UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

ED269

ÉCOLE DOCTORALE

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

THÈSE présentée par :

Laila TOUFAYLI

soutenue le : **18 Janvier 2013**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : MATHÉMATIQUES

TITRE de la thèse :

Stabilisation polynomiale et contrôlabilité exacte des équations des ondes par des contrôles indirects et dynamiques

THÈSE dirigée par :

M. B. RAO	Professeur, Université de Strasbourg
M. A. WEHBE	Professeur, université Libanaise

RAPPORTEURS :

M. S. NICAISE	Professeur, Université de Valenciennes
M. F. AMMAR-KHODJA	Maitre de conférences HDR, Universite de Franche-Comté

AUTRES MEMBRES DU JURY :

M. V. KOMORNIK	Professeur, Université de Strasbourg
M. A. MOURAD	Professeur, Université Libanaise
M. H. IBRAHIM	Maitre de conférences, Université Libanaise

Laila TOUFAYLI

Stabilisation polynomiale et contrôlabilité exacte des équations des ondes par des contrôles indirects et dynamiques

Résumé

La thèse est portée essentiellement sur la stabilisation et la contrôlabilité de deux équations des ondes moyennant un seul contrôle agissant sur le bord du domaine. Dans le cas du contrôle dynamique, le contrôle est introduit dans le système par une équation différentielle agissant sur le bord. C'est en effet un système hybride. Le contrôle peut être aussi applique directement sur le bord d'une équation, c'est le cas du contrôle indirecte mais non borne. La nature du système ainsi couple dépend du couplage des équations, et ceci donne divers résultats par la stabilisation (exponentielle et polynomiale) et la contrôlabilité exacte (espace contrôlable). Des nouvelles inégalités d'énergie permettent de mettre en œuvre la Méthode fréquentielle et la Méthode d'Unicité de Hilbert.

Mots-clés : semi groupes , équations des ondes, système d'équations couplées, contrôle dynamique frontière, contrôle direct, méthode de HUM, méthode des multiplicateurs, méthode fréquentielle, stabilité forte, stabilité uniforme, stabilité polynomiale, contrôlabilité exacte.

Résumé en anglais

This thesis is concerned with the stabilization and the exact controllability of two wave equations by means of only one control acting on the boundary of the domain. In the case of dynamic control, the control is introduced into the system by differential equation acting on the boundary. It is indeed a hybrid system. The control can be also applied directly on the boundary of one of the equations. In this case, the control is indirect but unbounded. The behavior of the obtained system depends on the ways of coupling. Various results are established for the stabilization (exponential or polynomial) and the exact controllability (controllable space of initial data). A new inequality of energy allows to apply the Frequency Method and the Hilbert Uniqueness Method.

Keywords: semi-group, wave equations, coupled system, boundary dynamical control, HUM method, multiplier method, frequency domain method, uniform stability, polynomial stability, exact controllability.

Remerciement

Mes premiers remerciements vont à mes directuers de thèse Bopeng Rao et Wehbe Ali, qui ont encadré cette thèse avec beaucoup de patience et de gentillesse. Ils ont motivé chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes et ont pu me faire progresser dans mes recherches.

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à mon directeur Wehbe Ali. A la fois en mathématiques et dans la vie quotidienne. Il m'a donné du soutien précieux avec patience et sagesse. Je lui suis très reconnaissante pour ses encouragements chaleureux, ses suggestions importantes. Je ne pourrais jamais imaginer cette thèse sans ses aides.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Vilmos Komornik, qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Merci à Messieurs Serge Nicaise et Farid Ammar-Khodja pour avoir examiné mes travaux au titre des rapporteurs et pour avoir suivi l'évolution de ma thèse et pour leurs conseils essentiels.

Merci à mon père et ma mère qui ont veillé depuis l'école primaire pour que je puisse arriver à ce niveau et je ne peux que leur exprimer toute ma gratitude et ma sincère reconnaissance. Je pense également à Zolfikar, à mes chèrs frères et ma chère soeur Layal pour leur présence à mes côtés.

Enfin, merci à tous ceux qui ont partagé ma vie ces dernières années et ont rendu possible ce travail.

Table des matières

Introduction

Le mécanisme des contrôles indirects et dynamiques a été introduit par Russell dans [30]. Depuis lors, il a retenu l'attention de nombreux chercheurs, citons par exemple les articles [50, 49, 48, 56, 60, 57] sur la stabilisation et la contrôlabilité exacte des systèmes hyperboliques par des feedbacks ou des contrôles internes et frontières indirectes et [4, 1, 3, 2], sur la stabilisation et la controlabilité exacte des systèmes hyperboliques par des feedbacks ou des contrôles frontières dynamiques. La thèse est consacrée à l'étude de la stabilisation polynomiale et la contrôlabilité exacte de quelques systèmes d'équations des ondes couplées par des feedbacks ou des contrôles indirects et dynamiques.

Partie 1. Stabilisation et contrôlabilité exacte frontière de système d'équation des ondes par des contrôles dynamiques.

