelconque (Figure 4.1b).



**Figure 4.1** – (a) Contacts adjacents à une (b) fissure en milieu discret.

La distribution des forces pour le binôme de contacts est présentée sur la Figure 4.2a, elle comporte des composantes normales ( $N$ ) et des composantes tangentielles ( $T$ ). Les forces résultantes de réaction  $f_n$  et  $f_t$  des efforts  $N, T$  (dans le repère  $(n, t)$ ) s'écrivent (Figure. 4.2b) :

$$\begin{cases} f_n = \frac{1}{2} (N_{ik}\sqrt{3} + T_{ik} + N_{jk}\sqrt{3} - T_{jk}), \\ f_t = \frac{1}{2} (-N_{ik} + T_{ik}\sqrt{3} + N_{jk} + T_{jk}\sqrt{3}). \end{cases} \quad (4.2)$$



**Figure 4.2** – Distribution des forces de contact dans le binôme considéré (a) et les forces résultantes de réaction (b).

On peut associer les contraintes moyennes (selon une longueur  $d$  d'un diamètre  $d$ )  $\bar{\sigma}_n$

et  $\bar{\sigma}_t$  à  $f_n$  et  $f_t$  :

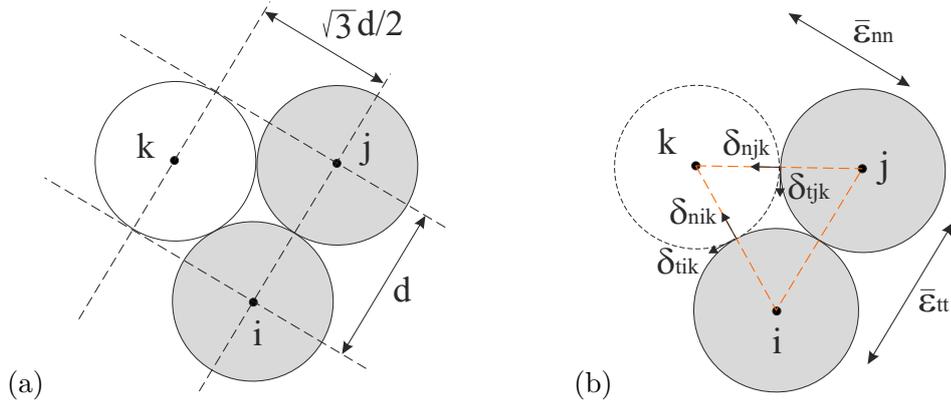
$$\begin{cases} \bar{\sigma}_n = f_n/d, \\ \bar{\sigma}_t = f_t/d. \end{cases} \quad (4.3)$$

#### 4.3.1.1 Rapport entre les déplacements et les déformations moyennes

Les déformations normales  $\bar{\varepsilon}_{nn}$  et transversales  $\bar{\varepsilon}_{tt}$  moyennes peuvent être déterminées à partir des déplacements relatifs des particules  $i$ ,  $j$  et  $k$  et des dimensions normales  $d\sqrt{3}/2$  et transversale  $d$  du motif (Figure 4.3a). En utilisant les notations de la Figure 4.3b pour les déplacements aux contacts, on a pour les déformations

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_{nn} = \frac{1}{4} \left( \delta_{nik}\sqrt{3} + \delta_{njc}\sqrt{3} + \delta_{tik} - \delta_{tjk} \right) \frac{2}{d\sqrt{3}}, \\ \bar{\varepsilon}_{tt} = \frac{1}{4} \left( \delta_{nik} + \delta_{njc} - \delta_{tik}\sqrt{3} + \delta_{tjk}\sqrt{3} \right) \frac{2}{d}, \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $\delta_n$  et  $\delta_t$  sont des déplacements normaux et tangentiels pour chaque contact.

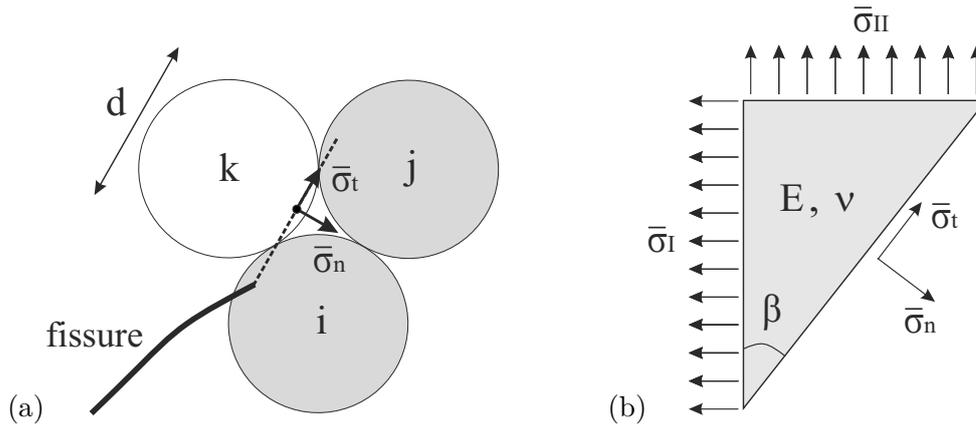


**Figure 4.3** – (a) Dimensions pour le calcul des déformations moyennes. (b) Déplacements des contacts et déformations moyennes normale  $\bar{\varepsilon}_{nn}$  et transversale  $\bar{\varepsilon}_{tt}$ .

#### 4.3.2 Contraintes principales

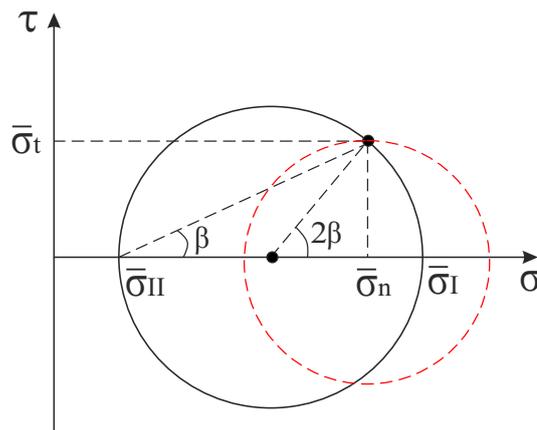
Le rapport entre les forces et contraintes agissant sur le plan défini par deux contacts rend plus simple l'équivalence entre un milieu discret et un milieu continu élastique isotrope (avec un module d'Young  $E$  et un coefficient de Poisson  $\nu$ ), comme indiqué sur la Figure 4.4. En appelant  $\beta$  l'angle entre le repère  $(n, t)$  et celui associé aux directions des contraintes principales moyennes  $\bar{\sigma}_I$  et  $\bar{\sigma}_{II}$  du milieu continu équivalent (Figure 4.4b), après la vérification de l'équilibre de forces dans le plan, on a :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_I = \bar{\sigma}_n + \bar{\sigma}_t \tan(\beta), \\ \bar{\sigma}_{II} = \bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_t / \tan(\beta). \end{cases} \quad (4.5)$$



**Figure 4.4** – (a) Contraintes moyennes  $\bar{\sigma}_n$  et  $\bar{\sigma}_t$  et (b) leur rapport avec le champ de contraintes d'un milieu continu équivalent.

On observe facilement dans le plan de Mohr (Figure 4.5), le nombre infini de cercles associés à une paire de valeurs de contraintes  $\bar{\sigma}_n$  et  $\bar{\sigma}_t$ . C'est pour cette raison qu'il est impératif de connaître l'angle  $\beta$  pour la détermination des contraintes principales moyennes  $\bar{\sigma}_I$  et  $\bar{\sigma}_{II}$ .



**Figure 4.5** – Cercles de Mohr associés à un état de contrainte  $\bar{\sigma}_n$  et  $\bar{\sigma}_t$ .

### 4.3.3 Déformations principales

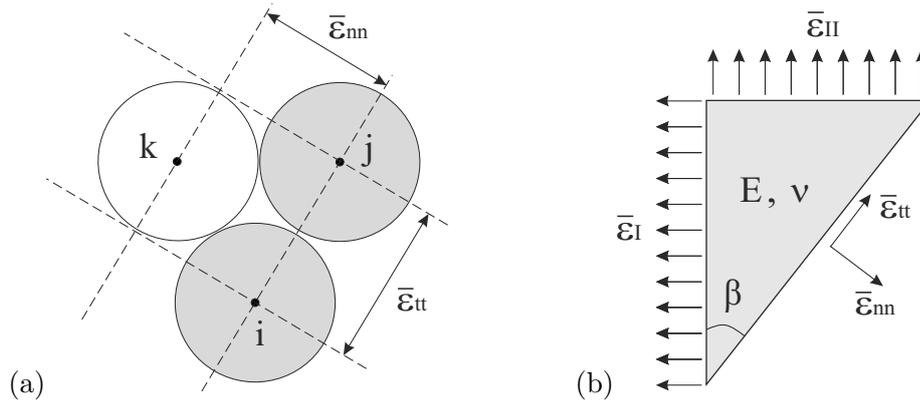
Le comportement d'un matériau élastique peut être écrit en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\underline{\underline{\sigma}} - \nu \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}}], \quad (4.6)$$

où  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_I & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_{II} \end{bmatrix}$  est le tenseur de déformations moyennes (en  $2D$ ),  $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_I & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{II} \end{bmatrix}$  est le tenseur de contraintes moyennes (en  $2D$ ),  $\bar{\varepsilon}_I$  et  $\bar{\varepsilon}_{II}$  sont les déformations principales moyennes,  $\bar{\sigma}_I$  et  $\bar{\sigma}_{II}$  sont les contraintes principales moyennes, et  $\underline{\underline{I}}$  est la matrice d'identité. On observe que  $\bar{\varepsilon}_I$  et  $\bar{\varepsilon}_{II}$  sont directement liées à  $\bar{\sigma}_I$  et  $\bar{\sigma}_{II}$  :

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_I & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_{II} \end{bmatrix} = \frac{1 + \nu}{E} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_I & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{II} \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E} (\bar{\sigma}_I + \bar{\sigma}_{II}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Aucune déformation de cisaillement n'est observée selon la direction associée aux contraintes principales. Donc,  $\beta$  définit aussi la direction des déformations principales moyennes (Figure 4.6).



**Figure 4.6** – (a) Déformations moyennes dans un milieu discret et (b) dans un milieu continu.

Les vecteurs unitaires qui définissent le repère  $(n, t)$  par rapport au repère principal (Figure 4.2a) peuvent s'écrire en fonction de  $\beta$  comme :  $\underline{n} = (\cos \beta, -\sin \beta)$  et  $\underline{t} = (\sin \beta, \cos \beta)$ . Les déformations moyennes  $\bar{\varepsilon}_{nn}$  et  $\bar{\varepsilon}_{tt}$  sont liées aux déformations principales moyennes par les relations  $\bar{\varepsilon}_{nn} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n}$  et  $\bar{\varepsilon}_{tt} = \underline{t} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{t}$ , ce qui revient à dire

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_{nn} = \bar{\varepsilon}_I \cos^2 \beta + \bar{\varepsilon}_{II} \sin^2 \beta, \\ \bar{\varepsilon}_{tt} = \bar{\varepsilon}_I \sin^2 \beta + \bar{\varepsilon}_{II} \cos^2 \beta. \end{cases} \quad (4.8)$$

Comme pour les contraintes principales, la détermination de  $\beta$  est nécessaire à la définition des déformations principales moyennes  $\bar{\varepsilon}_I$  et  $\bar{\varepsilon}_{II}$  à partir d'une paire de valeurs

$\bar{\varepsilon}_{nn}$  et  $\bar{\varepsilon}_{tt}$  de déformations agissant sur un binôme de contacts.

#### 4.3.4 Calcul de $\beta$

On peut déterminer la valeur de  $\beta$  en associant les informations provenant des contraintes et déformations moyennes au niveau d'une paire de contacts. D'après l'Équation 4.8, la somme  $\bar{\varepsilon}_{nn} + \bar{\varepsilon}_{tt}$  est égal à  $\bar{\varepsilon}_I + \bar{\varepsilon}_{II}$  (premier invariant du tenseur de déformations). En utilisant l'Équation 4.7 (élasticité), on peut écrire la trace du tenseur de déformations à partir de la trace du tenseur de contraintes :

$$\bar{\varepsilon}_{nn} + \bar{\varepsilon}_{tt} = \frac{1 - \nu}{E}(\bar{\sigma}_I + \bar{\sigma}_{II}). \quad (4.9)$$

Après avoir reporté les expressions des contraintes principales moyennes (Équation 4.5), l'Équation 4.9 s'écrit simplement :

$$\bar{\varepsilon}_{nn} + \bar{\varepsilon}_{tt} = \frac{1 - \nu}{E}(\bar{\sigma}_n + \bar{\sigma}_t \tan \beta + \bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_t / \tan \beta). \quad (4.10)$$

On peut simplifier l'Équation 4.10 en isolant  $\beta$  :

$$\tan \beta - \frac{1}{\tan \beta} = -\frac{2}{\tan(2\beta)} = \frac{A}{\bar{\sigma}_t}, \quad (4.11)$$

où  $A = \frac{E}{1 - \nu}(\bar{\varepsilon}_{nn} + \bar{\varepsilon}_{tt}) - 2\bar{\sigma}_n$ . Finalement, la valeur de  $\beta$  peut être obtenue par

$$\beta = -\frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\bar{\sigma}_t}{A} \right). \quad (4.12)$$

#### 4.3.5 Évaluation des contraintes principales moyennes $\bar{\sigma}_I$ et $\bar{\sigma}_{II}$

À partir des valeurs de  $\bar{\sigma}_n$  et  $\bar{\sigma}_t$  (Équation 4.3) et de  $\beta$  (Équation 4.12), la contrainte  $\bar{\sigma}_I$  peut être déterminé par l'application de l'Équation 4.5 ( $\bar{\sigma}_I = \bar{\sigma}_n + \bar{\sigma}_t \tan \beta$ ).

On suggère, par contre, une équation plus robuste pour le calcul de  $\bar{\sigma}_{II}$ , initialement sensible à des petites valeurs de  $\beta$ . En introduisant les valeurs des déformations moyennes  $\bar{\varepsilon}_{nn}$  et  $\bar{\varepsilon}_{tt}$  (Équation 4.4) et la valeur de  $\bar{\sigma}_I$  dans l'Équation 4.9, on a pour  $\bar{\sigma}_{II}$  :

$$\bar{\sigma}_{II} = \frac{E}{1 - \nu}(\bar{\varepsilon}_{nn} + \bar{\varepsilon}_{tt}) - \bar{\sigma}_I. \quad (4.13)$$

#### 4.3.6 Critère de rupture - Calcul du facteur d'intensité des contraintes effectif $K_{\theta\theta}$

Le facteur d'intensité des contraintes effectif  $K_{\theta\theta}$  doit être déterminé pour la direction  $\theta_0$  orthogonale à la contrainte principale majeur. La contrainte d'ouverture maximale  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_0)$  est donc définie par

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_0) = \bar{\sigma}_I, \text{ si } |\beta| \leq \pi/4, \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_0) = \bar{\sigma}_{II}, \text{ si } |\beta| > \pi/4, \end{cases} \quad (4.14)$$

où  $\bar{\sigma}_I$  et  $\bar{\sigma}_{II}$  sont les contraintes principales (moyennes) agissantes sur deux contacts adjacents (Figure 4.4b).

À partir de la valeur de la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta_0)$  à la proximité d'une fissure (Équation 1.8), sa moyenne selon une distance  $d$  s'écrit en fonction de  $K_{\theta\theta}(\theta_0)$  comme

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_0) = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_{\theta\theta}(r, \theta_0) dr = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{K_{\theta\theta}(\theta_0)}{\sqrt{2\pi r}} dr = \sqrt{\frac{2}{\pi d}} K_{\theta\theta}(\theta_0). \quad (4.15)$$

En utilisant la valeur de  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_0)$  obtenue par l'étude des forces des deux contacts (Équation 4.14), la valeur du facteur d'intensité des contraintes effectif  $K_{\theta\theta}(\theta_0)$  se calcule simplement (selon le résultat de l'Équation 4.15) comme

$$K_{\theta\theta}(\theta_0) = \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_0) \sqrt{\frac{\pi d}{2}}. \quad (4.16)$$

En pratique, on calcule une valeur pour le facteur d'intensité de contraintes  $K_{\theta\theta}(\theta_0) = f(N_{ik}, T_{ik}, N_{jk}, T_{jk}, d, \delta_{nik}, \delta_{njk}, \delta_{tik}, \delta_{tjk})$  à chaque pas de temps, pour chaque binôme de contacts adjacents, en utilisant en séquence les Équations : 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.12, 4.13, 4.14 et 4.16. L'analyse de tous les binômes de contacts adjacents élimine toute difficulté à localiser les pointes de fissure. Selon le critère de la contrainte d'ouverture maximale, lorsque  $K_{\theta\theta}(\theta_0)$  atteint la valeur de la ténacité  $K_{IC}$  du matériau, la force de cohésion du contact le plus tendu du binôme associé est supprimée, donnant lieu à la propagation de la fissure voisine à ce contact.

