

ÉCOLE DOCTORALE 269

[Unité de recherche UFR 7501]

THÈSE présentée par :

[Ahmad SAID]

Soutenue le : **26 septembre 2013**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : **Mathématiques/ Géométrie**

**Feuilletages mesurés et feuilletages
transversalement affines**

THÈSE dirigée par :

[M. PAPADOPOULOS Athanase] Directeur de recherche, université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

[M. CHARITOS Charalampos] Professeur, Agricultural University of Athens
[M. KORKMAZ Mustafa] Professeur, Middle-East Technical University

AUTRES MEMBRES DU JURY :

[M. LUTZ Robert] Professeur émérite, Université de Mulhouse
[M. CADDEO Renzo] Professeur, Università di Cagliari
[M. HIJAZI Oussama] Professeur, Université de Lorraine

Remerciement

Je souhaite remercier en premier lieu mon directeur de thèse, monsieur Athanase Papadopoulos, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille des délais serrés de relecture des documents que je lui ai adressés. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

Je tiens à adresser mes plus sincères remerciements à Charalampos Charitos et Mustafa Korkmaz pour avoir accepté d'être rapporteurs de mon manuscrit et de participer au jury de ma soutenance, ainsi qu'à Robert Lutz, Oussama Hijazi et Renzo Caddeo d'assumer les rôles d'examineurs.

Je suis tout particulièrement reconnaissant à Charalampos Charitos de m'avoir donné ses remarques constructives et ses nombreux conseils, et de m'avoir fait partager son expérience, ses connaissances scientifiques. Je remercie également Robert Lutz de m'avoir donné ses conseils.

Mes remerciements vont à tous mes amis en France, ceux qui m'ont aidé et m'ont soutenu.

Je remercie mes parents, Mahmoud et Amal, ainsi que mes sœurs, Samar, Jihan, et Rim, et mon frère, Amjad pour leur soutien au cours de ces années et sans lesquels je n'en serais pas là aujourd'hui. Une pensée particulière pour ma femme Faten qui a supporté que je sois occupé durant toutes ces années.

*Enfin mes remerciements à tous les collègues et personnels de l'IRMA
et l'UFR Math-Info pour leur aide.*

Introduction

Dans ce travail, on étudie les feuilletages transversalement affines des surfaces compactes, avec ou sans bord.

Un feuilletage transversalement affine est un feuilletage, muni sur chaque arc transverse d'une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue qui est définie à une constante multiplicative près, et telle que les applications d'holonomie locales préservent ces mesures à constante près.

On étudie les différentes manières de construire un feuilletage transversalement affine : application de premier retour sur un intervalle qui coupe toutes les feuilles de feuilletage ; mesure brisée sur un réseau ferroviaire ; échanges d'intervalles affines ; feuilletages mesurés sur le revêtement universel avec automorphismes du revêtement agissant de manière affine.

On étudie les espaces de paramètres pour l'espace des classes d'équivalence de feuilletages transversalement affines.

On étudie ensuite la combinaison de deux feuilletage, des feuilletages mesurés et des feuilletages transversalement affines

Cette thèse contient trois chapitres.

Dans le premier chapitre on rappelle les définitions et les notations des feuilletages des surfaces. Dans [5] [6] [1] les auteurs ont étudié la géométrie des feuilletage. On généralise la définition de réseau ferroviaire dans une surface à bord en utilisant la surface double S^d . Chaque feuilletage dont les singularités sont des centres, épines

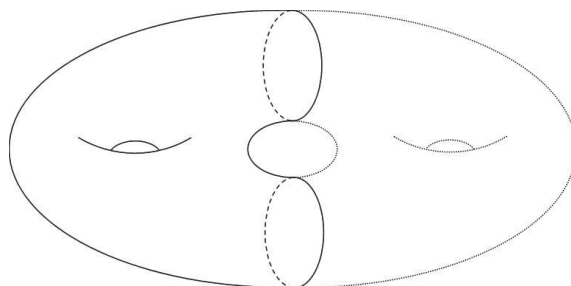


FIGURE 1 – La surface double S^d .

ou selles est porté par un réseau ferroviaire.

Dans le deuxième chapitre, on rappelle la théorie des feuilletages mesurés sur une surface compacte orientée $S_{g,b}$ de genre g et de b composantes de bord. Les feuilletages mesurés ont été étudiés de manière très intense : classification des feuilles

d'un feuilletage mesuré et classification de feuilletages mesurés du pantalon et d'une surface compacte en général. L'espace de feuilletages mesurés correspond de manière naturelle à un espace de laminations géodésiques mesurées, il compactifie l'espace de Teichmüller [3] [20] [21] [16] [19] [15] [7].

On généralise la définition d'un échange d'intervalles afin qu'on puisse définir un feuilletage mesuré non-orientable à partir d'un échange d'intervalles. On associe à un échange d'intervalles f les paramètres :

- (l_1, l_2, \dots, l_n) où l_i est le longueur de sous-intervalle $[a_{i-1}, a_i[$.
- $(\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n))$.
- $\epsilon = (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ est un vecteur de signes, où $+1$ signifie que f envoie $[a_{i-1}, a_i[$ vers $[b_{\tau(i-1)}, b_{\tau(i-1)+1}[$ dans le même sens c'est-à-dire que f est croissante dans $[a_{i-1}, a_i[$, et -1 signifie que f envoie $[a_{i-1}, a_i[$ vers $[b_{\tau(i-1)}, b_{\tau(i-1)+1}[$ en sens opposé c'est-à-dire que f est décroissante dans $[a_{i-1}, a_i[$.

On montre que pour chaque feuilletage mesuré \mathcal{F} , il existe un intervalle γ (ou une courbe) qui coupe toute les feuilles de \mathcal{F} . On divise la surface en paquets. Un *paquet de feuilles* est une sous-surface (rectangle) de S feuilletée par des segments de feuilles régulières de \mathcal{F} et bordée par deux feuilles singulières et deux arcs dis-joints de γ . Voir Figure 2. On montre ensuite que chaque feuilletage mesuré sur une

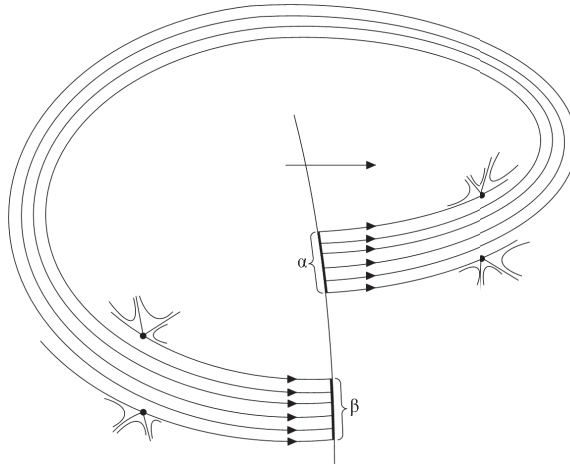


FIGURE 2 – Un paquet.

surface fermée est construit par un échange d'intervalles.

On améliore la construction de la surface fermée associé à un échange d'intervalle sur un cercle S^1 .

On construit une surface à bord de la manière suivante :

Soit $S_0 = S^1 \times [0, 1]$ un anneau. On recolle les deux composantes du bord $S^1 \times \{0\}$ et $S^1 \times \{1\}$ de S_0 par les bandes $B_i = [a_{i-1}, a_i[\times [0, 1]$ dont les côtés verticaux sont $[a_{i-1}, a_i]$ et $[f(a_{i-1}), f(a_i)]$. Voir Figure 3. On aura une surface à bord, on fait disparaître les composantes du bord de S_0 :

Si une composante de bord a une singularité, on ajoute une 2-anse avec une épine. Voir Figure 4.

Si une composante de bord a deux singularités, on ajoute une 2-anse avec deux

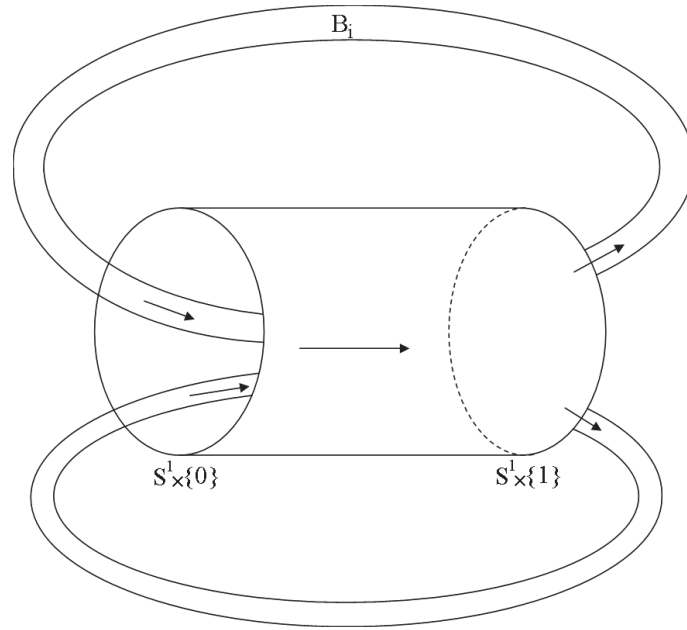


FIGURE 3 – Surface à bord portée par un échange d’intervalles.



FIGURE 4 – Ajouter une 2-anse avec une épine.

épines. Voir Figure 5.

Si la composante de bord contient $k \geq 3$ séparatrices, on la fait disparaître comme



FIGURE 5 – Ajouter une 2-anse avec deux épines.

dans la Figure 6. On aura une selle à k séparatrices.

Avec cette surface, on a le résultat suivant :

Théorème A : Soit f un échange de n intervalles linéaire de permutation fixe τ , soit S la surface construite par f , et soient $l_i = a_i - a_{i-1}$ les longueurs des

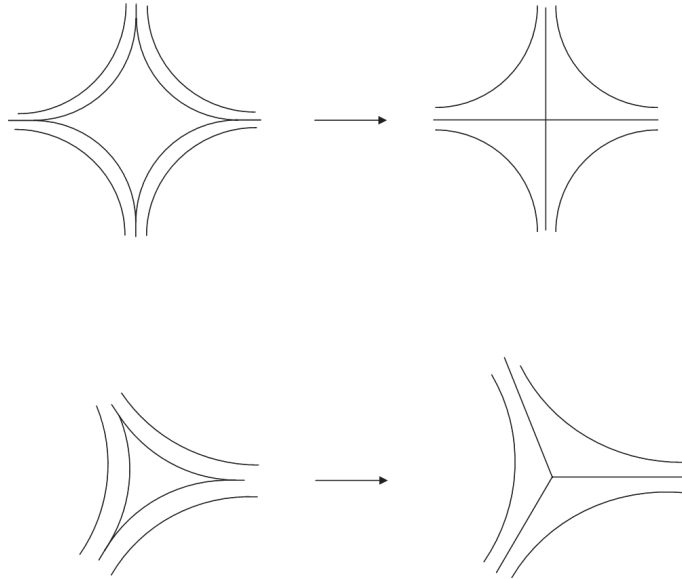


FIGURE 6 – Faire disparaître les composantes de bord à ≥ 3 séparatrices.

sous-intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i[$. Alors l'application $(l_1, l_2, \dots, l_n) \longrightarrow \mathcal{MF}(S)$ est injective.

Le troisième chapitre est l'objet principal de ce travail. On étudie les feuilletages transversalement affines.

Très peu d'auteurs ont déjà étudié l'espace des feuilletages transversalement affines. Oertel et Papadopoulos ont fait la relation avec structures géométrique sur les surfaces [13] [14] [4] [10] [11].

On rappelle que l'espace des feuilletages transversalement affines $\mathcal{AF}(S)$ sur S est le quotient de l'espace de tous les feuilletages transversalement affines par la relation d'équivalence suivante :

- Isotopie.
- Opérations de Whitehead.

On suppose que le feuilletage \mathcal{F} ne contient ni composante de Reeb ni composante de ∂ -Reeb. Dans ce cas, l'espace $\mathcal{AF}(S)$ est muni de topologie qui est en fait un espace de dimension finie.

On étudie les espaces de paramètres pour l'espace des classes d'équivalence de feuilletages transversalement affines en utilisant les diverses manières de construction de feuilletages transversalement affines.

On donne des paramètres d'un sous-espace de \mathcal{AF} qui est porté par un réseau ferroviaire muni d'une mesure brisée ou par un échange d'intervalles affine de permutation fixe.

On étudie les feuilletages transversalement affines sur l'anneau, le pantalon et le tore. On utilise l'application de premier retour, la mesure brisée, l'échange d'intervalles et la construction d'un feuilletage transversalement affine à partir d'un

feuilletage mesuré sur une surface à deux composantes du bord.

Dans ([4] p. 91) A. Hatcher et U. Oretel ont démontré la proposition :

Proposition : Soit \mathcal{F} est un feuilletage du pantalon. Si \mathcal{F} ne contient aucune composante de Reeb ou ∂ -Reeb, alors toutes les feuilles de \mathcal{F} sont des intervalles compacts. À l'aide de cette proposition on classe les feuilletages transversalement affines du pantalon.

On généralise l'admissibilité d'un réseau ferroviaire sur une mesure brisée.

Dans ([17] p. 278) A. Papadopoulos a montré le théorème : Soit (τ, σ) une mesure brisée admissible, et soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les poids des arêtes de τ et b_1, b_2, \dots, b_k les poids σ , alors l'application $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b_1, b_2, \dots, b_k) \neq (0, 0, \dots, 0) \longrightarrow \mathcal{AF}$ est injective.

On démontre ici le théorème suivant :

Théorème B : Soit f un échange de n intervalles affine de permutation fixe τ , et soient l_i les longueurs des sous-intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i[$, et $f_i = \alpha_i x + \beta_i$ la restriction de f sur chaque sous intervalle I_i . Alors l'application $(l_1, l_2, \dots, l_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \longrightarrow \mathcal{AF}$ est injective.

On étudie ensuite la combinaison de deux feuilletages, de feuilletages mesurés et de feuilletages transversalement affines. On verra que la combinaison d'un feuilletage mesuré avec un feuilletage transversalement affine n'est pas nécessairement un feuilletage transversalement affine, et la combinaison de deux feuilletages transversalement affines n'est pas nécessairement un feuilletage transversalement affine.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Feuilletages des surfaces | 1 |
| 1.1 | Réseaux ferroviaires | 3 |
| 2 | Feuilletages mesurés | 11 |
| 2.1 | Rappels sur les Feuilletages mesurés | 13 |
| 2.1.1 | Topologie de \mathcal{MF} | 14 |
| 2.2 | Classification des feuilletages mesurés | 14 |
| 2.2.1 | Classification des feuilletages mesurés du pantalon | 14 |
| 2.2.2 | Classification des feuilletages mesurés d'une surface S_g | 16 |
| 2.3 | Mesure invariante sur un réseau ferroviaire | 18 |
| 2.4 | Le sous-espace des feuilletages mesurés $\mathcal{MF}(\tau)$ | 21 |
| 2.5 | Échanges d'intervalles linéaires | 22 |
| 2.5.1 | Construction d'une surface à bord à partir d'un échange d'intervalle sur $[0, 1[$ | 24 |
| 2.5.2 | Construction d'une surface sans bord à partir d'un échange d'intervalle sur un cercle S^1 | 26 |
| 2.5.3 | Construction d'un réseau ferroviaire à partir d'un échange d'intervalles sur un cercle S^1 | 30 |
| 2.5.4 | Construction | 33 |
| 2.5.5 | Associer un échange d'intervalles linéaire orienté à un feuilletage mesuré | 33 |
| 2.6 | Échange d'intervalles généralisé | 34 |
| 2.7 | Construire un feuilletage | 35 |
| 2.7.1 | Construction | 37 |
| 2.7.2 | $\mathcal{MF}(f)$ | 38 |
| 3 | Feuilletages transversalement affines | 41 |
| 3.1 | Rappels sur les Feuilletages transversalement affines | 41 |
| 3.2 | Mesure brisée | 42 |
| 3.2.1 | Construction d'une classe de \mathcal{AF} à partir d'une mesure brisée | 43 |
| 3.3 | Échanges d'intervalles affines | 46 |
| 3.4 | Feuilletages transversalement affines sur l'anneau | 51 |
| 3.4.1 | Classification des feuilletages transversalement affines de l'anneau | 53 |
| 3.5 | Feuilletages transversalement affines sur le pantalon | 55 |

| | | |
|-------|---|-----------|
| 3.5.1 | Classification des feuilletages transversalement affines du pantalon | 59 |
| 3.6 | Feuilletages transversalement affines sur le tore troué et sur le tore . . | 60 |
| 3.7 | Topologie de \mathcal{AF} | 64 |
| 3.8 | Combinaison de deux feuilletages | 65 |
| 3.8.1 | Combinaison de deux feuilletages mesurés | 66 |
| 3.8.2 | Combinaison de deux feuilletages transversalement affines . . . | 68 |
| 3.8.3 | Combinaison d'un feuilletage mesuré avec un feuilletage transversalement affine | 70 |
| | Bibliographie | 73 |

Feuilletages des surfaces

Dans ce travail, S est une surface compacte orientée (pouvant avoir un bord) dont la caractéristique d'Euler est $\chi(S) \leq 0$.

Dans ce chapitre, on rappelle les définitions et les notations des feuilletages des surfaces.

Un feuilletage sur une surface est une décomposition de la surface en sous-ensembles de dimension 1. Plus précisément, on a :

Définition 1.0.1. *Soit S est une surface. Un feuilletage de S est un atlas \mathcal{F} avec les propriétés suivantes :*

- Si $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, alors $\varphi(U) = V$ est un rectangle ouvert dans \mathbb{R}^2 .
- Si (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont dans \mathcal{F} et $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors l'application de changement de cartes $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ préserve les droites horizontales, et on suppose pour des raisons de commodité qu'il est de classe C^1 .

Singularités d'un feuilletage : Pour avoir un feuilletage transversalement orienté régulier¹, il faut et il suffit d'avoir un champ de vecteurs sans singularité. Les feuilletages des surfaces autres que le tore T^2 ou le cylindre $S^1 \times I$ dans le cas orientable et dans le cas non orientable, le ruban de Möbius et la bouteille de Klein, sont nécessairement singuliers.

La Figure 1.1 représente certaines des singularités que nous rencontrerons le plus fréquemment : selles, épines, centres, soleils, et dipôles.

Remarquons qu'un feuilletage orientable ne possède ni épine, ni selle à p séparatrices avec p impair.

On peut associer à chaque singularité un indice j (Voir Figure 1.1), de façon que soit satisfaite la formule d'Euler-Poincaré ([3] p. 75) :

La somme des indices des singularités d'un feuilletage est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface $\chi(S) = \sum_r j_r = 2 - 2g - b$ où S est une surface de genre g et de b composante du bord.

On rappelle aussi l'opération suivante entre deux feuilletages : Une *liaison* est une feuille singulière qui joint des singularités.

1. On utilise le mot "régulier" pour un feuilletage qui n'admet aucune singularité. Dans ce cas la caractéristique d'Euler de la surface doit être nulle.

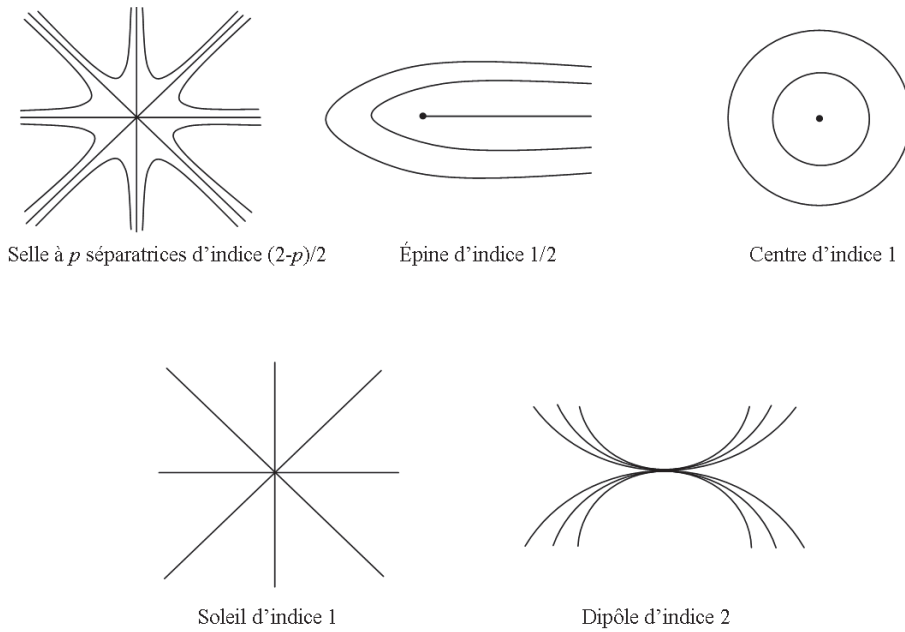


FIGURE 1.1 – Singularités de feuilletage.

Opérations de Whitehead :

Soit \mathcal{F} un feuilletage. L'opération de Whitehead est la contraction d'une liaison à une singularité ou bien l'opération inverse. Voir Figure 1.2.

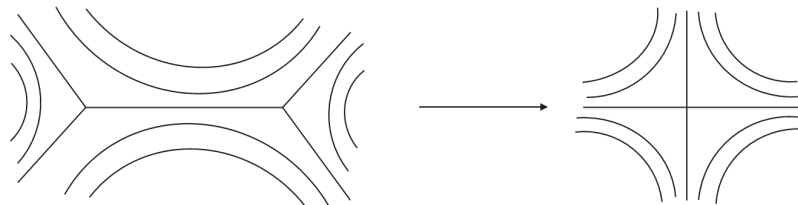


FIGURE 1.2 – Opération de Whitehead.

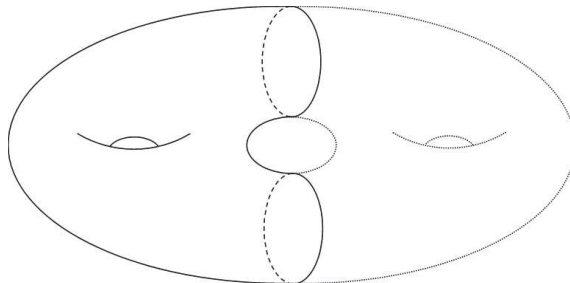
Pour chaque surface, on met une relation équivalence sur l'ensemble des feuilletages.

Deux feuilletages sont dits équivalents si :

- Si les feuilles de l'un sont isotopes à celles de l'autre en respectant la mesure transverse.
- Il existe des opération de Whitehead qui envoie un feuilletage vers l'autre en respectant la mesure transverse.

On note $EF(S)$ l'ensemble des feuilletages sur S modulo cette relation d'équivalence.

Définition 1.0.2. Si S est à bord, la surface double S^d est une surface sans bord obtenue à partir de S en recollant par l'application identité les composantes du bord de S avec les composantes du bord de la surface symétrique de S . Voir Figure 1.3.

FIGURE 1.3 – La surface double S^d .

1.1 Réseaux ferroviaires

On rappelle ici des résultats connus sur les réseaux ferroviaires.

Définition 1.1.1. On suppose que S est fermée (sans bord). Un réseau ferroviaire τ sur une surface S est un graphe sans bord dont les arêtes sont des segments différentiables de S tangents entre eux aux sommets, qui sont appelés aiguillages. Voir Figure 2.9.

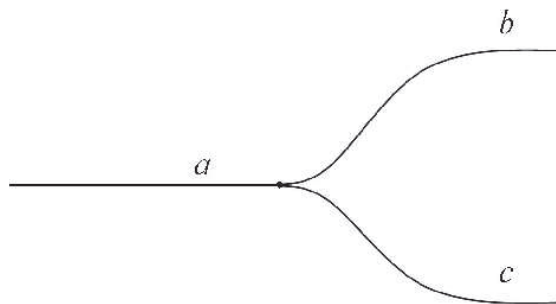


FIGURE 1.4 – Aiguillage de réseau ferroviaire.

Si S est une surface à bord, on suppose que τ est sans bord dans $S - \partial S$. τ est un réseau ferroviaire dans S si τ^d est un réseau ferroviaire dans la surface double S^d , où τ^d est le graphe construit en recollant τ avec son symétrique.

Remarque : Les composante du bord d'une surface à bord S peuvent être des arêtes où des réunion des arêtes d'un réseau ferroviaire τ dans S , et un arc d'une composante du bord de S peut être contenu dans une arête de τ . Voir Figure 1.5.

Remarque : Pour la définition 1.1.1, on a supposé que S est munie d'une structure différentiable. Cette structure différentiable ne joue aucun rôle en dehors de cette définition.

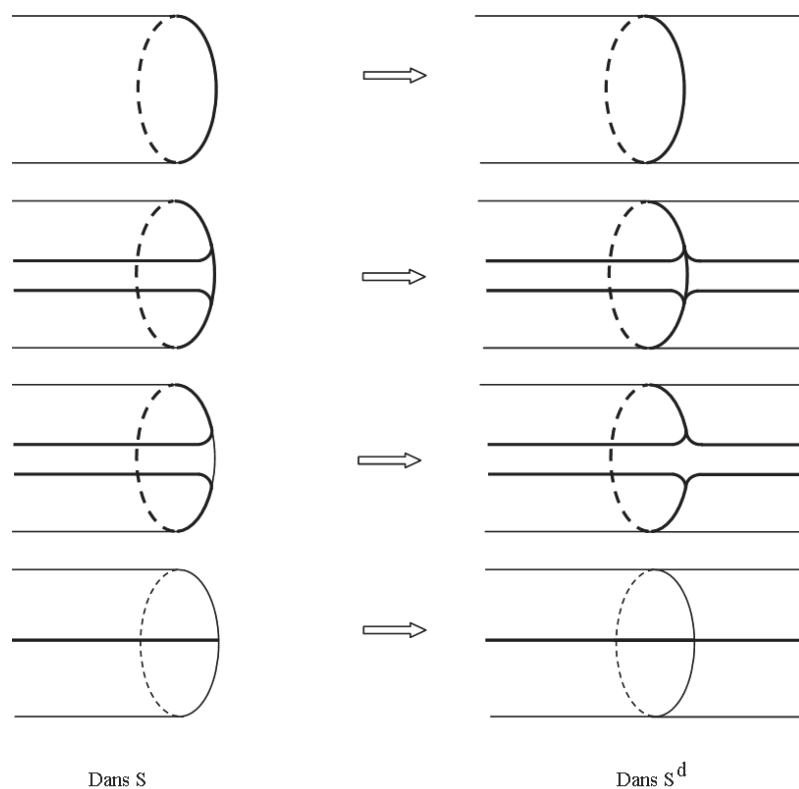


FIGURE 1.5 – Arête au voisinage du bord.

Soit S_1 une sous surface de S bordée par des courbes fermées dans S . Un feuilletage \mathcal{F} sur S_1 est dit un feuilletage *partiel* de la surface S . Par exemple dans la figure 1.6, on a un feuilletage partiel sur une surface de genre 2.

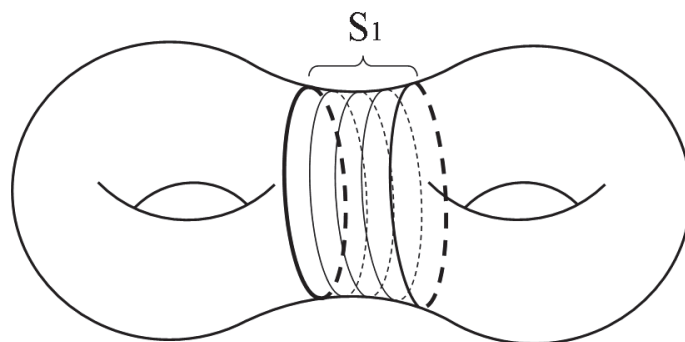


FIGURE 1.6 – Feuilletage partiel sur une surface de genre 2.

Définition 1.1.2. *Un voisinage adapté V d'un réseau ferroviaire τ est un voisinage tubulaire fermé lisse de τ dont l'espace tangent au bord a éventuellement des discontinuités correspondant aux aiguillages de τ . Voir figure 1.7*

On munit le voisinage adapté de τ par un feuilletage par des segments transverses

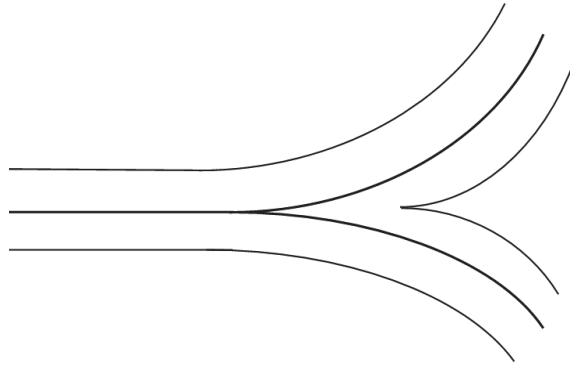


FIGURE 1.7 – Voisinage adapté d'un réseau ferroviaire.

à τ et au bord de V . Ce feuilletage est appelé *feuilletage par les traverses*. Voir Figure 1.8.