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^N$ ayant une frontière Γ de classe C^2 composée de deux morceaux : Γ_0 la partie encastrée et Γ_1 la partie où on applique un amortissement dynamique où $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_N)$ est le vecteur normal unitaire exterieur à Γ. On suppose qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$(m \cdot \nu) \geq \gamma^{-1}, \quad \forall\, x \in \Gamma_1 \qquad \text{(H1)}$$

et

$$(m \cdot \nu) \leq 0, \quad \forall\, x \in \Gamma_0 \qquad \text{(H2)}$$

où $m(x) = x - x_0$ et $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$. On pose $R = \|m\|_\infty$.

Chapitre 1. Dans ce chapitre, on a étudié la stabilisation frontière d'une équation des ondes sous l'action d'un amortissement dynamique. On considère l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \eta(t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \eta_t(t) - u_t(t) = -\eta(t), & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où η désigne l'amortissement dynamique. Les conditions initiales sont données par

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{0.0.2}$$

$$\eta(0) = \eta_0, \quad x \in \Gamma_1, \tag{0.0.3}$$

Dans [1], Wehbe a étudié la stabilisation du système (0.0.1) dans le cas monodimensionnel. En utilisant la méthode de décomposition spectrale de Sz-Nagy-Foias, Foguel et Benchimol (voir [20]), il a montré que le système est fortement stable. Puis par une méthode de perturbation compacte de Russell, il a montré la non stabilité uniforme du système. Enfin, par une méthode de multiplicateurs, il a établi un tau de décroissance polynomial de l'énergie et par une méthode spectrale, il a prouvé l'optimalité du tau obtenu.

Dans le cas multidimensionnel, la résolvante de l'opérateur infinitésimal du semi-groupe associé est non compacte dans l'espace de l'énergie. Ainsi, pour étudier la stabilité forte du système, les méthodes classiques de décomposition spectrale de Sz-Nagy-Foias, Foguel et Benchimol (voir [20]) ne s'appliquent pas. De plus, à cause de la nature de l'espace de l'énergie, la méthode de perturbation compacte de Russell ne s'applique pas dans ce cas. Pour contourner le problème, on a construit une suite d'éléments du domaine de l'opérateur infinitésimal du semi-groupe associé et on a montré que la résolvante de l'opérateur n'est pas uniformément bornée sur l'axe immaginaire. Grâce à un théorème de Huang et Prüss (voir [33], [34]), on en déduit que le système n'est uniformément stable. Il est donc naturel d'espérer un taux de décroissance polynomial de l'énergie. Par une méthode de multiplicateurs, on a établi un taux de décroissance polynomial de l'énergie du système pour toutes solutions régulières. Plus précisement, on a montré :

Theorem 0.0.1. *Supposons que les conditions géométriques (H1) et (H2) soient vérifiées. Pour toute donnée initiale régulière, il existe une constante $M > 0$ dépendant seulement de u_0 telle que l'énergie E(t) du système (0.0.1) satisfait l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq E(0)\frac{2M}{M+t}, \ \forall t \geq 0. \tag{0.0.4}$$

Enfin, par une approximation de densité, on obtient la stabilisation forte du système. Ce travail est une généralisation des résultats publiés dans [1].

Chapitre 2. Dans ce chapitre, on s'intéresse à la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec un contrôle frontière dynamique. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times [0,T], \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \\ \eta_t - u_t = v, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \end{cases} \tag{0.0.5}$$

avec les données initiales suivantes

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega, \tag{0.0.6}$$

$$\eta(x,0) = \eta_0, \quad x \in \Gamma_1, \tag{0.0.7}$$

où v est le contrôle dynamique.

Dans le cas monodimensionnel, la contrôlabilité exacte du système (0.0.5) a été étudiée par Wehbe dans [2]. D'abord, il a établi deux inégalités d'observabilité directe et inverse. Ensuite, il a montré que le système est exactement contrôlable par un contrôle frontière dynamique.

Dans le cas multidimensionnel, des difficultés dues à la présence du contrôle dynamique sur la frontière necéssitent des nouvelles techniques pour établir la contrôlabilité exacte du système. En effet, pour appliquer la méthode HUM, le système ne peut pas s'écrire sous une forme abstraite du second ordre. D'abord, par une méthode de multiplicateurs, on établi le résultat d'observabilité suivant :

Theorem 0.0.2. *Soit $T > 2R$. Alors il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour toute donnée initiale régulière $\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \eta_0)$, la solution $\Phi(x,t)$ du système* *homogène (0.0.5), satisfait l'inégalité inverse suivante :*

$$\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_1 \int_0^T \left[\int_{\Gamma_1} |\partial_\nu \varphi|^2 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} |\partial_\nu \varphi_t|^2 \, d\Gamma \right] dt. \tag{0.0.8}$$

Ensuite, on a adapté la méthode HUM (voir [39], [40], [24]) au système abstrait du premier ordre et on a montré que le système est exactement contrôlable par un contrôle frontière dynamique pour des données initiales usuelles. Plus précisement :

Theorem 0.0.3. *Soit $T > 2R$. Alors pour tout donnée initiale usuele, il existe un contrôle*

$$v(t) = v_0(t) - \frac{d}{dt} v_1(t), \;\; v_0, v_1 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$$

tel que la solution (u, η) de problème (0.0.5) vérifie la condition finale

$$u(T) = u_t(T) = \eta(T) = 0.$$

Partie 2. Stabilisation et contrôlabilité exacte d'un système d'équations des ondes par un feedback et un contrôle frontière ou interne indirect.