## 4.4 Vérification numérique

Après avoir adapté le critère de rupture au mode mixte et proposé une solution au comportement anisotrope discuté dans la Section 3.3.3.3, on compare les résultats numériques à des solutions de la littérature. On commence en vérifiant la rupture en mode  $I$ , notamment l'effet de l'orientation angulaire. Ensuite on analyse le branchement d'une fissure en cisaillement pur (et sa propagation en mode mixte) pour un échantillon sous chargement bi-axial. Comme dernier exemple, on étudie une poutre pré-fissuré en flexion 4 points.

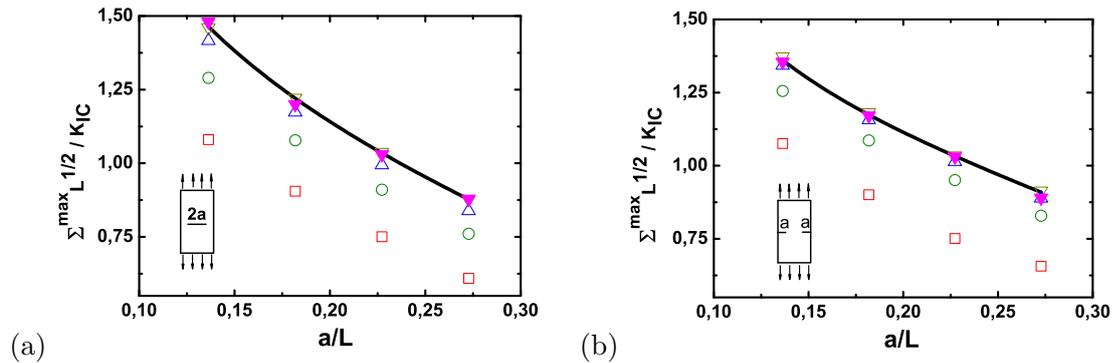
### 4.4.1 Rupture en mode $I$ - Traction simple

Pour confirmer la cohérence des résultats du modèle en mode  $I$ , on refait les mêmes essais discutés dans la Section 3.3.3. On analyse deux plaques pré-fissurées en traction simple : fissure simple (Figure 3.15a) et fissure double (Figure 3.15b). Pour pouvoir

visualiser l'effet de l'anisotropie du modèle, deux cas d'orientation de structure de particules sont comparés :  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi/6$  radians (voir Figure 3.17). Les paramètres numériques sont les mêmes que ceux utilisés dans le Chapitre 3.

Pour  $\varphi = 0$  radians (Figure 4.7), on obtient exactement les mêmes résultats que ceux précédemment observés (voir Figure 3.16). Les résultats sont convergents lorsque  $L/d$  (lié à la qualité de la discrétisation) augmente. On observe une erreur de 10 – 15% pour  $L/d = 11$ , qui diminue à moins de 5% pour  $L/d = 22$ , par exemple. Par contre, lorsque  $\varphi = \pi/6$  radians, on n'observe plus l'effet nuisible de la structure discrète (présenté précédemment sur la Figure 3.18), vu que les résultats convergent vers la solution théorique (Figure 4.7).

Cette absence de l'effet de l'orientation de la structure pour deux cas extrêmes ( $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi/6$  radians) est un fort indicateur du comportement isotrope décrit par le critère de rupture et ceci se confirme avec l'étude de la propagation des fissures en mode mixte dans les sections suivantes.

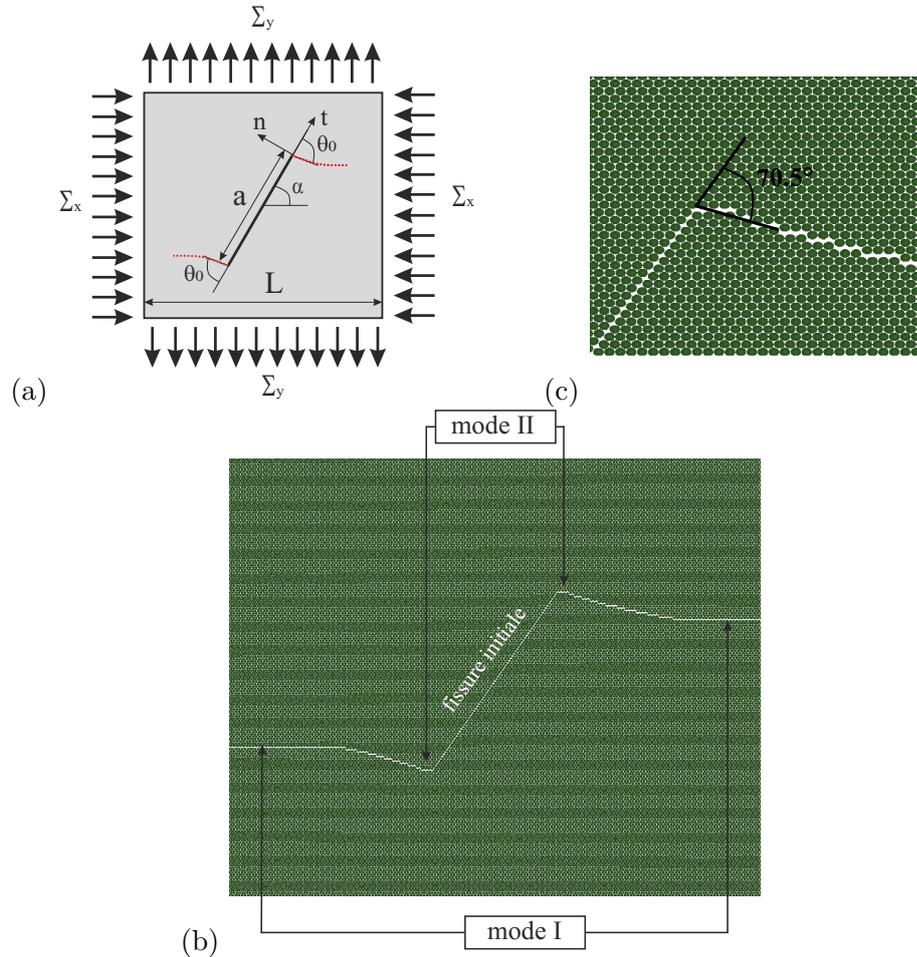


**Figure 4.7** – Contrainte maximale  $\Sigma^{\max} \sqrt{L} / K_{IC}$  en fonction des longueurs initiales des fissures  $a/L$  pour les cas de (a) fissure simple et (b) fissure double pour différents niveaux de discrétisation ( $\square$ )  $L/d = 11$ , ( $\circ$ )  $L/d = 22$ , ( $\triangle$ )  $L/d = 44$ , ( $\nabla$ )  $L/d = 88$ , et ( $\blacktriangledown$ )  $L/d = 88$  avec une rotation de la structure de particules d'un angle  $\pi/6$  radians. Les lignes continues indiquent les expressions théoriques pour  $\Sigma^{\max}$  correspondant à l'Équation 3.14.

#### 4.4.2 Fissure biaxiale

Dans la Section 1.4.2, on observe que les contraintes de cisaillement peuvent induire le branchement de la fissure. Pour visualiser ce comportement, on utilise un échantillon carré (de côté  $L$ ) sous contrainte bi-axiale (latéralement  $\Sigma_x$  et verticalement  $\Sigma_y$ ), avec une fissure initiale inclinée d'un angle  $\alpha$  et de longueur  $a$  (voir Figure 4.8a). Pour imposer le mode II pur ( $K_I = 0$ ) en pointe de fissure, il suffit d'annuler la composante de la

contrainte selon la direction  $n$ , qui est égale à  $\Sigma_x \sin^2 \alpha + \Sigma_y \cos^2 \alpha$ . De cette façon, on obtient un rapport  $\Sigma_y/\Sigma_x = -\tan^2 \alpha$ , qui peut être obtenu avec une compression horizontale associée à une traction verticale. On représente une fissure inclinée de  $\alpha = 60^\circ$  (par simplicité, lié à la structure discrète), avec  $a/L = 0,41$  et  $L/d = 176$  (Figure 4.8b).



**Figure 4.8** – (a) Échantillon carré avec une fissure inclinée sous un chargement bi-axial. Les lignes pointillées indiquent la trajectoire de la propagation de la fissure. (b) Simulation de cette configuration et, en détail, (c) la prédiction théorique du branchement de la fissure.

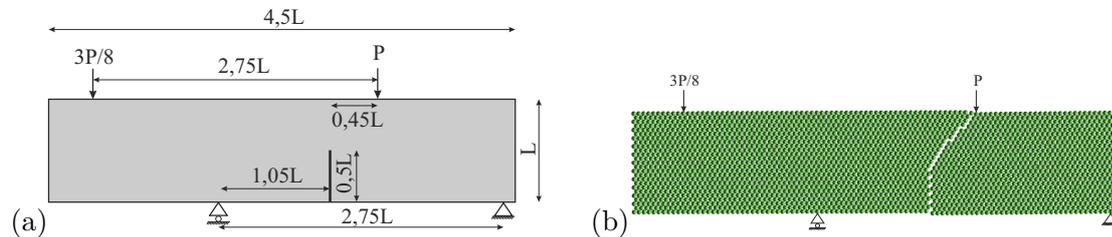
Selon le critère de contrainte d'ouverture maximale, pour un cisaillement pur ( $K_I = 0$ ), l'angle qui maximise  $\sigma_{\theta\theta}$  est  $\theta_0 \simeq 70,5^\circ$  par rapport à la direction de la fissure avant bifurcation  $\alpha$  (Équation 1.7). L'angle de branchement de la fissure  $\theta_0$  est seulement une prédiction de la propagation de la fissure initiale. La tendance générale de la fissure est de se propager horizontalement, orthogonalement à la contrainte de traction, en mode I.

La propagation de la fissure à partir des simulations présente un chemin cohérent qui tend effectivement à se propager selon une ligne droite horizontale (Figure 4.8b), après un branchement initial qui suit bien la prédiction théorique (en détail sur la Figure 4.8c).

#### 4.4.3 Fissuration de la poutre pré-fissurée - essai de flexion 4 points

La fissure sur la poutre asymétrique en flexion 4 points (Figure 4.9a) est sollicitée en mode mixte. On a  $K_I = 8,76M\sqrt{\pi a}/L^2$  et  $K_{II} = 1,39V\sqrt{\pi a}/L$  [9] pour les facteurs d'intensité de contrainte, où  $L$  est la longueur de la poutre,  $a = 0,5L$  est la longueur de la fissure initiale,  $M = 0,1875LP$  et  $V = 0,625P$  sont le moment de flexion et l'effort tranchant respectifs. Les efforts  $M$  et  $V$  sont proportionnels à la force par unité de longueur  $P$ , appliquée sur toute l'épaisseur de la poutre. Selon le critère de la contrainte d'ouverture maximale, la limite de  $K_{\theta\theta}(\theta) = K_{IC}$  (Équation 1.9) impose une valeur maximale de  $P$ ,  $P_{max} \approx 0,37K_{IC}\sqrt{L}$  avant l'effondrement de la structure, montré sur la Figure 4.9b pour une discrétisation grossière. La fissure se propage initialement selon un angle  $\theta_0 \approx 41,4^\circ$  (voir l'Annexe D), qui correspond approximativement à la trajectoire de la pointe de la fissure jusqu'au point d'application de la force  $P$ .

On simule le comportement de la poutre pour trois discrétisations différentes  $L/d$  : 22, 44 et 88. La charge limite obtenue avec  $L/d = 22$  (la plus grossière) est de  $90\%P_{max}$ . Avec les deux autres discrétisations, on retrouve respectivement  $95\%$  et  $98\%$  de  $P_{max}$ , ce qui indique une bonne convergence des résultats vers la valeur théorique.



**Figure 4.9** – (a) Poutre asymétrique pré-fissurée en flexion 4 points et (b) sa configuration finale de rupture pour  $L/d = 22$ .

## 4.5 Conclusions partielles

Dans ce chapitre, on présente l'extension du critère de rupture au mode mixte. On montre que l'analyse des forces et des déplacements de deux contacts adjacents permet la détermination des contraintes principales moyennes, ainsi que leurs directions. Selon le critère de la contrainte d'ouverture maximale, la fissure se propage en suivant une direction orthogonale à la direction de la plus grande contrainte de traction  $\theta_0$ , lorsque  $K_{\theta\theta}(\theta_0)$  atteint la valeur de la ténacité du matériau  $K_{IC}$ .

On vérifie le critère discret de rupture pour des essais de traction simple (mode  $I$ ), d'une plaque présentant une fissure inclinée sous chargement bi-axial (transition du mode  $II$  vers le mode  $I$ ) et d'une poutre asymétrique pré-fissure en flexion 4 points (mode mixte). Les résultats obtenus sont cohérents au niveau des valeurs des charges de rupture ainsi que pour les trajectoires de propagation des fissures.

On réévalue l'effet de l'orientation angulaire de la structure discrète sur le modèle discret et on observe finalement un comportement isotrope. Ce résultat est essentiel pour l'application du critère discret de rupture dans l'étude de la résistance des matériaux comme discuté dans le chapitre suivant.

# Chapitre 5

## Rupture des matériaux sains

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>80</b>
<b>5.2</b>	<b>Comportement uniaxial d'un matériau fragile</b>	<b>80</b>
5.2.1	Forces de contact	80
5.2.2	Résistance à traction	82
5.2.3	Résistance à compression	83
5.2.4	Enveloppe de rupture	85
<b>5.3</b>	<b>Vérification du critère de rupture sous un état de contrainte homogène bi-axial</b>	<b>86</b>
<b>5.4</b>	<b>Rupture par flexion</b>	<b>88</b>
<b>5.5</b>	<b>Rupture par compression diamétrale</b>	<b>91</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>94</b>

---

## 5.1 Introduction

La mécanique de la rupture atteint ses limites lorsque les défauts dans une structure deviennent trop petits, produisant des valeurs inconsistantes avec la réalité. Les incohérences ne sont pas dues à la théorie obligatoirement, mais seraient plutôt liées à la nécessité d'une représentation des défauts microscopiques de manière à bien caractériser les limites de résistance des matériaux. En pratique, cette difficulté est partiellement surmontée, dans les approches continues, par l'utilisation des critères phénoménologiques, capables d'indiquer les chargements limites avant la propagation de micro-fissures (Sections 1.5 et 1.6), sans pour autant décrire précisément le déclenchement des fissures. Dans les approches discrètes, la modélisation qualitative de la fissuration n'est pas une difficulté normalement, mais plutôt la maîtrise du niveau de charge correspondant ; la résistance demeure une approximation obtenue par essai-erreur. Dans ce chapitre, on se propose d'étendre le champ d'application du critère discret de rupture à la caractérisation précise de la résistance des matériaux fragiles en absence de fissures identifiables. On s'intéresse ici, particulièrement, à la résistance à traction et à la résistance à la compression.

## 5.2 Comportement uniaxial d'un matériau fragile

On prend comme principe que le matériau intact travaille en élasticité, comme indiqué sur le schéma du comportement contrainte-déformation de la Figure 5.1 pour le cas uniaxial. Ce comportement élastique est limité supérieurement par la contrainte maximale de traction  $\Sigma^{tr}$  et inférieurement par la contrainte maximale de compression  $\Sigma^c$ . Lorsque le matériau atteint une de ces limites, des (micro) fissures peuvent se propager et une rupture fragile peut avoir lieu, selon la configuration de la structure.

### 5.2.1 Forces de contact

On évalue la résistance uniaxiale théorique d'un matériau dans l'approche discrète en appliquant un état de contraintes homogène. Compte tenu de la périodicité angulaire de la structure, un éventuel effet de son orientation angulaire est évalué par l'étude de deux directions de chargement (comme indiqué sur la Section 3.3.3.3) reproduit par le système de forces (verticales et horizontales) décrit sur la Figure 5.2.

Vu la symétrie de la cellule et des chargements, on observe seulement deux types de contacts différents, identifiés par les symboles  $\bullet$  et  $\circ$ . Les composantes normale  $N$  et tangentielle  $T$ , ainsi que les déplacements relatifs normal  $\delta_n$  et tangentiel  $\delta_t$  de chaque contact sont présentées au Tableau 5.1 pour le chargement vertical et au Tableau 5.2 pour le chargement horizontal (voir Section 3.2.2 pour le calcul).

On identifie deux binômes de contacts différents possibles ( $\bullet\bullet$ ) et ( $\bullet\circ$ ). Selon le chargement ( $P_y$  ou  $P_x$ ), pour chaque binôme, des contraintes principales  $\bar{\sigma}_I$  et  $\bar{\sigma}_{II}$  peuvent y

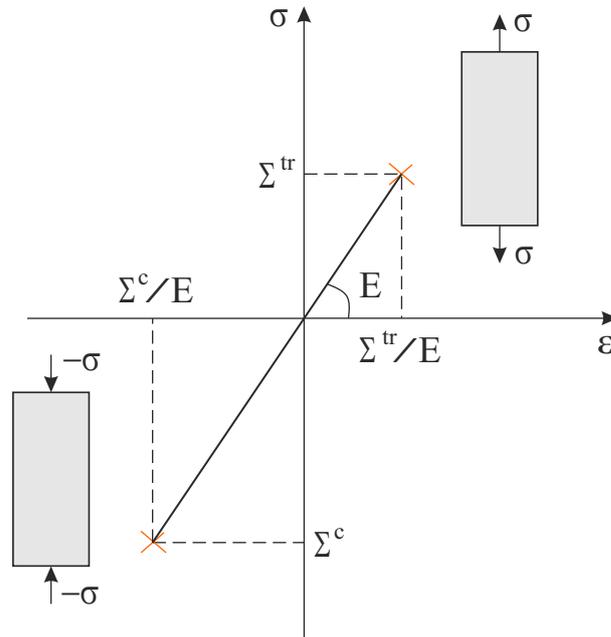


Figure 5.1 – Diagramme contrainte-déformation uniaxial de la rupture fragile.