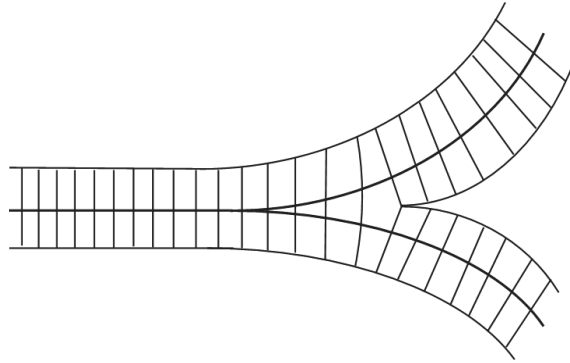


FIGURE 1.8 – Feuilletage par les traverses sur un voisinage adapté d'un réseau ferroviaire.

Le voisinage adapté V est obtenu en épaississant le réseau ferroviaire τ , et le réseau ferroviaire τ est obtenu par le voisinage adapté V qui est feuilleté par les traverses en écrasant chaque feuille en un point. Voir Figure 1.9. Autrement dit, le voisinage adapté de τ définit bien un réseau ferroviaire à isotopie près. Inversement deux réseaux ferroviaires isotopes définissent le même voisinage adapté à isotopie près. Il y a une équivalence entre la définition de réseau ferroviaire et de voisinage adapté.

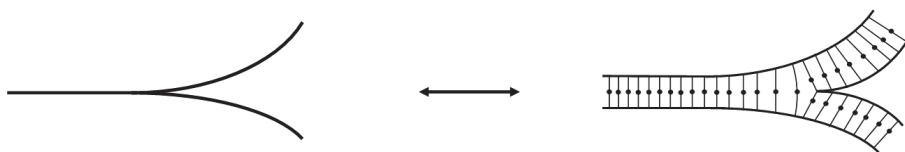


FIGURE 1.9 – Équivalence entre réseau ferroviaire et son voisinage adapté feuilleté par les traverses.

Construire un feuilletage à partir d'un réseau ferroviaire

Soient τ un réseau ferroviaire sur S , et V le voisinage adapté de τ dans S . Soit \mathcal{F}_1 le feuilletage par les traverses. On définit un feuilletage \mathcal{F}_2 qui est transverse à \mathcal{F}_1 . Voir Figure 1.11.

Le feuilletage \mathcal{F}_2 est appelé *un feuilletage partiel porté par le réseau ferroviaire τ* . Soit \mathcal{F}_2 un feuilletage partiel porté par un réseau ferroviaire τ . En écrasant alors chaque composante du complémentaire de \mathcal{F}_2 sur un squelette de cette composante, on obtient un feuilletage total de S . Les singularités de ce feuilletage peuvent être des selles, des centres, ou des épines).

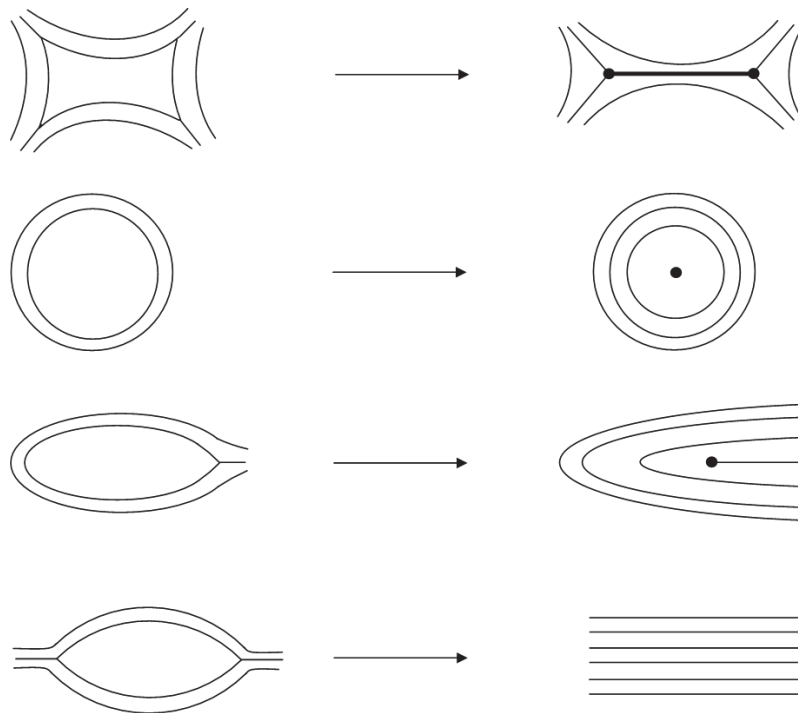


FIGURE 1.10 – Écraser les composants de complémentaire d'un feuilletage partiel.

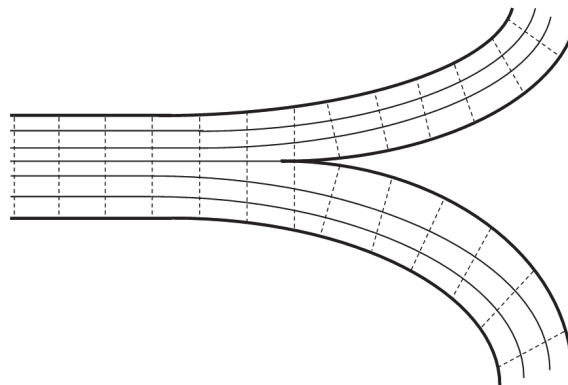


FIGURE 1.11 – Feuilletage sur un voisinage adapté d'un réseau ferroviaire.

Proposition 1.1.1. *Tout feuilletage dont les singularités sont des selles, épines et centres est porté par un réseau ferroviaire. ([18] p. 4).*

Démonstration. Soit \mathcal{F} un feuilletage sur S . On peut faire les opérations suivantes sur \mathcal{F} pour avoir un feuilletage partiel sur S .

1- Ouvrir une feuille. Voir Figure 1.12.

2- Éclatement d'une singularité ou d'une liaison joignant deux singularités et ouvrir une feuille. Voir Figure 1.13.



FIGURE 1.12 – Ouvrir une feuille.

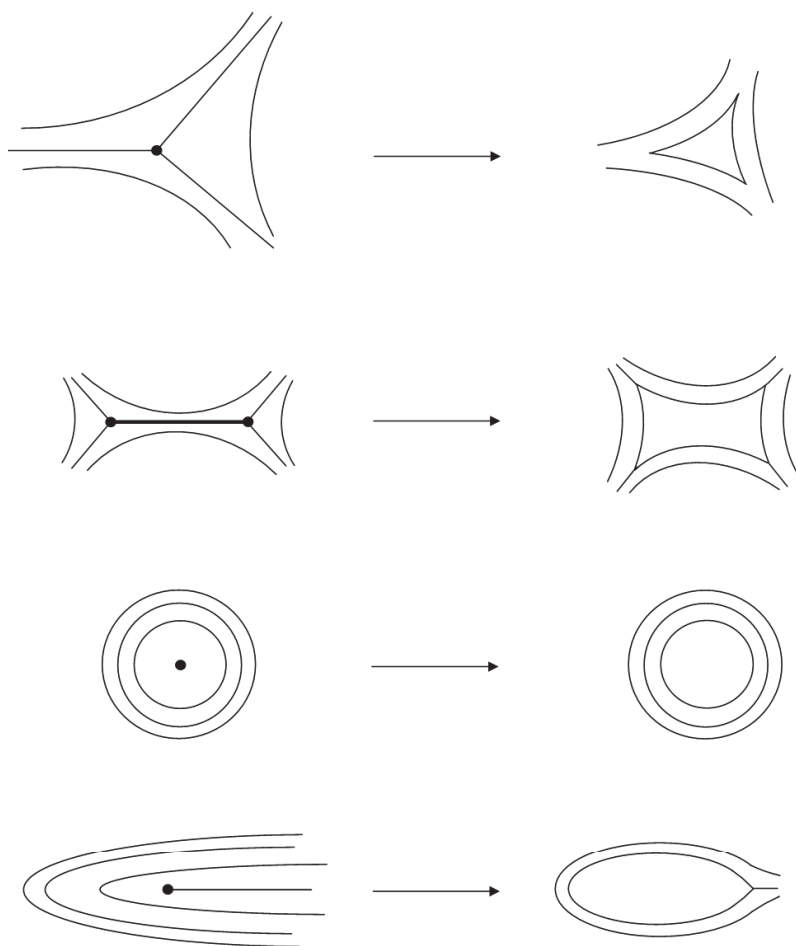


FIGURE 1.13 – Éclatement d'une singularité ou d'une liaison.

Soit \mathcal{F}_1 le feuilletage partiel sur S obtenu à partir des opérations précédentes. On munit le support de \mathcal{F}_1 par des rectangles feuilletés par des *feuilles horizontales*. Voir Figure 1.14.

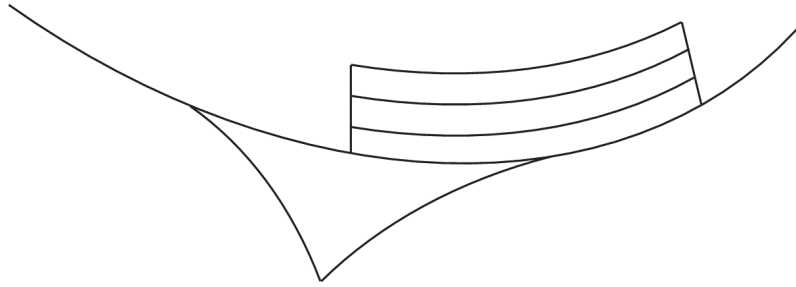


FIGURE 1.14 – Rectangle feuilleté.

On ouvre chaque côte horizontale du rectangle feuilleté, On aura des bigones (un *bigone* est un disque à deux singularités Voir Figure 1.15). Voir Figure 1.16.

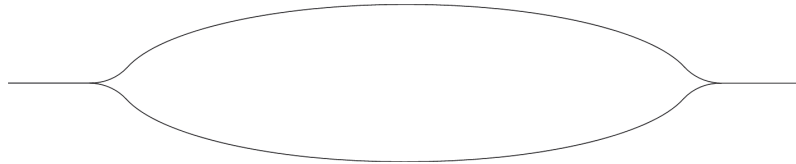


FIGURE 1.15 – Un bigone.

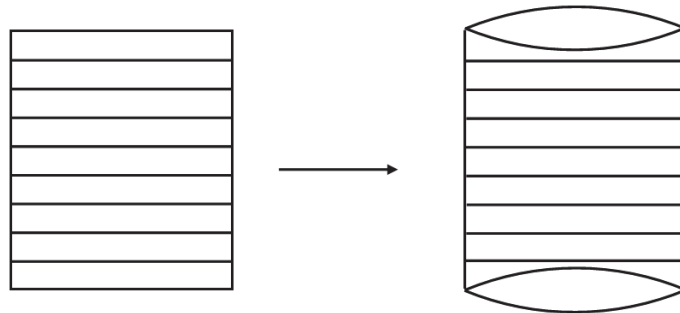


FIGURE 1.16 – Ouvrir les côtes horizontales de rectangle feuilleté.

Soit \mathcal{F}_2 le feuilletage partiel résultant. Le support de \mathcal{F}_2 admet un feuilletage \mathcal{G} dont les feuilles sont transverses aux feuilles de \mathcal{F}_2 et les extrémités des feuilles de \mathcal{G} sont sur le bord du support de \mathcal{F}_2 . On obtient alors un feuilletage vertical sur les rectangles représenté dans la figure 1.17.

En écrasant chaque feuille de \mathcal{G} en un point, on aura un réseau ferroviaire τ . Le support de \mathcal{G} qui est équipé par un feuilletage vertical constitue un voisinage adapté de τ , et ce voisinage adapté porte le feuilletage \mathcal{F} . □

Si on note $\mathcal{E}(S)$ l'ensemble de tous les réseaux ferroviaires à homotopie près dans les surfaces S , on peut définir une application $f : \mathcal{E}(S) \rightarrow E\mathcal{F}(S)$. Cette application est surjective d'après la proposition précédente 1.1.1, mais elle n'est pas injective.

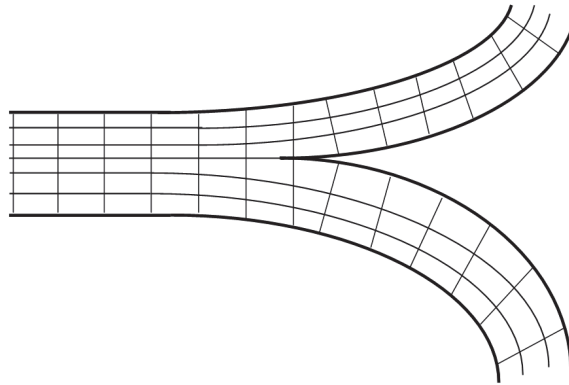


FIGURE 1.17 – Feuilletage vertical sur le rectangle feuilleté.

Par exemple les deux réseaux ferroviaires dans la figure 1.18 portent le feuilletage représenté dans la figure 1.19.

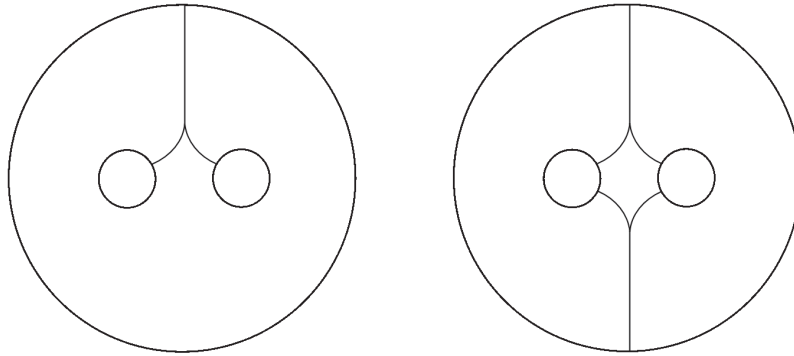


FIGURE 1.18 – Deux réseaux ferroviaires portent le même feuilletage.

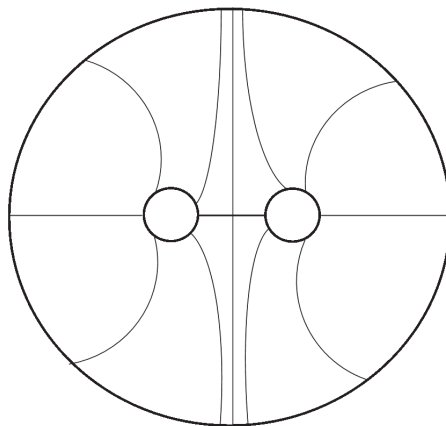


FIGURE 1.19 – Feuilletage sur le pantalon.

1.1. Réseaux ferroviaires

CHAPITRE 2

Feuilletages mesurés

Dans ce chapitre, après un rappel sur les feuilletages mesurés et leurs principales propriétés, on généralise la notion d'échange d'intervalles affine de définir un feuilletage mesuré non-orientable à partir d'un échange d'intervalles.

On montre que chaque feuilletage mesuré sur une surface fermée est construit par un échange d'intervalles.

On améliore la construction de la surface associée à un échange d'intervalles, et on démontre le théorème :

Théorème : Soit f un échange de n intervalles linéaire de permutation fixe τ , soit S la surface construite par f , et soient $l_i = a_i - a_{i-1}$ les longueurs des sous-intervalles $I_i =]a_{i-1}, a_i[$. Alors l'application $(l_1, l_2, \dots, l_n) \longrightarrow \mathcal{MF}(S)$ est injective.

On commence par des définitions, des notations et des rappels.

Dans ce chapitre, \mathcal{F} est un feuilletage sur une surface compacte orientée S qui admet comme singularités des selles généralisées (à 3, 4, 5... séparatrices). Voir Figure 2.1.

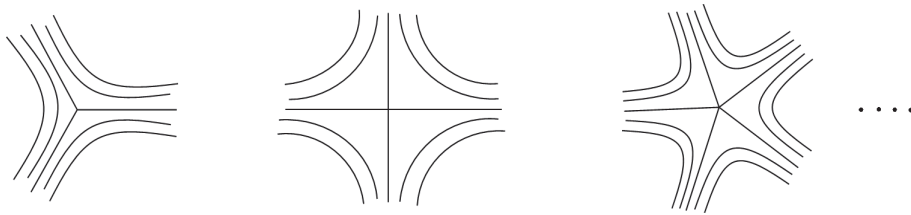


FIGURE 2.1 – Singularités admises dans $S - \partial S$.

Si S est à bord, les singularités admises sur le bord sont expliquées dans la figure 2.2. Ces singularités seront des selles généralisées dans la surface double S^d . Voir Figure 2.3.

On note $Sing(\mathcal{F})$ l'ensemble de singularités de \mathcal{F} .

Une feuille qui passe par une singularité est dite une *feuille singulière*, sinon elle est dite une *feuille régulière*.

Si S est à bord, et γ est une composante du bord de S , alors :

- Ou bien γ est une feuille régulière.
- Ou bien γ est une feuille singulière, et les points singuliers admis sur le bord sont

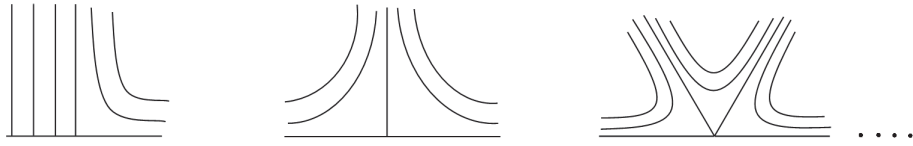


FIGURE 2.2 – Singularités admises sur ∂S .

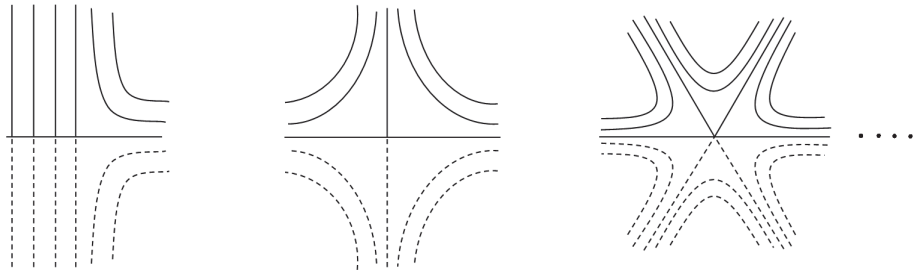
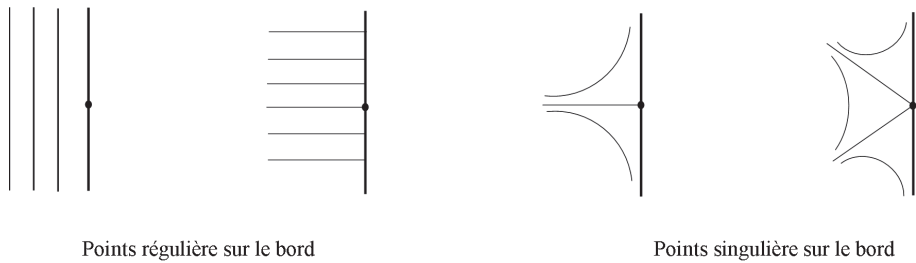


FIGURE 2.3 – Singularités admises sur ∂S qui seront des selles généralisées dans S^d .

représentés dans les Figures 2.2 et 2.3.

- Ou bien le feuilletage est transverse à γ en chaque point.



Points régulière sur le bord

Points singulière sur le bord

FIGURE 2.4 – Points sur le bord.

Un *cycle de feuilles* de \mathcal{F} est une réunion finie de feuilles joignant des points singuliers qui est homéomorphe à un cercle. Voir Figure 2.5.

Soit L une feuille de \mathcal{F} et x un point de L . Une *demi-feuille d'origine x* est une composante connexe de $L - \{x\}$ (muni de la topologie de la feuille) n'aboutissant pas à une singularité.

Nous commençons par des rappels sur les feuilletages mesurés. Dans le chapitres suivant, certaines notions exposées ici seront généralisées aux feuilletages transversalement affines.

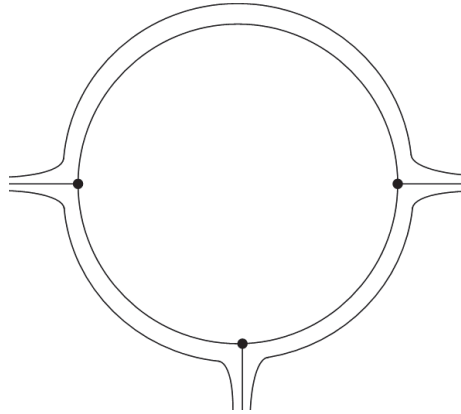


FIGURE 2.5 – Cycle de feuilles.

2.1 Rappels sur les Feuilletages mesurés

Définition 2.1.1. *Un feuilletage mesuré \mathcal{F} est un feuilletage muni sur chaque arc compact transverse à \mathcal{F} d'une mesure qui est équivalente à la mesure de Lebesgue sur un intervalle compact de \mathbb{R} , cette mesure étant invariante par les applications d'holonomie locales, c'est-à-dire les applications obtenues en déplaçant l'arc de telle sorte que chaque point reste sur la même feuille. Voir Figure 2.6.*

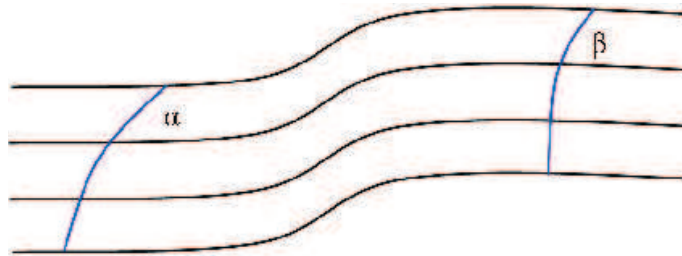


FIGURE 2.6 – Feuilletage Mesuré.

En d'autres termes, si α, β sont deux arcs homotopes par une homotopie h_t qui garde les points sur les mêmes feuilles, alors $h_t^* \mu_\alpha = \mu_\beta$.

On rappelle le théorème suivant, qui est utile pour la classification des feuilles et des feuilletages mesurés :

La récurrence de Poincaré : Soient (S, \mathcal{F}) un feuilletage mesuré de S , L une feuille non fermée dans $S - \{\text{sing } \mathcal{F}\}$, et α un arc transversal à \mathcal{F} coupant L . Alors L coupe α un nombre infini de fois ([3] p. 74).

En utilisant cette propriété de récurrence, on peut classer les feuilles d'un feuilletage mesuré :

- La feuille est compacte.
- La feuille est localement dense, et son adhérence est une sous-surface.

On rappelle aussi la relation suivante entre deux feuilletages mesurés :

Relation d'équivalence sur l'ensemble des feuilletages mesurés :

- Isotopie qui préserve la mesure transverse.
- Opérations de Whitehead qui préservent aussi la mesure transverse.

On note $\mathcal{MF}(S)$ l'ensemble de classe d'équivalence de feuilletages mesurés sur S .

2.1.1 Topologie de \mathcal{MF}

Soit \mathcal{S} l'ensemble des classes d'homotopie (d'isotopie) de courbes simples fermées de S non nulles en homotopie (ne bordant pas de disque).

Soient (S, \mathcal{F}) un feuilletage mesuré et γ une courbe simple fermée. On définit la mesure de γ et la note $\mu(\gamma) = \sum_{i=1}^n \mu(\alpha_i)$; où les $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des arcs de γ disjoints et transversaux à \mathcal{F} .

Soit α un élément de \mathcal{S} , on pose $i((\mathcal{F}, S), \alpha) = \inf_{\gamma \in \alpha} \mu(\gamma)$. Cette valeur est invariante par l'isotopie et par opération de Whitehead.

On munit \mathcal{MF} d'une topologie. Pour $\gamma \in \mathcal{S}$, au feuilletage mesuré $(\mathcal{F}, \mu) \in \mathcal{MF}$ est attaché un nombre d'intersection $i((\mathcal{F}, \mu), \gamma)$.

Par définition, une suite (\mathcal{F}_n, μ_n) converge vers (\mathcal{F}, μ) dans \mathcal{MF} si et seulement si la suite $i(\mathcal{F}_n, \mu_n, \gamma)$ converge vers $i((\mathcal{F}, \mu), \gamma)$ pour tout $\gamma \in \mathcal{S}$. Autrement dit, pour tout $\gamma \in \mathcal{S}$, la fonction $i(\cdot, \gamma) : \mathcal{MF} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue.

Si S est une surface à bord :

Soient \mathcal{S}_1 l'ensemble des classes d'isotopie de courbes simples fermées de S non nulles en homotopie, et \mathcal{S}_2 la classe d'homotopie des arc simples dont les deux extrémités sont sur le bord. On pose $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. pour $\gamma \in \mathcal{S}$, on définit $i(\mu, \gamma)$ comme avant, et on munit $\mathcal{MF}(S)$ d'une topologie comme avant.

2.2 Classification des feuilletages mesurés

2.2.1 Classification des feuilletages mesurés du pantalon

On pose P^2 un pantalon, c'est-à-dire un disque compact à deux trous. Voir Figure 2.7.

Définition 2.2.1. *Soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré sur P^2 . On dit que \mathcal{F} est un bon feuilletage de P^2 si aucune composante de ∂P^2 n'est une feuille lisse (c'est-à-dire sans singularités) de \mathcal{F} .*

Le résultat suivant est bien connu :

Proposition 2.2.1. *Toute feuille d'un bon feuilletage de P^2 va :*

- Soit du bord au bord.
- Soit du bord à une singularité.
- Soit d'une singularité à une singularité. ([3] p. 98)

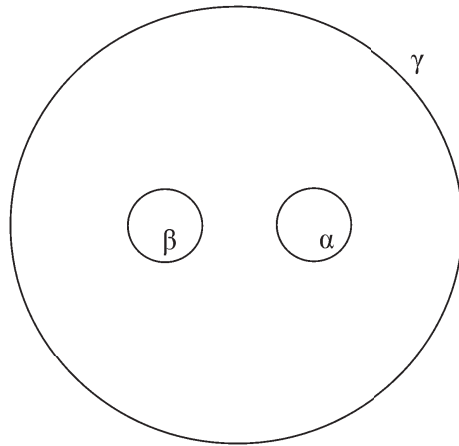


FIGURE 2.7 – Pantalon= Disque à deux trous.

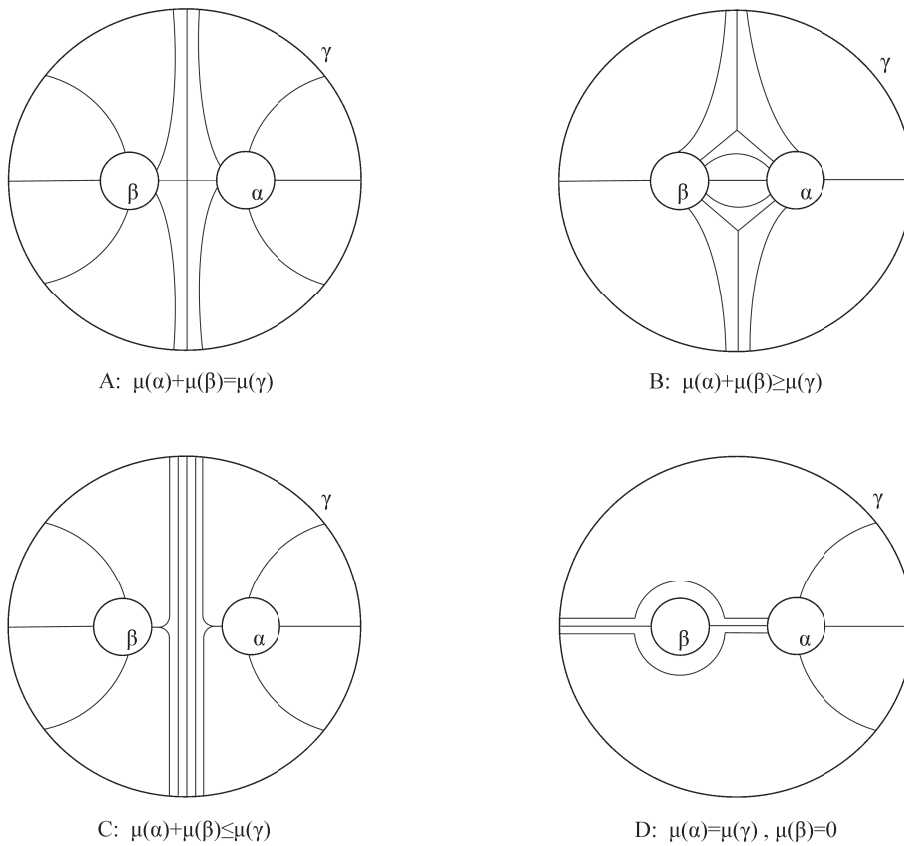


FIGURE 2.8 – Feuilletages Mesurés sur pantalon.