Chapitre 3. Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$ ayant une frontière régulière Γ de classe C^2 et ν le vecteur unitaire normal exterieur à Γ. Dans ce chapitre, on a considéré un système de deux équations des ondes couplées avec un contrôle interne localement distribué dans Ω au voisinage de Γ et aggissant sur une seule équation :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - by_t = 0 \ , & \text{dans } \ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y_{tt} - a\Delta y + bu_t + cy_t = 0 \ , & \text{dans } \ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = y = 0, & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{0.0.9}$$

où a est une constante strictement positive, $b, c \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^+)$. Les conditions initiales sont données par

$$(u(x,0), y(x,0)) = (u_0, y_0), \quad (u_t(x,0), y_t(x,0)) = (u_1, y_1). \tag{0.0.10}$$

Soit $\alpha > 0$, on définit l'ouvert $\mathcal{O}_\alpha$ par :

$$\mathcal{O}_\alpha \equiv \{x \in \Omega : \mid x - y \mid < \alpha, \ \ y \in \Gamma\}. \tag{0.0.11}$$

Il est clair que si α est suffisament petite, on a $\mathcal{O}_\gamma \subset \Omega$. On suppose qu'il existe une constante positive $\beta > 0$ tel que la fonction c vérrifie :

$$c(x) \ > 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}_\alpha \subset \Omega. \tag{0.0.12}$$

Dans [7], Kapitonov a étudié la stabilité indirecte de système (0.0.9) dans le cas où le support de b coincide avec le support de c. Sous la condition d'égalité de vitesse de propagation, $a = 1$, il a établi un taux de décroissance exponentiel de l'énérgie du système. En revanche, quand les vitesses sont différentes, aucun taux de décroissance de l'énergie n'est discuté.

Dans [10], Ammar-Khodja et Bader ont étudié la stabilité indirecte du système (0.0.9) dans le cas monodimensionnel où le support de b et le support de c sont disjoints. Sous la condition d'égalité de vitesse de propagation, $a = 1$, ils ont établi un taux de décroissance exponentiel de l'énérgie dans un sous espace orthogonal à un sous espace de dimension finie mais non précisé. En revanche, quand les vitesses sont différentes, ils ont prouvé la stabilisation forte et non exponentiel mais aucun taux de décroissance de l'énergie n'est discuté.

Notre objectif est de généraliser les résultats publiés dans [7] dans le cas $a \neq 1$. Pour cela, on suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\mathcal{O}_\gamma \subset \mathcal{O}_\alpha \subset \Omega \quad \text{et} \quad b(x) \geq b_0 \quad \text{pour tout}\, x \in \mathcal{O}_\gamma \qquad \text{(Q 1)}$$

et

$$\text{supp}\partial_i b \subset \mathcal{O}_\alpha, \quad \text{pour tout} \;\; i = 1, 2..., N \qquad \text{(Q 2)}$$

D'abord, sous la condition $a = 1$, en utilisant un théorème de Huang (voir[33]) et Pruss(voir[34]), on établit la stabilisation uniforme du système :

Theorem 0.0.4. *Supposons que les conditions (Q1) et (Q2) sont vérifiées et* $b \geq 0$. *Soit* $a = 1$. *Alors, il existe des constantes strictement positives* $\omega > 0$ *et* $M \geq 1$ *telles que l'enérgie* $E(t)$ *du système (0.0.9) vérifie l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq Me^{-\omega t}, \quad \forall\; t \geq 0$$

pour toute solution faible du système (0.0.9).

Ensuite, dans le cas $a \neq 1$, en utilisant un théorème de Huang (voir[33]) et Pruss (voir[34]), on montre la non stabilité uniforme du système (0.0.9). Enfin, on utilise un résultat de [63] (voir aussi [41]) pour établir le taux de décroissance polynomial suivant :

Theorem 0.0.5. *Supposons que les conditions (Q1) et (Q2) sont vérifiées et* $b \geq 0$. *Soit* $a \neq 1$ *Alors, il existe une constante strictement positive* C *telle que l'énergie* $E(t)$ *du système (0.0.9) vérifie l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq \frac{C}{t}, \ \forall \ t > 0 \tag{0.0.13}$$

pour toute solution régulière du système (0.0.9).