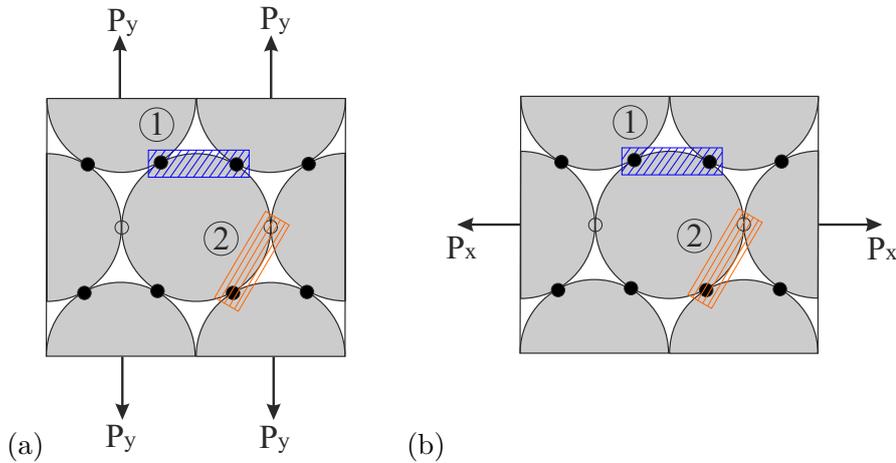


Figure 5.2 – Les deux types de contacts et les combinaisons résultantes pour (a) un chargement vertical et (b) pour un chargement horizontal.

être identifiées par l'application des Équations : 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.12, 4.13, 4.14 et 4.16 en séquence (comme discuté dans le Chapitre 4).

Le résultat final de  $\bar{\sigma}_I$  et  $\bar{\sigma}_{II}$ , ainsi que des valeurs intermédiaires des contraintes et des déformations moyennes, sont présentées sur le Tableau 5.3, pour le chargement vertical, et sur le Tableau 5.4, pour le chargement horizontal.

Contacts	$N$	$T$	$\delta_n$	$\delta_t$
•	$\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{2k_n+k_t}{k_n+k_t} P_y$	$\frac{1}{2} \frac{k_t}{k_n+k_t} P_y$	$\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{2k_n+k_t}{k_n(k_n+k_t)} P_y$	$\frac{1}{2} \frac{1}{k_n+k_t} P_y$
○	$-\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{k_n-k_t}{k_n+k_t} P_y$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{k_n-k_t}{k_n(k_n+k_t)} P_y$	0

**Table 5.1** – Forces et déplacements relatifs des contacts sous un chargement uniaxial vertical  $P_y$ .

Contacts	$N$	$T$	$\delta_n$	$\delta_t$
•	$\frac{1}{6} \frac{k_t}{k_n+k_t} P_x$	$-\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{k_t}{k_n+k_t} P_x$	$\frac{1}{6} \frac{k_t}{k_n(k_n+k_t)} P_x$	$-\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{1}{k_n+k_t} P_x$
○	$\frac{1}{6} \frac{3k_n+k_t}{k_n+k_t} P_x$	0	$\frac{1}{6} \frac{3k_n+k_t}{k_n(k_n+k_t)} P_x$	0

**Table 5.2** – Forces et déplacements relatifs des contacts sous un chargement uniaxial horizontal  $P_x$ .

Binôme	$\bar{\sigma}_n$	$\bar{\sigma}_t$	$\bar{\varepsilon}_{nn}$	$\bar{\varepsilon}_{tt}$	$ \beta $	$\bar{\sigma}_I$	$\bar{\sigma}_{II}$
••	$\frac{P_y}{d}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{3k_n+k_t}{k_n(k_n+k_t)d} P_y$	$-\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{k_n-k_t}{k_n(k_n+k_t)d} P_y$	0	$\sigma_{yy}$	0
•○	$\frac{P_y}{4d}$	$\frac{\sqrt{3}P_y}{4d}$	$\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{k_t}{k_n(k_n+k_t)d} P_y$	$\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{2k_n+k_t}{k_n(k_n+k_t)d} P_y$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\sigma_{yy}$

**Table 5.3** – Valeurs des contraintes moyennes  $\bar{\sigma}_n$  et  $\bar{\sigma}_t$ , déformations moyennes  $\bar{\varepsilon}_{nn}$  et  $\bar{\varepsilon}_{tt}$ ,  $|\beta|$ , des contraintes principales moyennes  $\bar{\sigma}_I$  et  $\bar{\sigma}_{II}$  pour chaque binôme de contacts sous le chargement vertical uniaxial  $P_y = \sigma_{yy}d$ .

Binôme	$\bar{\sigma}_n$	$\bar{\sigma}_t$	$\bar{\varepsilon}_{nn}$	$\bar{\varepsilon}_{tt}$	$ \beta $	$\bar{\sigma}_I$	$\bar{\sigma}_{II}$
••	0	0	$-\frac{1}{6} \frac{k_n-k_t}{k_n(k_n+k_t)d} P_x$	$\frac{1}{6} \frac{3k_n+k_t}{k_n(k_n+k_t)d} P_x$	0	0	$\sigma_{xx}$
•○	$\frac{\sqrt{3}P_x}{4d}$	$\frac{-P_x}{4d}$	$\frac{1}{6} \frac{2k_n+k_t}{k_n(k_n+k_t)d} P_x$	$\frac{1}{6} \frac{k_t}{k_n(k_n+k_t)d} P_x$	$\frac{\pi}{6}$	$\sigma_{xx}$	0

**Table 5.4** – Valeurs des contraintes moyennes  $\bar{\sigma}_n$  et  $\bar{\sigma}_t$ , déformations moyennes  $\bar{\varepsilon}_{nn}$  et  $\bar{\varepsilon}_{tt}$ ,  $\beta$ , et des contraintes principales moyennes  $\bar{\sigma}_I$  et  $\bar{\sigma}_{II}$  pour chaque binôme de contacts sous le chargement horizontal uniaxial  $P_x = \sqrt{3}\sigma_{xx}d$ .

## 5.2.2 Résistance à traction

Lorsque la contrainte de traction maximale supportée par le matériau  $\Sigma^{tr}$  est atteinte, une rupture par fissuration se déclenche. Pour que cela arrive dans le critère discret de rupture, le facteur d'intensité  $K_{\theta\theta}(\theta_0) = \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_0)\sqrt{\pi d/2}$  (Équation 4.16) doit atteindre

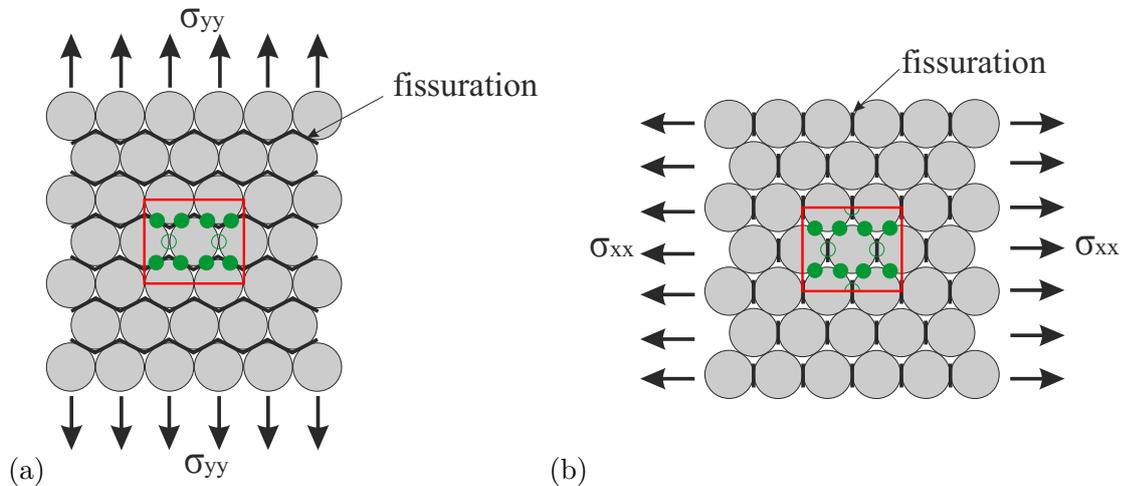
la ténacité du matériau  $K_{IC}$  simultanément.

Pour un chargement selon la direction verticale, la contrainte de traction maximale supportée par le matériau (obtenu pour  $K_{\theta\theta}(\theta_0) = K_{IC}$ ) vaut (à partir des résultats du Tableau 5.3)

$$\Sigma^{tr} = K_{IC} \sqrt{\frac{2}{\pi d}}. \quad (5.1)$$

On obtient exactement le même résultat pour la direction horizontale (selon les résultats du Tableau 5.4) ce qui indique une absence d'effet de l'orientation angulaire de la structure discrète, essentiel à la modélisation des matériaux isotropes.

Pour le cas de la traction verticale (Figure 5.2a), selon le Tableau 5.3, les binômes ( $\bullet \bullet$ ) sont les seuls candidats à la rupture si  $K_{\theta\theta}(\theta_0) = K_{IC}$ . Les deux contacts sont rompus simultanément vu que les forces normales de contact  $N$  sont identiques (Figure 5.3a). Dans le cas de traction horizontale (Figure 5.2b), ces sont plutôt les binômes ( $\bullet \circ$ ) les candidats à la rupture si  $K_{\theta\theta}(\theta_0) = K_{IC}$ . Dans cette situation, les contacts ( $\circ$ ) présentent des forces normales de contact  $N$  plus élevées (comme indiqué sur le Tableau 5.2) et donc, ce sont les contacts qui s'ouvrent (Figure 5.3b). On observe ainsi, une fissuration orthogonale à la direction de traction maximale.

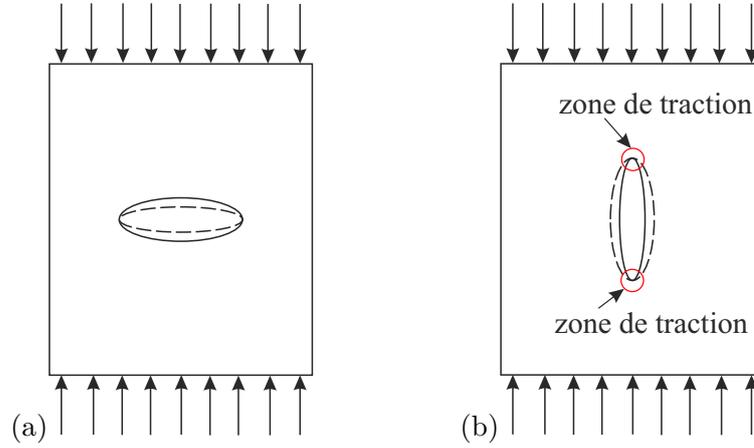


**Figure 5.3** – Fissuration orthogonale à la direction de traction maximale pour les cas (a) vertical et (b) horizontal.

### 5.2.3 Résistance à compression

En cas de compression, la tendance est à la fermeture de fissures orthogonales à la contrainte de compression (Figure 5.4a), ce qui empêche normalement leur propagation.

Par contre, des contraintes de traction peuvent être induites indirectement par compression de fissures suffisamment inclinées par rapport à la direction normale à la contrainte de compression (Figure 5.4b).



**Figure 5.4** – (a) Fermeture et (b) ouverture de défauts elliptiques par compression.

Pour un matériau sain, lorsque la contrainte maximale de compression supportée par le matériau  $\Sigma^c$  est atteinte, des (micro) fissures se propagent, donnant lieu à une rupture par fissuration. Pour pouvoir caractériser les conditions de cette rupture par compression, on propose le calcul d'un facteur d'intensité de contraintes apparent  $K_{rr}^*(\theta_0)$  :

$$K_{rr}^*(\theta_0) = \bar{\sigma}_{II} \sqrt{\frac{\pi d}{2}}. \quad (5.2)$$

L'utilisation de la contrainte principale  $\bar{\sigma}_{II}$  permet l'identification de l'état de contraintes orthogonal à  $\bar{\sigma}_I$  par définition. Sur les Tableaux 5.3 et 5.4, on observe que la valeur maximale de  $|\beta|$  est  $\pi/6$  en contrainte homogène. Cela veut dire que  $\bar{\sigma}_I$  tend à mieux caractériser l'état de contraintes transversal du binôme de contacts, tandis que  $\bar{\sigma}_{II}$  est plutôt liée à la contrainte qui suit la direction des deux contacts (voir Figure 4.4). Seulement des valeurs négatives de  $\bar{\sigma}_{II}$  (et par conséquent, de  $K_{rr}^*(\theta_0)$ ) peuvent avoir un intérêt dans le comportement d'ouverture des contacts d'un binôme par compression. De ce fait, une limite inférieure de  $K_{rr}^*(\theta_0)$  (désormais  $K^*$ , appelée ici ténacité fictive) permet d'imposer une limite à  $\Sigma^c$ , de façon similaire à la résistance à traction :

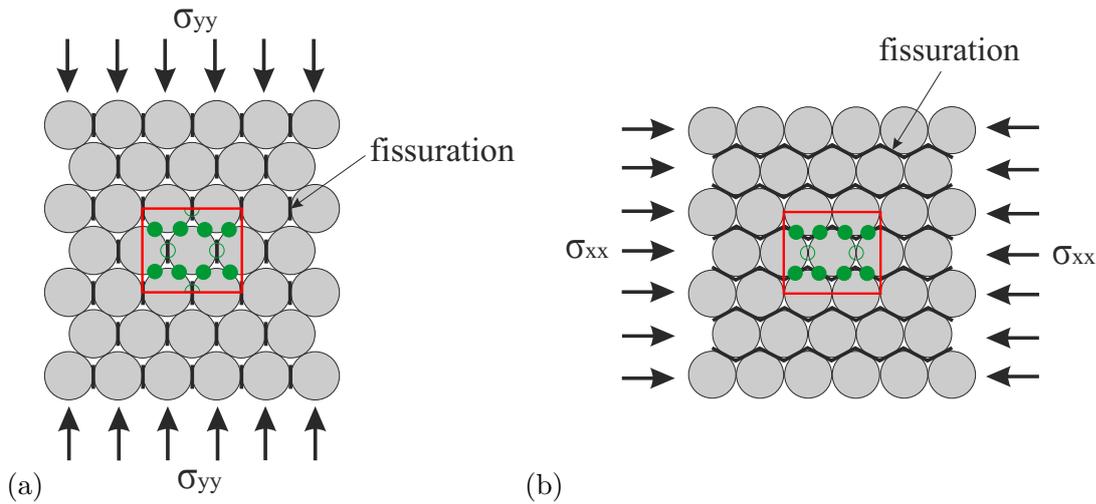
$$\Sigma^c = K^* \sqrt{\frac{2}{\pi d}}. \quad (5.3)$$

Il faut noter que  $K^*$  prend un signe négatif et les mêmes unités que la ténacité  $K_{IC}$ , sans pour autant être nécessairement corrélé à aucune grandeur physique. Inversement, on définit  $K^*$  de façon convenable comme une fonction de  $\Sigma^c$  et du diamètre  $d$  des particules :

$$K^* = \Sigma^c \sqrt{\frac{\pi d}{2}}, \quad (5.4)$$

la ténacité fictive  $K^*$  permet donc la maîtrise complète de la résistance à la compression du matériau (quelle que soit la valeur de la ténacité  $K_{IC}$  ou la taille des particules  $d$ ).

Pour le cas de la compression verticale (Figure 5.2a, en supposant  $P_y < 0$ ), selon le Tableau 5.3, seuls les binômes ( $\bullet \circ$ ) sont concernés si  $K_{rr}^*(\theta_0) = K^*$ . En analysant les forces normales de contact  $N$  (Tableau 5.1), quelle que soit la valeur des raideurs  $k_n$  et  $k_t$ , les contacts ( $\circ$ ) sont soumis à des forces de traction plus élevées (ou de compression moins élevées) et donc, sont les contacts qui doivent s'ouvrir (Figure 5.5a). Dans le cas de compression horizontale (Figure 5.2b en supposant  $P_x < 0$ ), les binômes ( $\bullet \bullet$ ) sont les seuls candidats à la rupture, si  $K_{rr}^*(\theta_0) = K^*$ . Dans cette situation, les deux contacts ( $\bullet$ ) s'ouvrent simultanément. On observe ainsi, une fissuration parallèle à la direction de compression maximale, comparable à celle qui se produit durant un essai de compression simple (Figure 1.16).



**Figure 5.5** – Fissuration parallèle à la direction de compression maximale pour les cas (a) vertical et (b) horizontal.