Proposition 2.2.2. *On classe les feuilletages mesurés du pantalon qui sont transverses au bord par le triplet $:(\mu(\alpha), \mu(\beta), \mu(\gamma))$. ([3] p. 98).*

Ce triplet classe les feuilletages mesurés transversaux au bord à homotopie près qui préserve la mesure du bord.

2.2.2 Classification des feuilletages mesurés d'une surface S_g

On pose de nouveau S_g une surface compacte fermée orienté de genre $g \geq 2$.

Définition 2.2.2. Soit \mathcal{F} un feuilletage sur S_g . Une décomposition en pantalons de S est une famille de courbes K_i disjointes transverses au feuilletage \mathcal{F} et découpant la surface S en pantalons.

Théorème 2.2.1. Soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré sur S_g . Alors il existe un feuilletage \mathcal{F}_1 équivalent à \mathcal{F} (obtenu à partir de \mathcal{F} par isotopie et opérations de Whitehead) et une décomposition en pantalons de S tels que $i((\mathcal{F}_1, \mu), K_i) \neq 0$. ([3] §V p. 109-115).

Le nombre de courbes de la décomposition est $3g - 3$ courbes, et le nombre de pantalons est $2g - 2$ pantalons. Voir Figure 2.9

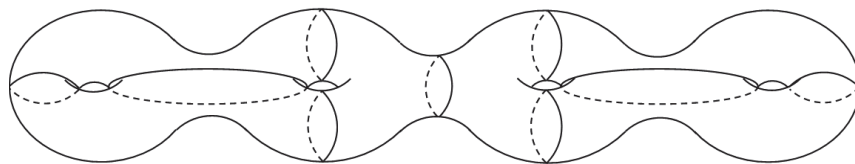


FIGURE 2.9 – Décomposition en pantalons.

Soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré sur S .

Définition 2.2.3. : Un twist de magnitude t est le fait de couper une surface le long d'une courbe simple fermée γ , puis de recoller les deux côtés de la surface coupée après avoir effectué une rotation de l'un par rapport à l'autre d'un angle associé à $|t|$, mesuré par rapport à la mesure transverse. La valeur du twist est positive ou négative suivant que la rotation se fait à gauche ou à droite par rapport à l'orientation de la surface.

Soient S une surface fermée, et $l_1, l_2, \dots, l_{3g-3}$ les mesures des bords de composantes (pantalons). Comme on a $3g - 3$ courbes simples fermées qui décomposent S en pantalons alors, on a aussi $3g - 3$ twists (angles).

Ceci est une indication du fait que $\mathcal{MF}(S)$ est localement homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} , pourvu qu'on puisse trouver une décomposition en pantalons qui marche pour chaque \mathcal{F} .

Définition 2.2.4. On dit qu'une courbe γ est quasi-transversale à \mathcal{F} si chaque composante connexe de $\gamma - \text{sing } \mathcal{F}$ est ou bien une feuille ou bien transversale à \mathcal{F} . De plus, on demande qu'au voisinage d'une singularité, un arc transversal n'est pas dans un secteur adjacent à un arc contenu dans une feuille et deux arcs transversaux sont dans deux secteurs distincts. Voir Figure 2.11.

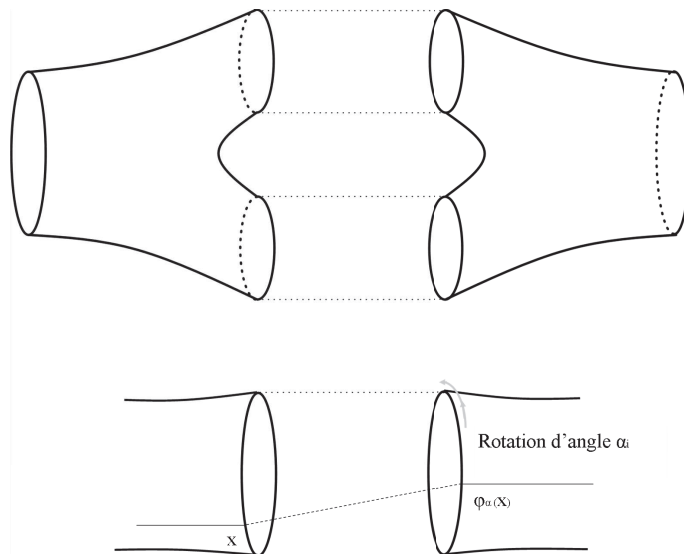


FIGURE 2.10 – Twist.

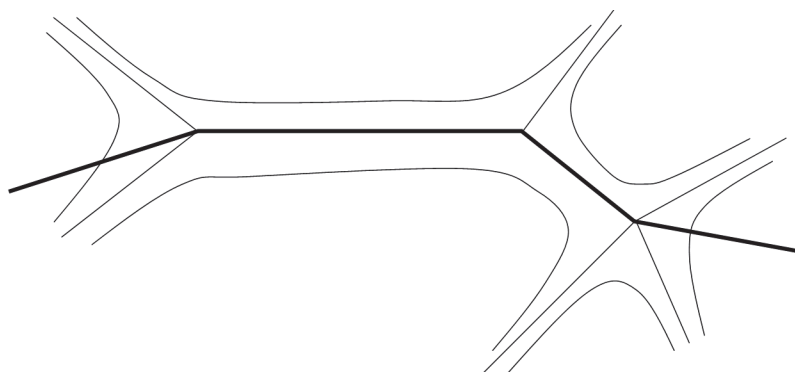


FIGURE 2.11 – Courbe quasi-transversale.

Proposition 2.2.3. *Si γ est une courbe quasi-transversale à \mathcal{F} , alors $\mu(\gamma) = i(\mathcal{F}, \mu; \sigma)$; où σ est la classe d'homotopie de γ . ([3] p. 79).*

Soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré sur une surface S , et soit γ une courbe transverse à \mathcal{F} . Si on fait le twist le long de γ , on aura un autre feuilletage, on le note \mathcal{F}_t .

Proposition 2.2.4. *L'application $t \mapsto [\mathcal{F}_t] \in \mathcal{MF}$ est injective, où t est le twist le long d'une courbe transverse à \mathcal{F} .*

La démonstration de cette proposition sera dans la section 2.3

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3g-3})$ les coordonnées des twists de recollement des bords. $(l_1, l_2, \dots, l_{3g-3}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3g-3}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3} \times (\mathbb{R})^{3g-3}$ classe les classes d'équivalence de feuilletages mesurés sur S qui admettent des représentants transverses aux courbes de la décomposition en pantalons

On a en fait $\mathcal{MF}(S) \approx \mathbb{R}^{6g-6}$. ([3]).

Remarque : Si on permet au feuilletage \mathcal{F} d'admettre de singularités qui ne sont pas des selles, alors la dimension de $\mathcal{MF}(S)$ est infinie. Par exemple, \mathcal{F} est un feuilletage mesuré sur pantalon et admet un centre comme singularité. Voir Figure 2.12.

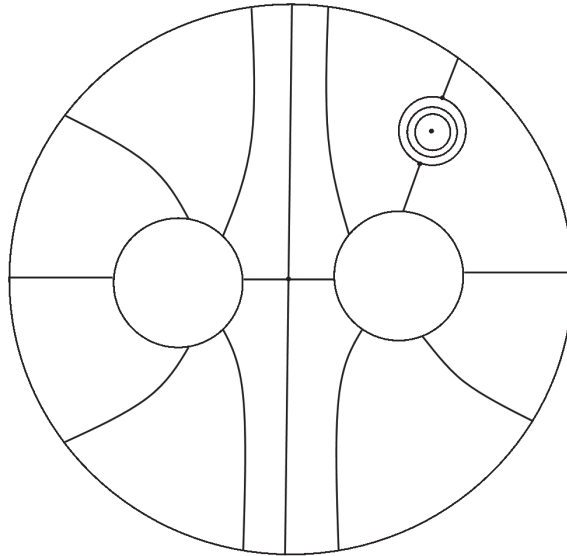


FIGURE 2.12 – Feuilletage mesuré avec un centre comme singularité.

2.3 Mesure invariante sur un réseau ferroviaire

Une mesure μ sur un réseau ferroviaire est la donnée pour chaque arête α de τ d'un nombre réel positif $\mu(\alpha)$. On dit que $\mu(\alpha)$ est le poids de α . La collection de ces nombres doit vérifier la condition de compatibilité suivante : en chaque aiguillage la somme des poids des arêtes qui aboutissent d'un même côté est la même que celle des arêtes qui aboutissent de l'autre. Dans la figure 2.13 il faut avoir $\mu(a) = \mu(b) + \mu(c)$.

(τ, μ) désigne un réseau ferroviaire τ muni de la mesure μ .

Un réseau ferroviaire pondéré (τ, μ) permet de définir un feuilletage mesuré de la manière suivant :

On remplace chaque arête α de poids non nul par un rectangle feuilleté "horizontalement". Voir Figure 2.13. La longueur des côtés verticaux du rectangle associé à l'arête α étant la mesure de α ; $\mu(\alpha)$. Ces rectangles se recollent bien le long de leurs côtés verticaux par des homéomorphismes qui préservent la mesure pour fournir un feuilletage *partiel* de S grâce à la condition de compatibilité ; $\mu(a) = \mu(b) + \mu(c)$.

Le couple (τ, μ) définit une classe de Whitehead.

Si τ est un réseau ferroviaire sur S . Chaque composante connexe de $S - \tau$ possède un bord dans S dont l'espace tangent a un nombre fini de discontinuités. Voir Figure 2.14.

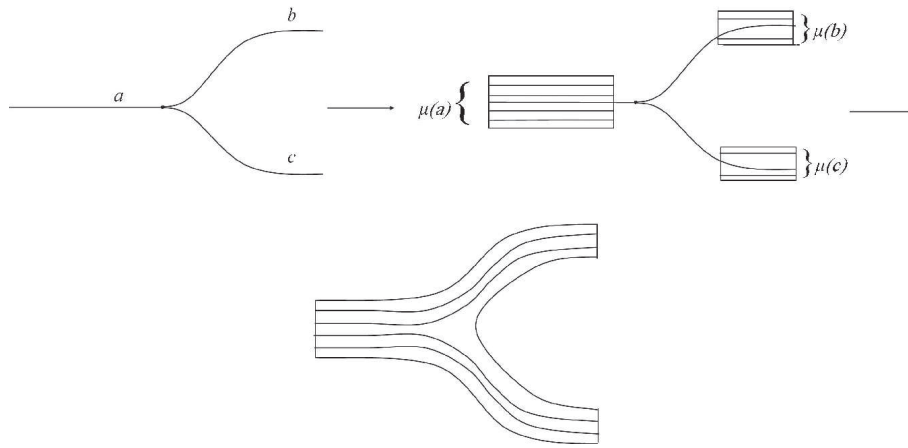


FIGURE 2.13 – Feuilletage partiel défini par un réseau ferroviaire.

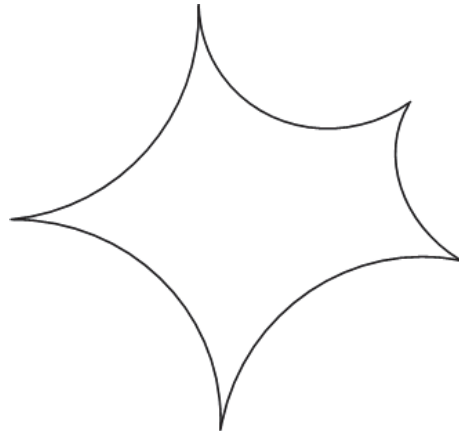


FIGURE 2.14 – Composante connexe de $S - \tau$.

Si une de ces composantes est homéomorphe à un disque, on pourra dire que c'est un n -gone ; où n est le nombre de points d'aiguillages sur le bord du disque c'est-à-dire de points de discontinuité de l'espace tangent. ([15] p. 7).

Définition 2.3.1. *On dit qu'un réseau ferroviaire τ dans S est admissible si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

- Les composantes de $S - \tau$ ne sont ni disques lisses ni monogones ni bigones ni anneaux lisses.
- On peut définir une mesure sur τ dont chaque arête de τ est de mesure non nulle.

Si S est à bord b , et τ est un réseau ferroviaire dans S , on dit que τ est admissible s'il vérifie les conditions suivantes :

- Les composantes de $S - \tau$ ne sont ni disques lisses ni monogones ni bigone ni anneau lisse.
- Le réseau ferroviaire τ ne borde avec b ni tente ni dôme ni rectangle. Voir Figure 2.15.
- On peut définir une mesure sur τ dont chaque arête de τ est de mesure non nulle.

Autrement dit, un réseau ferroviaire est admissible dans une surface à bord s'il le réseau ferroviaire double τ^d est admissible dans la surface double S^d .

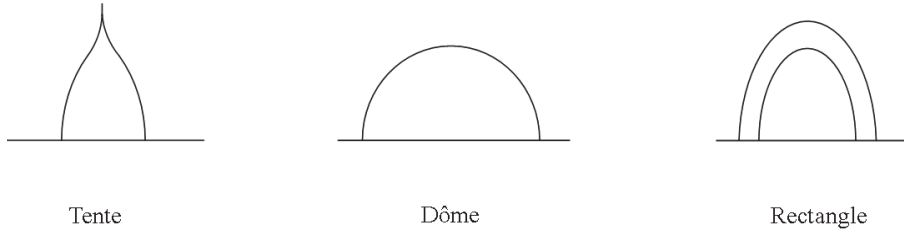


FIGURE 2.15 – Composante connexe de $S - \tau$.

Des composante de $S - \tau$ qui sont des tentes, des dômes et des rectangles seront dans S^d des bigones, des disques lisses et des anneaux lisses. Voir Figure2.16. C'est pour cela qu'on les interdit.

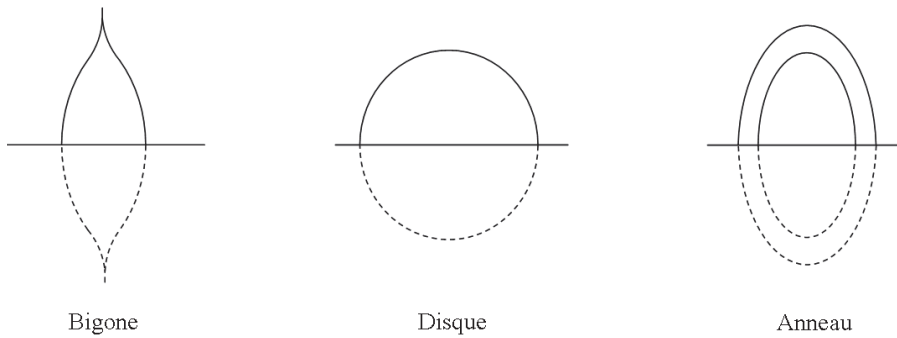


FIGURE 2.16 – Composante connexe de $S^d - \tau^d$.

Porter un feuilletage mesuré total sur S .

Soit \mathcal{F}_1 le feuilletage partiel porté par un réseau ferroviaire τ . En écrasant alors chaque composante du complémentaire de \mathcal{F}_1 sur un squelette de cette composante, on obtient un feuilletage mesuré totale de S avec singularités permises (selles à ≥ 3 séparatrices) dont la classe d'équivalence est bien définie à partir de (τ, μ) . Voir Figure 2.17. Si une composante de $S - \tau$ est de genre quelconque, on modifie l'arête qui borde cette composante autour de genre. Voir Figure 2.18

L'absence de monogone et de disque et de dôme lisse implique qu'on peut supposer que les singularités du feuilletage porté par (τ, μ) sont de type permis (des selles). Si on avait un disque lisse, on aurait un centre comme singularité. ([15] p. 9).

L'absence de bigone d'anneau lisse de rectangle et de tente implique que si deux feuilletages mesurés portés par τ sont équivalents, les mesures correspondantes sont les mêmes.

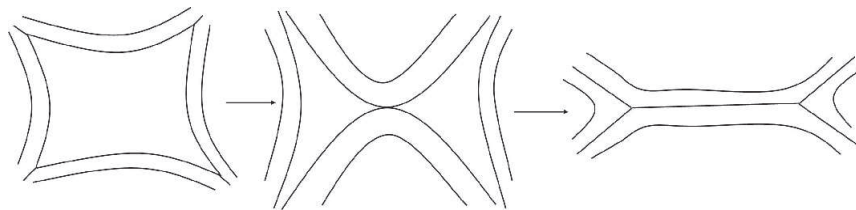


FIGURE 2.17 – Écraser les composants de complémentaire de $S - \tau$.

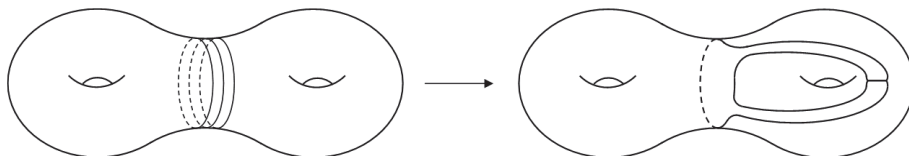


FIGURE 2.18 – Écraser les composantes de $S - \tau$ de genre.

Proposition 2.3.1. *Chaque feuilletage mesuré du pantalon est porté par un des réseaux ferroviaires présentés dans la figure 2.19.*

Les feuilletage A, C, D dans la figure 2.8 sont portés par le réseau ferroviaire a dans la figure 2.19, et le feuilletage B dans la figure 2.8 est porté par le réseau ferroviaire b dans la figure 2.19.

Par exemple, dans b dans la figure 2.19, si les poids b_1, b_2, b_4 sont strictement positives on aura le feuilletage B dans la figure 2.8.

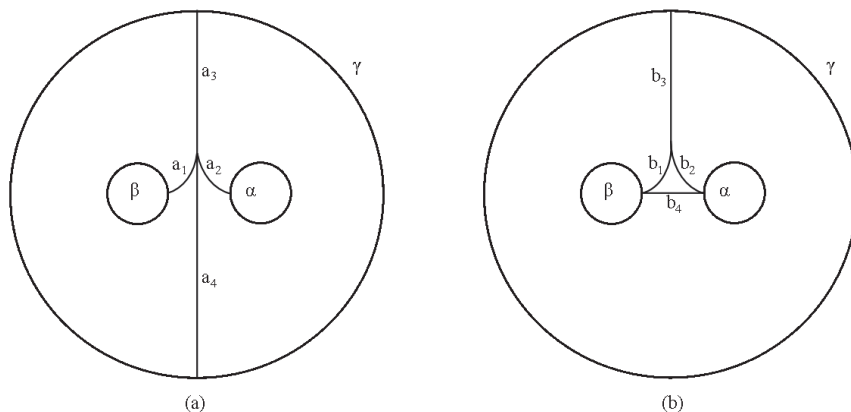


FIGURE 2.19 – Réseaux ferroviaires sur pantalon.

2.4 Le sous-espace des feuilletages mesurés $\mathcal{MF}(\tau)$

Soit τ un réseau ferroviaire admissible dans S . Dans cette section on va donner des paramètres pour un sous-espace $\mathcal{MF}(\tau)$ de l'espace $\mathcal{MF}(S)$.

Soient a_1, a_2, \dots, a_N les arêtes de τ , et \mathbb{R}_+^N le cône des vecteurs à coordonnées positives dans l'espace vectoriel réel à N dimensions. On pose $\mathcal{MF}(\tau)$ le sous-cône de \mathbb{R}_+^N défini par les équations de compatibilité sur les aiguillages de τ .

Chaque N -uplet de $\mathcal{MF}(\tau)$ associe une classe de feuilletage mesuré, et on a $\mathcal{MF}(\tau) \subset \mathcal{MF}(S)$.

Pour un τ donné, l'ensemble des mesures μ sur τ est un espace de paramètres locaux pour des feuilletages mesurés. C'est un cône dans un espace vectoriel qui paramètre un sous-ensemble de \mathcal{MF} .

Définition 2.4.1. *Soit τ un réseau ferroviaire dans S . On dit que τ est maximal si l'espace $\mathcal{MF}(\tau)$ est d'intérieur non vide dans $\mathcal{MF}(S)$.*

Si S est une surface à bord, un réseau ferroviaire τ est maximal si le réseau ferroviaire double τ^d est maximal dans la surface double S^d .

Si τ est réseau ferroviaire maximal et admissible dans une surface fermée, alors $\dim \mathcal{MF}(\tau) = 6g - 6$ et chaque composante connexe de $S - \tau$ est un triangle. ([15] p. 21).

Théorème 2.4.1. *Soit (τ, μ) un réseau ferroviaire admissible, et soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les poids des arêtes de τ , alors l'application $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \rightarrow \mathcal{MF}$ est injective. ([15] p. 14).*

On démontre maintenant la proposition 2.2.4.

Démonstration. Soient (\mathcal{F}, μ) un feuilletage mesuré sur S , et D une décomposition de S en pantalons $P_1, P_2, \dots, P_{2g-2}$ par les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{3g-3}$ où $i((\mathcal{F}, \mu), \gamma) \neq 0$. Alors \mathcal{F} est transverse au bord de chaque pantalon. Chaque feuilletage $\mathcal{F}|_{P_i}$ de pantalon P_i ; $i = 1, 2, \dots, 2g - 2$ est porté par un des réseaux ferroviaires admissibles et coupant chaque composantes. La Figure 2.20 représente des exemples de réseaux ferroviaires admissibles sur pantalon. (Ces réseaux ferroviaires sont les seuls réseaux ferroviaires admissibles et maximaux sur les pantalon ([16] p. 137-138)).

Soit \mathcal{F}_t le feuilletage obtenu après avoir fait un twist t le long d'une γ_i . Donc γ_i sera contenue dans le réseau ferroviaire admissible qui porte \mathcal{F}_t . Voir Figure 2.21.

Les poids des arêtes aboutissant sur γ_i resteront les même $i((\mathcal{F}, \mu), \gamma_i)$. (Il existe deux arêtes et deux aiguillages sur γ_i et les poids de ces arêtes ne dépendent que le twist t . Donc d'après le théorème 2.4.1 l'application $t \rightarrow [\mathcal{F}_t] \in \mathcal{MF}$ est injective. \square

2.5 Échanges d'intervalles linéaires

Définition 2.5.1. *Un échange de n intervalles linéaire¹ est une bijection $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ telle qu'il existe deux subdivisions $\{0 = a_0, a_1, \dots, a_n = 1\}$, $\{0 = b_0, b_1, \dots, b_n = 1\}$*

1. Dans certains articles, on utilise le mot linéaire, et on l'utilise ici aussi même si ce mot n'est pas correct, car on a une structure de translation $x + a$ et non pas une structure linéaire $x \mapsto ax$.

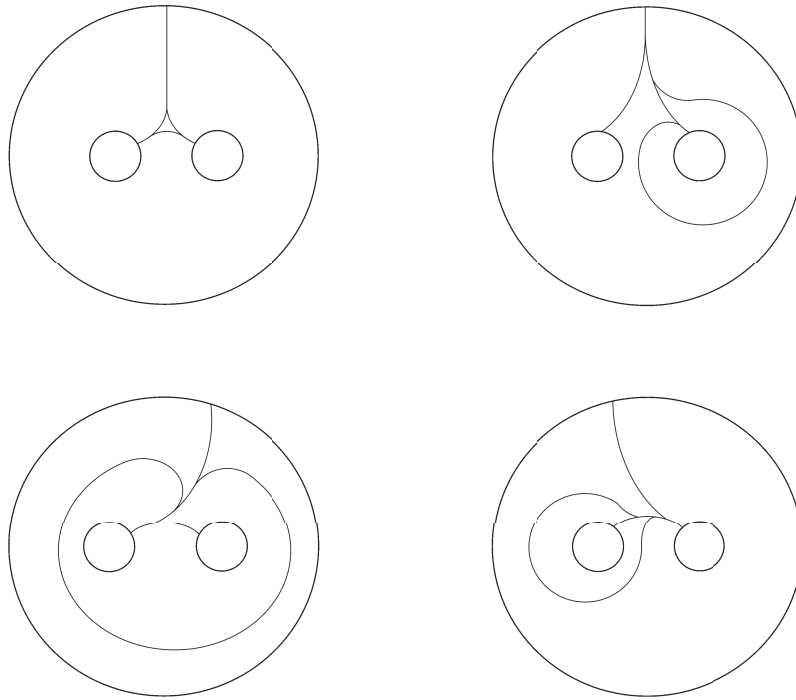


FIGURE 2.20 – Réseaux ferroviaires admissibles sur pantalon.

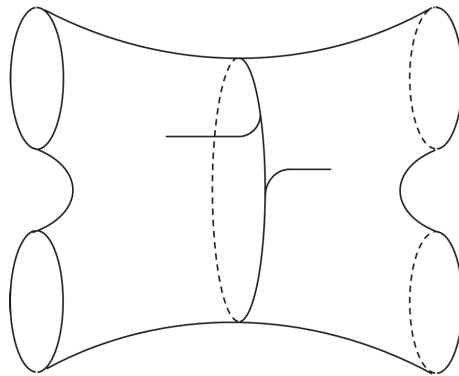


FIGURE 2.21 – Réseau ferroviaire admissible après avoir fait un twist.

de $[0, 1[$ et τ une permutation de $\{0, 1, \dots, n-1\}$ dite associée à f , telle que la restriction de f sur chaque sous-intervalle $I_i \stackrel{\text{def}}{=} [a_{i-1}, a_i[$ est une translation $x \mapsto x + \delta_i$ et a pour image $[b_{\tau(i-1)}, b_{\tau(i-1)+1}[$.

On a $|a_i - a_{i-1}| = |b_{\tau(i-1)+1} - b_{\tau(i-1)}|$.

Le vecteur $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ est appelé le vecteur de translation.

Exemple 2.5.1. L'application $f_{a,b} : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$; $0 < a < b < 1$

$$f_{a,b} = \begin{cases} x + 1 - a & ; & 0 \leq x < a \\ x - a - b + 1 & ; & a \leq x < b \\ x - b & ; & b \leq x < 1 \end{cases}$$

est un échange de 3 intervalles linéaire associée à $\tau \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Voir Figure 2.22.

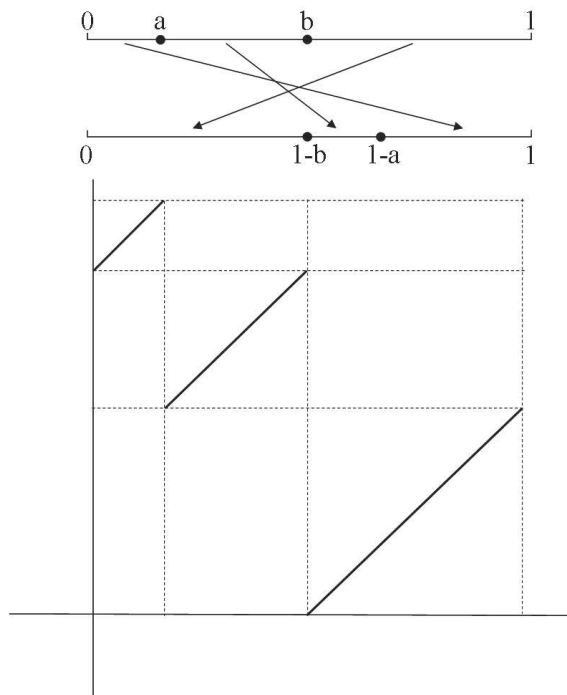


FIGURE 2.22 – Échange de 3 intervalles linéaire.

2.5.1 Construction d'une surface à bord à partir d'un échange d'intervalle sur $[0, 1[$

Soit $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ un échange d'intervalles linéaire, et soit $S_0 = [0, 1[\times [0, 1[$ un rectangle ouvert. On recolle les deux composantes du bord $[0, 1[\times \{0\}$ et $[0, 1[\times \{1\}$ de S_0 par les bandes $B_i = [a_{i-1}, a_i[\times [0, 1[$ dont les côtés verticaux sont $[a_{i-1}, a_i[$ et $[f(a_{i-1}), f(a_i)[$. Voir Figure 2.23.

On obtient une surface orientable non-compacte. En ajoutant des courbes à cette surface (en prenant des bandes $[a_{i-1}, a_i] \times [0, 1[$ au lieu de $[a_{i-1}, a_i[\times [0, 1[$) on aura une surface orientée compacte à bord S_1 (le nombre de composantes de bord est fini). Soit α un squelette de la surface S_1 c'est un graphe dont les arêtes sont tangentes entre elles (Dans la Figure 2.23 α est le graphe gras). On peut considérer α comme un réseau ferroviaire sur S_1 , on dit que le réseaux ferroviaire α correspond à l'échange d'intervalles f . On définit une mesure sur ce réseau ferroviaire dont les poids correspondent aux longueurs des sous intervalles $[a_{i-1}, a_i[$. Alors on aura un feuilletage mesuré sur S_1 , et les singularités (si elles existent) sont des selles à trois séparatrices sur le bord.