Chapitre 4. Dans ce chapitre, on considère le même système du chapitre 3 dans le cas monodimensionnel sur $]0,1[$. A la différence du cas multidimensionnel, on suppose qu'il existe $0 \leq \alpha < \hat{\alpha} \leq 1$ tels que la fonction c est strictement positive sur $]\alpha, \alpha'[$. Alors l'amortissement est localisé à l'interieur du domaine et pas necessairement au voisinage de la frontière. On suppose, de plus, qu'il existe $0 < \gamma < \beta < 1$ tels que

$$[\gamma, \beta] \ \subset \ [\alpha, \alpha'], \ \text{ et } \ b(x) \geq b_0 \ > 0 \ \text{ pour tout } x \in]\gamma, \beta[\ \ (\text{Q } 3).$$

Chapitre 5. Dans ce chapitre, on a étudié la stabilsation frontière d'un système multidimensionnel de deux équations des ondes couplées :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + b y_t = 0 \ , & \text{dans } \ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y_{tt} - \Delta y - b u_t = 0 \ , & \text{dans } \ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ y = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = -y_t & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{0.0.14}$$

où ν est le vecteur unitaire normal exterieur à Γ et $b \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales sont données par

$$(u(x,0), y(x,0)) = (u_0(x), y_0(x)), \qquad (u_t(x,0), y_t(x,0)) = (u_1(x), y_1(x)). \tag{0.0.15}$$

Dans [60], Z. Lui et B. Rao ont étudié la stabilisation frontière indirecte d'un système d'équations des ondes faiblement couplées. Par une méthode spectrale, ils ont établi un taux de décroissance polynomial de l'énergie pour les solutions fortes. Dans [10], Ammar-Khodja et Bader, ont étudié la stabilité simultanée de système

(0.0.14) dans le cas monodimensionnel. Ils ont établi un taux de décroissance exponentiel de l'énérgie.

Dans ce chapitre, notre objectif est de généraliser les traveaux publiés dans [10]. D'abord, par une méthode spectrale de Benchimol (voir [20]), on a montré que le système est fortement stable pour des données initiales usuel. Ensuite, en utilisant un théorème de Huang (voir[33]) et Pruss(voir[34]), on établit la stabilisation uniforme du système :

Theorem 0.0.6. *Supposons que b est suffisament petit. Alors, il existe des constantes strictement positives $\omega > 0$ et $M \geq 1$ telles que l'enérgie $E(t)$ du système (0.0.14) vérifie l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq \; ME(0)\, e^{-\omega t}, \quad \forall\, t \geq 0$$

pour toute solution faible du système (0.0.14).

Chapitre 6. Dans ce chapitre, on étudit la contfôlabilité exacte frontière indirecte d'un système de deux équations des ondes couplées :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + b y_t = 0, & \text{dans } \; \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y_{tt} - \Delta y - b u_t = 0, & \text{dans } \; \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \; \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ y = 0, & \text{sur } \; \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ y = v, & \text{sur } \; \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{0.0.16}$$

avec les condition initiales :

$$(u(x,0), y(x,0)) = (u_0, y_0), \qquad (u_t(x,0), y_t(x,0)) = (u_1, y_1), \tag{0.0.17}$$

où b est une constante strictement positif.

En utilisant une méthode de multiplicateurs adaptés, on montre les inégalités d'observabilité suivantes :

$$E(0) \leq c_1 \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\frac{\partial \psi}{\partial \nu}|^2 d\Gamma dt \quad \forall T > M, \tag{0.0.18}$$

$$E(0) \geq c_2 \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\frac{\partial \psi}{\partial \nu}|^2 d\Gamma dt \quad \forall T > M, \tag{0.0.19}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives et $\Phi(x,t) = (\varphi(x,t), \psi(x,t), \xi(x,t), \varrho(x,t))$ est l'état du système homogène associé à (0.0.16), puis on étudie la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes sous l'action d'un contrôle frontière dynamique, en adaptant la méthode d'unicité hilbertienne, H.U.M., introduite par J.L.Lions (voir [39], [40], [24]) et on obtient le théorème suivant :

Theorem 0.0.7. *Supposons que $0 < b < b_0$, pour $T > T_0$ où b_0, T_0 sont des constantes donnés.*

$$\forall \; U_0 \in (L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))^2$$

il existe un contrôle

$$v(t) \in L^2(0, T, L^2(\Gamma_1))$$

tel que la solution du systéme contrôlé (0.0.16) vérifie

$$u(T) = u_t(T) = y(T) = y_t(T) = 0.$$

Partie 1

Stabilisation et contrôlabilité exacte frontière de système d'équation des ondes par des contrôles dynamiques.

Chapitre 1

Stabilisation frontière d'une équation des ondes sous l'action d'un amortissement dynamique

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la stabilisation de l'équation des ondes par un contrôle frontière dynamique. Ce genre de contrôles ont été introduits par les automaticiens en dimesnion finie (voir Francis [21]), Glover et Doyle ([22]). Ils ont été ensuite généralisés aux systèmes distribués (voir Russell [30], Morgul [26]).