#### 5.2.4 Enveloppe de rupture

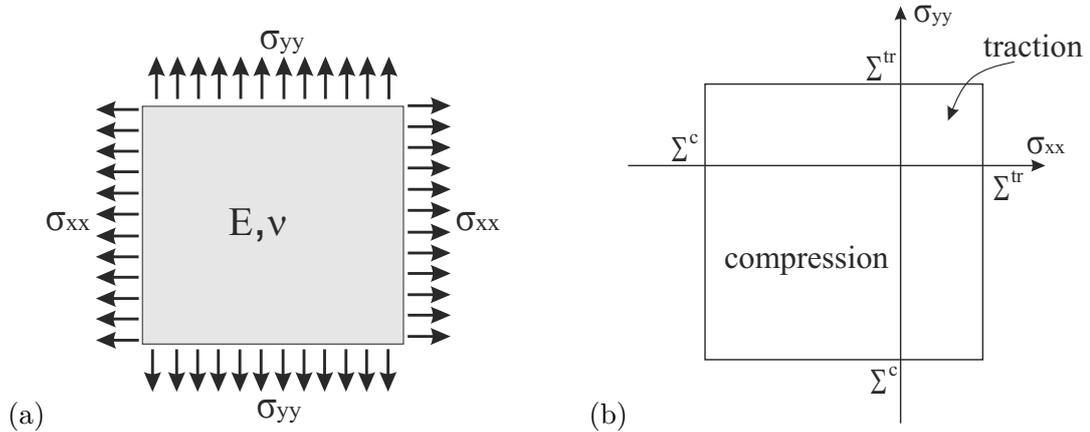
Les résultats des Tableaux 5.3 et 5.4 peuvent être superposés (Tableau 5.5) en cas de chargement bi-axial (Figure 5.6a), vu que les valeurs de  $\beta$  sont les mêmes dans des situations de chargement uniaxial vertical ou horizontal.

Dans ce cas, on observe que les valeurs des contraintes principales  $\bar{\sigma}_I$  et  $\bar{\sigma}_{II}$  dépendent soit de  $\sigma_{xx}$  soit de  $\sigma_{yy}$  individuellement. En cas de traction, la rupture dépend

Binôme	$\bar{\sigma}_I$	$\bar{\sigma}_{II}$
• •	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{xx}$
• ○	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$

**Table 5.5** – Valeurs des contraintes principales moyennes  $\bar{\sigma}_I$  et  $\bar{\sigma}_{II}$  pour chaque binôme de contacts sous un chargement bi-axial.

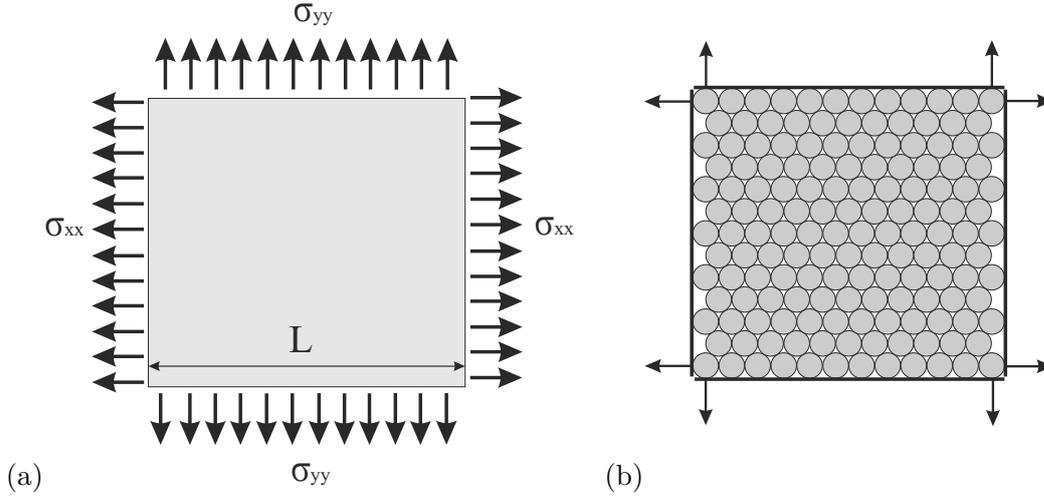
uniquement de  $\bar{\sigma}_I$ , tandis qu'en cas de compression, la rupture dépend uniquement de  $\bar{\sigma}_{II}$ . En limitant  $\bar{\sigma}_I$  par  $\Sigma^{tr}$  et  $\bar{\sigma}_{II}$  par  $\Sigma^c$  on produit des limites de traction et compression qui prennent la forme du critère de Rankine (Figure 1.11b), présente dans la Section 1.6.1.



**Figure 5.6** – (a) État de contrainte bi-axial et (b) l'enveloppe de la rupture correspondant.

### 5.3 Vérification du critère de rupture sous un état de contrainte homogène bi-axial

On compare les prévisions de la Section 5.2.4, par rapport à la résistance d'un matériau fragile sain par le modèle discret, avec des simulations de rupture bi-axiale (Figure 5.7a). Les essais sont effectués sur des échantillons carrés de dimension  $L$ , constitués de particules de diamètre  $d$ , soumis à des déplacements horizontaux et verticaux sont imposés (Figure 5.7b). Trois tailles de particules sont étudiées, résultant dans les rapports  $L/d$  : 44, 88 et 176.



**Figure 5.7** – (a) Schéma d'un essai de rupture bi-axiale et (b) modèle discret utilisé.

Le système d'unités des simulations est le même que celui présenté dans la Section 3.3.3.1, où l'échelle de contraintes est définie par le rapport entre la ténacité et le diamètre des particules  $K_{IC}/\sqrt{d}$ . En utilisant une même ténacité  $K_{IC}$  et différents diamètres  $d$ , une valeur différente de résistance à la traction est donc associée à chaque échantillon  $\Sigma^{tr} = K_{IC}\sqrt{2/(\pi d)}$  (Équation 5.1). On choisit des valeurs différentes pour la ténacité fictive  $K^*$  :  $-5K_{IC}$  et  $-10K_{IC}$ , qui induisent deux rapports différents entre la résistance à la compression et la résistance à la traction  $\Sigma^c/\Sigma^{tr}$  :  $-5$  et  $-10$ , respectivement.

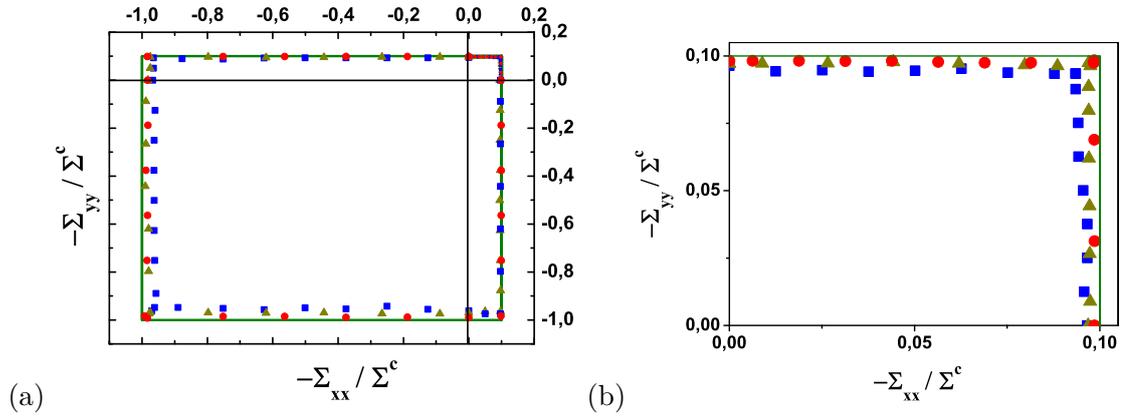
Étant donné l'homogénéité de la structure et des contraintes, la rupture du matériau est généralisée, avec un grand nombre de contacts s'ouvrant pour un même niveau de charge. En appliquant diverses combinaisons des déplacements imposés aux bords (horizontalement et verticalement), on contrôle les valeurs des contraintes horizontale  $\sigma_{xx}^0$  et verticale  $\sigma_{yy}^0$  (pour lesquelles on peut définir un rapport  $\phi = \sigma_{yy}^0/\sigma_{xx}^0$ ). Les facteurs de contraintes maximaux dans l'échantillon  $K_{rr}^{*max}(\theta_0)$  et  $K_{\theta\theta}^{max}(\theta_0)$  sont proportionnels au chargement (pour une même valeur de  $\phi$ ), vu que le matériau se comporte élastiquement avant la rupture. Le fait que  $K_{rr}^{*max}(\theta_0) > K^*$  (limite en compression) et  $K_{\theta\theta}^{max}(\theta_0) < K_{IC}$  (limite en traction) permet l'évaluation du chargement de rupture  $\Sigma_{xx}$  et  $\Sigma_{yy}$  (où  $\phi = \sigma_{yy}^0/\sigma_{xx}^0 = \Sigma_{yy}/\Sigma_{xx}$ ). Si  $K^*/K_{rr}^{*max}(\theta_0) > K_{IC}/K_{\theta\theta}^{max}(\theta_0)$  l'échantillon rompt d'avantage par traction et donc :

$$\begin{cases} \Sigma_{xx} = \frac{K_{IC}}{K_{\theta\theta}^{max}(\theta_0)} \sigma_{xx}^0, \\ \Sigma_{yy} = \frac{K_{IC}}{K_{\theta\theta}^{max}(\theta_0)} \sigma_{yy}^0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Dans le cas contraire, la rupture se donne par compression et on a :

$$\begin{cases} \Sigma_{xx} = \frac{K^*}{K_{rr}^{*max}(\theta_0)} \sigma_{xx}^0, \\ \Sigma_{yy} = \frac{K^*}{K_{rr}^{*max}(\theta_0)} \sigma_{yy}^0. \end{cases} \quad (5.6)$$

En réalisant le calcul pour divers états de contraintes bi-axiales, on peut identifier l'enveloppe de la rupture du matériau fragile. La Figure 5.8 présente le résultat pour  $\Sigma^c/\Sigma^{tr} = -10$ . On constate que l'enveloppe de la rupture obtenu a une forme carrée correspondante au critère de Rankine, comme prévu dans la Section 5.2.4.



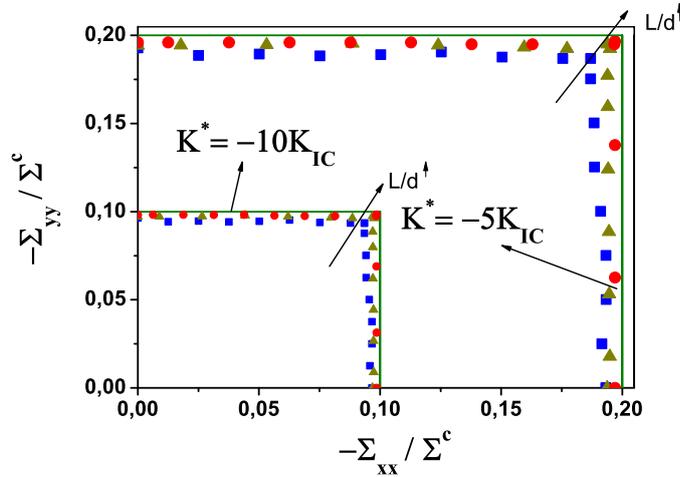
**Figure 5.8** – (a) Enveloppe de rupture fragile pour  $\Sigma^c/\Sigma^{tr} = -10$  et (b) zoom sur le comportement en traction pour divers échantillons : (■)  $L/d = 44$ , (▲)  $L/d = 88$ , (●)  $L/d = 176$ .

Sur la Figure 5.9, on compare les résultats des échantillons avec différents rapports de résistance à la compression et à la traction ( $\Sigma^c/\Sigma^{tr} = -10$  et  $\Sigma^c/\Sigma^{tr} = -5$ ). On analyse juste le comportement en traction vu que les contraintes sont normalisées par la résistance à la compression  $\Sigma^c$ . Un léger effet de la discretisation est observé à cause des effets des bords, qui tendent à s'affaiblir lorsque le rapport  $L/d$  devient plus important. Les vérifications indiquent que le modèle permet effectivement la définition du niveau de contraintes de rupture à traction  $\Sigma^{tr}$  et à compression  $\Sigma^c$ .

## 5.4 Rupture par flexion

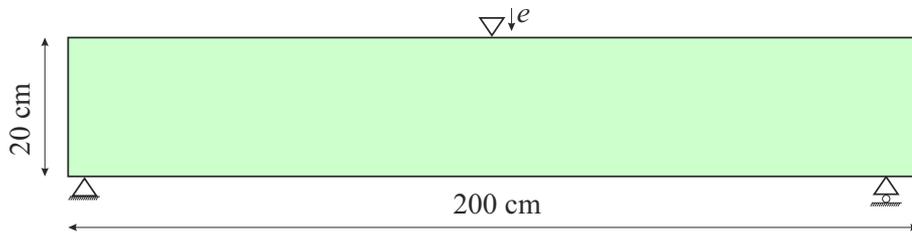
Durant la flexion d'une poutre droite, un état de contraintes linéaires (selon la hauteur) se développe. Ceci permet, à la fois, l'étude de la rupture en traction et de la rupture en compression. On s'intéresse spécialement aux contraintes normales (à l'axe de la poutre).

Le premier système correspond à une poutre en flexion 3 points, constituée d'un béton de module d'Young  $E = 30GPa$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0,2$ , ténacité  $K_{IC} =$



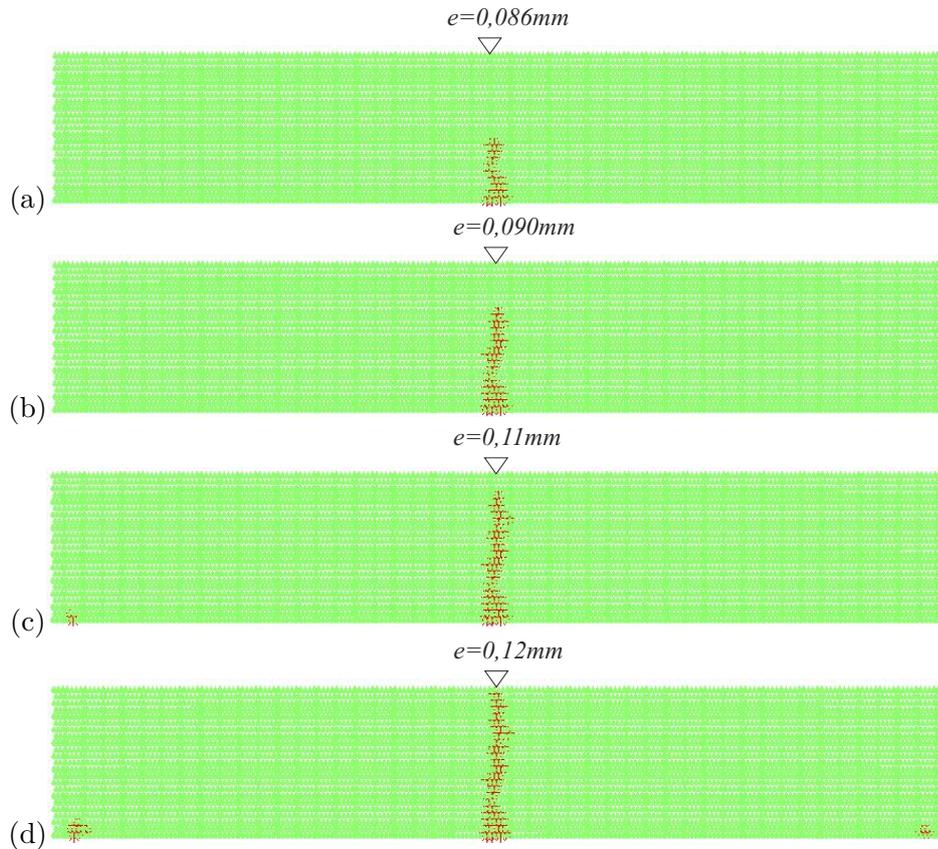
**Figure 5.9** – Comportement en traction pour  $\Sigma^c/\Sigma^{tr} = -10$  et  $\Sigma^c/\Sigma^{tr} = -5$  pour divers échantillons : (■)  $L/d = 44$ , (▲)  $L/d = 88$ , (●)  $L/d = 176$ .

$1MPa\sqrt{m}$ , résistance à traction  $\Sigma^{tr} = 8MPa$ , résistance à compression  $\Sigma^c = -80MPa$  et masse volumique  $\rho = 2500kg/m^3$ . Les poutre présente une longueur  $L = 200cm$  et une hauteur  $h = 20cm$  (Figure 5.10).



**Figure 5.10** – Configuration de la poutre en flexion 3 points.

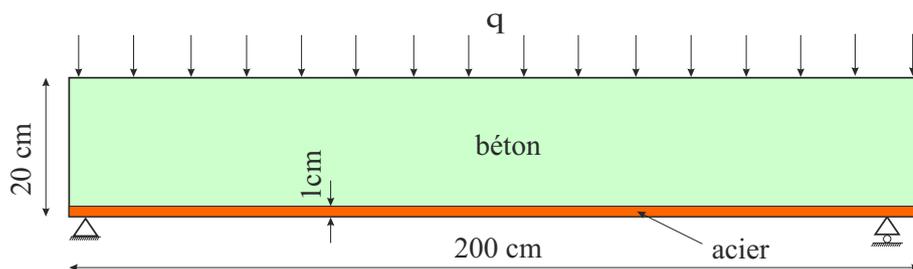
A partir des propriétés mécaniques du béton, on a les paramètres numériques du modèle discret : les coefficients de raideur normale  $k_n = 21,65GPa$  et tangentielle  $k_t = k_n/3$  (selon l'Équation 3.7) ; le diamètre de particules  $d = 1cm$  qui permet le rapport correct entre la ténacité et la résistance à traction (voir l'Équation 5.1) ; et la ténacité fictive  $K^* = -10K_{IC}$ , cohérente avec le rapport entre les résistances à compression et traction  $\Sigma^c/\Sigma^{tr} = -10$ . Le déplacement imposé de l'appui central induit des contraintes normales maximales au centre de la poutre (traction en bas et compression en haut). Étant donné que la résistance en traction est dix fois plus faible que la résistance à la compression, une fissure centrale de traction, orthogonale à l'axe de la poutre, se développe à partir du point de traction maximale, en bas de la poutre. La propagation en ligne droite de cette fissure unique est présentée sur la Figure 5.11 pour différentes valeurs du déplacement de l'appui centrale  $e$ .