Exemple 2.5.2. Soit $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ un échange de 1 intervalle linéaire ; la surface correspondent à cet échange d'intervalles est un anneau, et cet échange d'in-

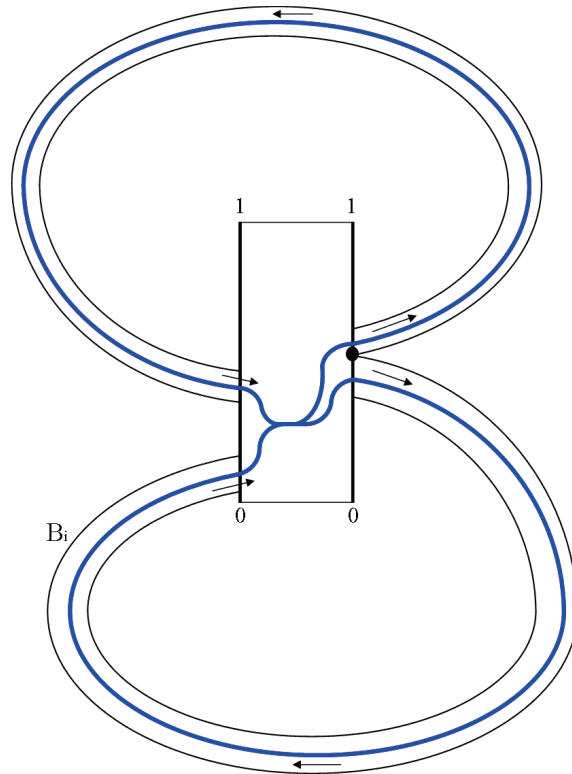


FIGURE 2.23 – Surface à bord correspondant à un échange d'intervalles.

tervalles définit un feuilletage mesuré sur l'anneau dont chaque feuille est une courbe simple fermée parallèle au bord. Voir Figure 2.24.

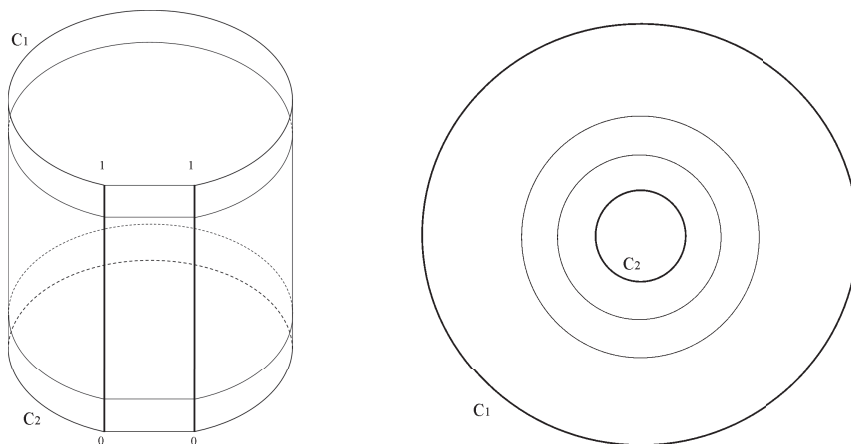


FIGURE 2.24 – Feuilletage sur l'anneau correspondant à un échange d'intervalles.

Exemple 2.5.3. Soit $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ un échange de 2 intervalles linéaire (la permutation associée à f est l'identité). La surface construite par cet échange d'intervalles est un pantalon et le feuilletage correspondant à f est un feuilletage mesuré

dont les singularités sont des selles à 3 séparatrices et ces singularités sont sur une composante de bord. Voir figure 2.25. Ce feuilletage est un feuilletage mesuré.

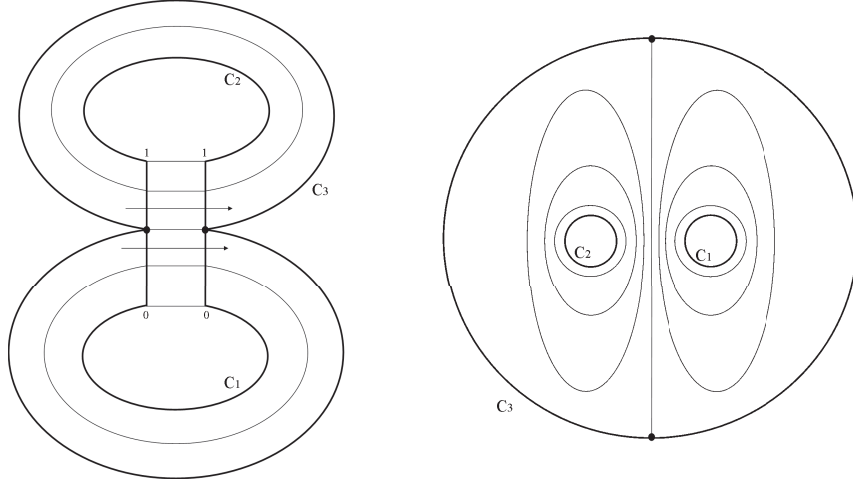


FIGURE 2.25 – Feuilletage mesuré sur le pantalon correspondant à un échange d'intervalles linéaire.

Soient $\pi : [0, 1[\rightarrow S^1$ une bijection continue et f un échange d'intervalles sur I . À l'aide de l'application π on peut définir f comme un échange d'intervalles sur S^1 tel que $\pi(0)$ est un point de discontinuité.

Remarque : On peut aussi définir les échanges d'intervalles sur S^1 ; on peut associer une permutation τ mais non unique (il n'y a pas d'origine fixe).

2.5.2 Construction d'une surface sans bord à partir d'un échange d'intervalle sur un cercle S^1

Soit $S_0 = S^1 \times [0, 1]$ un anneau. On recolle les deux composantes du bord $S^1 \times \{0\}$ et $S^1 \times \{1\}$ de S_0 par les bandes $B_i = [a_{i-1}, a_i] \times [0, 1]$ dont les côtés verticaux sont $[a_{i-1}, a_i]$ et $[f(a_{i-1}), f(a_i)]$. Voir Figure 2.26.

On feuillette les bandes B_i par des courbes horizontales joignant chaque point de $[a_{i-1}, a_i]$ avec son image par f dans $[f(a_{i-1}), f(a_i)]$. On définit une mesure invariante transverse sur les bandes B_i en prenant la mesure de Lebesgue sur les côtés verticaux de B_i . Ensuite on feuillette S_0 par des segments horizontaux transverses aux deux composantes du bord de S_1 . Voir Figure 2.28.

Les bandes B_i sont recollées sur S_0 par des applications qui préservent la mesure. On obtient donc une surface orientable compacte à bord S_1 feuilletée par un feuilletage \mathcal{F}_1 . Ce feuilletage est orienté avec des singularités, ces singularités sont en $(a_i, 1)$ et $(f(a_i), 0)$ et ce sont des selles à 3 séparatrices sur le bord (Voir les Figures 2.27 et 2.28). Chaque composante du bord est composée d'arcs simples et chaque arc joint une singularité de $S^1 \times 1$ avec une singularité de $S^1 \times 0$, donc chaque composante du bord contient un nombre pair de singularités.

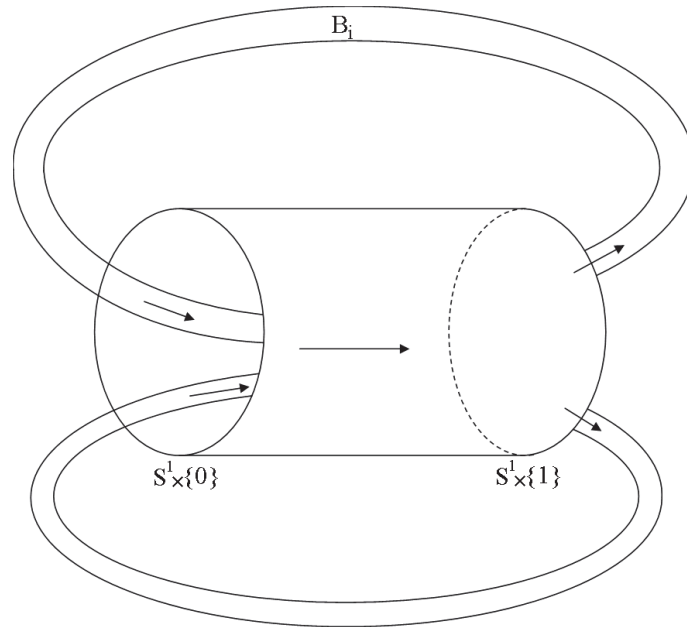


FIGURE 2.26 – Surface à bord correspondant à un échange d'intervalles.

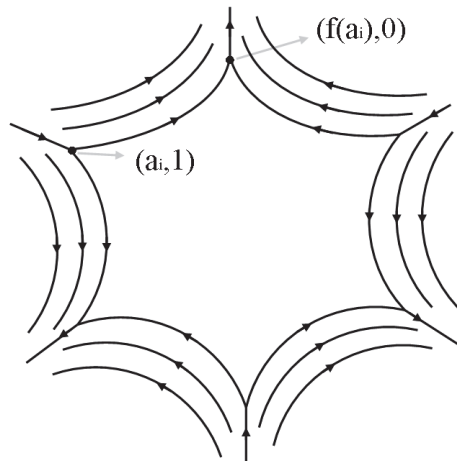


FIGURE 2.27 – Bord de S_1 .

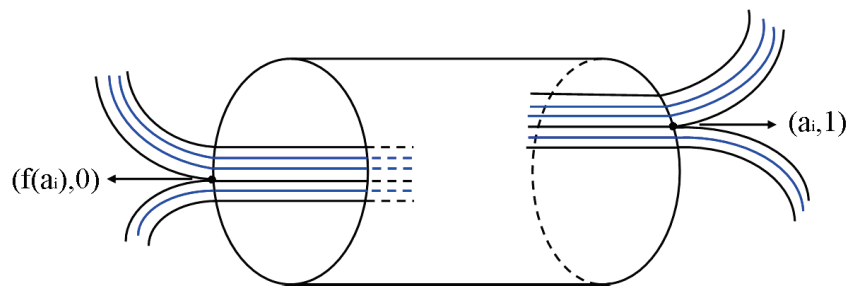


FIGURE 2.28 – Feuilletage de S_1 .

Une composante connexe du bord de S_1 est composée d'un nombre fini de segments sur les bords des bandes, elle est de la forme suivante (Voir Figure 2.29 dans cette figure, on a arrondi les points singuliers).

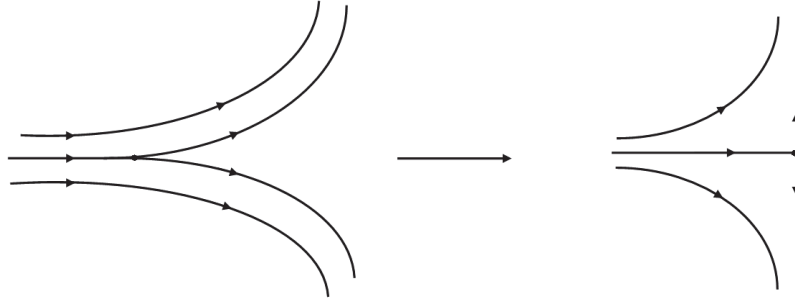


FIGURE 2.29 – Arrondir un point singulier.

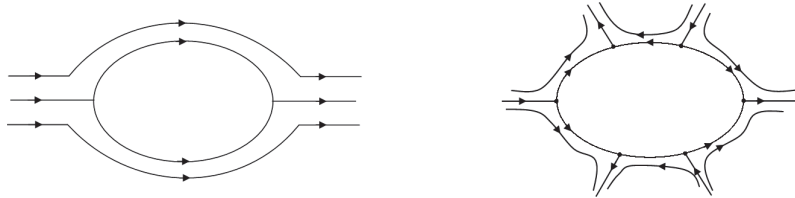


FIGURE 2.30 – Bord de S_1 .

On construit une surface S_g sans bord en faisant disparaître le bord de S_1 de la manière suivante :

Si la composante du bord ne contient que deux points singuliers, on la fait disparaître comme dans la Figure 2.31.

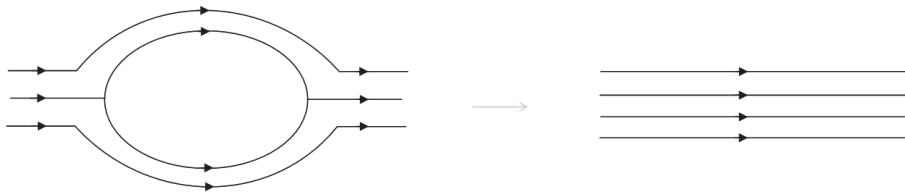


FIGURE 2.31 – Faire disparaître le bord à deux points singuliers.

Si la composante contient plus de deux points singuliers, voir Figure 2.32, on identifie un voisinage de deux séparatrices sortantes (ou rentrantes) consécutives, en créant une selle à 4 séparatrices, on diminue de 2 le nombre de points singuliers sur le bord et on continue comme avant.

Si une composante du bord contient k points singuliers, en faisant disparaître cette composante, on aura $\frac{k-2}{2}$ selles à 4 séparatrices.

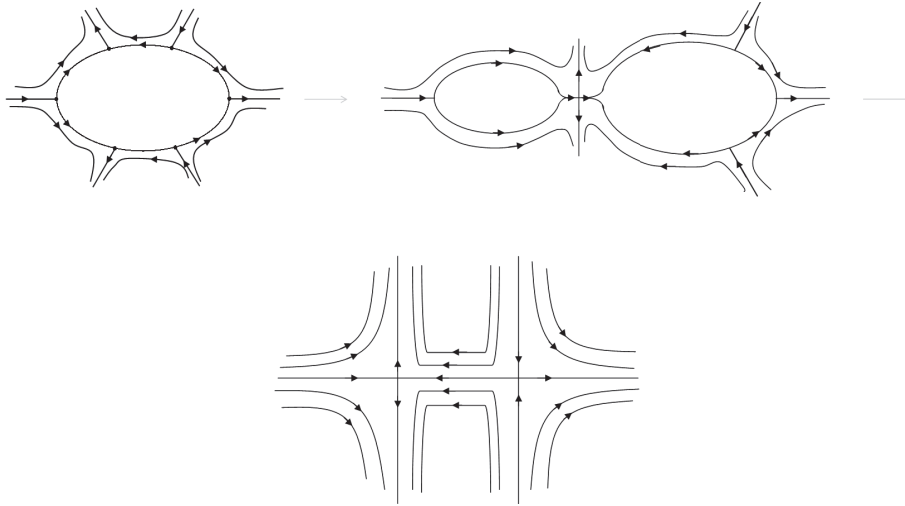


FIGURE 2.32 – Faire disparaître le bord à plusieurs points singuliers.

Théorème 2.5.1. *Le genre de la surface S_g est donné par la relation*

$$g = \sum_{k=1}^n \frac{k_i - 2}{4} + 1$$

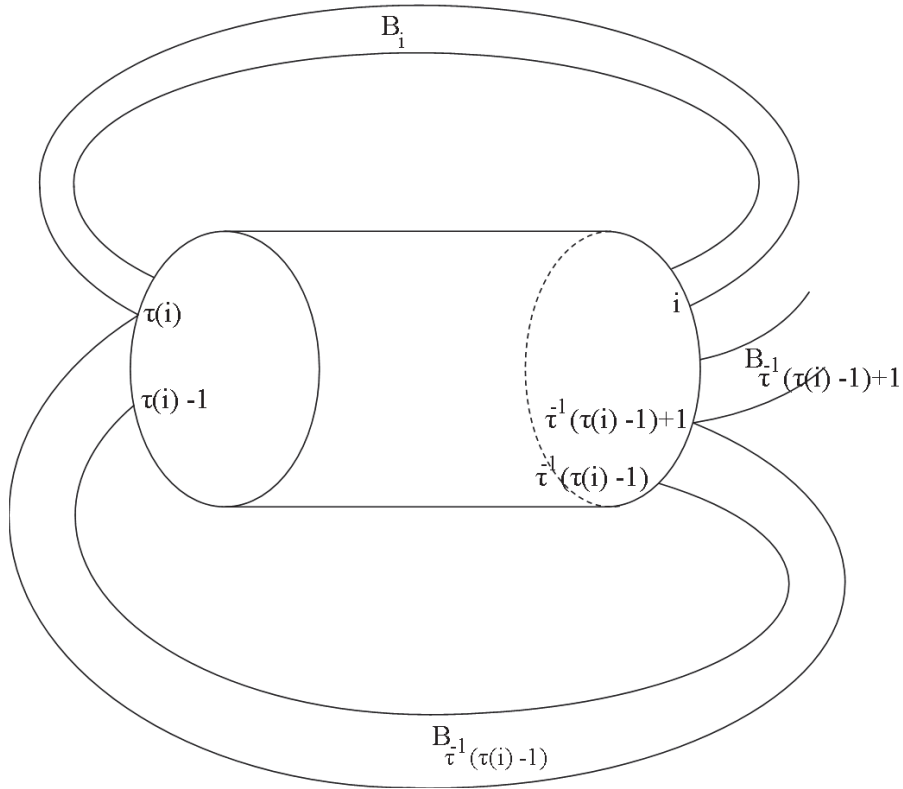
où k_i est le nombre de points singuliers de la composante du bord γ_i .

Démonstration. La caractéristique d'Euler de la surface S_g est $2 - 2g$. Par ailleurs, soient k_1, k_2, \dots, k_n les nombres de points singuliers des composantes du bord $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Pour chaque composante γ_i , on aura $\frac{k_i - 2}{2}$ selles à 4 séparatrices (chacune est d'indice -1). Comme la caractéristique d'Euler d'une surface est égale à la somme des indices de tous points singuliers, on a $2 - 2g = -\sum_{i=1}^n \frac{k_i - 2}{2}$ donc $g = \sum_{k=1}^n \frac{k_i - 2}{4} + 1$. \square

Proposition 2.5.1. *Soit f un échange de n intervalles de permutation associée τ , et soit C le cycle (permutation circulaire)² $i \rightarrow i + 1 \pmod{n}$. Posons $\sigma = C\tau^{-1}C^{-1}\tau$ et soit k est le nombre de cycles disjoints qui composent σ . Alors le genre de la surface construite par la construction 3.4.2 est $g = \frac{n-k}{2} + 1$. ([2] p. 15).*

Démonstration. Soit B_i la bande qui passe par les points a_{i-1}, a_i . On désigne le point a_{i-1} par i . On commence par la séparatrice sortante qui passe par i et on suit le bord de B_i . On arrive au point singulier à une séparatrice rentrante $f(a_{i-1})$ qui est désignée par $\tau(i)$. La bande adjacente est $B_{\tau^{-1}(\tau(i)-1)}$. En suivant le bord on arrive au point $a_{\tau^{-1}(\tau(i)-1)} = a_{\sigma(i)-1}$. Voir Figure 2.33. Une composante de bord correspond donc à un cycle composante de σ . Si un cycle composante est de longueur n_i , alors la composante de bord correspondant a $2n_i$ singularités à 3 séparatrices, donc il produit $n_i - 1$ selles à 4 séparatrices. Si on a k cycle de longueur n_i , alors le nombre de selles est $\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = \sum_{i=1}^k n_i - k = n - k$. Si g le genre de la surface construite alors cette surface a $2g - 2$ selles, donc $g = \frac{n-k}{2} + 1$. \square

2. Un cycle de longueur n est une permutation σ sur a_1, a_2, \dots, a_n tels que σ envoie a_1 sur a_2 puis a_2 sur a_3 etc, enfin a_n sur a_1 .


 FIGURE 2.33 – Cycle de composante de σ .

La surface S qui est construite à partir d'un échange d'intervalles f ne dépend que de la permutation associée τ . Mais le feuilletage \mathcal{F} dépend des longueurs des sous-intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i]$.

Un échange de n intervalles f sur S^1 peut se réaliser comme application de premier retour sur une courbe fermée. ([2] p. 11).

2.5.3 Construction d'un réseau ferroviaire à partir d'un échange d'intervalles sur un cercle S^1

Soit $f : S^1 \rightarrow S^1$ un échange d'intervalles, et soit S la surface construite par f par la construction 2.5.2. On va construire un réseau ferroviaire α dans S . On commence par construire un voisinage adapté V de α . Soit A un rectangle dans $S_0 = S^1 \times [0, 1]$ dont les cotés verticaux sont des segments du bord de S_0 , et soient B_i les bandes qui recollent les deux bords de S_0 . On feuillette A et B_i par des feuilles verticales. Voir Figure 2.34.

Soit α l'image du voisinage $V(\alpha)$ par la projection naturelle $V(\alpha) \rightarrow \alpha$. Ce réseau est unique à isotopie près.

Remarque : Chaque composante du bord de S_1 contient au moins deux singularités (aucune composante de bord n'est une feuille lisse) donc aucune composante de $S - \alpha$ est un disque lisse.

Soient f un échange de n intervalles, α le réseau ferroviaire correspondant à f , S_1 la

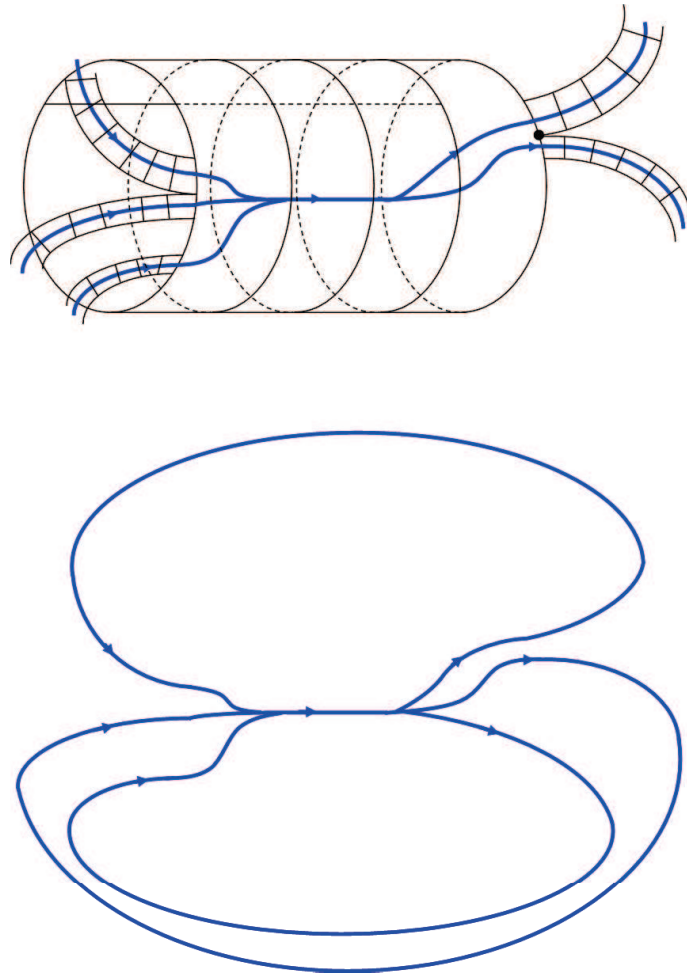


FIGURE 2.34 – Voisinage adapté d'un réseau ferroviaire construit sur S_1 .

surface avec bord correspondent à f , et S la surface sans bord qui est correspondent à f . Alors, si S_1 admet comme composante de bord à deux singularités, alors une composante de $S - \alpha$ est un bigone donc le réseau ferroviaire n'est pas admissible. Voir Figure 2.35 Le réseau ferroviaire α dans la surface S qui est construit après

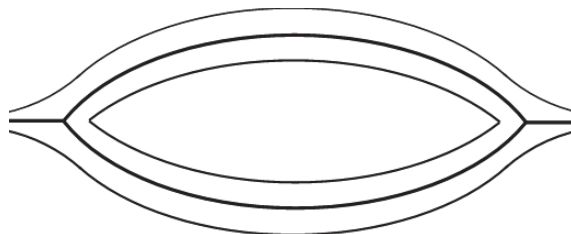


FIGURE 2.35 – Un bigone comme composante du bord.

écrasement de chaque composante de bord de S_1 est admissible dans S si la surface à bord S_1 ne contient pas une composante de bord à 2 singularités. Autrement dit, si aucune cycle de composante de σ n'est de longueur 1 (Voir proposition 2.5.1).

D'après le théorème 2.5.1, le nombre de singularités du feuilletage correspondent à un échange de n intervalles est $2n$, et le nombre de singularités sur chaque composante du bord est $2, 6, 10, \dots, 4k + 2$; $k \in \mathbb{N}$.

Définition 2.5.2. : *On dit qu'un échange d'intervalles f est admissible si pour la surface S_1 construite chaque composante de bord contient, au mois 6 singularités. Autrement dit, s'il n'existe aucune composante du bord à 2 singularités.*

Analysons quelques cas d'échange d'intervalles.

Pour $n = 2$

On a deux permutation $\tau_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, et pour les deux échanges de 2 intervalles, la surface S correspondent à f est un tore et l'échange de 2 intervalles est non admissible.

Pour $n = 3$

On a 6 singularités sur le bord de S_1 , alors

- Soit on a une composante de bord à 6 singularités, dans ce cas l'échange de 3 intervalles est admissible et la surface fermée S correspondent à f est de genre 2.
- Ou bien, on a trois composantes du bord, et chacune est à 2 singularités, dans ce cas l'échange d'intervalles n'est pas admissible et S est un tore.

Pour $n = 4$

L'échange de 4 intervalles n'est pas admissible, la surface S_1 a 8 singularités sur le bord, alors

- Soit une composante de bord à 6 singularités, et une composante de bord à 2 singularités, S est une surface de genre 2.
- Ou bien, on a quatre composantes de bord, et chacune est à 2 singularités, S est un tore.

Théorème 2.5.2. *Soit $f : S^1 \rightarrow S^1$ un échange de n intervalles linéaire admissible de permutation fixe τ , et soient $l_i = a_i - a_{i-1}$ les longueurs des sous-intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i[$, alors l'application $(l_1, l_2, \dots, l_n) \rightarrow \mathcal{MF}$ est injective.*

Démonstration. On a déjà vu dans le paragraphe 2.5.3 qu'un échange d'intervalles linéaire admissible définit un réseau ferroviaire admissible, et ce réseau ferroviaire ne dépend que la permutation associée de f .

On définit une mesure sur ce réseau ferroviaire en donnant un poids l_i sur l'arête γ_i qui correspond à B_i , où les l_i ne sont pas nuls.

On a alors une injection $f \mapsto (\tau, \mu)$; c'est l'application qui à un échange d'intervalles admissible donnée f définit un réseau ferroviaire pondéré admissible de manière unique.

Pour un réseau ferroviaire admissible fixe, on a une injection $(l_1, l_2, \dots, l_n) \rightarrow \mathcal{MF}$ où les α_i sont les poids des arêtes de réseau ferroviaire τ , théorème 2.4.1

Donc l'application $(l_1, l_2, \dots, l_n) \rightarrow \mathcal{MF}$ est injective; où l_1, l_2, \dots, l_n sont les longueurs des sous-intervalles $[a_i, a_{i-1}[$. \square

Dans le paragraphe suivant, on va construire une surface S à partir d'un échange d'intervalles $f : S^1 \rightarrow S^1$ dont le réseau ferroviaire est toujours admissible.

2.5.4 Construction

Dans ce paragraphe, on améliore la construction de la surface associée à un échange d'intervalles qu'on décrit au paragraphe 2.5.2 pour inclure le cas des échanges d'intervalles non admissibles.

Soit f un échange de n intervalles. On construit une surface feuilletée par un feuilletage avec singularités admises de la manière suivante :

Si une composante de bord a deux singularités, on ajoute une 2-anse avec deux épines. Voir Figure 2.43.



FIGURE 2.36 – Ajouter une 2-anse avec deux épines.

Si une composante de bord a plus de 2 singularités, on écrase cette composante comme avant.

La surface construite de la manière précédente est de genre $g = 1 + \sum_{i=1, k_i > 2}^n \frac{k_i - 2}{4} + \alpha$ où k_i est le nombre de singularités d'une composante de bord, α est le nombre de composantes de bord de S_1 qui contiennent deux singularités. La caractéristique d'Euler de cette surface est donnée par la relation $\mathcal{X}(S) = \sum_{i=1, k_i > 2}^n \frac{2 - k_i}{2} - 2\alpha$.

Théorème 2.5.3. *Soit f un échange de n intervalles linéaire de permutation fixe τ , soit S la surface construite par la construction 2.5.4, et soient $l_i = a_i - a_{i-1}$ les longueurs des sous-intervalles $I_i =]a_{i-1}, a_i[$. Alors l'application $(l_1, l_2, \dots, l_n) \longrightarrow \mathcal{MF}(S)$ est injective.*

Démonstration. La démonstration est la même que celle du théorème 2.5.2. □

2.5.5 Associer un échange d'intervalles linéaire orienté à un feuilletage mesuré

Dans ce paragraphe on va associer un échange d'intervalles linéaire orienté³ à un feuilletage mesuré sur une surface fermée.

Soient S une surface compacte orientée fermée, \mathcal{F} un feuilletage mesuré sur S et soit γ une courbe simple fermée (ou bien un intervalle) qui coupe toutes les feuilles de \mathcal{F} .

3. On utilise le mot orienté parce que les applications qui échanent les intervalles sont croissantes. Le feuilletage associé est alors orienté. Dans le paragraphe suivant on va voir que un échange d'intervalles peut être associé à un feuilletage non-orientable.