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^N$ ayant une frontière Γ de classe C^2 composée de deux morceaux : Γ_0 la partie encastrée et Γ_1 la partie où on applique un amortissement dynamique. Considérons le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \eta(t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \eta_t(t) - u_t(t) = -\eta(t), & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

où ν désigne le vecteur normal unitaire extérieur à Γ et η désigne l'amortissement dynamique. Les conditions initiales sont données par :

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \ \Omega, \tag{1.1.2}$$

$$\eta(0) = \eta_0, \quad x \in \ \Gamma_1. \tag{1.1.3}$$

Dans ([1]), Wehbe a étudié la stabilisation du système (1.1.1) dans le cas monodimensionnel. D'abord, par l'application de la théorie de décomposition spectrale de Sz-Nagy-Foias (voir [32]), Foguel (voir [19]) et Benchimol (voir [20]), il a montré que le système (1.1.1) est fortement stable. Ensuite, par une méthode de multiplicateur introduite par Rao (dans [28]) et basée sur la théorie de perturbation compacte de Russell (voir [29]), il a montré la non stabilité uniforme du système (1.1.1). Enfin, par une méthode de multiplicateurs, il a établi un taux de décroissance rationnel de l'énérgie pour des solutions régulières. De plus, par l'analyse du spectre du générateur infinitésimal du semi-groupe associé, il a justifié l'optimalité du taux polynomiale obtenu par la méthode de multiplicateur pour les solutions régulières.

Dans le cas multidimensionnel, le problème est très différent. En effet, la résolvante du générateur infinitésimal du semi-groupe associé n'est pas compacte dans l'espace de l'énérgie. Ainsi, pour étudier la stabilité asymptotique du système, les méthodes classiques de décomposition spectrale de Benchimol (voir [20]) ne s'appliquent pas dans ce cas. De plus, l'opérateur du générateur infinitésimal ne s'écrit pas comme somme d'un opérateur m-dissipatif et d'un opérateur compact, alors la méthode de perturbation compacte de Russell (voir [29]) ne s'applique pas.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la stabilité forte, uniforme et pôlynomiale du système (1.1.1).

Soit u un solution régulière du système (1.1.1). On définit son énergie associée par

$$E(t) = \int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx + \int_{\Gamma_1} \eta^2(t) d\Gamma. \tag{1.1.4}$$

Par un calcul direct, on a

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_{\Gamma_1} \eta^2(t) dt \leq 0. \tag{1.1.5}$$

Alors le système est dissipatif au sens où l'énergie est décroissante.

En introduisant $U(t) = (u, u_t, \eta)$, on transforme le problème initial sous la forme suivante :

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.1.6}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est m-dissipatif dans l'espace de l'énergie. Ainsi on montre que le problème est bien posé au sens de semi-groupes de contractions.

La résolvante de l'opérateur $\mathcal{A}$ n'est pas compacte dans l'espace de l'énergie, alors les méthodes classiques comme la décomposition spectrale de Sz-Nagy-Foias (voir

[32]), Foguel (voir [19]) et Benchimol (voir [20]) ne s'appliquent pas dans ce cas. Donc pour contourner le problème, on construit une suite d'éléments du domaine l'opérateur infinitésimal du semi groupe associé et on montre que la résolvante de l'opérateur n'est pas uniformément bornée sur l'axe imaginaire. Ensuite, grâce à un théorème de Huang et Prüss (voir [33], [34]), on déduit que le système n'est pas uniformément stable. Il est donc naturel d'espérer un taux de décroissance polynomial de l'énergie. Alors par une méthode de multiplicateurs introduite par Rao (dans [28]) et basée sur une technique d'analyse non linéaire, on a établi un taux de décroissance polynomial de l'énergie du système pour toutes solutions régulières. Enfin, par une approche de la densité et de la contraction du semi-groupe associé, on a établit la décroissance fortement et asymptotiquement de l'énergie du système (1.1.1).

1.2 Formulation du problème

On va formuler le problème (1.1.1) dans un espace de Hilbert. Pour cela, on définit les espaces suivants :

$$W = \{u \in H^1(\Omega);\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0\}, \tag{1.2.1}$$

muni de la norme suivante :

$$\| u \|_W^2 = \int_\Omega | \nabla u |^2 \ dx \tag{1.2.2}$$

et l'espace

$$V = L^2(\Omega).$$

En identifiant $L^2(\Omega)$ à son dual, on obtient les injections compactes et denses suivantes :

$$W \subseteq V \equiv V' \subseteq W'.$$

Maintenant, on définit l'espace de l'énergie comme suit :

$$\mathcal{H} = W \times V \times L^2(\Gamma_1) \tag{1.2.3}$$

muni du produit scalaire suivant :

$$(U, \widetilde{U})_{\mathcal{H}} = \int_\Omega (\nabla u, \nabla \widetilde{u}) dx + \int_\Omega v \widetilde{v} dx + \int_{\Gamma_1} \eta \widetilde{\eta} d\Gamma \tag{1.2.4}$$