**Figure 5.11** – Propagation de la fissure durant l’essai en flexion 3 points de la poutre en béton pour (a)  $e = 0,086\text{mm}$ , (b)  $e = 0,090\text{mm}$ , (c)  $e = 0,11\text{mm}$  et (d)  $e = 0,12\text{mm}$ .

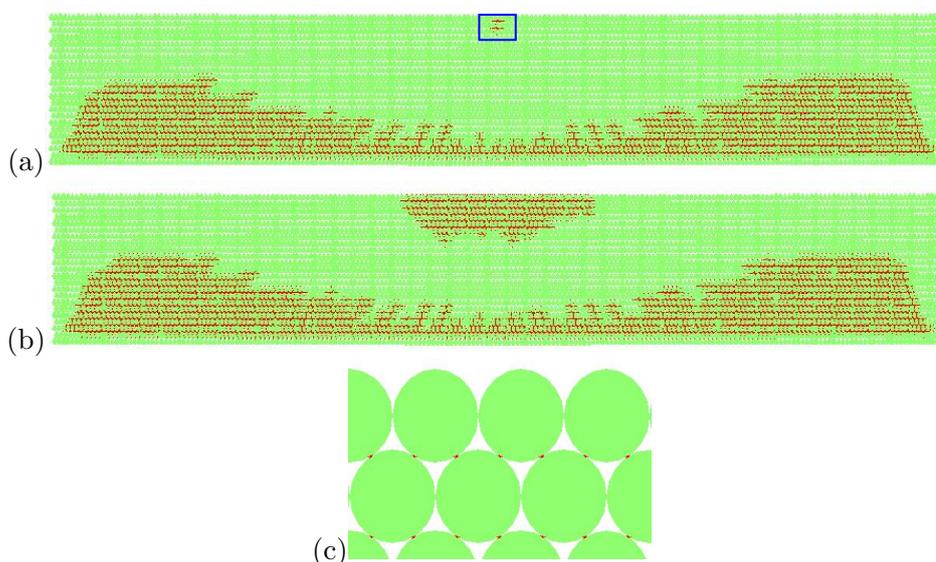
Pour induire aussi une fissuration par compression, on renforce la partie inférieure de la poutre initiale avec une plaque métallique d’une épaisseur de  $1\text{cm}$ . Le module d’Young et le coefficient de Poisson de cette plaque sont, respectivement,  $E_m = 200\text{GPa}$  et  $\nu_m = 0,3$ . On suppose (de façon réaliste) que la contrainte de traction sur la plaque reste inférieure à sa résistance. On choisit de solliciter la structure par une charge  $q$  distribuée uniformément par unité de longueur, en évitant ainsi la concentration de contraintes de compression transversales au point d’application de la charge (Figure 5.12).

La fissuration de la poutre renforcée est présentée sur la Figure 5.13. Initialement, on observe une fissure centrale de traction comme pour la flexion 3 points, suivie par une fissure à l’interface béton-acier. L’existence du renfort permet la transmission des effort de traction à la base de la poutre même en cas de fissuration du béton, ce qui permet l’augmentation de la charge au-delà de la limite élastique de la structure (avant fissuration). L’augmentation de la charge engendre l’apparition d’autres fissures de traction (verticales) et de cisaillement (inclinées), mais qui restent confinées à la partie inférieure de la poutre, vu que sa partie supérieure reste en compression durant tout l’essai. Lorsque la



**Figure 5.12** – Configuration de la poutre renforcée par une plaque métallique.

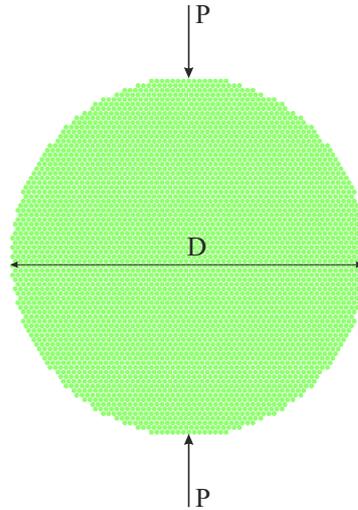
contrainte de compression maximale atteint la résistance du béton, des fissures de compression se développent en haut de la poutre (Figures 5.13a et 5.13b). En détail, sur la Figure 5.13c, on constate que les fissures de compression se propagent horizontalement, de façon réaliste, parallèle à la sollicitation de compression.



**Figure 5.13** – Fissuration dans la poutre en béton renforcé par une plaque métallique pour différents niveau de charge : (a)  $q=19,50\text{KN/m}$ , (b)  $q=19,56\text{KN/m}$  et (c) détail sur la fissuration horizontale due à la compression.

## 5.5 Rupture par compression diamétrale

L'essai de compression diamétrale est très utilisé pour la détermination de la résistance en traction des matériaux fragiles (voir Section 1.7.4). La compression diamétrale d'un échantillon cylindrique (Figure 5.14) induit des contraintes de traction le long du diamètre (voir Annexe A).



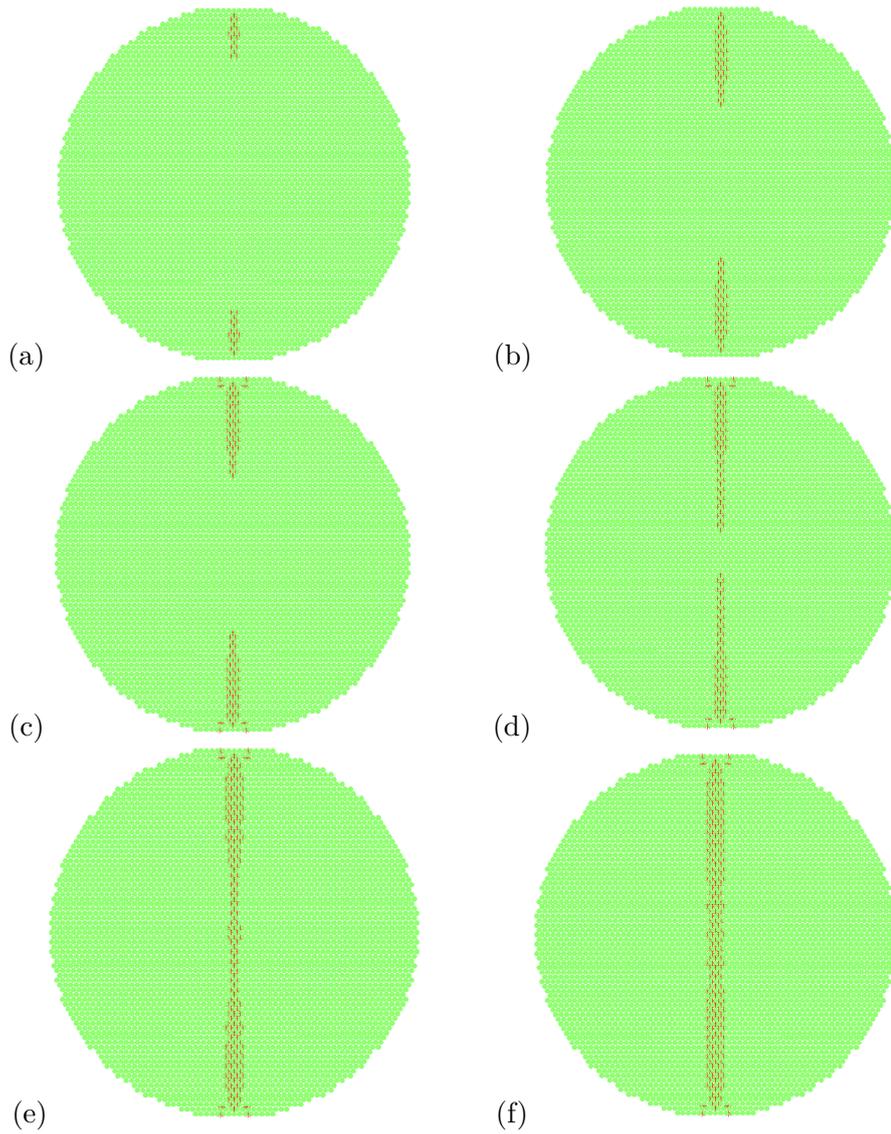
**Figure 5.14** – Configuration adopté pour l’essai de compression diamétrale.

De façon à vérifier la cohérence au niveau de la charge de rupture de l’échantillon, ainsi qu’au niveau de l’amorçage et de la propagation de fissures, on simule un essai sur une éprouvette d’une roche qui présente un module d’Young  $E = 60GPa$ , un coefficient de Poisson  $\nu = 0,23$ , une ténacité  $K_{IC} = 1MPa\sqrt{m}$ , une masse volumique  $\rho = 2500kg/m^3$  et un diamètre  $D = 66mm$ . A partir des propriétés mécaniques de la roche, on détermine les paramètres du modèle discret, tels que les coefficients de raideur normale  $k_n = 44,9GPa$  et tangentielle  $k_t = 0,25k_n$ . On choisit un diamètre  $d = 1mm$  pour les particules, ce qui produit une résistance en traction  $\Sigma^{tr} = 25,2MPa$ . On adopte une valeur  $K^* = -50K_{IC}$  pour la ténacité fictive, qui induit une résistance en compression  $\Sigma^c = -50\Sigma^{tr}$ .

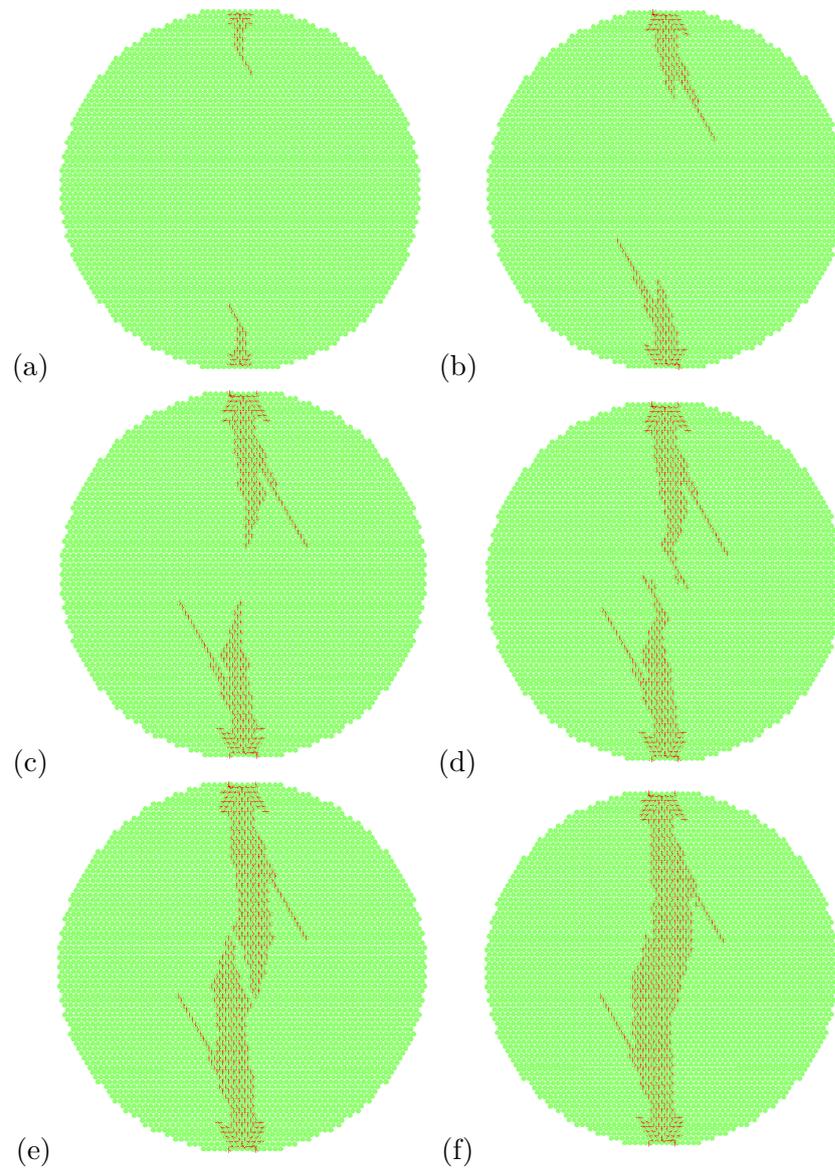
La force  $P$  s’applique sur une distance d’un diamètre, ce qui est suffisant pour que l’on évite une fissuration par compression aux points d’application de cette force. Dans ces conditions, on observe l’apparition d’une fissure lorsque la contrainte maximale de traction atteint la résistance en traction du matériau  $\Sigma^{tr}$ . Cette fissure se propage le long du diamètre de l’éprouvette (Figure 5.15).

Pour que la fissure se propage diamétralement par traction, la résistance en compression du matériau ne doit pas être dépassée aux points d’application de la force  $P$ . On peut visualiser, dans une nouvelle simulation, l’effet d’un amorçage de la fissuration par compression en diminuant (numériquement) la valeur de  $\Sigma^c$ . On adopte, à titre d’exemple,  $K^* = -5K_{IC}$ , qui produit une résistance en compression de seulement  $\Sigma^c = -5\Sigma^{tr}$ . Dans ces nouvelles conditions, l’échantillon est initialement fissuré par compression au point d’application de la force  $P$  (Figure 5.16a), ce qui induit une fissuration considérablement différente du premier cas (Figures 5.16b, 5.16c, 5.16d, 5.16e et 5.16f). La valeur de la charge de rupture est naturellement perturbée dans ce cas, et donc, la valeur apparente

de la résistance en traction.



**Figure 5.15** – *Fissuration par traction durant un essai de compression diamétrale.*  
 $\Sigma^c = -50\Sigma^{tr}$ .



**Figure 5.16** – Propagation de la fissure de l'essai diamétral avec  $\Sigma^c = -5\Sigma^{tr}$ .

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on généralise le critère de rupture pour les matériaux sains, c'est-à-dire, en absence de fissures préalablement définies. À partir du comportement uniaxial d'un matériau fragile, les résistances en traction et compression sont clairement caractérisées dans le modèle discret. Ce qui permet, ensuite, l'identification de l'enveloppe de rupture pour un état de contraintes bi-axial (sous la forme du critère de Rankine).

---

On observe que la détermination des contraintes principales et de ses directions rend possible la définition précise des contacts susceptibles de se rompre de manière à produire une fissuration adéquate avec les observations expérimentales, selon le type de sollicitation (traction ou compression).

Les prédictions théoriques sont finalement confirmées par des simulations de systèmes relativement simples. L'enveloppe de rupture est vérifiée pour des simulations de divers échantillons carrés sous des états de contraintes bi-axiales multiples. L'amorçage de fissures et leur propagation sont analysés via des essais de flexion et de compression diamétrale. Dans tous les cas, des résultats cohérents sont observés au niveau des sollicitations et de la propagation de fissures.



Troisième partie

Synthèses



# Conclusions et perspectives

Dans les approches discrètes, le matériau est décrit comme un ensemble de particules en contact, ce qui rend la rupture du matériau et la propagation de fissures assez intuitifs. Les efforts sont transmis par des forces et le matériau est caractérisé au niveau des contacts. La propagation d'une fissure se caractérise donc par la perte des forces de contacts qui assurent la cohésion du matériau. La principale critique à ces méthodes est l'absence (dans la plupart des cas) de rapport direct entre les propriétés à l'échelle des contacts et les propriétés utilisées dans les approches continues, largement utilisées historiquement.

L'intention de ce travail de thèse est d'associer certaines caractéristiques des approches continues (paramètres des matériaux, convergence des résultats...) à une approche basée sur la méthode des éléments discrets (MED). De ce fait, on simplifie des difficultés, telle que l'intégration de critères d'amorçage de fissures (sur un matériau intact) à leur propagation, inhérentes aux approches continues.

On adopte un empilement compact unique pour les particules (présentée au Chapitre 3), pour lequel un rapport entre les modules de raideur (normale et tangentielle) des contacts et les paramètres de l'élasticité linéaire (module d'Young et coefficient de Poisson) sont déduits. Cette relation est indépendante de la taille des particules et parfaitement isotrope, malgré une périodicité angulaire de  $60^\circ$  de la structure discrète (Figure 3.17). On vérifie bien que l'équivalence entre l'approche discrète et continue est convergente pour des états de contraintes et de déformations homogènes par le biais des simulations d'essais oedométriques.