Un *paquet de feuilles* est une sous-surface (rectangle) de S feuilletée par des segments de feuilles régulières de \mathcal{F} et bordée par deux feuilles singulières et deux arcs disjoints de γ . Voir Figure 2.37.

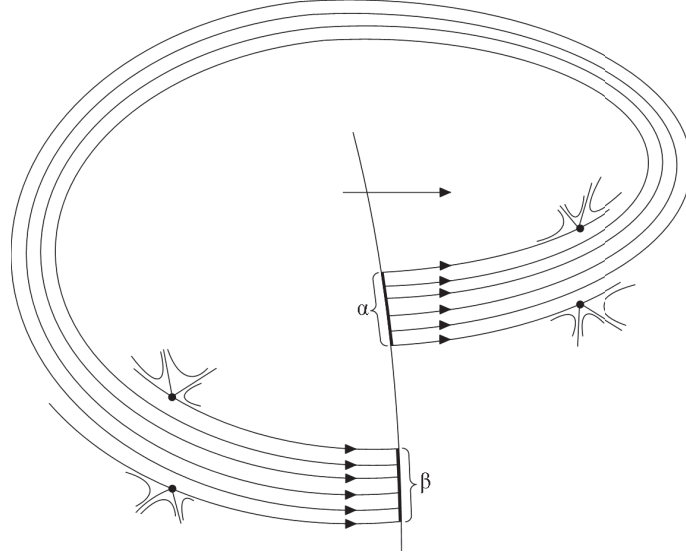


FIGURE 2.37 – Un paquet.

On peut diviser le cercle γ en des sous-intervalles disjoints. On fixe un point fixe 0 entre deux paquets, on aura une subdivision $a_0 = 0, a_1, a_2, \dots, a_n$ telle que le sous-intervalle $[a_{i-1}, a_i[$ borde un paquet. On munit γ d'une orientation transversale. Comme on a un nombre fini de singularités de \mathcal{F} , on a un nombre fini de paquets. Comme \mathcal{F} est un feuilletage mesuré les deux côtés verticaux d'un paquet sont de même mesure.

On associe chaque paquet deux paramètres :

- $l_i = a_i - a_{i-1}$
- Une permutation τ telle que les deux sous-intervalles $[a_{i-1}, a_i[$, $[a_{\tau(i-1)}, a_{\tau(i-1)+1}[$ bordent le même paquet.

Remarque : Si on prend l'orientation inverse sur γ on aura un autre échange d'intervalles f_1 . Cet échange d'intervalles f_1 est l'inverse de l'échange d'intervalles f .

2.6 Échange d'intervalles généralisé

Soit f un échange de n intervalles linéaire de permutation τ . On associe à f les paramètres :

- (l_1, l_2, \dots, l_n) où l_i est le longueur de sous-intervalle $[a_{i-1}, a_i[$.
- $(\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n))$.
- $\epsilon = (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ est un vecteur de signes, où $+1$ signifie que f envoie $[a_{i-1}, a_i[$

vers $[b_{\tau(i-1)}, b_{\tau(i-1)+1}[$ dans le même sens c'est-à-dire que f est croissante dans $[a_{i-1}, a_i[$, et -1 signifie que f envoie $[a_{i-1}, a_i[$ vers $[b_{\tau(i-1)}, b_{\tau(i-1)+1}[$ en sens opposé c'est-à-dire que f est décroissante dans $[a_{i-1}, a_i[$.

Exemple 2.6.1. L'application $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$

$$f = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & ; & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ -x + \frac{5}{4} & ; & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & ; & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

est un échange de 3 intervalles linéaire associée à $\tau \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, et de vecteur de signes $(+1, -1, +1)$. Voir Figure 2.38.

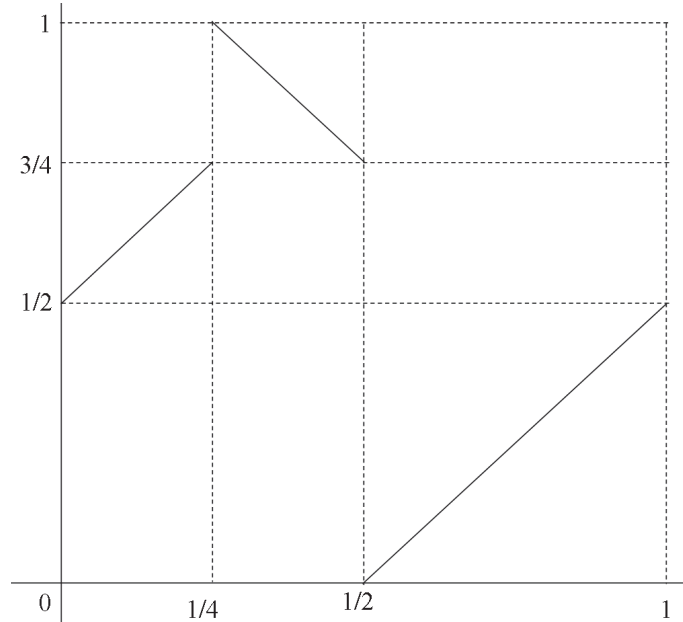


FIGURE 2.38 – Échange de 3 intervalles linéaire de vecteur de signe $(+1, -1, +1)$.

2.7 Construction un feuilletage non-orientable à partir d'un échange d'intervalles

Soit $f : S^1 \rightarrow S^1$ un échange de n intervalles de permutation τ et de vecteur de signe ϵ . Soit $S_0 = S^1 \times [0, 1]$ un anneau. On fait disparaître les composantes de bord de S_0 en recollant chaque intervalle $[a_{i-1}, a_i[$ avec son image par f par une bande B_i . On feuillette les bandes B_i par des courbe joignant chaque point avec son image par f , et S_0 par des segments horizontaux transverses aux deux composantes de bord

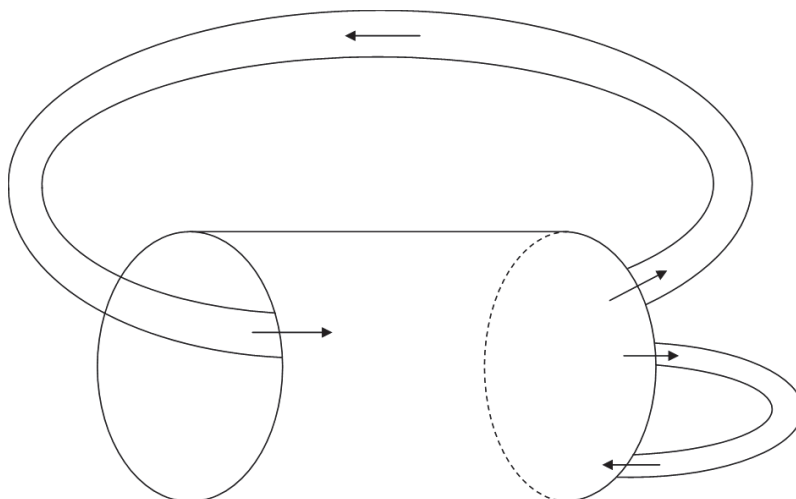


FIGURE 2.39 – Surface à bord correspondent à un échange d’intervalles avec vecteur de signe.

de S^1 (par l’identité). Voir Figure 2.39.

On obtient alors une surface à bord S_1 feuilletée par un feuilletage mesuré non-orientable \mathcal{F}_1 dont les singularités sont des selles à trois séparatrices sur le bord. Chaque composante du bord est un cycle de feuilles et peut avoir un nombre pair ou impair de singularités.

On construit une surface S sans bord en faisant disparaître le bord de S_1 : Si la composante de bord ne contient qu’un point singulier, on la fait disparaître comme dans la Figure 2.40. on aura une épine comme singularité de \mathcal{F} dans S .



FIGURE 2.40 – Faire disparaître une composantes de bord à une singularité.

Si la composante de bord contient k points singuliers, on la fait disparaître comme dans la Figure 2.41. On aura une selle à k séparatrices comme singularité de \mathcal{F} dans S .

On aura une surface sans bord feuilletée par un feuilletage mesuré non-orientable (le feuilletage sera orientable si le vecteur de signes n’admet que des signes positifs +1) et les singularités sont des épines et selles à 3 séparatrices ou plus. Si la surface S_1 a n composantes de bord γ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Le genre de la surface S

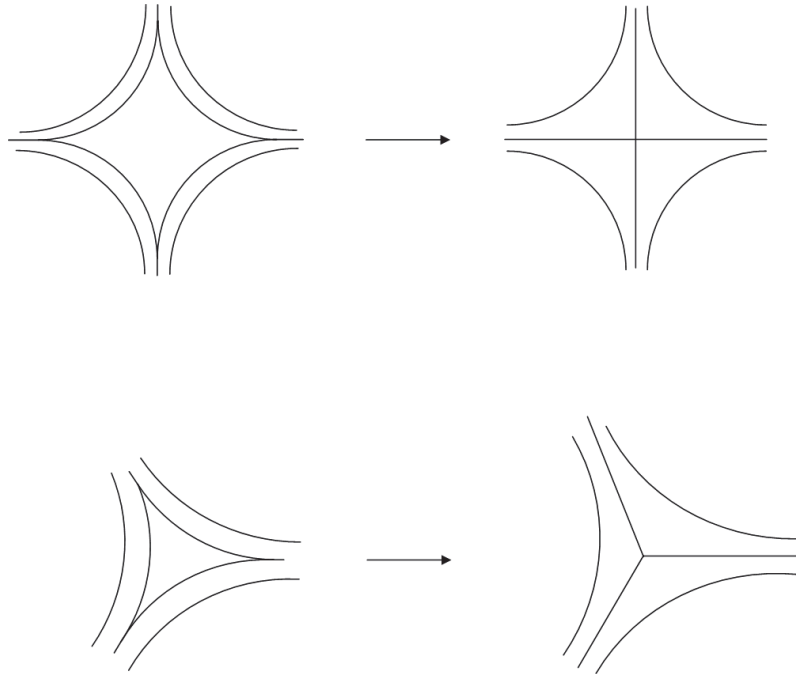


FIGURE 2.41 – Faire disparaître les composantes de bord à ≥ 3 séparatrices.

est donné par la relation $g = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i - 2}{4}$ où k_i est le nombre de points singuliers de la composante du bord γ_i .

La caractéristique d'Euler de S est donnée par la relation $\mathcal{X}(S) = 2 - 2(1 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i - 2}{4}) = \sum_{i=1}^n \frac{2 - k_i}{2}$.

Pour éviter d'avoir une épine comme singularité (qui n'est pas une singularité admise), on utilise la construction suivante :

2.7.1 Construction

Si une composante de bord a une singularité, on ajoute une 2-anse avec une épine. Voir Figure 2.42.



FIGURE 2.42 – Ajouter une 2-anse avec une épine.

Si une composante de bord a deux singularités, on ajoute une 2-anse avec deux épines. Voir Figure 2.43.



FIGURE 2.43 – Ajouter une 2-anse avec deux épines.

Si une composante de bord a trois singularités ou plus, on écrase cette composante comme dans la Figure 2.41.

2.7.2 $\mathcal{MF}(f)$

Soit f un échange de n intervalles linéaire de permutation fixe τ , soit S la surface construite par la construction 2.5.4. On définit un sous-espace $\mathcal{MF}(f)$ de l'espace de classe d'équivalence des feuilletages mesurés sur S . Cette sous surface est l'espace des feuilletages mesurés portés par le réseaux ferroviaire τ^f qu'on construit à partir de cet échange d'intervalle f .

Le réseau ferroviaire τ^f a $n+1$ arêtes et une aiguillage, donc $\mathcal{MF}(f) = \mathcal{MF}(\tau^f) = n$.

Proposition 2.7.1. *Soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré sur une surface compacte orientée fermée S . Alors il existe une courbe simple fermée γ qui coupe toutes les feuilles de \mathcal{F} .*

Démonstration. Soit T est la réunion des liaisons de feuilletage \mathcal{F} , alors $S - T$ est un nombre fini de composante et chaque composante est :

- Soit un anneau feuilleté par un feuilletage mesuré dont chaque feuille est une courbe simple fermée. Voir Figure 2.44.
- Ou bien, une sous-surface feuilletée par un feuilletage mesuré dont chaque feuille est dense dans cette sous-surface Voir Figure 2.45.

Pour chaque anneau A qui est une composante de $S - T$ il existe un arc γ qui coupe toutes les feuilles de $\mathcal{F}|_A$.

Pour chaque sous-espace S_1 qui est une composante de $S - T$, chaque arc transversal σ à $\mathcal{F}|_{S_1}$ coupe toutes les feuilles de $\mathcal{F}|_{S_1}$ (parce que chaque feuille est dense dans S_1).

En reliant de tels segments entre eux, on construit facilement une courbe simple vérifiant les conditions demandées. \square

Grâce au paragraphe 2.5.5 et au théorème 2.7.1 on a :
Chaque feuilletage mesuré sur une surface fermée correspond à un échange d'intervalles.

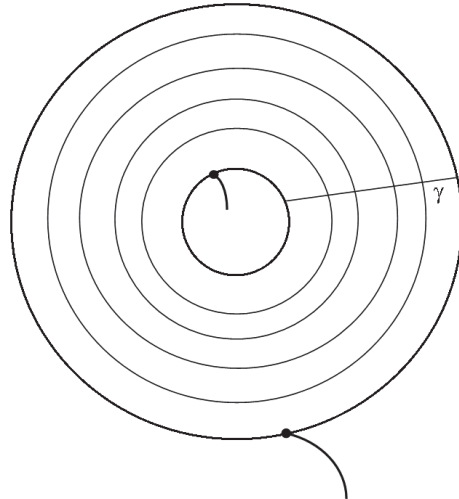


FIGURE 2.44 – Anneau ouvert feuilleté par un feuilletage dont chaque feuille est une courbe simple fermée.

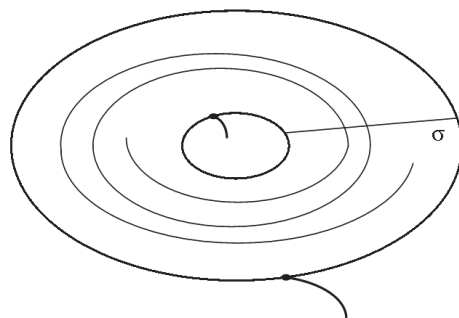


FIGURE 2.45 – Sous espace ouverte feuilletée par un feuilletage dont chaque feuille est dense.

2.7. Construire un feuilletage

Feuilletages transversalement affines

Les feuilletages transversalement affines des surfaces sont une généralisation des feuilletages mesurés des surfaces. Un feuilletage transversalement affine est un feuilletage muni d'une structure affine transverse. Nous commençons ce chapitre en rappelant quelques notations sur les feuilletages transversalement affines. Ensuite nous définissons les feuilletages transversalement affines de manières différentes, et nous classifions les feuilletages transversalement affines du pantalon.

3.1 Rappels sur les Feuilletages transversalement affines

Dans ce chapitre, \mathcal{F} est un feuilletage sur S dont les singularités sont des selles généralisées.

Définition 3.1.1. *Un feuilletage transversalement affine est un feuilletage, muni sur chaque arc transverse d'une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue qui est définie à une constante multiplicative près, et telle que les applications d'holonomie locales (les applications obtenues en déplaçant l'arc de telle sorte que chaque point reste sur la même feuille) préservent ces mesures à constante près.*

En d'autres termes, si α, β sont deux arcs transversaux au feuilletage et homotopes par une homotopie h_t qui préserve les points sur les feuilles alors :

$$h_t^* \{\mu_\alpha\} = \{\mu_\beta\}$$

où :

μ_α est une mesure de Lebesgue sur α .

$\{\mu_\beta\}$ est l'ensemble des mesures de la forme $\lambda\mu_\beta$, avec $\lambda > 0$.

Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement affine avec singularités admises, et soit α un arc transversal à \mathcal{F} et coupant une séparatrice. Voir Figure 3.1).

Comme \mathcal{F} est transversalement affine, on a une classe de mesures sur α , où deux mesures dans cette classe sont multiples l'une de l'autre par une constante. Et sur α_1, α_2 on a aussi des classes de mesures définies modulo multiplication. Les classes de mesures sur α_1 et α_2 sont induites par la classe de mesure de α .

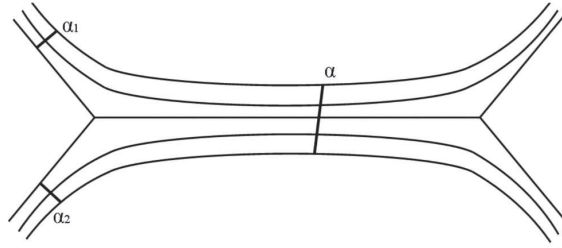


FIGURE 3.1 – Feuilletage transversalement affine avec singularités admises.

Définition 3.1.2. *Relation d'équivalence sur l'ensemble des feuilletages transversalement affines :*

- Isotopie qui préserve la classe de mesure.
- Opération de Whitehead qui préservent aussi la classe de mesure.

On note $\mathcal{AF}(S)$ l'espace des classes d'équivalence des feuilletages transversalement affines sur la surface S .

On va voir qu'on peut définir un feuilletage transversalement affine de plusieurs manières :

- 1- Par une application de premier retour affine sur un segment dans la surface.
- 2- Par un réseau ferroviaire (mesure brisée).
- 3- Par un échange d'intervalles affine.
- 4- Par un feuilletage mesuré sur le revêtement universel S et un homomorphisme $\gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, où Γ est le groupe des automorphismes du revêtement.

3.2 Mesure brisée

Définition 3.2.1. *Un réseau ferroviaire est dit orienté (orienté transversalement) s'il est équipé par une orientation (orientation transversale) sur chaque arête telle que les orientations sont cohérentes aux aiguillages. Voir Figure 3.2.*



FIGURE 3.2 – Réseau ferroviaire orienté ou orienté transversalement.

On va définir un feuilletage transversalement affine en utilisant une paire de réseaux ferroviaires pondérés (l'un des deux doit être orienté).

Définition 3.2.2. *Soient σ un réseau ferroviaire transversalement orienté équipé par une mesure invariante, et τ un réseau ferroviaire qui est transversal à σ . On suppose qu'aucun point d'intersection de τ avec σ n'est un aiguillage de τ ou de σ .*

On appelle une composante connexe de $\tau - (\{\text{aiguillages de } \tau\} \cup \sigma)$ une arête de (τ, σ) . Une mesure brisée sur (τ, σ) est la donnée d'une collection de nombres positifs appelés poids associés aux arêtes de (τ, σ) qui satisfont les conditions :

- Les poids ne sont pas tous nuls.
- À chaque aiguillage de τ la condition de compatibilité (définition de réseau ferroviaire) est satisfaite.
- À chaque point d'intersection de τ avec une arête de σ de poids w , le poids d'une arête de (τ, σ) qui est après le point d'intersection (par rapport à l'orientation transverse de σ) est égale à $\exp(w) \times$ le poids d'une arête qui est avant du point d'intersection. Voir Figure 3.3.

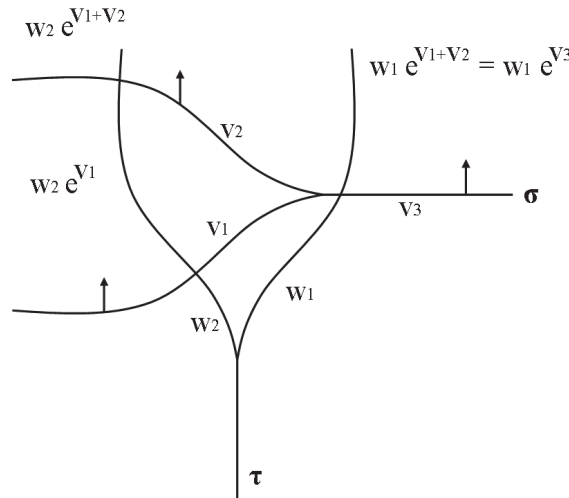


FIGURE 3.3 – Mesure brisée.

3.2.1 Construction d'une classe de \mathcal{AF} à partir d'une mesure brisée

Soit (τ, σ) une mesure brisée dans une surface fermée S . On définit un feuilletage sur S de la façon suivante : Soit $V(\tau)$ un voisinage adapté de τ et \mathcal{G} le feuilletage par les traverses sur $V(\tau)$. On remplace chaque arête α de (τ, σ) par un rectangle dont le support est contenu dans $V(\tau)$ et les côtés horizontaux sont transversaux aux feuilles de \mathcal{G} , et l'image de ce rectangle par la projection naturelle $V(\tau) \rightarrow \tau$ est l'arête α . On feuillette chaque rectangle par des segments transverses au feuilletage \mathcal{G} , et on équipe ce feuilletage par une mesure invariante transverse dont la mesure d'un côté vertical est égale au poids de l'arête α . On recolle les côtés verticaux des rectangles qui se trouvent près du même aiguillage de τ par une application qui préserve la mesure, et les côtés qui contiennent les points de $\tau \cap \sigma$ par une application affine. Voir Figure 3.4.

Soit \mathcal{F}_1 le feuilletage partiel résultant sur S . Le feuilletage \mathcal{F}_1 sur $V(\tau) - \sigma$ est un feuilletage mesuré (Les composantes de $\mathcal{F}_1 - \sigma$ sont équipées par une mesure invariante). Soient R_1, R_2 deux composantes de $\mathcal{F}_1 - \sigma$ et p_1, p_2 deux points dans

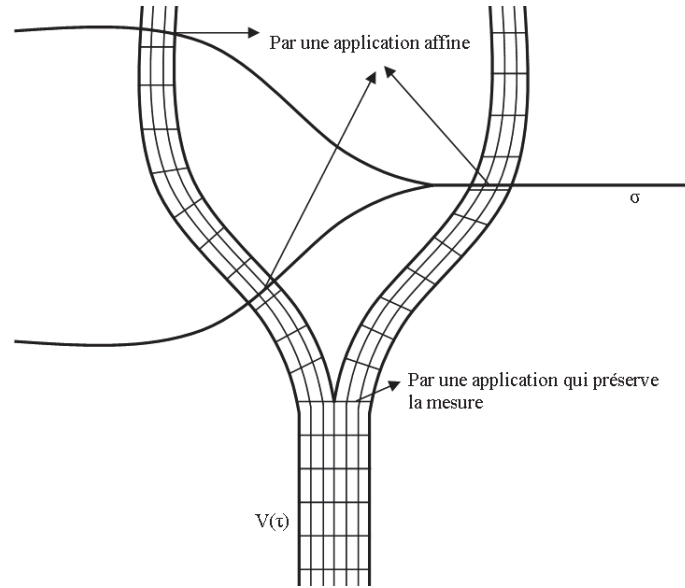


FIGURE 3.4 – Feuilletage transversalement affine partiel sur S .

l'intérieur de R_1, R_2 respectivement, et soit $s_{1,2}$ un chemin orienté de p_1 vers p_2 dans $V(\tau)$. (On suppose que l'orientation de $s_{1,2}$ est compatible avec l'orientation de σ). Soient a_1, a_2, \dots, a_n les points d'intersection de $s_{1,2}$ avec σ et w_1, w_2, \dots, w_n les poids des arêtes de σ correspondants aux points a_1, a_2, \dots, a_n . Voir Figure 3.5.

On multiplie alors la mesure transversale de $\mathcal{F}_1|_{R_1}$ par $\prod_{i=1}^n \exp^{w_i}$ pour avoir la

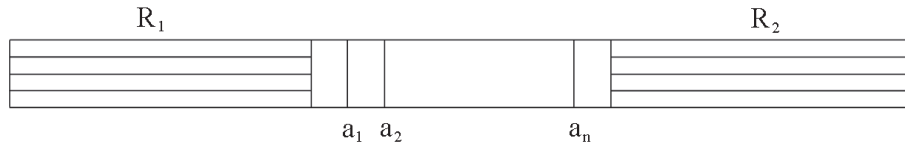


FIGURE 3.5 – Rectangles dans $V(\tau)$.

mesure de $\mathcal{F}_1|_{R_2}$.

En générale ce feuilletage n'est pas mesuré (si pour chaque arête c de τ , soient a_1, a_2, \dots, a_r les points d'intersection de c avec σ . Pour chaque $i = 1, 2, \dots, r$ soit w_i les poids des arêtes contenant a_1, a_2, \dots, a_r de σ . Alors le feuilletage \mathcal{F}_1 est mesuré si pour chaque arête de c de τ on a $\prod_{i=1}^r w_i = 1$). Pour chaque arc transversal à \mathcal{F}_1 on a une classe de mesures. Ce feuilletage est un feuilletage transversalement affine partiel sur S .

Pour avoir un feuilletage transversalement affine, on écrase chaque composante du complémentaire de \mathcal{F}_1 sur un squelette de cette composante, on obtient un feuilletage transversalement affine totale \mathcal{F} sur S .

Remarque : Si (τ, σ) est une mesure brisée dans une surface à bord S , le feuilletage total sur S n'est pas nécessairement transversalement affine par exemple, Dans la Figure 3.6 le feuilletage total porté par la mesure brisée (τ, σ) n'est pas transversalement affine :

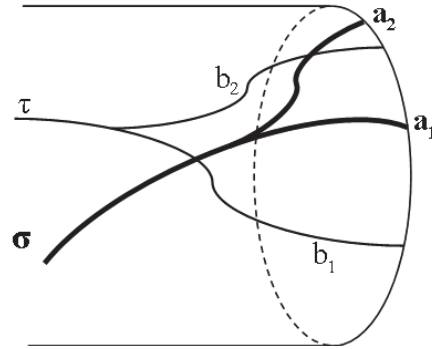


FIGURE 3.6 – Mesure brisée dans une surface à bord.

Si les poids de a_1, a_2, b_1, b_2 ne sont pas nuls, alors le feuilletage total sur S n'est pas transversalement affine :
 Soit α un arc transversal au feuilletage total qui est porté par (τ, σ) . Voir Figure 3.7. Un sous arc de α sera multiplié par e^{a_2} et un autre sous arc sera multiplié par $e^{a_1+a_2}$. Donc le feuilletage total n'est pas transversalement affine.

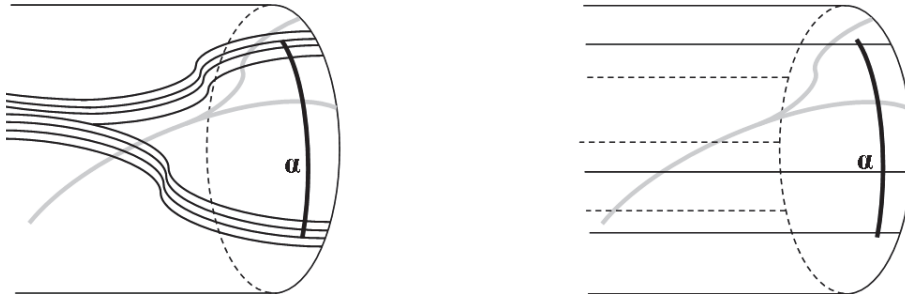


FIGURE 3.7 – Feuilletage non transversalement affine sur une surface à bord porté par une mesure brisée.

Soit (τ, σ) une mesure brisée, on note $B(\tau, \sigma)$ l'ensemble de poids de (τ, σ) . On va étudier l'injectivité de l'application $B(\tau, \sigma) \rightarrow \mathcal{AF}(S)$, où S est surface fermée, qui est définie comme dans 3.2.1

Dans le cas où σ est une courbe simple fermée et τ est un réseau ferroviaire admissible, cette application est injective ([18] p. 10).

Définition 3.2.3. *On dit que deux courbe simples fermées orientées α, β sont homologues dans S , si elles bordent une sous-surface de S .*

Par exemple dans la figure 3.8 les courbes α, β sont homologues, mais α, γ ne le sont pas.

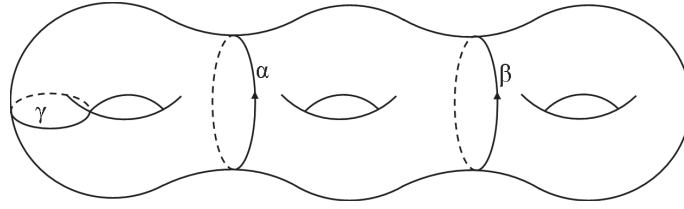


FIGURE 3.8 – Courbes homologues.

Définition 3.2.4. On dit qu'une mesure brisée est admissible si elle vérifie les conditions suivantes :

- τ est un réseau admissible.
- Les composantes de $S - \sigma$ ne sont des bigones.
- Chaque arête de σ coupe une arête de τ .
- Deux arêtes disjointes de σ ne forment pas deux courbes homologues.

A. Papadopoulos a démontré dans ([17] p. 278) le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. Soit (τ, σ) une mesure brisée admissible, et soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les poids de (τ, σ) et v_1, v_2, \dots, v_k les poids du réseau ferroviaire σ , alors l'application $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, v_1, v_2, \dots, v_k) \rightarrow \mathcal{AF}$ est injective.

Proposition 3.2.1. Soient \mathcal{F} un feuilletage transversalement affine sur S , C une courbe simple fermée coupant \mathcal{F} . Si on fait un twist t le long de C , alors l'application $t \mapsto \mathcal{F}_t$ est injective.