pour tout $U = (u, v, \eta)$, $\widetilde{U} = (\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\eta}) \in \mathcal{H}$. Pour donner un sens convenable au système (1.1.1), on définit l'opérateur linéaire non borné $\mathcal{A}$ par :

$$D(\mathcal{A}) = \{(u, v, \eta) \in \mathcal{H} : \Delta u \in L^2(\Omega), v \in W, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta = 0, \ \text{ sur } \Gamma_1\} \tag{1.2.5}$$

et

$$\mathcal{A}U = (v, \Delta u, \gamma(v) - \eta), \quad \forall U = (u, v, \eta) \in D(\mathcal{A}), \tag{1.2.6}$$

où l'opérateur de trace γ est défini par :

$$\gamma : v \to v|_{\Gamma_1}.$$

Si $U = (u, u_t, \eta)$ est une solution régulière du système (1.1.1), alors on a l'équation abstraite suivante :

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U\,, \\ U(0) = U_0 \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{1.2.7}$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ a les propriétés suivantes :

Proposition 1.2.1. *L'opérateur $\mathcal{A}$ défini par (1.2.5), (1.2.6) est m-dissipatif dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Soit $U = (u, v, \eta) \in D(\mathcal{A})$. En utilisant (1.2.5)-(1.2.6), on obtient :

$$(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = \big((v, \Delta u, \gamma(v) - \eta), (u, v, \eta)\big)_{\mathcal{H}}.$$

En utilisant (1.2.4) et la formule de Green, on obtient :

$$\mathrm{Re}\{(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}}\} = -\int_{\Gamma_1} \eta^2 d\Gamma \leq 0.$$

On déduit que l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ est dissipatif dans l'espace de l'énérgie $\mathcal{H}$. Maintenant, soit $U_0 = (u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$. On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} U - \mathcal{A}U = U_0, \\ U \in D(\mathcal{A}). \end{cases} \tag{1.2.8}$$

Ceci révient au même de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} u - v = u_0, \\ v - \Delta u = v_0, \\ \eta - \gamma(v) + \eta = \eta_0. \end{cases} \tag{1.2.9}$$

En éliminant v dans (1.2.9), et en utilisant la condition $\partial_\nu u + \eta = 0$ sur Γ_1, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} u - \Delta u &= v_0 + u_0 \quad \text{dans} \;\; L^2(\Omega), && (1.2.10)\\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{u}{2} &= \frac{u_0}{2} - \frac{\eta_0}{2} \quad \text{dans} \;\; L^2(\Gamma_1). && (1.2.11) \end{aligned}$$

Soit $\varphi \in W$ une fonction test. En multipliant l'équation (1.2.10) par φ et en utilisant la formule de Green, on déduit :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_\Omega u\varphi dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} u\varphi d\Gamma = \int_\Omega (u_0 + v_0)\varphi dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}(u_0 - \eta_0)\varphi d\Gamma. \tag{1.2.12}$$

Maintenant, on définit la forme bilinéaire a sur $W \times W$ par :

$$a(u,\varphi) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_\Omega u\varphi dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} u\varphi d\Gamma$$

et la forme linéaire L sur W par :

$$L(\varphi) = \int_\Omega (u_0 + v_0)\varphi dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}(u_0 - \eta_0)\varphi d\Gamma.$$

En utilisant les inégalitées de Caushy-Shwartz, de Poincaré et le théorème des traces, on obtient :

$$|a(u,\varphi)| \le c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.2.13}$$

où c est une constante positive dépendant de Ω seulement. Ceci implique que a est continue.

D'autre part, on a

$$a(u,u) \ge \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}, \text{ pour tout } u \in W.$$

Ceci implique que a est coercive sur $W \times W$.

On montre aussi sans difficulté, que :

$$|L(\varphi)| \leq C\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.2.14}$$

pour tout $\varphi \in W$. Ainsi L est une forme linéaire et continue sur W.

Enfin grâce au théorème de Lax-Milgram (voir [18]), on déduit qu'il existe une solution unique $u \in W$ du problème :

$$a(u,\varphi) \;=\; L(\varphi),\;\; \forall\; \varphi \in W. \tag{1.2.15}$$

En particulier, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset W$, on obtient :

$$a(u,\varphi) \;=\; L(\varphi),\;\; \forall\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.2.16}$$

Par la définition de la dérivée au sens des distributions, on obtient :

$$< u - \Delta u, \varphi >_{\{D',D\}} = < u_0 + v_0, \varphi >_{\{D',D\}} \quad \forall\; \varphi \in D(\Omega). \tag{1.2.17}$$