Un comportement élastique isotrope dans l'approche discrète est fondamental (mais pas suffisant) pour envisager un comportement isotrope en rupture. Si on applique un effort unidirectionnel sur la structure discrète, on remarque que les forces de contact dépendent de l'orientation angulaire de la structure par rapport à cet effort (voir les forces normales et tangentielles  $N$  et  $T$  au Tableaux 5.1 et 5.2). Dans ces conditions, un critère de rupture basé sur l'analyse d'un seul contact pourrait difficilement présenter un comportement isotrope. Dans le Chapitre 3, on essaie de résoudre ce problème par l'analyse des forces des deux contacts adjacents au voisinage d'une fissure, ce qui permet d'abord l'obtention d'une expression pour le facteur d'intensité de contraintes au

niveau des contacts (pour le mode  $I$ , d'ouverture). L'intérêt de la démarche est de rendre possible l'introduction directe de la ténacité comme paramètre du matériau. On vérifie cette première approche par des essais de traction simple sur des plaques pré fissurées en deux configurations : fissure simple et fissure double. Une convergence monotone des résultats vers les solutions théoriques pour des niveaux de discrétisation croissants est observé selon une des directions. Par contre une légère augmentation de la résistance des échantillons dépendante de l'orientation angulaire de la structure a été identifiée, pouvant aller jusqu'à 13% pour l'échantillon avec une fissure simple et 16% pour l'échantillon avec une fissure double.

Dans le Chapitre 4, on généralise le critère de propagation des fissures au mode mixte, en intégrant l'effet du mode  $II$ , de cisaillement, ce qui permet l'étude des fissures plus complexes. Pour le faire, on adopte le critère de la contrainte d'ouverture maximale, qui établit que la fissure se propage selon la direction pour laquelle la contrainte de cisaillement s'annule. Or, cela correspond à identifier les contraintes principales et ses directions correspondantes, obtenues en associant, en plus, les déplacements aux forces de deux contacts adjacents. La nouvelle expression pour le facteur d'intensité de contraintes est vérifiée en mode  $II$  par l'étude d'une plaque carrée soumise à un chargement bi-axial avec une pré-fissure inclinée, pour laquelle la propagation est comparée avec une valeur théorique. En mode mixte, on utilise une poutre pré-fissurée en flexion (quatre points) asymétrique qui présente une distribution des contraintes de traction et de cisaillement en pointe de fissure. De la même manière, les calculs sont capables de prédire la charge maximale supportée par la structure avant sa ruine (en vérifiant la valeur analytique de référence) et l'angle de propagation de la fissure. Pour le mode  $I$ , des essais de traction sont réalisés sur des éprouvettes pré-fissurées suivant les mêmes configurations qu'au Chapitre 3. On observe une convergence monotone (en fonction de la discrétisation) vers les solutions théoriques dans toutes les situations étudiées sans aucun effet de l'orientation angulaire de la structure discrète.

Un comportement isotrope en fissuration est un élément primordial à l'étude de l'amorçage de fissures sur des matériaux sains (non préalablement fissurés). Au Chapitre 5, on s'intéresse à la rupture d'un matériau soumis à des états de contraintes bi-axiales de traction et compression homogènes. On identifie immédiatement le rapport direct entre la ténacité et la taille des particules, et la résistance à la traction. Le critère de rupture prévoit naturellement des fissures orientées de manière orthogonale à la direction de la contrainte principale de traction maximale, ce qui est physiquement cohérent. La rupture fragile par compression induit normalement des fissures parallèles à l'effort de compression, direction associée à la deuxième contrainte principale. La résistance, ainsi que l'amorçage de fissures en compression sont définis en limitant la borne inférieure de cette contrainte.

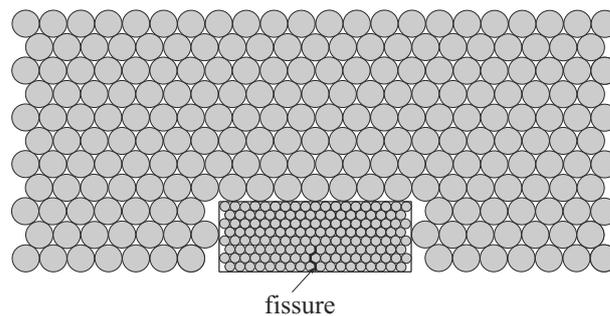
Des essais bi-axiaux permettent la construction de l'enveloppe de rupture du matériau modélisé, pour lequel on vérifie bien un comportement du type Rankine. Des essais

supplémentaires de flexion d'une poutre et de compression diamétrale (essai brésilien) permettent de confirmer les résultats au niveau de la résistance, de l'amorçage et de la propagation des fissures.

L'originalité du travail réside dans le calcul du tenseur de contraintes (moyen) dans l'approche discrète à partir des informations de seulement deux contacts adjacents. Ceci permet la proposition d'un modèle discret de rupture parfaitement isotrope, où le lien entre l'échelle de contacts et l'échelle du matériau est clair. Des paramètres élastiques tels que le module de Young et le coefficient de Poisson, ainsi que la ténacité et les résistances à la compression et à la traction sont introduits sans aucune calibration préalable. En outre, on observe une convergence asymptotique des résultats selon le niveau de discrétisation (inversement proportionnel au diamètre des particules utilisées), ce qui permet l'évaluation de la qualité des résultats.

∴

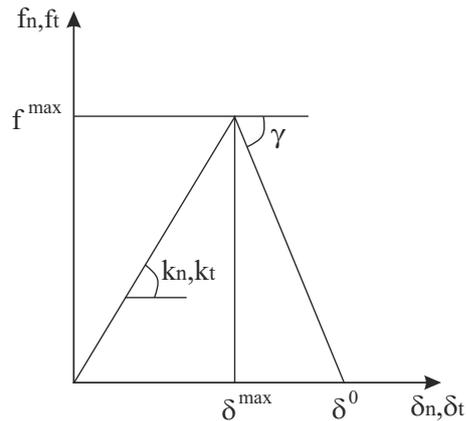
Le couplage entre la ténacité, la résistance à traction et la taille des particules peut limiter l'étude de la convergence d'un modèle vu que le nombre des particules peut être relié à la qualité de la discrétisation. Limiter le diamètre de particules de sorte à produire un échantillon avec un certain rapport entre la ténacité et la résistance en traction peut représenter une difficulté pratique selon l'échelle du problème. Un nombre de particules trop élevé peut être prohibitif au niveau du temps de calcul, si on représente tout un massif rocheux avec des particules millimétriques. Pourtant, le fait que le comportement élastique soit indépendant du diamètre des particules peut servir à relativiser ce désavantage, comme présenté sur la Figure 5.17. Selon la valeur des contraintes (ou des facteurs d'intensité), lorsqu'une région est susceptible de se rompre, les particules initiales peuvent être remplacées durant le calcul par d'autres avec la taille correspondante aux propriétés des matériaux à la rupture. L'interface entre les différents domaines mérite, bien évidemment, un traitement adéquat de manière à ne pas perturber le résultat.



**Figure 5.17** – Exemple de discrétisation variable pour optimiser le nombre de particules d'un modèle discret.

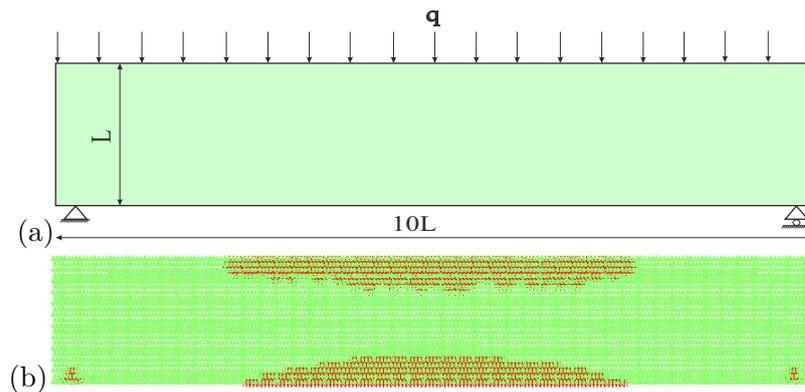
L'applicabilité de l'approche discrète peut s'élargir facilement au-delà de la rupture

fragile, si on associe un mécanisme simple de dissipation plastique, suggéré sur la Figure 5.18. Selon la valeur du paramètre  $\gamma$ , on peut avoir divers comportements de rupture distincts. Une chute abrupte de la force de contact en cas de rupture correspond à un comportement fragile et peut être obtenu avec des grandes valeurs de  $\gamma$ ; en diminuant la valeur de  $\gamma$  jusqu'à zéro, on tend vers un comportement plastique parfait, tandis qu'une plastification avec écoulement correspond à  $\gamma < 0$ .



**Figure 5.18** – Comportement force-déplacement d'un contact élastoplastique.

Sur la Figure 5.19a, on présente le résultat du modèle pour une poutre bi-appuyée, chargée uniformément, composée par un matériau élastoplastique parfait ( $\gamma \approx 0$ ). Les contacts se plastifient de manière symétrique en compression (en haut) et en traction (en bas) vu que les résistances en traction et compression sont identiques. Sur la Figure 5.19b, on observe l'évolution approximative des efforts de flexion lors de la plastification des régions plus sollicitées.



**Figure 5.19** – (a) Poutre bi-appuyée chargée uniformément et (b) les zones plastifiées durant son chargement.

La proximité du modèle discret avec les approches continues en mécanique de la rup-

ture rend simple l'adaptation de concepts théoriques existants. Un exemple est l'étude de la fissuration par fatigue, ou la structure est soumise à un chargement cyclique (forces, déplacements, température, ...). Selon l'intensité et le nombre de cycles de charge, la valeur de la ténacité est localement réduite (suivant des critères déjà utilisés en pratique) de façon à reproduire l'affaiblissement du matériau dû à l'endommagement.

On s'est concentré dans ce travail de thèse sur la rupture quasi-statique, par contre, la méthode des éléments discrets est, par construction, une méthode dynamique, où des effets inertiels et visqueux s'introduisent automatiquement. L'introduction d'un paramètre supplémentaire de dissipation visqueuse en phase de rupture peut servir à adapter le modèle proposé à la rupture dynamique associée, par exemple, à l'étude d'impacts.



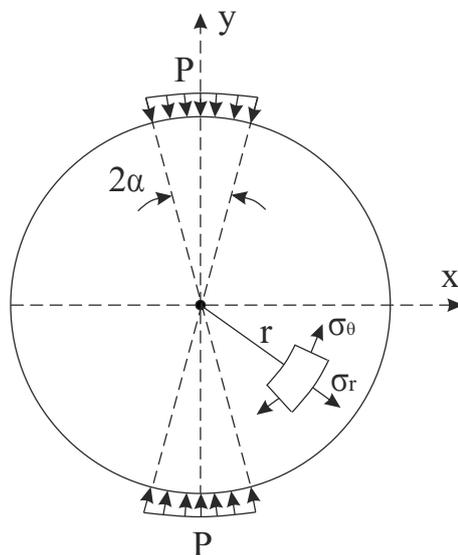
## Annexe A

# Compression diamétrale

En essai diamétral, la distribution des contraintes dans le disque (rayon  $R$ ) peut changer selon la distribution de la charge. Hondros [44] a développé une analyse théorique des contraintes dans le cas d'une pression appliquée sur deux arcs diamétralement opposés d'angle  $2\alpha$  (Figure A.1). Il a obtenu les contraintes le long de l'axe  $y$  :

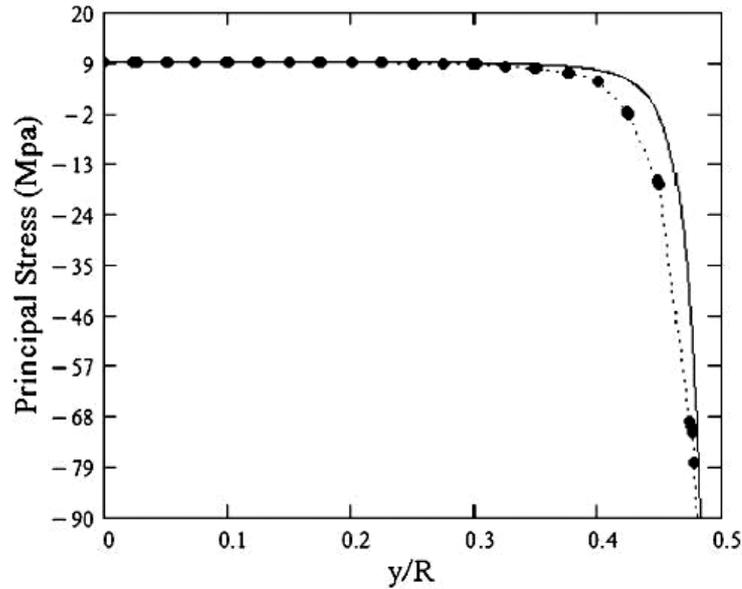
$$\sigma_{\theta y}, \sigma_{\theta x} = \pm \frac{P}{\alpha \pi R} \left[ \frac{(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin 2\alpha)}{1 \mp 2 \frac{r^2}{R^2 \cos 2\alpha} + \frac{r^4}{R^4}} \mp \tan^{-1} \left\{ \frac{1 \pm \frac{r^2}{R^2} \tan \alpha}{1 \mp \frac{r^2}{R^2}} \tan \alpha \right\} \right], \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_{ry}, \sigma_{rx} = \pm \frac{P}{\alpha \pi R} \left[ \frac{(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin 2\alpha)}{1 \mp 2 \frac{r^2}{R^2 \cos 2\alpha} + \frac{r^4}{R^4}} \pm \tan^{-1} \left\{ \frac{1 \pm \frac{r^2}{R^2} \tan \alpha}{1 \mp \frac{r^2}{R^2}} \tan \alpha \right\} \right]. \quad (\text{A.2})$$



**Figure A.1** – Géométrie et la notation de l'essai diamétral avec la charge répartie sur un arc.

Une inspection des équations ci-dessus montre que la contrainte de compression maximale au point de la charge appliquée est fini, au lieu de l'infini si on utilise l'Équation 1.22. Les Équations A.1 et A.2 donnent des contraintes identiques au centre du disque engendrées par des charges ponctuelles  $P$  appliquées aux extrémités du diamètre du disque (Figure A.2).



**Figure A.2** – Variation de la contrainte de traction le long l'axe  $y$  pour l'essai de compression diamétrale sous la charge de répartition. Résultat pour l'équation de Hondros (ligne continue) et élément finis (dot).

On déduit la valeur de la contrainte à la rupture par traction du matériau qui s'écrit :

$$\Sigma^{tr} = \frac{P}{\alpha\pi R}(\sin 2\alpha - \alpha) \quad (\text{A.3})$$

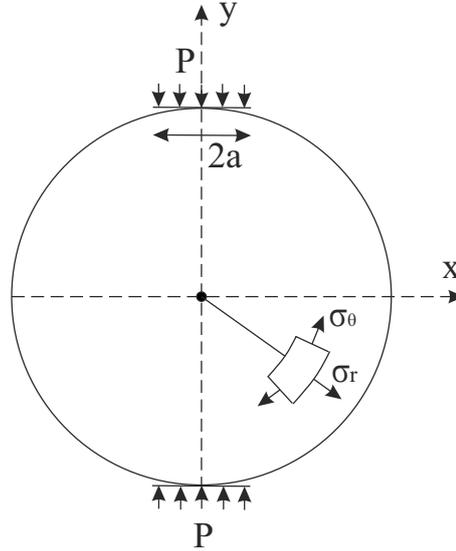
Dans le cas où  $\alpha$  est petit,  $\sin 2\alpha \simeq 2\alpha$  et l'Équation A.3 devient :

$$\Sigma^{tr} = \frac{P}{\pi R} \quad (\text{A.4})$$

Selon les études de [64], avec  $\alpha = 4,5^\circ$ , la résistance en traction obtenue converge vers celle obtenue par des essais expérimentaux.

La solution proposée par Hondros considérant un chargement radial réparti sur un arc, est difficilement exploitable compte tenu qu'il est expérimentalement difficile d'assurer un tel type de chargement. Ainsi Frydman (1964), cité par Ramanathan et Raman [82], a proposé de prendre en considération lors de l'essai brésilien des charges

réparties verticales appliquées sur une petite largeur ( $2a$ ) bien qu'aucune expression analytique en contraintes ne puisse être établie (Figure A.3).



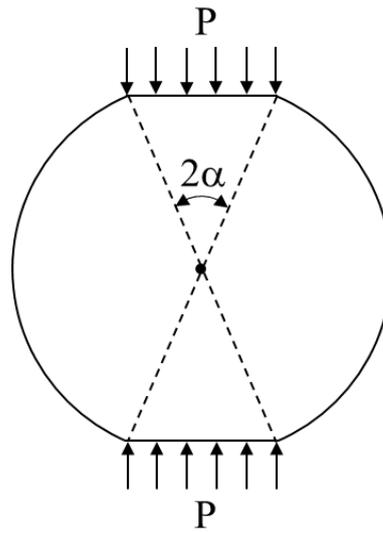
**Figure A.3** – *Essai diamétral avec un chargement réparti.*

Hondros [44] a proposé une valeur de  $a/R < 0.1$  pour que l'expression de la contrainte de traction proposée par Hertz au centre de l'éprouvette (Équation 1.22) reste valable. Frydman (1964) a constaté que sous la condition  $a/R < 0,27$ , la contrainte au centre n'est pas influencée par la nouvelle configuration de chargement et l'erreur induite par rapport à la solution de Hertz sur la contrainte de traction est inférieure à 10%.