Démonstration. La courbe C coupe S pour avoir deux composantes de bord C_1, C_2 . On fait un twist le long de C et on recolte les composantes C_1, C_2 , on aura un autre feuilletage transversalement affine \mathcal{F}_t .

On choisit un réseau ferroviaire admissible (τ, σ) muni d'une mesure brisée où C est contenu dans τ qui porte \mathcal{F}_t . Les poids des arêtes qui sont sur C ne dépendent que la valeur de twist fait. D'après le théorème 3.2.1 l'application $t \mapsto \mathcal{F}_t$ est injective. \square

3.3 Échanges d'intervalles affines

Définition 3.3.1. Un échange de n intervalles affine est une bijection $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ telle qu'il existe deux subdivisions $\{0 = a_0, a_1, \dots, a_n = 1\}$, $\{0 = b_0, b_1, \dots, b_n = 1\}$ de $[0, 1[$ et la restriction de f sur chaque sous intervalle $I_i = [a_{i-1}, a_i[$ est une application affine $x \mapsto \alpha_i x + \beta_i$: $\alpha_i > 0$, et I_i a pour image $[b_{\tau(i-1)}, b_{\tau(i-1)+1}[$ où τ est une permutation de $\{0, 1, \dots, n-1\}$ dite aussi associée à f .

Le vecteur $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est appelé le vecteur de pentes de f .

Exemple 3.3.1. L'application $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$;

$$f = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} & ; \quad 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{6} & ; \quad \frac{1}{4} \leq x < 1 \end{cases}$$

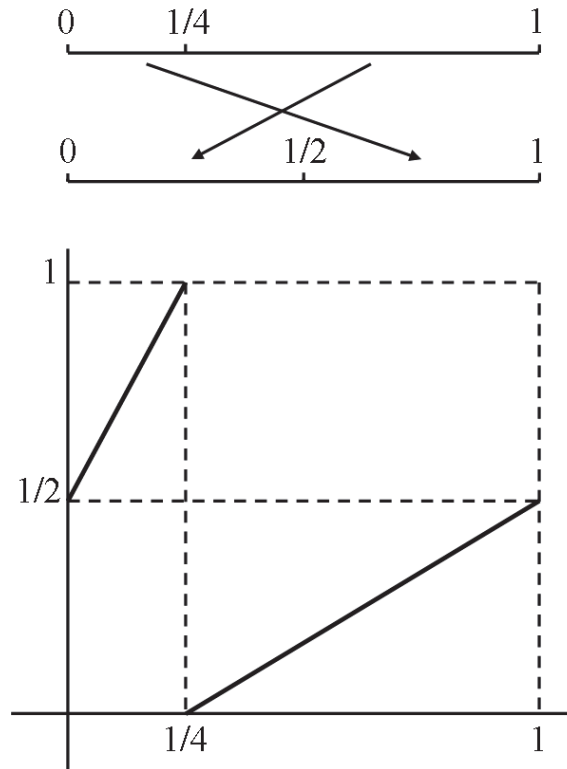


FIGURE 3.9 – Échange de 2 intervalles affine.

Cette application est un échange de 2 intervalles affine associée à la permutation $\tau \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Voir Figure 3.9.

Remarque : Soit $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ un échange de n intervalles affine, et soient $l_i = |a_{i-1} - a_i|$ les longueurs de sous-intervalles $[a_{i-1}, a_i[$ et $x \mapsto \alpha_i x + \beta_i$ les applications affines sur I_i alors, $\sum_{i=1}^n \alpha_i l_i = 1$.

Plus généralement, si $f : S_1 \rightarrow S_1$ est un échange de n intervalles affine, on a alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i l_i = \sum_{i=1}^n l_i = 1$. Comme pour les échanges d'intervalles linéaires, on associera à un échange d'intervalles affine une surface compacte orientable.

Définition 3.3.2. On dit qu'un échange d'intervalles affine f est topologiquement conjugué à un échange d'intervalles linéaire g , s'il existe un homéomorphisme h de $[0, 1[$ tels que $f = h \circ g \circ h^{-1}$.

Proposition 3.3.1. *L'application f qui est définie dans l'exemple 3.3.1 est conjuguée à l'échange d'intervalles linéaire par l'homéomorphisme $h = \frac{3^x-1}{3-1}$, où*

$$g = \begin{cases} x + \ln x & ; \quad 0 \leq x < e - 2 \\ x + \ln \frac{2}{3} & ; \quad e - 2 \leq x < 1 \end{cases}$$

Plus généralement, chaque échange de 2 intervalles affine de permutation associée $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est conjugué à un échange de 2 intervalles linéaire. ([12] p. 542).

Théorème 3.3.1. *Soit f un échange de 2 intervalles affine, de permutation associée $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, dont les discontinuités sont $0, \lambda, 1$, et de vecteur de pentes (α_1, α_2) , alors f est conjugué à un échange de 2 intervalles linéaire par l'application $h(x) = \frac{e^{kx}-1}{e^k-1}$ où $k = \ln(\frac{\alpha_1(1-\lambda)}{1-\alpha_1\lambda})$.*

Démonstration. On a $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(\lambda) = 1$, $f(0) = f(1)$, et

$$f = \begin{cases} f_1 : \alpha_1(x - \lambda) + 1 & ; \quad 0 \leq x < \lambda \\ f_2 : (\frac{1 - \alpha_1\lambda}{1 - \lambda})(x - \lambda) & ; \quad \lambda \leq x < 1 \end{cases}$$

L'application $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1] ; x \mapsto \frac{e^{kx}-1}{e^k-1}$ admet comme inverse

$$h^{-1}(x) = \frac{1}{k} \ln((e^k - 1)x + 1).$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } g_i(x) = x + \delta_i \text{ on a } f_i(x) &= h \circ g_i \circ h^{-1} = \frac{1}{e^k-1} [\exp(k(\frac{1}{k} \ln((e^k - 1)x + 1) + \delta_i)) - 1] \\ &= \frac{1}{e^k-1} [e^{k\delta_i}((e^k - 1)x + 1) - 1] \\ &= e^{k\delta_i}x + \frac{e^{k\delta_i}-1}{e^k-1}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha_i = ek\delta_i \Rightarrow \delta_i = \frac{\ln \alpha_i}{k}$. Alors l'échange d'intervalles g a pour vecteur de translation $(\frac{\ln \alpha_1}{k}, \frac{\ln \alpha_2}{k})$. □

Si f est un échange de 2 intervalles affine de permutation associée $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors f est l'identité, donc f est un échange de 2 intervalles linéaire. Autrement dit, si f est un échange de 2 intervalles affine, alors f est conjugué à un échange d'intervalles linéaire.

Remarque : Le feuilletage mesuré sur le tore T^2 dont chaque feuille est dense dans T^2 correspond à un échange de 2 intervalles affine (non-linéaire) f sur S^1 de permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et de vecteur de pentes $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (1, 1)$, cet échange d'intervalles f est conjugué à un échange de 2 intervalles linéaire.

Soient f un échange d'intervalles affine, et g un échange d'intervalles linéaire tels que f est conjugué à g . On suppose aussi que f, g sont deux échanges d'intervalles

de même permutation associée τ . La surface correspondent à f et celle par g sont la même S . Soient (S, \mathcal{F}_1) , (S, \mathcal{F}_2) les feuilletages correspondent à f, g , alors $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sont homéomorphes par un homéomorphisme qui préserve la mesure. Donc (S, \mathcal{F}_1) est mesuré.

Remarque : Soit $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ un échange d'intervalles (linéaire ou affine), et soient S la surface à bord qui correspond à f et \mathcal{F} le feuilletage construit sur S . Alors les composantes de bord sont :

Soit un feuille de ce feuilletage.

Ou bien un cycle de feuille. Autrement dit, le feuilletage \mathcal{F} rencontre chaque composante de bord en nombre fini de points (singularités). Voir Figure 3.10.

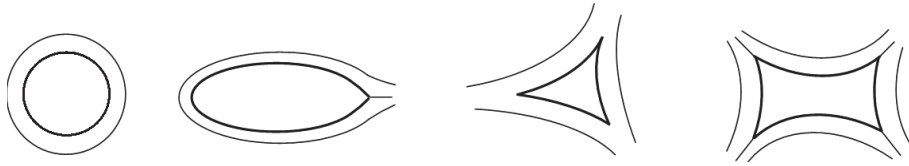


FIGURE 3.10 - .

Construire un feuilletage transversalement affine sur une surface à bord à partir d'un échange d'intervalles affine sur S^1 .

Soient f un échange de n intervalles affine défini sur S^1 de vecteur de pentes $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et l_i les longueurs de sous intervalles $[a_{i-1}, a_i[$, et soit S_1 la surface compacte à bord qui est construite par f comme dans le paragraphe 2.5.2

On construit un réseau ferroviaire (τ, σ) muni d'une mesure brisée sur S_1 : τ un réseau ferroviaire de $n + 1$ arêtes qui est construit comme dans le paragraphe 2.5.2.

σ est un réseau ferroviaire de n arêtes dont les arêtes sont des arcs disjoints sur les bandes B_i . (Chaque arête c_i joint les deux composantes du bord de B_i). Voir Figure 3.11.

On munit σ d'une orientation transversale telle que l'orientation sera de $[a_{i-1}, a_i[$ vers $[b_{\tau(i-1)}, b_{\tau(i-1)+1}[$ si $l_i \geq 1$ et de $[b_{\tau(i-1)}, b_{\tau(i-1)+1}[$ vers $[a_{i-1}, a_i[$ si $l_i < 1$.

On définit une mesure brisée sur (τ, σ) de la manière suivante :

On définit une mesure invariante sur σ en donnant à chaque arête c_i de σ associé à B_i un poids $\ln \alpha_i$ si $\alpha_i \geq 1$ et $\ln(\frac{1}{\alpha_i})$ si $\alpha_i < 1$.

On définit une mesure brisée sur (τ, σ) : on donne à l'arête t_i aboutissant sur $S^1 \times \{1\}$ un poids l_i , et on donne aux arêtes aboutissant sur $S^1 \times \{0\}$ des poids $\alpha_i l_i$. Voir Figure 3.11.

On aura alors un réseau ferroviaire (τ, σ) muni d'une mesure brisée. Ce réseau est bien défini à isotopie près. Pour chaque sortie de $S^1 \times 1$ on multiplie la mesure de l'arête t_i de τ par α_i associé. On aura un feuilletage sur la surface S ; ce feuilletage est porté par une mesure brisée, donc c'est un feuilletage transversalement affine.

Ce feuilletage ne dépend que les longueurs l_1, l_2, \dots, l_n et des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

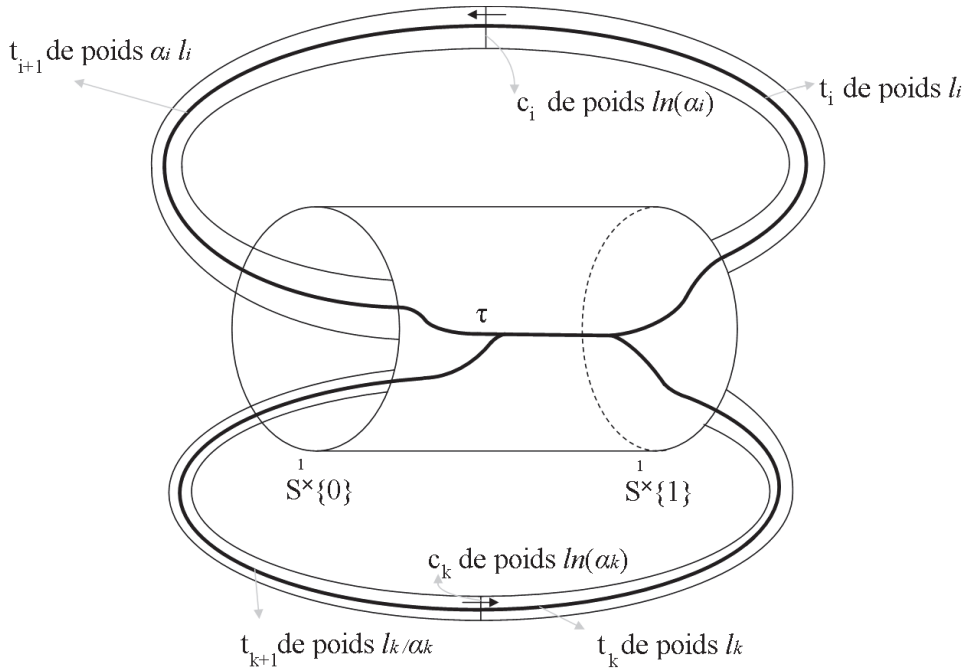


FIGURE 3.11 – Mesure brisée sur une surface construite par un échange d'intervalles affine.

Théorème 3.3.2. Soient f un échange de n intervalles affine de permutation fixe, S la surface à bord construite par f , et soient l_i les longueurs des sous-intervalles $I_i =]a_{i-1}, a_i[$, et $f_i = \alpha_i x + \beta_i$ la restriction de f sur chaque sous-intervalle I_i . Alors l'application $(l_1, l_2, \dots, l_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \rightarrow \mathcal{AF}(S)$ est injective.

Démonstration. D'après l'unicité du réseau ferroviaire (τ, σ) construite par f et d'après le théorème 3.2.1, on a l'injectivité de l'application : $(l_1, l_2, \dots, l_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \rightarrow \mathcal{AF}(S)$. □

Remarque Si on fait disparaître les composantes de bord de la surface à bord qui est construite de la manière précédente, on aura un feuilletage \mathcal{F}_2 sur une surface sans bord et ce feuilletage n'est pas transversalement affine : Par exemple, soit C une composante de bord de deux singularités, et soit γ un arc transversal au feuilletage après fait disparaître cette composante. Voir Figure.3.12. Alors, un sous-arc de γ sera multiplié par $\mu(c_i)$ et un autre sous-arc sera multiplié



FIGURE 3.12 – Faire disparaître d'une composante de bord.

3.4. Feuilletages transversalement affines sur l'anneau

par $\mu(c_k)$. Donc le feuilletage \mathcal{F}_2 n'est pas transversalement affine.

Remarque On peut généraliser la définition de l'échange d'intervalles affine comme on l'a fait pour l'échange d'intervalles linéaire (paragraphe 2.7). Alors on peut avoir un feuilletage transversalement affine non-orientable correspond à un échange d'intervalles donc par une application de premier retour.

3.4 Feuilletages transversalement affines sur l'anneau

Dans cette section on va donner des exemples de feuilletages transversalement affines sur l'anneau. Ces feuilletages sont construits de manières différentes.

Exemple 3.4.1. Soit $I = [0, 1]$ muni de sa mesure de Lebesgue. On définit une application affine $\varphi : I \rightarrow I$

$$x \mapsto \frac{x}{2}$$

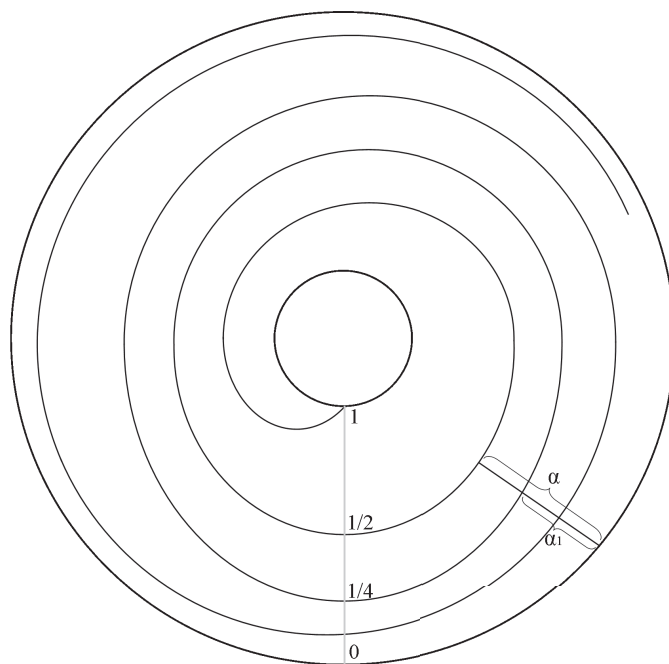


FIGURE 3.13 – Feuilletage transversalement affine d'anneau.

On construit un feuilletage \mathcal{F} de l'anneau ayant φ comme application de premier retour. Ce feuilletage n'est pas conjugué à un feuilletage mesuré. En effet, si \mathcal{F} était mesuré alors chaque arc transversal au feuilletage serait de mesure nulle. (α, α_1 sont deux arcs transversaux à \mathcal{F} et homotopes, si \mathcal{F} était mesuré, alors $\alpha - \alpha_1$ serait de mesure nulle. Voir Figure 3.13).

Si on projette un arc transversal au feuilletage sur I pour le munir d'une mesure, on a alors sur chaque arc transverse une classe de

3.4. Feuilletages transversalement affines sur l'anneau

mesures sur chaque arc transverse et elles sont multipliées l'une de l'autre par une constante. Les feuilletage est donc transversalement affine.

Exemple 3.4.2. *La composante de Reeb qui est représentée dans la figure 3.14 est un feuilletage transversalement affine.*

On définit une mesure de Lebesgue sur les segments γ_1 et γ_2 . Pour chaque arc α_1 (α_2) transverse au feuilletage qui a une extrémité sur le bord C_1 (ou C_2), on a plusieurs manières de projeter cet arc sur le segment γ_1 (γ_2).

Pour un arc α transverse au feuilletage, on peut projeter cet arc sur le segment γ_1 ou bien sur γ_2 de plusieurs manières et il n'y a pas de mesure de Lebesgue naturelle sur cet arc. On peut cependant définir une classe de mesures sur chaque arc transverse au feuilletage qui sont multiples l'une de l'autre par une constante. On vérifie que que cette classe de mesures est invariante par holonomie. Donc ce feuilletage est un feuilletage transversalement affine.

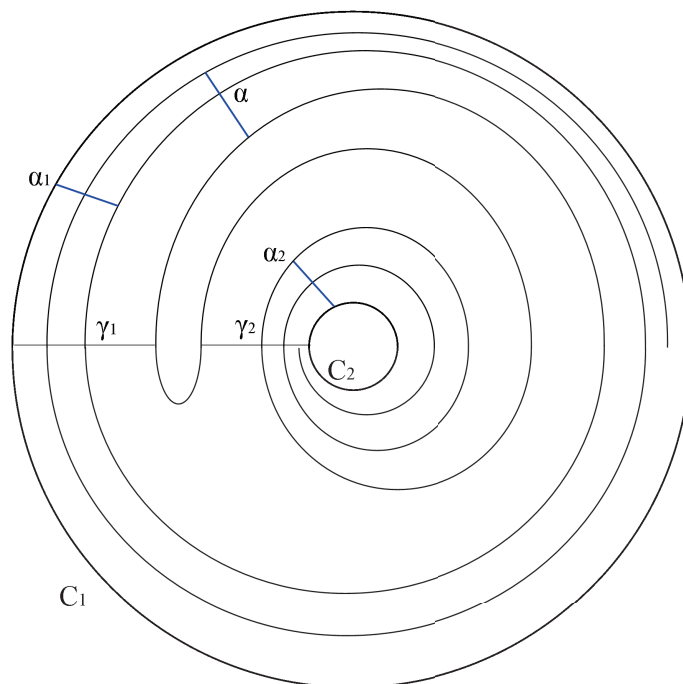


FIGURE 3.14 – Composante de Reeb.

Exemple 3.4.3. *Le feuilletage transversalement affine sur l'anneau dans l'exemple 3.4.1 est porté par une mesure brisée.*

Soient τ un réseau ferroviaire transversalement orienté, (un segment joignant les deux bords d'anneau) et σ un autre réseau ferroviaire qui a deux arêtes, une arête qui a une extrémité sur le premier bord et qui est transverse en ce point à ce bord et tangente au deuxième bord et l'autre arête qui est le deuxième bord. σ coupe τ en deux points. Voir Figure 3.15.

On définit une mesure sur (τ, σ) en posant : $a_2 = a_1 \times e^{-t}$, $a_3 = a_4 \times e^{-t}$, $a_4 = a_3 + a_2$.

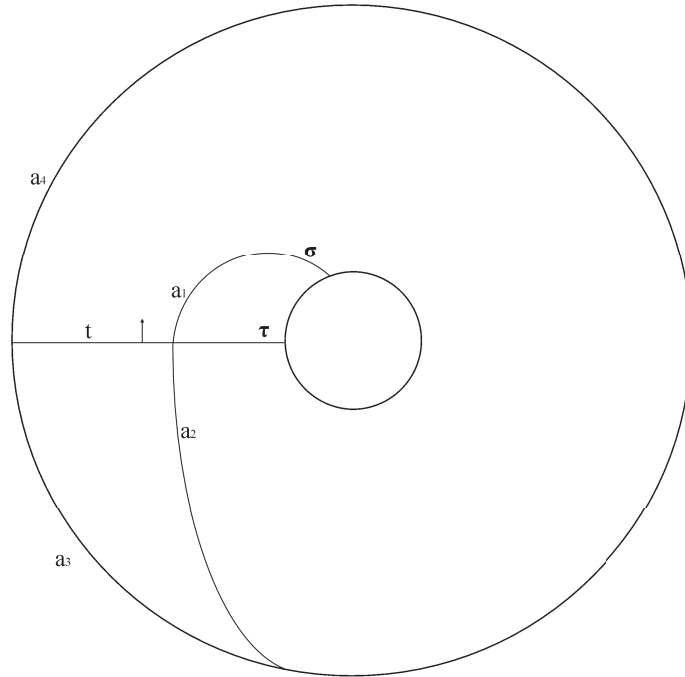


FIGURE 3.15 – Mesure brisée sur l'anneau.

Cela définit une mesure brisée sur le réseau ferroviaire, et cette mesure brisée porte un feuilletage transversalement affine sur l'anneau. Par exemple si on donne l'arête a_1 de poids 1 et t de poids $\ln 2$, on aura le même feuilletage dans l'exemple 3.4.1.

Remarque : Le feuilletage dans l'exemple 2.5.3 dans le chapitre précédent est le seul feuilletage transversalement affine sur l'anneau correspondant à un échange d'intervalles. Si on prend un autre échange d'intervalles sur $[0, 1[$, on aura un feuilletage admettant des singularités sur une surface à plus de 3 composantes de bord. Donc les feuilletages dans les exemples 3.4.1, 3.4.2 ne correspondent pas à un échange d'intervalles.

3.4.1 Classification des feuilletages transversalement affines de l'anneau

Théorème 3.4.1. Soient A un anneau et \mathcal{F} un feuilletage sans singularités sur A . On suppose que \mathcal{F} ne contient aucune composante de ∂ -Reeb. Alors chaque feuille de \mathcal{F} est une feuille compacte. En particulier, ce feuilletage est un feuilletage mesuré.

Démonstration. On suppose, sans perdre la généralité, que \mathcal{F} n'a pas un cercle comme feuille dans $A - \partial A$. (Si \mathcal{F} admet un cercle comme feuille alors chaque feuille est un cercle.)

Si \mathcal{F} admet une feuille non-compacte L , alors L coupe ∂A au plus en un point. Soit $K \neq \emptyset$ l'ensemble limite de L . K est différent d'un point parce que \mathcal{F} est sans singularité, et K est différent de ∂A parce que si K est une composante de ∂A . Donc L spirale vers cette composante et on peut trouver un cercle qui borde avec cette composante de bord une composante de ∂ -Reeb. \square

3.4. Feuilletages transversalement affines sur l'anneau

On peut classifier les composantes de ∂ -Reeb en utilisant le réseau ferroviaire muni d'une mesure brisée :

Soit (τ, σ) un réseau ferroviaire qui porte une composante de ∂ -Reeb. Voir Figure 3.15. Les poids des arêtes a_1, a_2, a_3, a_4, t quotientés par les relations $\{a_2 = a_1 \times e^{-t}, a_3 = a_4 \times e^{-t}, a_4 = a_3 + a_2\}$ classifient les composantes de ∂ -Reeb.

La composante de Reeb sur l'anneau est portée par le réseau ferroviaire muni d'une mesure brisée (τ, σ) représenté dans la Figure 3.16.

À l'aide de ce réseau ferroviaire on peut classifier les composantes de Reeb sur

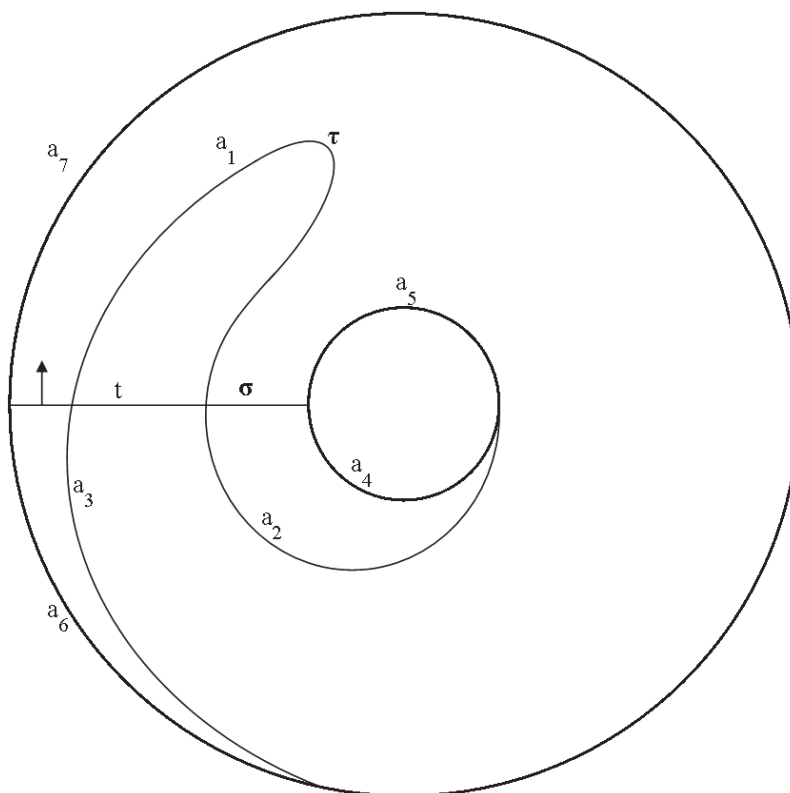


FIGURE 3.16 – Réseau ferroviaire portant la composante de Reeb.

l'anneau. Les poids des arêtes $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, t$ quotientés par les relations $\{a_2 = a_1 \times e^{-t}, a_3 = a_1 \times e^{-t}, a_4 = a_5 \times e^{-t}, a_6 = a_7 \times e^{-t}, a_5 = a_2 + a_4, a_7 = a_3 + a_6\}$ classifient les composantes de Reeb.

Un feuilletage transversalement affine sur l'anneau peut avoir une infinité de composantes de ∂ -Reeb ou de composantes de Reeb, dans ce cas on ne peut pas classifier les feuilletages transversalement affines. Pour classifier les feuilletages transversalement affines de l'anneau on suppose que les feuilletages n'admettent ni composantes de ∂ -Reeb ni composante de Reeb, donc les feuilletages seront mesurés (parce que chaque feuille est compacte, théorème 3.4.1). La classification des feuilletages mesurés de l'anneau est connue. ([3] p. 95).

3.5 Feuilletages transversalement affines sur le pantalon

Exemple 3.5.1. On construit un feuilletage transversalement affine sur le pantalon qui est transverse au bord.

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ l'application affine $x \mapsto \frac{x}{2}$. On va considérer que f est une application de premier retour sur le segment $[-1, 1]$ représenté sur la Figure 3.17.

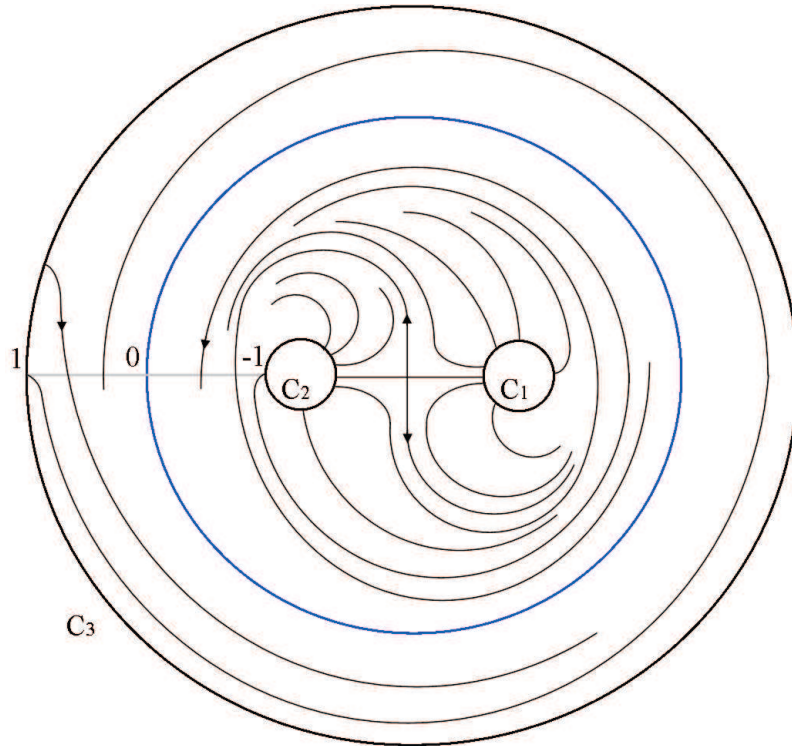


FIGURE 3.17 – Feuilletage transversalement affine sur le pantalon.