On en déduit

$$u - \Delta u \;=\; u_0 + v_0,\;\; \text{dans} \;\; D'(\Omega). \tag{1.2.18}$$

Comme $u_0 + v_0 \in L^2(\Omega)$, en utilisant l'équation (1.2.18), on déduit que :

$$u - \Delta u \;=\; u_0 + v_0,\;\; \text{dans} \;\; L^2(\Omega). \tag{1.2.19}$$

Puis, en utilisant de nouveau la formule de Green dans (1.2.17), d'après (1.2.19), on obtient :

$$\int_{\Gamma_1} (\partial_\nu u + \frac{u}{2})\varphi d\Gamma = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} (u_0 - \eta_0)\varphi d\Gamma, \quad \forall\; \varphi \in W, \tag{1.2.20}$$

Ceci implique

$$\partial_\nu u + \frac{u}{2} = \frac{1}{2}(\eta_0 - u_0), \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \tag{1.2.21}$$

Enfin, on définit $v \in W$ et $\eta \in L^2(\Gamma_1)$ par :

$$v = u - u_0 \in W \quad \text{et} \quad 2\eta - \gamma(v) = \eta_0. \tag{1.2.22}$$

On déduit que $U = (u, v, z) \in D(\mathcal{A})$ est une solution du système (1.2.8).

Theorem 1.2.2. *(Existence et unicité).*
(1) Si $U_0 = (u_0, u_1, \eta_0) \in D(\mathcal{A})$*, alors le problème (1.2.7) admet une solution forte* $U = (u, u_t, \eta)$ *vérifiant :*

$$\begin{cases} u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; V) \cap C^1(\mathbb{R}_+; W) \cap C^0(\mathbb{R}_+; H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \cap W), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \eta(t) \ \in \ C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Gamma_1)). \end{cases} \tag{1.2.23}$$

(2) Si $U_0 = (u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$*, alors le problème (1.2.7) admet une solution faible* $U = (u, u_t, \eta)$ *vérifiant*

$$\begin{cases} u \ \in \ C^1(\mathbb{R}_+; V) \ \cap \ C^0(\mathbb{R}_+; W), \\ \eta(t) \ \in \ C^0(\mathbb{R}_+, L^2(\Gamma_1)). \end{cases} \tag{1.2.24}$$

Démonstration. (1) Soit $U_0 \in D(\mathcal{A})$. Alors d'après le théorème de Hille-Yosida (voir [27]), le problème (1.2.7) admet une solution unique $U = (u, u_t, \eta) \in D(\mathcal{A})$ telle que

$$U \in C^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}).$$

Ceci combinée avec l'injection continue

$$D(\mathcal{A}) \subset (H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \cap W) \times W \times L^2(\Gamma_1)$$

implique que

$$u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, V) \cap C^1(\mathbb{R}_+, W) \cap C^0(\mathbb{R}^+, H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \cap W).$$

D'autre part, on a $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -\eta(t) \in C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Gamma_1))$, ce qui donne un sens à la trace $\dfrac{\partial u_t}{\partial \nu}$, bien que u_t appartient seulement à l'espace $H^1(\Omega)$ pour tout $t > 0$.

(2) Soit $U_0 \in \mathcal{H}$. Alors d'après le théorème de Hille-Yosida le problème (1.2.7) admet une solution unique faible

$$U = (u, u_t, \eta)$$

telle que $u(t) \in C^0(\mathbb{R}_+, W)$, $u_t(t) \in C^0(\mathbb{R}_+, V)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -\eta(t) \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\Gamma_1))$. Ceci achève la démonstration.

1.3 Etude de la stabilité non uniforme.

Dans ce paragraphe, on va montrer la non stabilité uniforme du système (1.1.1) en utilisant un argument de Huang (voir [33]) et Pruss(voir [34]). Bien que l'opérateur $\mathcal{A}$ n'a pas de valeur propre imaginaire, sa non compacité ne permet pas d'utiliser la méthode de décomposition spectrale de Sz-Nagy-Foias (voir [32]), Foguel (voir [19]) et Benchimol (voir [20]) comme dans le cas de dimension d'espace un.

On définit l'opérateur linéaire non borné A_0, par :

$$A_0 \,:\, D(A_0) \subseteq V \to V,$$

où

$$D(A_0) = \{u \in W \text{ et } \Delta u \in L^2(\Omega) \text{ et } \partial_\nu u + u = 0, \text{ sur } \Gamma_1\} \tag{1.3.1}$$

et

$$A_0 u = -\Delta u, \qquad \forall\, u \in D(A_0). \tag{1.3.2}$$

Proposition 1.3.1. *L'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans (1.2.5) et (1.2.6) n'admet pas de valeur propre imaginaire pure.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{A}$ admette une valeur propre imaginaire pure. Alors il existe $\beta \in \mathbb{R}$ et $U = (u, v, \eta) \in D(\mathcal{A})$ tel que

$$\mathcal{A}U = i\beta U. \tag{1.3.3}$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned} v &= i\beta u, \quad \text{dans}\,\Omega, && (1.3.4)\\ \Delta u &= i\beta v, \quad \text{dans}\,\Omega, && (1.3.5)\\ \gamma(v)-\eta &= i\beta\eta, \quad \text{sur}\,\Gamma_1. && (1.3.6)\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\partial_\nu u+\eta=0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \tag{1.3.7}$$