Pour cette dernière configuration, le chargement est réparti, mais sa résultante est appliquée initialement au point de contact avec l'éprouvette. Ceci induit une concentration de la contrainte de cisaillement au voisinage des baguettes de chargement. Par conséquence, l'éprouvette se fissure au niveau des génératrices chargées et la rupture peut ne pas avoir lieu par traction. Pour remédier à ce problème du cisaillement et pour que les efforts soient répartis, Wang et al. [100] ont proposé d'apporter un aplatissement de l'éprouvette elle-même (Figure A.4).

Pour cette configuration, les équations précédentes ne sont plus valables pour la détermination du champ des contraintes au sein de l'éprouvette. Comme la valeur de la contrainte recherchée par l'essai brésilien est celle correspondante à la traction au centre de l'éprouvette, Wang et al. [100] ont proposé la formule suivante pour déterminer cette valeur en introduisant un coefficient correctif à l'équation de Hertz :

$$\Sigma^{tr} = k \frac{2P}{\pi D}, \quad (\text{A.5})$$



**Figure A.4** – *Essai diamétral avec une éprouvette aplatie soumise à une charge uniforme.*

où :

$$k = \frac{(2 \cos^3 \alpha + \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha})^2}{8(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha})} \frac{\alpha}{\sin \alpha}. \quad (\text{A.6})$$

Pour  $\alpha$  tendant vers 0 ( $k$  tend vers 1) on retrouve l'Équation 1.22 proposée par Hertz.

## Annexe B

# Algorithme de calcul en DEM

Les éléments fondamentaux pour le calcul sont les dimensions (le diamètre pour des disques ou des sphères) des particules, leurs positions spatiales et leurs propriétés ( $k_n$ ,  $k_t$ ,  $c_n$  et  $c_t$ ). À ses éléments s'ajoutent les conditions aux bords, sous la forme de forces ou déplacements agissant sur certaines particules et des conditions initiales.

La dynamique moléculaire utilise un algorithme assez simple et intuitif. Elle consiste, à chaque itération et pour chaque particule, à :

- rechercher les particules qui interagissent avec elle ;
- traiter de façon binaire ces interactions de façon à calculer la force totale qu'elle subit comme somme de leurs contributions respectives ;
- intégrer les relations fondamentales de la dynamique afin d'obtenir les caractéristiques de son mouvement, qui seront considérées uniformes jusqu'au pas de temps suivant.

Pour réaliser ces opérations, l'algorithme que l'on utilise se divise en 5 parties :

1. Prédiction
2. Détection des voisins
3. Détection des contacts
4. Calcul des forces
5. Correction

**Prédiction**

Pour un instant donné, on commence par prédire les positions et les vitesses des particules en intégrant les équations de la dynamique à partir des positions, vitesses et accélérations du pas de temps précédent.

**Détection des voisins**

La détection des contacts est une opération normalement lourde car elle présente comme une série de calculs répétitifs pour chaque particule. Pour accélérer la simulation, la détection des voisins permet d'établir pour chaque particule une liste des particules susceptibles d'entrer en contact avec elle sur des laps de temps plus longs qu'une unique itération. On ne cherche alors les contacts que parmi cette liste et pas sur l'ensemble des particules. Ceci représente un gain de temps considérable, une fois que cette procédure n'est pas réalisée à chaque pas de temps.

**Détection des contacts**

À chaque pas de temps, pour chaque particule, on vérifie, dans sa liste de voisin, celles qui sont en contact direct.

**Détection des forces**

Selon les caractéristiques des contacts entre les particules, on détermine l'intensité et l'orientation des forces de contact agissantes.

**Correction**

La connaissance des forces de contact permet donc de corriger la valeur des accélérations et vitesses utilisées dans la procédure de prédiction.

## Annexe C

# Matrice de rigidité globale du milieu discret

Dans cette partie, on présente les termes de la matrice de rigidité globale en fonction des coefficients de raideur normale  $k_n$  et tangentielle  $k_t$  et du rayon des particules  $R$ .  $\underline{\underline{K}}^g$  est une matrice symétrique de dimension  $21 \times 21$ . Les termes de chaque ligne de la matrice sont présentés ci-dessous (où  $c = \cos(\pi/3)$  et  $s = \sin(\pi/3)$ ) :

Ligne 1 :

$$K^g(1, 1) = 2k_n + 4c^2k_n + 4s^2k_t \quad K^g(1, 4) = -k_n$$

$$K^g(1, 7) = -c^2k_n - s^2k_t \quad K^g(1, 8) = -csk_n + csk_t$$

$$K^g(1, 9) = -Rsk_t \quad K^g(1, 10) = -c^2k_n - s^2k_t$$

$$K^g(1, 11) = csk_n - csk_t \quad K^g(1, 12) = -Rsk_t$$

$$K^g(1, 13) = -k_n \quad K^g(1, 16) = -c^2k_n - s^2k_t$$

$$K^g(1, 17) = -csk_n + csk_t \quad K^g(1, 18) = Rsk_t$$

$$K^g(1, 19) = -c^2k_n - s^2k_t \quad K^g(1, 20) = csk_n - csk_t$$

$$K^g(1, 21) = Rsk_t$$

Ligne 2 :

$$\begin{aligned}
 K^g(2, 2) &= 2k_t + 4s^2k_n + 4c^2k_t & K^g(2, 5) &= -k_t \\
 K^g(2, 7) &= -csk_n + csk_t & K^g(2, 8) &= -s^2k_n - c^2k_t \\
 K^g(2, 10) &= csk_n - csk_t & K^g(2, 11) &= -s^2k_n - c^2k_t \\
 K^g(2, 14) &= -k_t & K^g(2, 16) &= -csk_n + csk_t \\
 K^g(2, 17) &= -s^2k_n - c^2k_t & K^g(2, 19) &= csk_n - csk_t \\
 K^g(2, 20) &= -s^2k_n - c^2k_t & &
 \end{aligned}$$

Ligne 3 :

$$\begin{aligned}
 K^g(3, 3) &= 6R^2k_t & K^g(3, 6) &= R^2k_t \\
 K^g(3, 7) &= Rsk_t & K^g(3, 9) &= R^2k_t \\
 K^g(3, 10) &= Rsk_t & K^g(3, 12) &= R^2k_t \\
 K^g(3, 15) &= R^2k_t & K^g(3, 16) &= -Rsk_t \\
 K^g(3, 18) &= R^2k_t & K^g(3, 19) &= -Rsk_t \\
 K^g(3, 21) &= R^2k_t & &
 \end{aligned}$$

Ligne 4 :

$$\begin{aligned}
 K^g(4, 4) &= K_n^g + 2c^2k_n + 2s^2k_t & K^g(4, 7) &= -c^2k_n - s^2k_t \\
 K^g(4, 8) &= csk_n - csk_t & K^g(4, 9) &= -Rsk_t \\
 K^g(4, 19) &= -c^2k_n - s^2k_t & K^g(4, 20) &= -csk_n + csk_t \\
 K^g(4, 21) &= Rsk_t & &
 \end{aligned}$$

Ligne 5 :

$$K^g(5, 2) = -k_t \quad K^g(5, 5) = k_t + 2s^2k_n + 2c^2k_t$$

$$K^g(5, 6) = -Rk_t - 2Rck_t \quad K^g(5, 7) = csk_n - csk_t$$

$$K^g(5, 8) = -s^2k_n - c^2k_t \quad K^g(5, 19) = -csk_n + csk_t$$

$$K^g(5, 20) = -s^2k_n - c^2k_t$$

Ligne 6 :

$$K^g(6, 3) = R^2k_t \quad K^g(6, 5) = -Rk_t - 2Rck_t$$

$$K^g(6, 6) = 3R^2k_t \quad K^g(6, 7) = Rsk_t$$

$$K^g(6, 9) = R^2k_t \quad K^g(6, 19) = -Rsk_t$$

$$K^g(6, 21) = R^2k_t$$

Ligne 7 :

$$K^g(7, 1) = -c^2k_n - s^2k_t \quad K^g(7, 2) = -csk_n + csk_t$$

$$K^g(7, 3) = Rsk_t \quad K^g(7, 4) = -c^2k_n - s^2k_t$$

$$K^g(7, 5) = csk_n - csk_t \quad K^g(7, 6) = Rsk_t$$

$$K^g(7, 7) = k_n + 2c^2k_n + 2s^2k_t \quad K^g(7, 9) = 2Rsk_t$$

$$K^g(7, 10) = -k_n$$

Ligne 8 :

$$K^g(8, 1) = -csk_n + csk_t \quad K^g(8, 2) = -s^2k_n - c^2k_t$$

$$K^g(8, 4) = csk_n - csk_t \quad K^g(8, 5) = -s^2k_n - c^2k_t$$

$$K^g(8, 8) = k_t + 2s^2k_n + 2c^2k_t \quad K^g(8, 9) = -Rk_t$$

$$K^g(8, 11) = -k_t$$

Ligne 9 :

$$K^g(9,1) = -Rsk_t \quad K^g(9,3) = R^2k_t$$

$$K^g(9,4) = -Rsk_t \quad K^g(9,6) = R^2k_t$$

$$K^g(9,7) = 2Rsk_t \quad K^g(9,8) = -Rk_t$$

$$K^g(9,9) = 3R^2k_t \quad K^g(9,12) = R^2k_t$$

Ligne 10 :

$$K^g(10,1) = -c^2k_n - s^2k_t \quad K^g(10,2) = csk_n - csk_t$$

$$K^g(10,3) = Rsk_t \quad K^g(10,7) = -k_n$$

$$K^g(10,10) = k_n + 2c^2k_n + 2s^2k_t \quad K^g(10,12) = 2Rsk_t$$

$$K^g(10,13) = -c^2k_n - s^2k_t \quad K^g(10,14) = -csk_n + csk_t$$

$$K^g(10,15) = Rsk_t$$

Ligne 11 :

$$K^g(11,1) = csk_n - csk_t \quad K^g(11,2) = -s^2k_n - c^2k_t$$

$$K^g(11,8) = -k_t \quad K^g(11,11) = k_t + 2s^2k_n + 2c^2k_t$$

$$K^g(11,12) = Rk_t \quad K^g(11,13) = -csk_n + csk_t$$

$$K^g(11,14) = -s^2k_n - c^2k_t$$

Ligne 12 :

$$K^g(12,1) = -Rsk_t \quad K^g(12,3) = R^2k_t$$

$$K^g(12,9) = R^2k_t \quad K^g(12,10) = 2Rsk_t$$

$$K^g(12,11) = Rk_t \quad K^g(12,12) = 3R^2k_t$$

$$K^g(12,13) = -Rsk_t \quad K^g(12,15) = R^2k_t$$

Ligne 13 :

$$\begin{aligned}
K^g(13, 1) &= -k_n & K^g(13, 10) &= -c^2k_n - s^2k_t \\
K^g(13, 11) &= -csk_n + csk_t & K^g(13, 12) &= -Rsk_t \\
K^g(13, 13) &= k_n + 2c^2k_n + 2s^2k_t & K^g(13, 16) &= -c^2k_n - s^2k_t \\
K^g(13, 17) &= csk_n - csk_t & K^g(13, 18) &= Rsk_t
\end{aligned}$$

Ligne 14 :

$$\begin{aligned}
K^g(14, 2) &= -k_t & K^g(14, 10) &= -csk_n + csk_t \\
K^g(14, 11) &= -s^2k_n - c^2k_t & K^g(14, 14) &= k_t + 2s^2k_n + 2c^2k_t \\
K^g(14, 15) &= 2Rck_t + Rk_t & K^g(14, 16) &= csk_n - csk_t \\
K^g(14, 17) &= -s^2k_n - c^2k_t
\end{aligned}$$

Ligne 15 :

$$\begin{aligned}
K^g(15, 3) &= R^2k_t & K^g(15, 10) &= Rsk_t \\
K^g(15, 12) &= R^2k_t & K^g(15, 14) &= 2Rck_t + Rk_t \\
K^g(15, 15) &= 3R^2k_t & K^g(15, 16) &= -Rsk_t \\
K^g(15, 18) &= R^2k_t
\end{aligned}$$

Ligne 16 :

$$\begin{aligned}
K^g(16, 1) &= -c^2k_n - s^2k_t & K^g(16, 2) &= -csk_n + csk_t \\
K^g(16, 3) &= -Rsk_t & K^g(16, 13) &= -c^2k_n - s^2k_t \\
K^g(16, 14) &= csk_n - csk_t & K^g(16, 15) &= -Rsk_t \\
K^g(16, 16) &= k_n + 2c^2k_n + 2s^2k_t & K^g(16, 18) &= -2Rsk_t \\
K^g(16, 19) &= -k_n
\end{aligned}$$

Ligne 17 :

$$\begin{aligned}
 K^g(17, 1) &= -c s k_n + c s k_t & K^g(17, 2) &= -s^2 k_n - c^2 k_t \\
 K^g(17, 13) &= c s k_n - c s k_t & K^g(17, 14) &= -s^2 k_n - c^2 k_t \\
 K^g(17, 17) &= k_t + 2s^2 k_n + 2c^2 k_t & K^g(17, 18) &= R k_t \\
 K^g(17, 20) &= -k_t
 \end{aligned}$$

Ligne 18 :

$$\begin{aligned}
 K^g(18, 1) &= R s k_t & K^g(18, 3) &= R^2 k_t \\
 K^g(18, 13) &= R s k_t & K^g(18, 15) &= R^2 k_t \\
 K^g(18, 16) &= -2R s k_t & K^g(18, 17) &= R k_t \\
 K^g(18, 18) &= 3R^2 k_t & K^g(18, 21) &= R^2 k_t
 \end{aligned}$$

Ligne 19 :

$$\begin{aligned}
 K^g(19, 1) &= -c^2 k_n - s^2 k_t & K^g(19, 2) &= c s k_n - c s k_t \\
 K^g(19, 3) &= -R s k_t & K^g(19, 4) &= -c^2 k_n - s^2 k_t \\
 K^g(19, 5) &= -c s k_n + c s k_t & K^g(19, 6) &= -R s k_t \\
 K^g(19, 16) &= -k_n & K^g(19, 19) &= k_n + 2c^2 k_n + 2s^2 k_t \\
 K^g(19, 21) &= -2R s k_t
 \end{aligned}$$

Ligne 20 :

$$\begin{aligned}
 K^g(20, 1) &= c s k_n - c s k_t & K^g(20, 2) &= -s^2 k_n - c^2 k_t \\
 K^g(20, 4) &= -c s k_n + c s k_t & K^g(20, 5) &= -s^2 k_n - c^2 k_t \\
 K^g(20, 17) &= -k_t & K^g(20, 20) &= k_t + 2s^2 k_n + 2c^2 k_t \\
 K^g(20, 21) &= -R k_t
 \end{aligned}$$

Ligne 21 :

$$K^g(21, 1) = Rsk_t \quad K^g(21, 3) = R^2k_t$$

$$K^g(21, 4) = Rsk_t \quad K^g(21, 6) = R^2k_t$$

$$K^g(21, 18) = R^2k_t \quad K^g(21, 19) = -2Rsk_t$$

$$K^g(21, 20) = -Rk_t \quad K^g(21, 21) = 3R^2k_t$$

Les autres termes de la matrice sont nuls.



## Annexe D

# Calcul de l'angle de branchement en fonction de facteurs d'intensité de contrainte par le critère de la contrainte d'ouverture maximale

L'angle de branchement de la fissure  $\theta_0$  peut être déterminé à partir des facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$ . En se basant sur l'Équation 1.9 et en considérant le critère de la contrainte d'ouverture maximale ( $K_{r\theta}(\theta_0) = 0$ ), on a :

$$\frac{K_{II}}{K_I} = \frac{-\sin \frac{\theta_0}{2} \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\frac{1}{4} \cos \frac{\theta_0}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta_0}{2}} = \frac{\sin \theta_0}{1 - 3 \cos \theta_0}, \quad (\text{D.1})$$

d'où :

$$K_I \sin \theta_0 + 3K_{II} \cos \theta_0 = K_{II}. \quad (\text{D.2})$$

En divisant l'Équation D.2 par  $\sqrt{K_I^2 + (3K_{II})^2}$ , on a alors :

$$\sin(\theta_0 + \phi) = \sin \theta_0 \cos \phi + \cos \theta_0 \sin \phi = \frac{K_{II}}{\sqrt{K_I^2 + (3K_{II})^2}}, \quad (\text{D.3})$$

où  $\cos \phi = K_I / \sqrt{K_I^2 + (3K_{II})^2}$  et  $\sin \phi = 3K_{II} / \sqrt{K_I^2 + (3K_{II})^2}$ .

Enfin, par inversion de l'Équation D.3, on obtient la valeur de  $\theta_0$  :

$$\theta_0 = \arcsin \left( \frac{K_{II}}{\sqrt{K_I^2 + (3K_{II})^2}} \right) - \phi, \quad (\text{D.4})$$

où  $\phi = \arccos \left( K_I / \sqrt{K_I^2 + (3K_{II})^2} \right) = \arcsin \left( 3K_{II} / \sqrt{K_I^2 + (3K_{II})^2} \right)$ .