L'application f a un point fixe $x = 0$. Le feuilletage a une seule feuille compacte. Soient C_1 , C_2 et C_3 les trois composantes de bord de pantalon, et α la feuille fermée. Le feuilletage \mathcal{F} est transverse à C_1 , C_2 , et C_3 , et spirale autour de α .

Ce feuilletage n'est pas mesuré (pour les mêmes raisons que pour l'exemple 3.4.1). On prend la mesure de Lebesgue ordinaire sur $[-1, 1]$ et on déduit une classe de mesures sur chaque arc transversal au feuilletage en projetant cet arc sur l'intervalle $[-1, 1]$. On a une classe de mesures transverses sur chaque arc transverse, et elles sont multipliées l'une de l'autre par une constante.

Exemple 3.5.2. Feuilletage de Reeb sur le pantalon.

Dans cet exemple, on a une feuille fermée régulière, c'est le bord C_3 . On a aussi trois feuilles fermées singulières (séparatrices) ce sont les bords C_1 , C_2 et la liaison γ . Chaque feuille non fermée a deux limites, une limite est la feuille fermée régulière et l'autre limite est l'union des trois feuilles fermées singulières. Voir Figure 3.18.

3.5. Feuilletages transversalement affines sur le pantalon

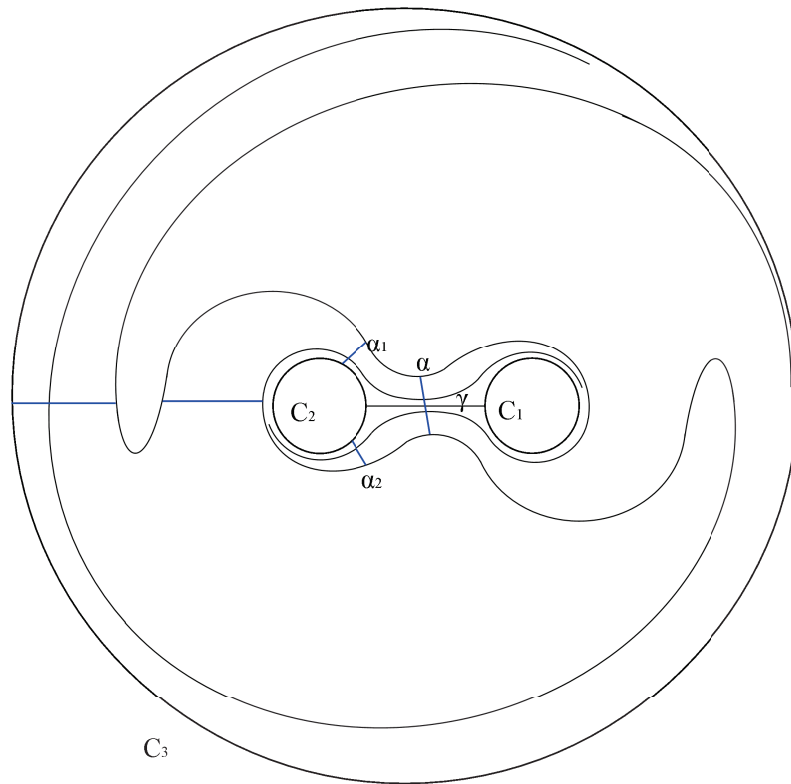


FIGURE 3.18 – Feuilletage de Reeb sur le pantalon.

Ce feuilletage n'est pas conjugué à un feuilletage mesuré pour la même raison que dans l'exemple 3.4.1.

Ce feuilletage est transversalement affine; l'arc α est transporté par l'application d'holonomie en deux arcs α_1 , α_2 , chaque arc ayant une extrémité sur le bord (ou sur la séparatrice). Pour chaque arc transversal à \mathcal{F} l'application de premier retour envoie cet arc vers un autre arc, autrement dit, pour chaque arc on a plusieurs manières de mesurer cet arc, et ces mesures sont multiples l'une de l'autre par une constante positive, alors on a une classe de mesure.

Exemple 3.5.3. Feuilletage de ∂ – Reeb sur le pantalon

Ce feuilletage est aussi non-mesuré.

Chaque feuille régulière et non fermée va d'une composante de bord C_1 , C_2 et spirale vers une autre composante de bord, et on a deux feuilles singulières non fermées qui spiralent autour de la même composante de bord C_3 . Voir Figure 3.19, et pour chaque arc transversal au feuilletage on a plusieurs manières de faire une mesure, et ces mesures sont multiples l'une de l'autre par une constante positive. Alors on a une classe de mesures pour chaque arc transversal. cette classe de mesures est invariante par l'holonomie, donc ce feuilletage est transversalement affine.

Exemple 3.5.4. *Le feuilletage transversalement affine sur le pantalon dans l'exemple 3.5.3 est porté par une mesure brisée.*

Soient τ un réseau ferroviaire transversalement orienté qui est segment joignant deux composantes de bords C_2 et C_3 , et σ un autre réseau ferroviaire qui a 4 arêtes,

3.5. Feuilletages transversalement affines sur le pantalon

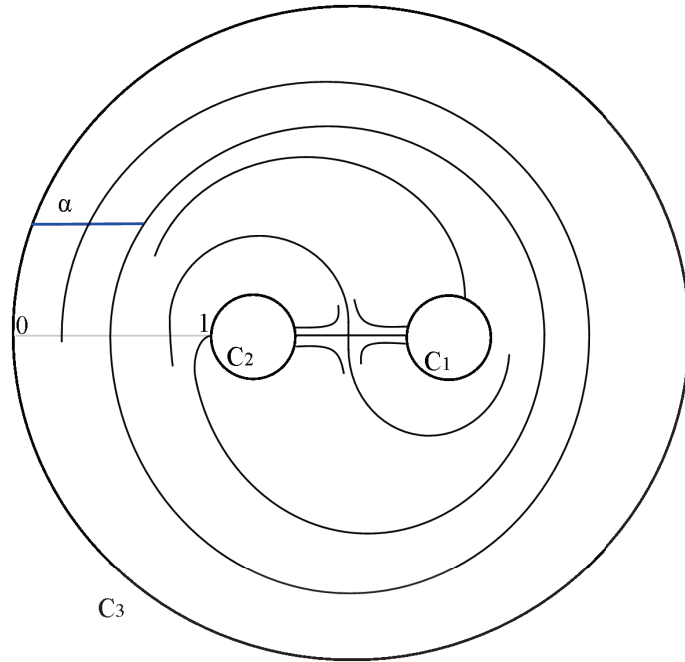


FIGURE 3.19 – Feuilletage de $\partial - \text{Reeb}$ sur le pantalon.

comme dans la Figure 3.20.

On donne des poids des arêtes de (τ, σ) qui vérifient : $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_3 \times e^{-t}$,

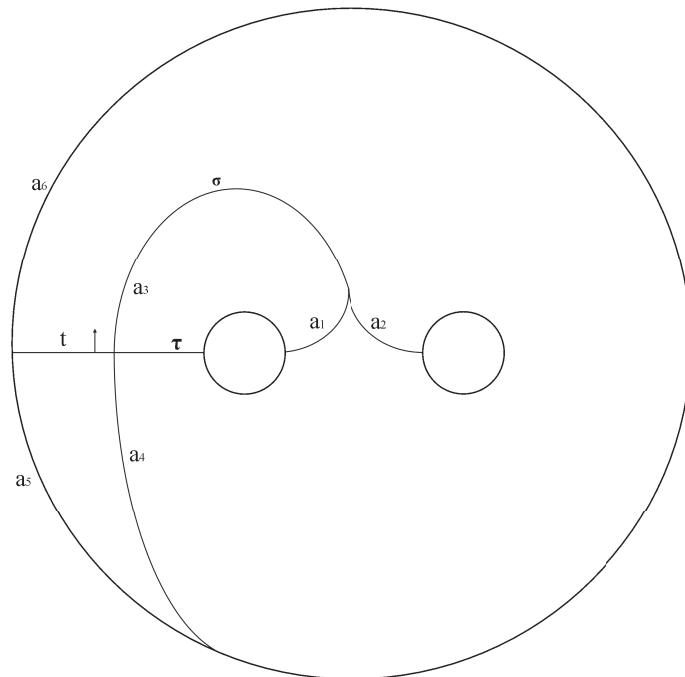


FIGURE 3.20 – Mesure brisée sur le pantalon.

$a_6 = a_5 + a_4$, $a_5 = a_6 \times e^{-t}$. Alors on définit une mesure brisée sur le pantalon, cette

3.5. Feuilletages transversalement affines sur le pantalon

mesure brisée porte le feuilletage transversalement affine de l'exemple 3.5.3 .

Exemple 3.5.5. Feuilletage de spirale sur le pantalon

Le feuilletage présenté dans la Figure 3.21 n'est pas transversalement affine. En

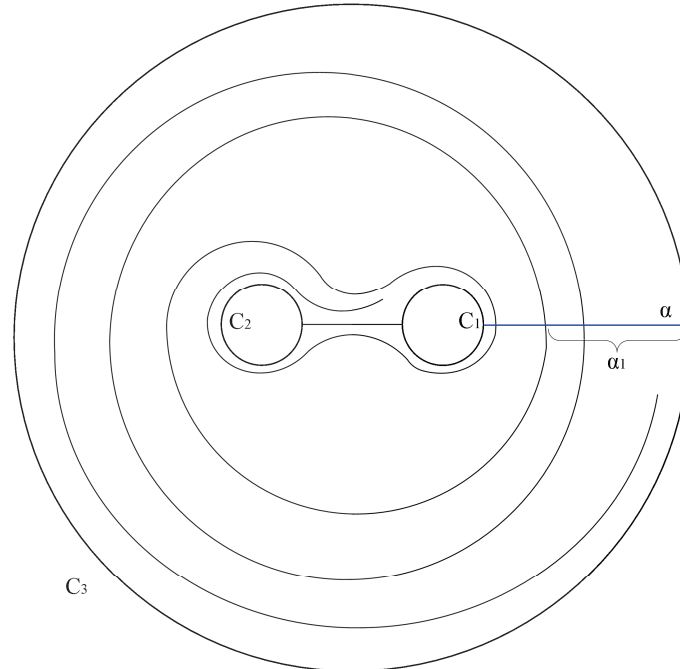


FIGURE 3.21 – Feuilletage en spirales sur le pantalon.

effet, soit α un arc transversal à \mathcal{F} qui joint la composante C_1 avec C_3 . Cet arc coupe toutes les feuilles régulières de \mathcal{F} . On définit l'application de premier retour f sur α .

Cette application f envoie l'arc transversal α vers lui même s'il y avait une classe de mesures transverses définies à multiplication près par une constante, je choisis une telle mesure et je peux bouger α par holonomie jusqu'à ce qu'il revienne sur lui même. Donc la classe de mesure de α est multipliée par $\lambda = 1$. Mais pour un sous-arc α_1 de α ayant une extrémité sur le bord, f envoie α_1 vers un sous-arc de α_1 différent de α_1 (soit plus petit ou bien plus grand de α_1). Donc la classe de mesure de α_1 est multipliée par $\lambda \neq 1$. Donc il y a une contradiction. Donc \mathcal{F} n'est pas transversalement affine.

Exemple 3.5.6. Dans cet exemple, on construit un feuilletage sur le pantalon correspondant à un échange d'intervalles affine (non linéaire).

Soit $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ un échange de 2 intervalle affine et non-linéaire (la permutation associée à f est l'identité). On a déjà vu que la surface construite par cet échange d'intervalles est un pantalon. Le feuilletage correspondant à f est un feuilletage dont les singularités sont des selles à 3 séparatrices et ces singularités sont sur une composantes de bord. Voir figure 3.22. Ce feuilletage n'est pas transversalement affine pour la même raison de feuilletage de spirale sur le pantalon.

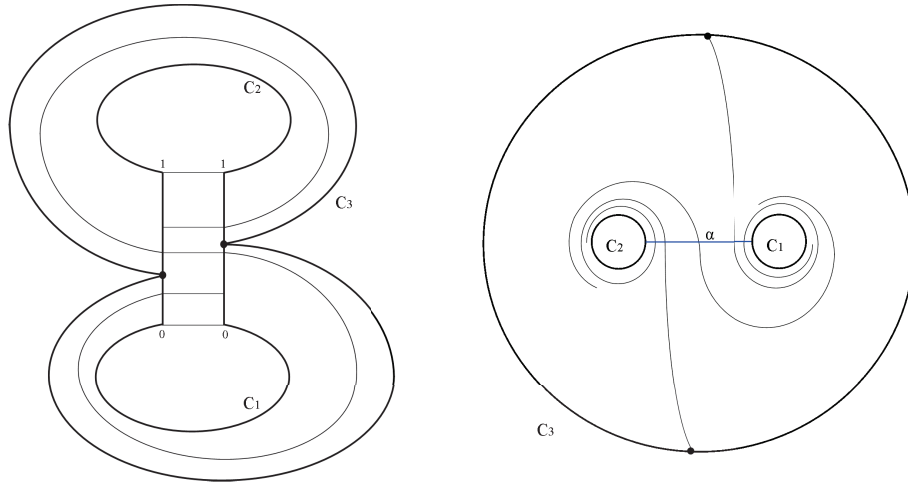


FIGURE 3.22 – Feuilletage non transversalement affine sur le pantalon correspondant à un échange d’intervalles affine.

Remarque : Le feuilletage qui correspond à un échange d’intervalles affine n’est pas nécessairement un feuilletage transversalement affine.

3.5.1 Classification des feuilletages transversalement affines du pantalon

Dans ce paragraphe on classe les feuilletages transversalement affines du pantalon qui sont transverses au bord.

Proposition 3.5.1. *Soit \mathcal{F} est un feuilletage du pantalon, si \mathcal{F} ne contient aucune composante de ∂ -Reeb, alors toutes les feuilles de \mathcal{F} sont des intervalles compacts. ([4] p. 91).*

À l’aide de cette proposition on classe les feuilletages transversalement affines du pantalon. Si \mathcal{F} ne contient aucune composante de Reeb ou ∂ -Reeb alors on peut définir une mesure invariante sur \mathcal{F} ; donc \mathcal{F} est mesuré.

On va classifier les feuilletages transversalement affines du pantalon qui contiennent une seule composante de ∂ -Reeb en utilisant un réseau ferroviaire muni d’une mesure brisée. Soit (τ, σ) un réseau ferroviaire muni d’une mesure brisée représenté dans la figure 3.20. Les poids des arêtes $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, t$ quotientés par les relations $\{a_1 + a_2 = a_3, a_3 = e^t \times a_4, a_4 + a_5 = a_6, a_6 = e^t \times a_5\}$ classifient les feuilletages transversalement affines du pantalon qui sont transverses au deux composantes de bord et spiralent vers la troisième composante de bord.

La composante de Reeb sur le pantalon 3.5.2 est portée par le réseau ferroviaire muni d’une mesure brisée (τ, σ) représenté dans la Figure 3.23.

À l’aide de ce réseau ferroviaire on peut classifier les composantes de Reeb sur le pantalon. Les poids des arêtes $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, t$ quotientés par les relations $\{a_3 = e^{-t} \times a_1, a_2 = e^{-t} \times a_1, a_{11} = e^{-t} \times a_{14}, a_6 = e^{-t} \times a_7, a_3 + a_6 = a_7, a_4 + a_5 = a_6, a_4 + a_2 = a_5, a_4 + a_5 = a_6, a_{12} + a_{13} = a_8, a_9 + a_{10} = a_8\}$

3.6. Feuilletages transversalement affines sur le tore troué et sur le tore

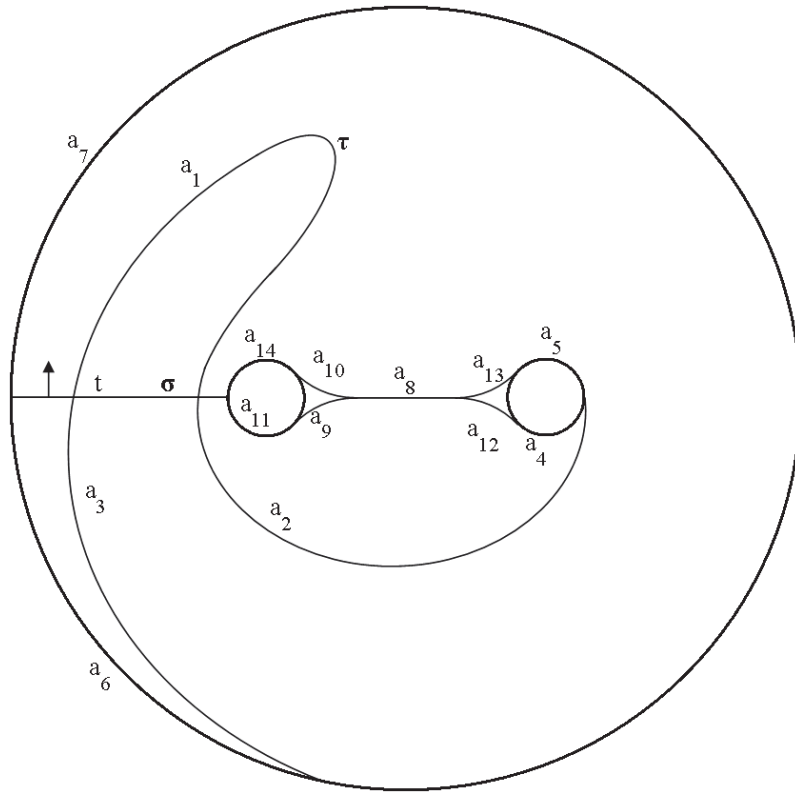


FIGURE 3.23 – Réseau ferroviaire portant la composante de Reeb.

classifient les composantes de Reeb du pantalon.

Un feuilletage transversalement affine sur le pantalon peut contenir une infinité de composantes de ∂ -Reeb ou composantes de Reeb. Alors si \mathcal{F} admet des composantes de ∂ -Reeb, la dimension de $\mathcal{AF}(P^2)$ serait l'infinie.

Pour qu'on puisse classifier les feuilletages transversalement affines du pantalon P , on suppose que les feuilletages n'admettent des composantes de Reeb ou ∂ -Reeb. Alors les feuilletages seront mesurés. On a vu dans le paragraphe 2.2.1 la classifications des feuilletages mesuré du pantalon.

Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement affine. On suppose que \mathcal{F} transverse au bord. Alors il existe une famille de courbes simples fermées qui décompose P en anneaux feuilletés par des composantes de Reeb ou ∂ -Reeb et un pantalon feuilletée par un feuilletage mesuré. Le nombre de ces courbes dépend du nombre de composante de Reeb ou ∂ -Reeb qui sont contenus dans \mathcal{F} .

3.6 Feuilletages transversalement affines sur le tore troué et sur le tore

Exemple 3.6.1. On présente une autre manière de construire un feuilletage transversalement affine à partir d'un feuilletage mesuré d'une surface à deux composantes

3.6. Feuilletages transversalement affines sur le tore troué et sur le tore

de bord \mathcal{F} transverse au bord. ([10] p. 7).

Le feuilletage construit par ce recollement dépend du twist et des mesures de deux bords (holonomie).

Si les mesures de deux composantes de bord sont égales (holonomie linéaire), ce recollement préserve la mesure transverse. Alors le feuilletage porté reste mesuré.

Si les mesures de deux composantes de bord sont différentes (holonomie affine), ce recollement modifie l'holonomie du feuilletage. En particulier soit V un voisinage tubulaire dans la surface recollée de la courbe simple fermée qui est les deux courbes recollées, et soit δ un arc transverse au feuilletage. Pour chaque fois que son homotopie traverse V dans le sens choisi, sa mesure est multipliée par le rapport des deux mesures, et divisée par ce rapport chaque fois que son homotopie traverse V dans le sens inverse.

Soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré sur le pantalon, Voir Figure 3.24. En utilisant les notations de cette figure : $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$, et $\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\mu(\gamma)$

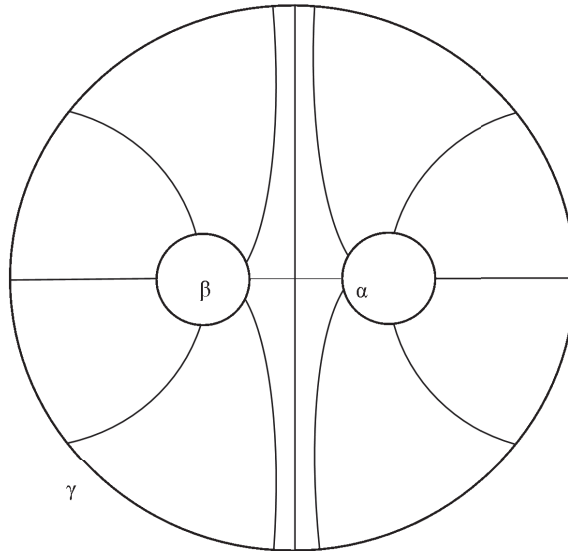


FIGURE 3.24 – Feuilletage mesuré de pantalon : $\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\mu(\gamma)$.

On identifie α et γ par une homothétie de rapport 2 ; c'est une application affine. On obtient un tore troué de bord β , Voir Figure 3.25, muni d'un feuilletage qui admet comme singularité une selle à 4 séparatrices.

On fixe une orientation du feuilletage. On peut alors définir une application f de premier retour sur γ ($x \mapsto \frac{x}{2}$). Soit δ un arc transverse au feuilletage. Chaque fois qu'un arc homotope à δ traverse γ la mesure de cet arc homotope est divisée par 2. Ainsi pour chaque arc transverse, on définit une classe de mesures. Alors ce feuilletage est un feuilletage transversalement affine et chaque feuille qui sort du bord reste dans la surface.

Exemple 3.6.2. En utilisant les réseaux ferroviaires on peut définir un feuilletage transversalement affine sur le tore. Par exemple :

3.6. Feuilletages transversalement affines sur le tore troué et sur le tore

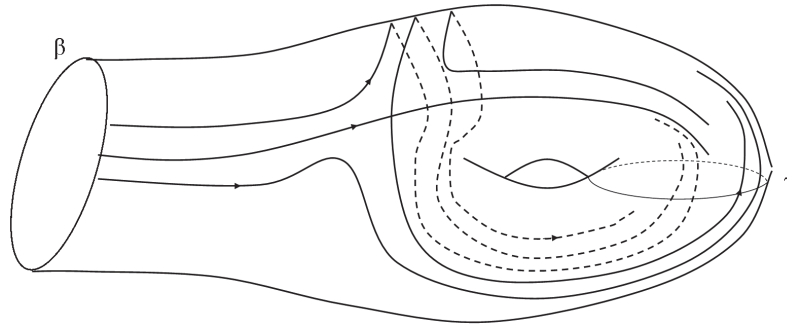


FIGURE 3.25 – Feuilletage transversalement affine de tore troué.

Soit M un anneau et (τ, μ) un réseau ferroviaire sur M , tel que $\mu(a_3) > \mu(a_1)$. Voir Figure 3.26. On recolle les deux bords de manière à ce que les deux extrémités de ce réseau ferroviaire soient identifiées par une application affine $x \mapsto \frac{x}{a_3}$. On obtient un tore feuilleté par un feuilletage transversalement affine ([8] p. 272).

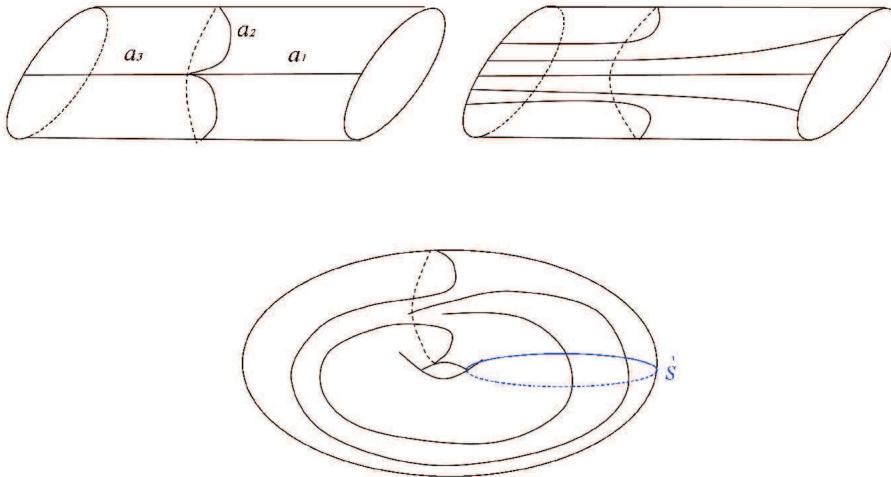


FIGURE 3.26 – Feuilletage transversalement affine de tore.

Exemple 3.6.3. Construire un feuilletage transversalement affine sur le tore. Le revêtement universel du tore $T^2 = S^1 \times S^1$ est \mathbb{R}^2 , et le groupe fondamental de T^2 est $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On construit un feuilletage mesuré \mathcal{F} sur \mathbb{R}^2 vérifiant les propriétés : Chaque automorphisme de revêtement envoie chaque feuille de \mathcal{F} vers une feuille. L'automorphisme de revêtement vertical préserve la mesure d'un arc transverse au feuilletage.

L'image d'un arc transverse au feuilletage par l'automorphisme de revêtement est égal à la mesure de cet arc $\times gn$ où n signifie le nombre d'étape de cet automorphisme et g est une constante positive. Autrement dit, il existe homomorphisme $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mu(\gamma\alpha) = \phi(\gamma) \times \mu(\alpha)$, où Γ est le groupe d'automorphismes de revêtement et α est un arc transversal à \mathcal{F} . Voir Figure 3.27.

3.6. Feuilletages transversalement affines sur le tore troué et sur le tore

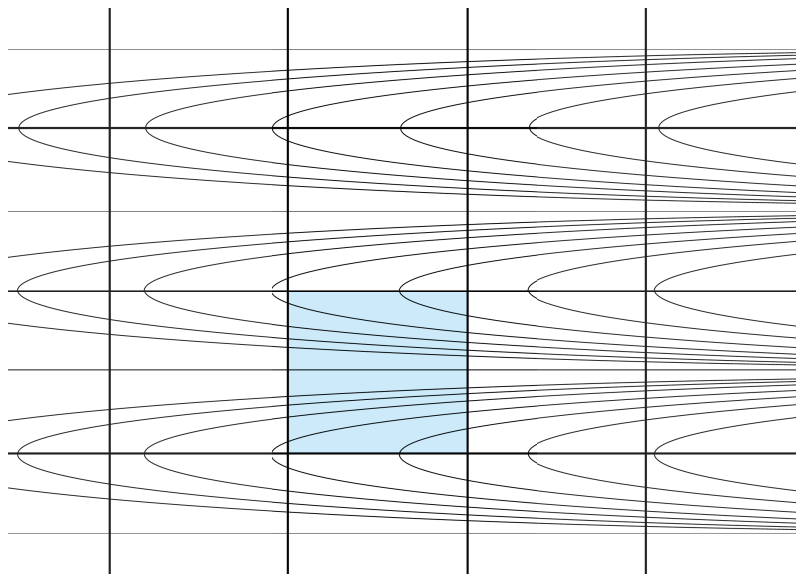


FIGURE 3.27 – Feuilletage mesuré sur le revêtement universel de tore.

L'image de ce feuilletage mesuré par $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ est un feuilletage transversalement affine sur le tore T^2 qui admet une feuille compacte (une courbe simple fermée) et les autres feuilles sont non-fermées et spiralent vers la feuille compacte de part et d'autre. Voir Figure 3.28.

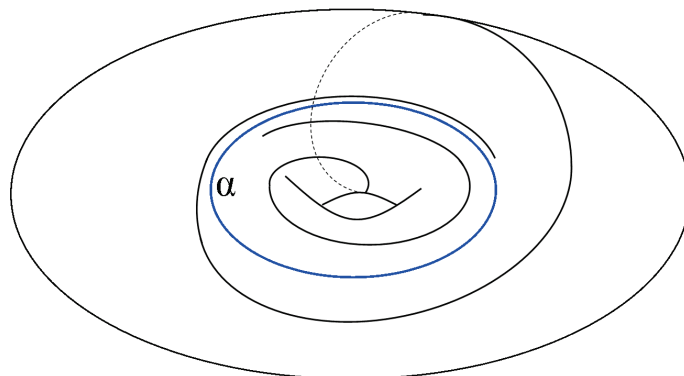


FIGURE 3.28 – Feuilletage transversalement affine sur le tore.

Exemple 3.6.4. *Construction d'un feuilletage transversalement affine sur le tore.*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice qui admet pour valeurs propres une seule valeur propre double $\lambda > 1$ et $v(\lambda)$ le vecteur propre associé.