# Références

- [1] Hamouine A. Abdelaziz, Y. A survey of the extended finite element. *Computers and Structures*, 86(11-12) :1141–1151, 2008.
- [2] A. Abdelkader. *Contribution à l'étude expérimentale et numérique du comportement d'un limon sollicité en traction : Approche par éléments discrets*. PhD thesis, Université Joseph Fourier de Grenoble, 2009.
- [3] Sollero P. Aliabadi M. H. Albuquerque, E. L. Doal boundary element method for anisotropic dynamic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59 :1187–1205, 2004.
- [4] M. P. Allen and D. J. Tildesley. *Computer Simulation of Liquids*. Oxford University Press, Oxford, 1987.
- [5] F. Alonso-Marroquin. *Micromechanical investigation of soil deformation : incremental response end granular ratcheting*. PhD thesis, University Stuttgart, 2004.
- [6] Belytschko T. Areias, P.M.A. Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 63 :760–788, 2005.
- [7] E. Azéma. *Étude numérique des matériaux granulaires à grains polyédriques : rhéologie quasi-statique, dynamique vibratoire, application au procédé de bourrage du ballast*. PhD thesis, Université Montpellier 2, 2007.
- [8] Melenk J. Babuska, I. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :727–758, 1997.
- [9] R.A. Balloch and M.W. Brown. The effect of pre-cracking history on branch crack threshold under mixed mode i/ii loading. In K Kussmaul, D. McDiarmid, and D. Socie, editors, *Fatigue under biaxial and multiaxial loading*, pages 179–197, London, 1991. Mech. Pub.
- [10] J.P. Bardet. Introduction to computational granular mechanics. *In Actes Du Colloque CISM*, 1997.
- [11] Cedolin L. Bazant, Z.P. Blunt crack band propagation in finite element analysis. *J Engng Mech Div ASCE*, 105 :297–315, 1979.
- [12] Z.P. Bazant. Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. *J Engng Mech Div ASCE*, 102 :331–344, 1976.

- [13] Black T. Belytschko, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remesing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45 :601–620, 1999.
- [14] Gracie R. Ventura G. A Belytschko, T. review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17(4) :043 001, 2009.
- [15] Krongauz Y. Organ D. Fleming M. Krysl P. Belytschko, T. Meshless methods : An overview and recent developements. *Computerl Methods Applied Mechanics and Engineering*, 139 :3–47, 1996.
- [16] B. Bernard. *Notion pratiques de mécanique de la rupture*. édition Eyrolles, 1980.
- [17] Daridon L. Monerie Y. Pagano S Blal, N. Micromechanical damage model based on intrinsic cohesive zone approach and bounds on cohesive parameters. *Comptes Rendus de Mécanique En préparation*, 2011.
- [18] Frangi A. Bonnet, M. *Analyse des solides déformables par la méthode des élément finis*. Ecole Polytechnique, 2007.
- [19] Remmers J. Needleman A Borst, R. Mesh-independent discrete numerical representations of cohesive-zone models. *Enginnering Fracture Mechanics*, 73 :160–177, 2006.
- [20] Bay F. Chastel Y. et Tovenia I Bouchard, P. O. Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineeringg*, 189 :723–742, 2000.
- [21] Camborde F. Klepaczko J.R. Mariotti C. Brara, A. Experimental and numerical study of concrete at high strain rates in tension. *Mechanics of Materials*, 33 :33–45, 2001.
- [22] H.D. Bui. Dual path-independent integral in the boundary value problems of cracks. *Eng.Fract.Mech*, 6 :287, 1973.
- [23] H.D. Bui. *Mécanique de la rupture fragile*. Ed. Masson, 1978.
- [24] Viggiani G. Calvetti, F. and C. A Tamagnini. numerical investigation of the incremental non-linearity of granular soils. *Italian Geotechnical Journal, Special Issue on Mechanics and Physics of Granular Materials*, 2003.
- [25] T. Carin. *Modélisation de la propagation dynamique de fissure. Thèse de doctorat*. Ecole National des Ponts et Chaussées, 2000.
- [26] W. F. Chen. Plasticity in reinforced concrete. *McGraw-Hill Book Company, New York*, pages 30–33, 1982.
- [27] Martin C.D. Segoo D.C. Cho, N. A clumped particle model for rock. *Rock Mechanics and Mining Sciences*, 44 :997–1010, 2007.
- [28] P. Cleary. Modeling comminution devices using dem. *International Journal for Numerical Methods in Geomechanics*, 25 :83–105, 2001.
- [29] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotech.*, 29 :47–65, 1979.

- [30] Kun F. Ramm E. et Herrmann H. D'addetta, G. From solids to granulates - discrete element simulations of fracture and fragmentation processes in geomaterials. *Lecture Note in Physics*, 568 :231–258, 2001.
- [31] G. Dhondt. Automatic 3-d mode I crack propagation calculations with finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41 :739–757, 1998.
- [32] Bouchez J. Magnier S.A. Donzé, F. Modeling fractures in rock blasting. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 34(8) :1153–1163, 1997.
- [33] Magnier S. A. Daudeville L. Mariotti C. Donzé, F. V. and L Davenne. Study of the behaviour of concrete at high strain rate compressions by a discrete element method. *ASCE J. of Eng. Mech*, 125 :1154–1163, 1999.
- [34] Magnier S.A. Donzé, F. Formulation of a 3-d numerical model of brittle behaviour. *Geophys J Int*, 122 :790–802, 1995.
- [35] Mora P. Magnier S.A. Donzé, F. Numerical simulation of faults and shear zones. *Geophys*, 116 :46–52, 1994.
- [36] Guinea G.V. Gomez J. Planas J. Elices, M. The cohesive zone model : advantages, limitations and challenges. *Engng Fract Mech*, 69 :137–163, 2002.
- [37] F. Erdogan and G. C. Sih. Crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J. Basic Eng.*, 85 :519–527, 1963.
- [38] Willam K. J. Etse, G. Fracture energy formulation for inelastic behaviour of plain concrete. *ASCE J. Engng. Mech*, 120 :1983–2011, 1995.
- [39] M.M. Frocht. Photoelasticity. *Wiley, New York*, 1947.
- [40] R Givoli, D. et Zusman. An adaptive finite element framework for fatigue crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54 :111–135, 2002.
- [41] Moës N. Belytschko T. Gravouil, A. Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets, part II : Level set update. *Int. J. Numer. Meth. Eng*, 53(11) :2569–2586, 2002.
- [42] A.A Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philos Trans Roy Soc Ser A*, 221 :163–98, 1920.
- [43] S. Hentz. *Modélisation d'une structure en béton armé soumise à un choc par la méthode des éléments discrets*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 2003.
- [44] G. Hondros. The evaluation of poisson's ratio and the modulus materials of a low tensile resistance by the brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete. *Aust J Appl Sci*, 10(3) :243–268, 1959.
- [45] Ting E. C. Chen W. F. Hsieh, S.S. A plastic-fracture model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 18 :181–197, 1982.
- [46] H. Huang. *Discrete Element Modeling of Tool-Rock Interaction*. University of Minnesota, 1999.

- [47] Pu S. Hussain, M. and J Underwood. Strain energy release rate for a crack under combined mode i and mode ii. *ASTM, STP*, 560 :2–28, 1974.
- [48] G. Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. of Applied Mechanics*, 24 :361–364, 1957.
- [49] Jacek Tejchman Jan Kozicki. 2d lattice model for fracture in brittle materials. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, 53 :137–154, 2006.
- [50] Plesha M.E. Edil T.E. Bosscher P.J. Kahla N.B. Jensen, R.P. Dem simulation of particle damage in granular media-structure interfaces. *The International Journal of Geomechanics*, 1(1) :21–39, 2001.
- [51] Onate E. Jerzy, R. Multiscale analysis using a coupled discrete/finite element model. *Interaction and Multiscale Mechanics*, 1 :1–31, 2007.
- [52] Sun C.T. Jin, Z.H. A cohesive zone model based on crack front necking. *In : Mahfuz H, Hosur MV, editors. Developments in theoretical and applied mechanics, Tuskegee University, Tuskegee, Alabama*, 22 :579–586, 2004.
- [53] Bazant Z.P. Jirasek, M. Discrete element modeling of fracture and size effect in quasibrittle materials : analysis of sea ice. in : Proceedings of the second international conference on discrete element methods. *Cambridge, MA : IESL Publications*, pages 357–368, 1993.
- [54] Xiao Q.Z. Karihaloo, B.L. Modelling of stationary and growing cracks in fe framework without remeshing : a state-of-the-art review. *Computers and Structures*, 81(3) :119–129, 2003.
- [55] Kouhia R. Karna T. Kolari, K. Ice failure simulation - softening material model. *In : Squire, V. Langhorne, P. (eds.). Proceedings of the 16th International Symposium on Ice. Dunedin, New Zealand, 2nd-6th December, 2002. Ice in the Environment, Volume one. Dunedin, New Zealand : International Association of Hydraulic Engineering and Research*, pages 489–494, 2002.
- [56] Kouhia R. Karna T. Kolari, K. On viscoplastic regularization of strain softening solids. *Proceedings of the VIII Finnish Mechanics Days 12.6-13.6.2003. Espoo, Finland*, pages 489–496, 2003.
- [57] G. Koval, J.-N. Roux, A. Corfdir, and F. Chevoir. Annular shear of cohesionless granular materials : From the inertial to quasistatic regime. *Phys. Rev. E*, 79(2) :021306, 2009.
- [58] Willam K. J. Le, Y.H. Anisotropic vertex plasticity formulation for concrete in plane stress. *ASCE J. Engng. Mech*, 123 :714–726, 1997.
- [59] J.B Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. 2003.
- [60] D. Leguillon. A criterion for crack nucleation at a notch in homogeneous materials. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser IIB*, 329 :97–102, 2001.
- [61] D. Leguillon. Strength or toughness? a criterion for crack onset at a notch. *Eur. J. of Mechanics A/Solids*, 21 :61–72, 2002.

- [62] Zhang X.B. Li, J. A criterion study for non-singular stress concentrations in brittle or quasi-brittle materials. *Engng Fract Mech*, 73(4) :505–523, 2005.
- [63] Zhang X.B Li, J. A failure criterion for brittle and quasi-brittle materials under any level of stress concentration. *Engineering Fracture Mechanics*, 75 :4925–4932, 2008.
- [64] Hung K.M. Maa, C. C.
- [65] Donze F.V. Magnier, S.A. Numerical simulations of impacts using a discrete element method. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 3 :257–276, 1998.
- [66] Kajukawa Y. Nakata Y. Masuya, H. Application of the distinct element method to the analysis of concrete members under impact. *Nuclear Engineering and Design*, 6(2) :283–294, 1994.
- [67] K. Meguro and M. Hakuno. Fracture analysis of concrete structures by the modified distinct element method. *Structural Engineering / Earthquake Engineering*, 6(2), 1989.
- [68] Boettcher M.S. Morgan, J.K. Numerical simulations of granular shear zones using the distinct element method-1. shear zone kinematics and the micromechanics of localization. *Journal of Geophysical Research*, 104(B2) :2703–2719, 1999.
- [69] Dolbow J. et Belytschko T. Moës, N. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999.
- [70] Gravouil A. et Belytschko T. Moës, N. Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets, part i : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53 :2549–2568, 2002.
- [71] R. Mueller and G. A. Maugin. On material forces and fini element discretizations. *Computational mechanics*, 29 :52–60, 2002.
- [72] A. Munjiza. *The combined Finite-Discrete Element Methode*. 2004.
- [73] Cambou B. Vincens E. Nouguier-Lehon, C.
- [74] Frossard E. Nouguier-Lehon, C.
- [75] V. Novozhilov. On a necessary and sufficient criterion for brittle strength. *Jour. Appl. Math. Mech.(Translation of PMM)*, 147 :212–222, 33(2).
- [76] M. Ostoja-Starzewski. Lattice models in micromechanics. *Applied Mechanics Reviews*, 55 :35–60, 2002.
- [77] Jiang J. Mirza F.A. Pietruszczak, S. An elastoplastic constitutive model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 24 :705–722, 1988.
- [78] Aliabadi M. et Rooke D. Portela, A. The dual boundary element method : Effective implementation for crack problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 :1269–1287, 1991.
- [79] Campbell C.S. Potapov, A.V.

- [80] D.O. Potyondi and P.A. Cundall. A bonded-particle model for rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 41(8) :1329–1364, 2004.
- [81] Cundall P.A. Lee C.A. Potyondy, D.O. Modeling rock using bonded assemblies of circular particles. *Proceedings of the 2nd N. American Rock Mechanics Symposium, Montreal*, pages 1937–1944, 1996.
- [82] Raman V. Ramanathan, B. Split tensile strength of cohesive soils. *Geotechnical Engineering, Vol3* :71–75, 1974.
- [83] W. Rankine. On the stability of loose earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 147, 1858.
- [84] J.R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :379–386, 1968.
- [85] V.E. Saouma. *fracture machanics*. University of Colorado, Boulder, 2000.
- [86] Tsubota H. Kasai Y. Koshika H. Morokawa H. Sawamoto, Y. Analytical studies on local damage to reinforced concrete structures under impact loading by the discrete element method. *Nuclear Engineering and Design*, 179 :157–177, 1998.
- [87] Fulland M. et Richard H. A. Schöllmann, M. Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3d structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 70 :249–268, 2003.
- [88] Gross D. Pothmann K. Seelig, T. Numerical simulation of a mixed-mode dynamic fracture experiment. *International Journal of Fracture*, 4 :325–338, 1999.
- [89] A. Seweryn. Brittle fracture criterion for structures with sharp notches. *Eng. Frac. Mech.*, 147 :673–681, 1994.
- [90] Nicot F. Donzé F. V. Sibille, L. and F Darve. Material instability in granular assemblies from fundamentally different models. *International Journal For Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31 :457–481, 2007.
- [91] G.C. Sih. Strain energy density factor applied to mixed mode crack problrms. *Int. J. Fract.*, 10 :305–322, 1974.
- [92] Moës N. Moran B. Sukumar, N. and T. Belytschko. Extended finite element method for three dimensional crack modelling. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 48 :1549–1570, 2000.
- [93] Pierre Suquet. *Rupture et plasticité*. École polytechnique, 1990.
- [94] H. Tada, P.C. Paris, and G.R. Irwin. *Stress analysis of cracks handbook*. Paris productions, Saint Louis, MO, 1985.
- [95] S. Takada and N. Hassani. *Earthquake Resistant Engineering Structures*, volume 23, chapter Analysis of compression failure of reinforced concrete by the modified distinct element method. Computational Mechanics Publications, 1996.
- [96] F. A. Tavarez and M.E. Plesha. Discrete element method for modelling solid and particulate materials. *International journal for numerical methods in engineering*, 70 :379–404, 2007.

- 
- [97] Goodier J.N. Timoshenko, S.P. Theory of elasticity. *McGraw-Hill, New York*, 1970.
- [98] T.Schawager. T.Pöschel. *Computational granular dynamique : Models and algorithms*. 2005.
- [99] Xu J.X. Belytschko T. Ventura, G. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by efg. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(6) :923–944, 2002.
- [100] Jia X. M. Kou S. Q. Zhang Z. X. Lindqvist P Wang, Q. Z. The flattened brazilian disc specimen used for testing elastic modulus, tensile strength and fracture toughness of brittle rocks : analytical and numerical results. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 41 :245–253, 2004.
- [101] H.M. Westergaard. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 6 :49–53, 1939.
- [102] Cichon C. Winnicki, A. Plastic model for concrete in plane stress state. i : theory ; ii : Numerical validation. *ASCE J. Engng. Mech*, 124 :591–613, 1998.

# Modélisation discrète en mécanique de la rupture des matériaux fragiles

## Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier le comportement à la rupture des matériaux fragiles avec une approche capable de relier l'amorçage de fissures à leurs propagations. On adopte la méthode des éléments discrets (DEM), en considérant le matériau composé d'un ensemble bidimensionnel régulier de particules en contact. Ceci qui nous permet de dériver une expression pour le facteur d'intensité de contraintes en fonction des forces et des déplacements relatifs des deux contacts adjacents à la pointe d'une fissure. Un critère de rupture classique, basé sur la ténacité du matériau, est ensuite adopté pour l'analyse de la propagation des fissures, représenté par la perte des forces de contact entre les particules qui assurent la cohésion du matériau. La vérification de la formulation est faite par la comparaison des simulations numériques à des solutions classiques de la mécanique de la rupture en mode I, mode II et mode mixte. Ensuite, on étend l'application du critère discret au comportement d'un matériau sain (non pré-fissuré), soumis à des contraintes homogènes, pour lequel on retrouve un critère de rupture du type Rankine. Le résultat final est un modèle discret simple totalement compatible avec les approches continues usuelles, et qui ne demande pas d'essais de calibration, typiques des approches discrètes conventionnelles.

**Mots-clés** : mécanique de la rupture, matériau fragile, approche discrète, résistance du matériau.

## Résumé en anglais

The objective of this thesis is to study the fracture behavior of brittle materials by an approach which relates crack initiation to crack growth. We adopt the discrete element method (DEM) and we represent the material by a 2D regular set of particles in contact. This allows us to derive an expression for the stress intensity factor as a function of the forces and relative displacements of two adjacent contacts at the crack tip. A classical failure criterion, based on the material's toughness, is then adopted for the analysis of crack propagation, represented by the loss of contacts forces between particles which ensure the cohesion of the material. The formulation is verified by the comparison of numerical simulations to classical solutions of fracture mechanics in mode I, mode II and mixed mode. Afterwards, we apply our discrete criterion to uncracked materials under homogenous stress conditions, obtaining a Rankine like behavior. The work results in a simple discrete model which is totally compatible to continuum mechanics, where no calibration tests are required, in contrast to most of discrete approaches.

**Keyword**: fracture mechanics, brittle material, discrete approach, material strength.