Soit S^1 le cercle unité et E , l'image de ce cercle par l'application :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad E \text{ est un ellipse.}$$

Soit S le cylindre bordé par le cercle S^1 et l'ellipse E et feuilleté par les droites passant par l'origine O . Voir Figure 3.29.

On recolle les deux bords de S de manière à ce que chaque point p de S^1 est associé à son image Ap de E .

On aura un tore feuilleté par \mathcal{F} qui admet deux feuilles compactes et les autres feuilles spiralent vers les deux feuilles compactes.

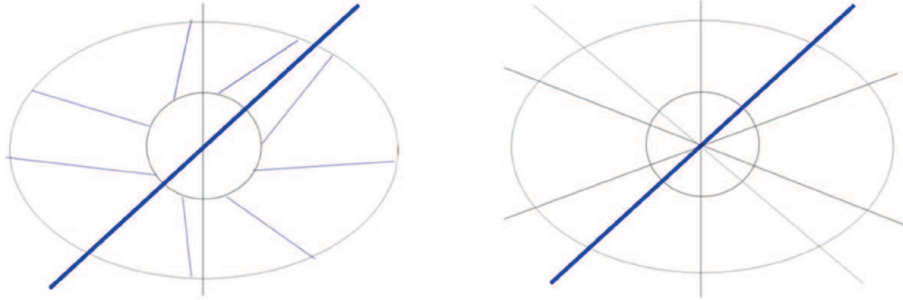


FIGURE 3.29 – Cylindre.

Soit S^1 un cercle transversal à \mathcal{F} , on donne une paramétrisation de S^1 de la manière suivante : $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, et $0, \infty$ sont l'intersection entre S^1 et les deux feuilles compactes. On définit une application de premier retour $x \mapsto \lambda x$ ou $x \mapsto \frac{1}{\lambda}x$ ça dépend de l'orientation donnée de \mathcal{F} . Cette application est une application affine.

3.7 Topologie de \mathcal{AF}

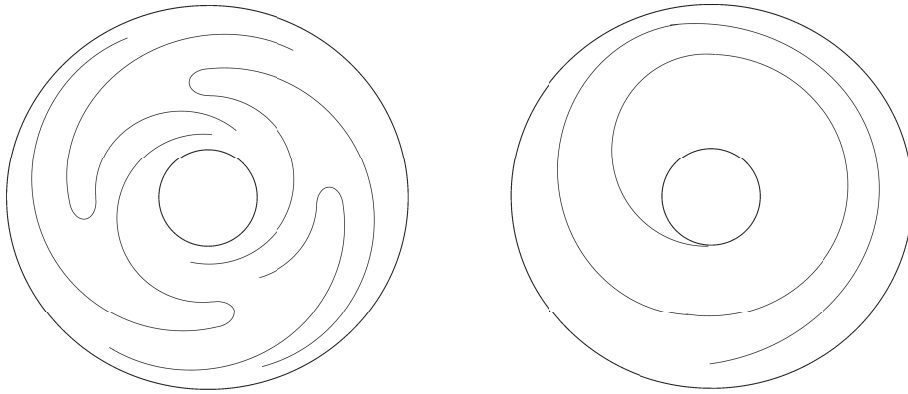
A. Hatcher et U. Oertel définissent la topologie de \mathcal{AF} en remarquant que le révélé d'un feuilletage transversalement affine sur S au revêtement universel abélien \bar{S} de S est un feuilletage mesuré. On peut alors utiliser la topologie des feuilletages mesurés sur la surface non compacte \bar{S} . Une manière est d'utiliser une décomposition en pantalons de \bar{S} qui est transverse au feuilletage, et ensuite d'utiliser les coordonnées de longueurs et de twists associées à cette décomposition. Les poids sur réseaux ferroviaires munis d'une mesure brisée donneront une autre manière de comprendre la topologie de \mathcal{AF} .

Hatcher et Oertel ont démontré le théorème suivant :

Théorème 3.7.1. *Soit S une surface sans bord. Alors $\mathcal{AF}(S)$ est homéomorphe à \mathbb{R}^{8g-6} ([4]).*

On suppose que le feuilletage \mathcal{F} ne contient ni de composante de Reeb ou ∂ -Reeb. Voir Figure 3.30.

Si le feuilletage \mathcal{F} admet de composant de Reeb ou de composant de ∂ -Reeb alors la dimension de $\mathcal{AF}(S)$ est infinie. (Le feuilletage transversalement affine peut contenir une infinité de composante de ∂ -Reeb ou de composante de Reeb).

FIGURE 3.30 – Composante de Reeb et ∂ -Reeb.

Le théorème 3.7.1 s'applique aux feuilletages qui n'admettent pas de composante de Reeb ou ∂ -Reeb.

3.8 Combinaison de deux feuilletages

Dans ce paragraphe on étudie la combinaison de deux feuilletages mesurés ou transversalement affines. En combinant des feuilletages mesurés ou transversalement affines sur l'anneau et sur le pantalon, on peut construire des feuilletages transversalement affines sur des surfaces plus compliquées.

Proposition 3.8.1. *Soient S une surface compacte orientée à bord, et \mathcal{F} un feuilletage mesuré sur S . Si \mathcal{F} n'admet aucune singularité sur une composante du bord γ , alors les feuilles dans un voisinage de γ sont :*

- *Soit des feuilles compactes parallèles au bord.*
- *Ou bien les feuilles sont transversales à γ . Voir Figure 3.32.*

Démonstration. Chaque point régulier sur le bord γ admet un domaine de carte feuilletée isomorphe à l'un des modèles de la figure 3.31 ([3] p. 72)

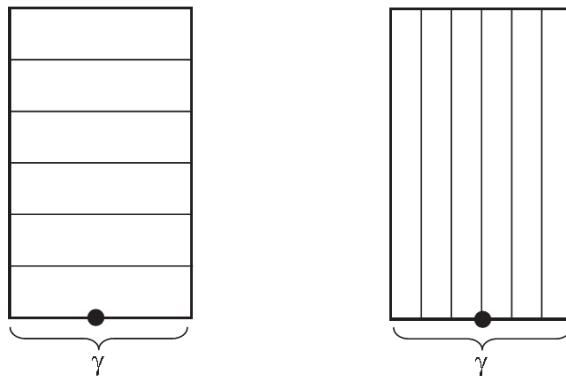


FIGURE 3.31 – Points réguliers sur le bord.

□

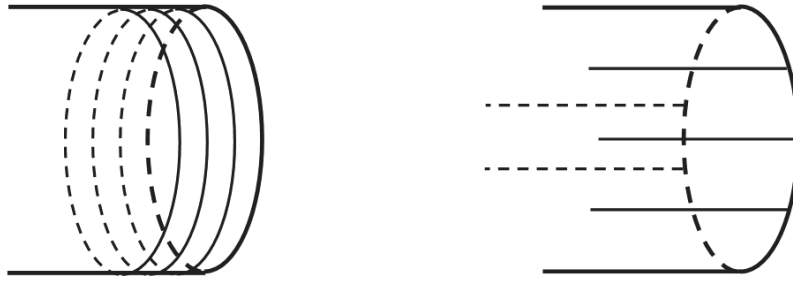


FIGURE 3.32 – Voisinage de bord (Feuilletage mesuré).

Proposition 3.8.2. *Soient S une surface compacte orientée à bord, \mathcal{F} un feuilletage transversalement affine. Si la composante du bord γ est une feuille régulière, alors les feuilles dans un voisinage du bord sont :*

- *Soit des feuilles compactes parallèles à γ .*
- *Ou bien elles spiralent vers γ . Voir Figure 3.33.*

Démonstration. Soit α un segment transversal à \mathcal{F} dans un voisinage de γ dont une des extrémités se trouve sur γ . Une application de premier retour sur α est :

Soit l'identité $x \mapsto x$ (les feuilles sont compactes).

Soit une application affine $x \mapsto \lambda x$; $\lambda \neq 1$. Dans ce dernier cas les feuilles convergent vers γ ($\lambda < 1$) ou divergent de γ ($\lambda > 1$).

□

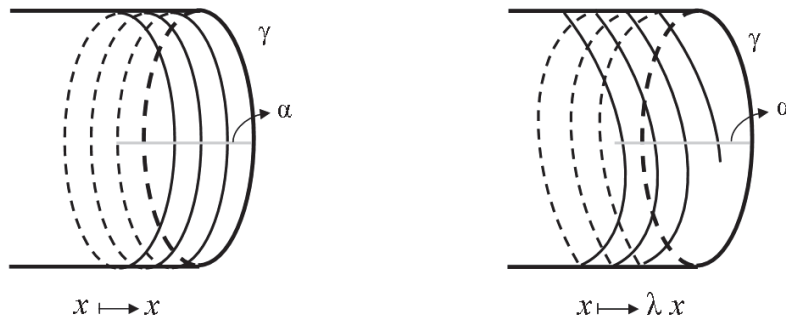


FIGURE 3.33 – Voisinage de bord (Feuilletage transversalement affine).

Soient S_1, S_2 deux surfaces compactes orientées à bord et feuilletées par des feuilletages $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$. On recolle une composante du bord de S_1 avec une composante du bord de S_2 ; on aura une surface S , qui est munie d'un feuilletage \mathcal{F} .

3.8.1 Combinaison de deux feuilletages mesurés

Soit $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux feuilletages mesurés.
On a trois cas :

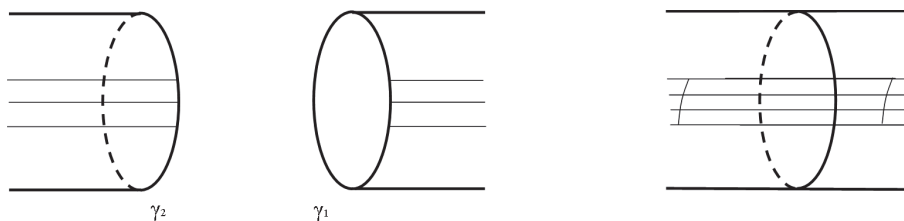


FIGURE 3.34 – Deux feuilletages mesurés transversaux aux bords.

Premier cas :

Si \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 sont transverses aux bords ∂S_1 , ∂S_2 , et il n'y a aucune singularité sur ∂S_1 , ∂S_2 . Voir Figure 3.34.

- Si $\mu(\gamma_1) = \mu(\gamma_2)$, alors \mathcal{F} est mesuré.
- Si $\mu(\gamma_1) \neq \mu(\gamma_2)$, alors \mathcal{F} est transversalement affine conjugué à un feuilletage mesuré. En multipliant la mesure transverse de \mathcal{F}_1 par une constante, on peut définir une mesure transverse pour \mathcal{F} , donc \mathcal{F} est mesuré.

Deuxième cas :

Si \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 sont tangents aux deux bords ∂S_1 , ∂S_2 . Voir Figure 3.35.

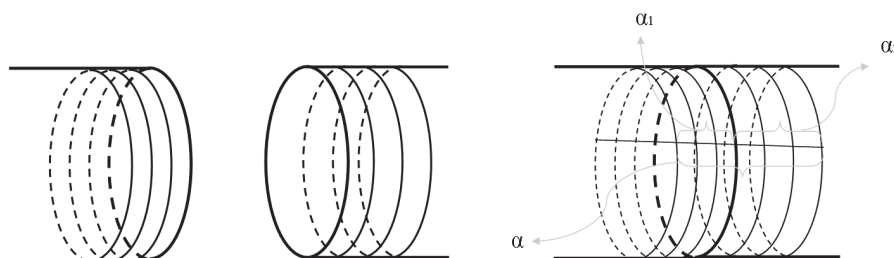


FIGURE 3.35 – Deux feuilletages mesurés tangents aux bords.

On peut définir une mesure transverse pour \mathcal{F} ayant la propriété que $\mu(\alpha) = \mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2)$; où $\alpha_1 = \alpha \cap S_1$, $\alpha_2 = \alpha \cap S_2$, alors \mathcal{F} est aussi mesuré.

Troisième cas :

Si, au moins, un des ∂S_1 , ∂S_2 a une singularité, on revient au deuxième cas. Voir Figure 3.36.

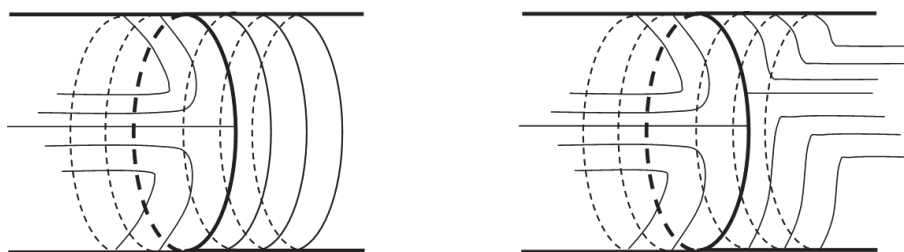


FIGURE 3.36 – Deux feuilletages mesurés avec singularités sur bord.

Remarque : Soient S_1, S_2 deux surfaces à bord ayant au moins deux composantes du bord, et $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux feuilletages transversaux au bord sur S_1, S_2 respectivement. Si on recolle les deux composantes de S_1 avec deux composantes du bord de S_2 on aura un feuilletage sur une surface S munie d'un feuilletage \mathcal{F} , ce feuilletage n'est pas nécessairement mesuré.

Par exemple, dans la figure 3.37. Si $\frac{\mu_1(a_1)}{\mu_2(b_1)} \neq \frac{\mu_1(a_2)}{\mu_2(b_2)}$ le feuilletage \mathcal{F} n'est pas mesuré : Si on multiplie la mesure μ_2 par $\frac{\mu_1(a_1)}{\mu_2(b_1)}$, alors le recollement a_1 avec b_1 sera avec une application qui préserve la mesure, mais le recollement a_2 avec b_2 sera avec une application affine donc le feuilletage \mathcal{F} n'est pas un feuilletage mesuré et il est un feuilletage transversalement affine.

Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sont tangents aux deux composantes du bord alors le feuilletage \mathcal{F} est un

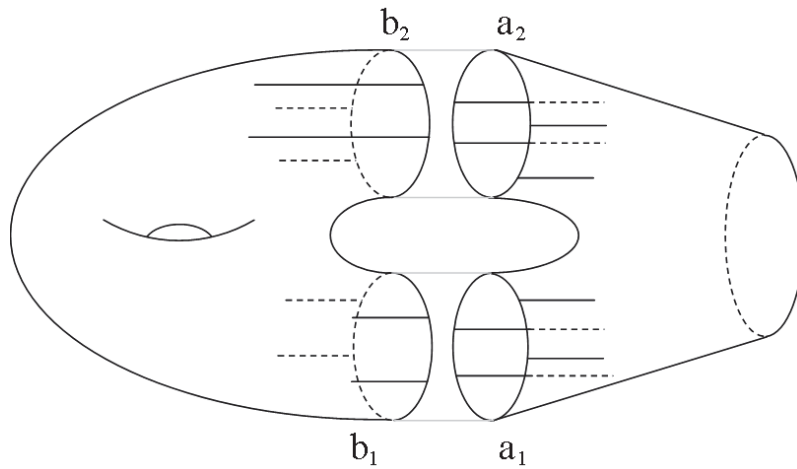


FIGURE 3.37 – Recoller deux composantes du bord de S_1 avec deux composantes du bord de S_2 .

feuilletage mesuré.

3.8.2 Combinaison de deux feuilletages transversalement affines

Soit $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux feuilletages transversalement affines et pas mesurés.

Premier cas :

Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sont transversales aux bords $\partial S_1, \partial S_2$.

\mathcal{F} est transversalement affine si et seulement si l'application de premier retour sur un segment transversal à \mathcal{F} qui a une extrémité dans S_1 et l'autre extrémité dans S_2 préserve la classe de mesure pour chaque arc transversal au feuilletage \mathcal{F} .

Exemple 3.8.1. *Le feuilletage dans la figure 3.38, le feuilletage de Reeb est une combinaison de deux feuilletages transversalement affines sur l'anneau dont chaque feuille transverse au premier bord et spirale vers le deuxième bord, On recolle γ_1 avec*

3.8. Combinaison de deux feuilletages

γ_2 de manière que chaque arc coupant le bord recollant est tangent au feuilletage total. Ce feuilletage est transversalement affine ; pour chaque arc transversal au feuilletage on peut définir une classe de mesure qui est multipliée par un constant λ .

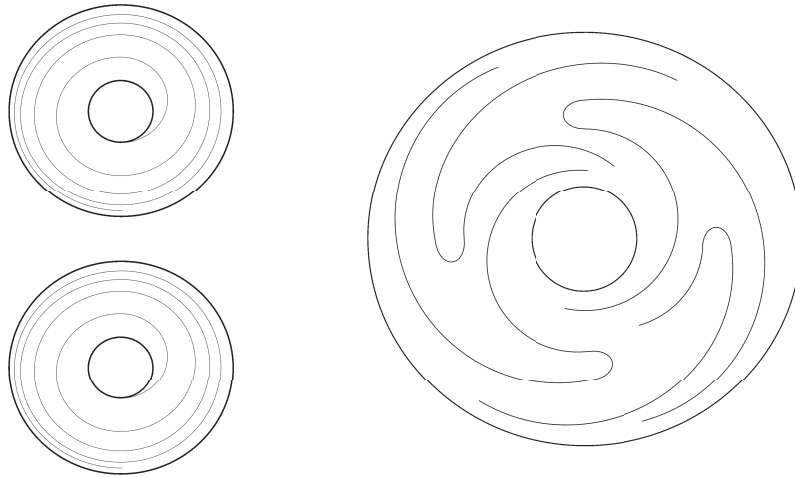


FIGURE 3.38 – Feuilletage de Reeb ; c'est une combinaison de deux feuilletages transversalement affines.

Le feuilletage dans la figure 3.39 est la recollé des deux feuilletages précédents de manière que chaque arc coupant le bord commun est transversal au feuilletage total.

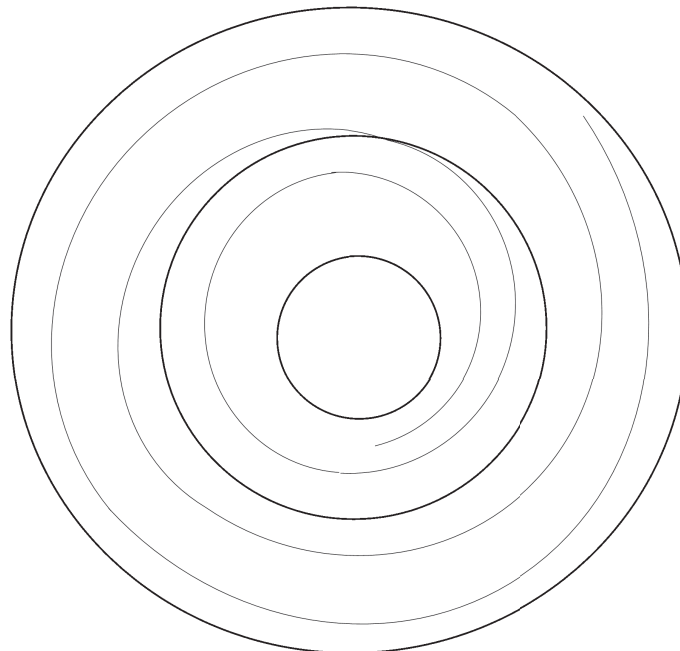


FIGURE 3.39 – Feuilletage de spirale.

Proposition 3.8.3. *Le feuilletage dans la figure 3.39 n'est pas transversalement affine.*

Démonstration. Si on prend l'arc transversal α au feuilletage \mathcal{F} qui a une extrémité sur le premier bord et l'autre extrémité sur le deuxième bord. Une application de premier retour f envoie l'arc transversal α vers lui-même. Donc la classe de mesure de α est multipliée par $\lambda = 1$. Mais pour un sous-arc α_1 de α ayant une extrémité sur le bord de l'anneau, f envoie α_1 vers un sous-arc de α différent de α_1 (soit plus petit ou bien plus grand de α_1). Donc la classe de mesure de α_1 est multipliée par $\lambda \neq 1$. Donc il y a une contradiction. Donc \mathcal{F} n'est pas transversalement affine. \square

Deuxième cas :

Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sont tangents aux deux bords $\partial S_1, \partial S_2$.

Soit $f_1 (f_2)$ une application de premier retour sur un segment transversal à $\mathcal{F}_1, (\mathcal{F}_2)$ qui a une extrémité sur $\partial S_1 (\partial S_2)$.

\mathcal{F} sera transversalement affine si et seulement si l'application de premier retour f sur S ; ($f|_{S_1} = f_1, f|_{S_2} = f_2$) préserve la classe de mesure pour chaque arc transversal au feuilletage \mathcal{F} .

Troisième cas :

Si, au moins, un des $\partial S_1, \partial S_2$ a une singularité, on revient au deuxième cas.

3.8.3 Combinaison d'un feuilletage mesuré avec un feuilletage transversalement affine

Si \mathcal{F}_1 est mesuré et \mathcal{F}_2 est transversalement affine (non mesuré).

Premier cas :

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sont transversales aux bords $\partial S_1, \partial S_2$. Voir Figure 3.40.

\mathcal{F} est transversalement affine si la mesure de α_1 appartient à la classe de la mesure de α_2 .

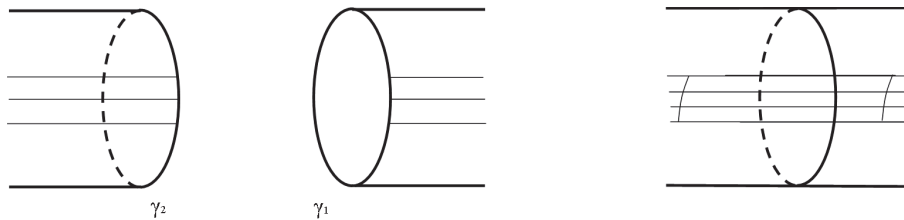


FIGURE 3.40 – .

Deuxième cas :

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sont tangents aux deux bords $\partial S_1, \partial S_2$. Voir figure 3.41

Une application de premier retour sur un arc quelconque α qui a une extrémité dans S_1 et l'autre extrémité dans S_2 envoie α vers un sous-arc de α mais elle envoie α_1 vers lui même. Donc cette application ne préserve pas la classe de mesure. Donc \mathcal{F} n'est pas transversalement affine.

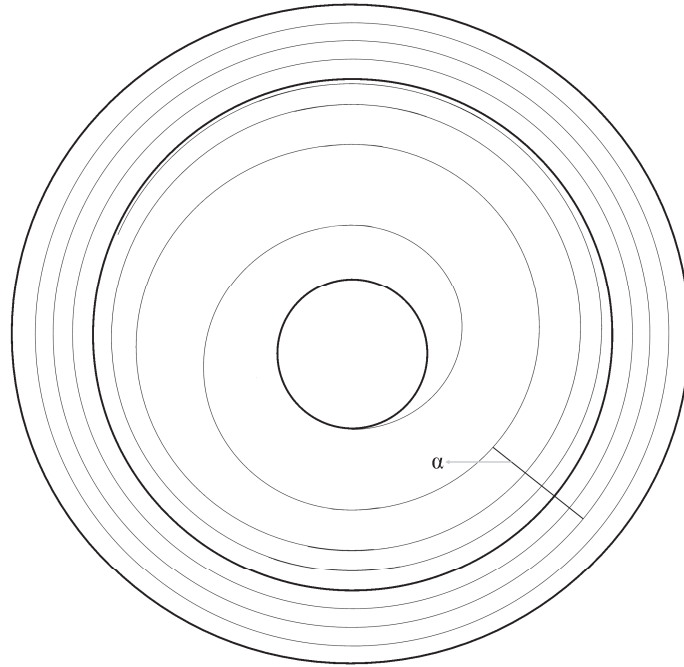


FIGURE 3.41 – Feuilletage non transversalement affine.

Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement affine orienté sur une surface fermée S de genre ≥ 2 . Si les singularités de \mathcal{F} sont des selles de Morse (singularité à 4 séparatrices) et \mathcal{F} ne possède pas de liaison entre selles. Alors il existe une famille de courbes simples fermées k transverse à \mathcal{F} et découpant S en pantalons ([9] p. 9). Pour chaque pantalon P_i le feuilletage $\mathcal{F}|_{P_i}$ est un feuilletage transversalement affine. D'après le paragraphe 3.5.1 il existe une autre famille de courbes \hat{k} qui décomposent S en pantalons feuilletés par des feuilletages mesurés et en anneaux feuilletés par composantes de ∂ -Reeb.

On en déduit que \mathcal{F} est décomposable à :

- un feuilletage mesuré \mathcal{F}_0 sur une sous-surface S_0 de S tel que \mathcal{F}_0 soit transverse à ∂S_0 ;
- composant de Reeb sur l'anneau ;
- composante de ∂ -Reeb sur l'anneau.

3.8. Combinaison de deux feuilletages

Bibliographie

- [1] S. KH. Aranson, I. U. Bronstein, and E. V. Zhuzhoma. Qualitative theory of foliations on closed surfaces. *Journal of Mathematical Sciences*, 90(3) :2111–2149, 1998.
- [2] P. Arnoux. Échange d’intervalles et flots sur les surfaces. *Séminaire de théorie ergodique*, 23-29 :5–38, 1980.
- [3] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poenaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Astérisque, 66-67, 1979.
- [4] A. Hatcher and U. Oertel. Affine lamination spaces for surfaces. *Pacific journal of mathematics*, 154(1) :87– 101, 1992.
- [5] G. Hector and U. Hirsch. *Introduction to the geometry of foliations Part A*. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1986.
- [6] G. Hector and U. Hirsch. *Introduction to the geometry of foliations Part B*. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1987.
- [7] G. Levitt. *Feuilletages des surfaces*. PhD thesis, Université Paris VII, 1981.
- [8] G. Levitt. Feuilletages des surfaces. *Annales de l’institut Fourier*, 32(2) :179–217, 1982.
- [9] G. Levitt. Pantalons et feuilletages des surfaces. *Topology*, 21(1) :9–33, 1982.
- [10] I. Liousse. *Feuilletages transversalement affines des surfaces et actions affines de groupes sur les arbres réels*. PhD thesis, Université de Toulouse, 1994.
- [11] I. Liousse. Dynamique générique des feuilletages transversalement affines des surfaces. *Bulletin de la S. M.F.*, 123(4) :493– 516, 1995.
- [12] I. Liousse and H. Marzougui. Échanges d’intervalles affines conjugués à des linéaires. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 22 :535–554, 2002.
- [13] U. Oertel and A. Papadopoulos. Affine foliations and covering hyperbolic structures. *Manuscripta math.*, 104 :383– 406, 2001.
- [14] U. Oertel and A. Papadopoulos. Broken hyperbolic structures and affine foliation on surfaces. *Indag. Math (N. S.)*, 15(2) :269– 282, 2004.
- [15] A. Papadopoulos. *Réseaux Ferroviaires, Difféomorphismes Pseudo-Anosov et Automorphismes symplectique de L’homologie d’une Surfaces*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, 1981.
- [16] A. Papadopoulos. Deux remarques sur la géométrie symplectique de l’espace des feuilletages mesurés sur une surface. *Annales de l’institut Fourier*, 36 :127–141, 1986.

- [17] A. Papadopoulos. Piecewise-linear coordinates for affine foliations on surfaces. *Milan Journal of Mathematics*, 70 :265–290, 2002.
- [18] A. Papadopoulos. Spaces of foliations on surfaces. *Rendiconti Seminario Facoltà Università Cagliari*, 73(1) :1–18, 2003.
- [19] R. C. Penner and J. L. Harer. *Combinatorics of train traks*, volume 125. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [20] W. Thurston. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton University Presse, 1979.
- [21] W. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bulletin (new series) of the american mathematical society*, 19(2) :417– 431, 1988.

Feuilletages mesurés et feuilletages transversalement affines

Résumé

On étudie les feuilletages transversalement affines des surfaces compactes, avec ou sans bord. On met en relation plusieurs méthodes de construction de tels feuilletages: application de premier retour et échanges d'intervalles affines (pour un feuilletage pas nécessairement orientable); mesure brisée sur un réseau ferroviaire; feuilletage mesuré sur le revêtement universel avec automorphismes du revêtement agissant de manière affine; recollement le long de leur bord de surfaces munies de feuilletages affines. On étudie l'injectivité des applications à image dans l'espace des classes d'équivalence des feuilletages transversalement affines qui résultent de ces diverses constructions.

Mots-clés : Feuilletages mesurés – feuilletages transversalement affines – réseaux ferroviaires- échanges d'intervalles.

Résumé en anglais

Measured foliations and affine foliations

We study the affine foliations on a compact surface in both cases: with a boundary and without a boundary. We connect between several ways of constructing these foliations. These ways are the first return map, the affine interval exchange (for a foliation which is not necessarily orientable), the train tracks with broken measures, the gluing affine foliations on surface with boundary, and the measured foliation on the universal covering with covering translation acting in affine ways. We study the injectivity of the applications with image in the space of equivalence classes of affine foliations which result from these various constructions.

Keywords : Measured foliations – affine foliations – train tracks – interval exchange.