En combinant (1.3.4) et (1.3.5), on obtient :

$$\Delta u+\beta^2 u=0, \;\; \text{dans } \Omega. \tag{1.3.8}$$

En combinant (1.3.4) et (1.3.6), on obtient

$$(1+i\beta)\eta=i\beta\gamma(u), \;\; \text{sur} \quad \Gamma_1. \tag{1.3.9}$$

En multipliant l'équation (1.3.8) par $\overline{u}$ et en utilisant la formule de Green, on déduit :

$$-\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\beta^2\int_\Omega |u|^2dx+\int_{\Gamma_1}\partial_\nu u u d\Gamma=0. \tag{1.3.10}$$

Combinant (1.3.7), (1.3.9) et (1.3.10), on conclut que

$$\left\{\begin{array}{l} -\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\beta^2\int_\Omega |u|^2dx-\frac{i\beta}{1+\beta^2}\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma \\ -\displaystyle\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma=0. \end{array}\right. \tag{1.3.11}$$

La partie imaginaire de (1.3.11) vaut zéro, ce qui implique que

$$u=0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \tag{1.3.12}$$

En utilisant l'équation (1.3.9), on déduit que :

$$\eta=0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \tag{1.3.13}$$

En utilisant (1.3.7), on obtient :

$$\partial_\nu u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1. \tag{1.3.14}$$

D'après les équations (1.3.8), (1.3.12) et (1.3.14), on a le problème suivant :

$$\begin{aligned} \beta^2 u + \Delta u &= 0, \quad \text{dans } \Omega, && (1.3.15)\\ u &= 0, \quad \text{sur } \Gamma, && (1.3.16)\\ \partial_\nu u &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_1. && (1.3.17) \end{aligned}$$

Grâce au Théorème d'unicité de Carleman, on en déduit que $u \equiv 0$. La démonstration est ainsi terminée.

L'opérateur A_0 a les proptiétés suivantes :

Proposition 1.3.2. *L'opérateur A_0 défini par (1.3.1) et (1.3.2) est auto-adjoint et à résolvante compacte dans V.*

Démonstration. Montrons d'abord que l'opérateur A_0 est maximal monotone. Soit $u \in D(A_0)$, on a :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{(A_0 u, u)_V\} = \operatorname{Re}\{(-\Delta u, u)_V\} \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq 0. \end{cases} \tag{1.3.18}$$

Alors A_0 est monotone.

Soit $f \in W$, on montre que le problème $u - A_0 u = f$ admet une solution unique, ceci équivaut à résoudre le système :

$$\begin{cases} u + \Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -u, & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{1.3.19}$$

En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on montre d'abord que le système (1.3.19) admet une solution $u \in W$. Puis comme $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$, grâce aux résultats de régularité, on obtient que $u \in H^2(\Omega)$, ceci implique que $u \in D(A_0)$.

Ensuite, pour tout $u, v \in D(A_0)$, on a :

$$(A_0 u, v)_W = (u, A_0 v)_W. \tag{1.3.20}$$

On déduit que A_0 est symétrique. Enfin, A_0 est maximal monotone et symétrique, il est donc auto-adjoint. En plus, l'injection compacte de W dans $L^2(\Omega)$ montre la compacité de la résolvante de A_0. La démonstration est achevée.

Proposition 1.3.3. *L'énergie $E(t)$ du système (1.1.1) n'a pas de taux de décroissance uniforme.*

Démonstration. D'après la Proposition précédante, l'opérateur A_0 est auto-adjoint et à résolvante compacte. Alors ses vecteurs propres forment une base hilbertienne dans V. Soient $\mu_n^2 (n \in \mathbb{Z})$ les valeurs propre de A_0 et $\varphi^n \in D(A_0)$ les vecteurs propres associés tels que $\| \varphi_n \|_{\mathcal{H}} = 2$. Alors, on a :

$$A_0 \varphi^n = \mu_n^2 \varphi^n. \tag{1.3.21}$$

On définit la suite Φ_n par : $\Phi_n = (\varphi_n, \psi_n, \xi_n)$ où $\psi_n = i\mu_n \varphi_n$ et $\xi_n = -\partial_\nu \varphi_n$, on vérifie sans peine que $\Phi_n \in D(\mathcal{A})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant (1.3.1) et (1.3.21), on obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{A}\Phi^n - i\mu_n \Phi^n \\ \quad = (\psi^n - i\mu_n \varphi^n, \Delta\varphi^n - i\mu_n \psi^n, \gamma(\psi^n) - i\mu_n \xi^n - \xi^n) \\ \quad = (0, 0, -\xi^n). \end{cases} \tag{1.3.22}$$

Alors,

$$\| \mathcal{A}\Phi^n - i\mu_n \Phi^n \|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\Gamma_1} | \xi^n |^2 \, d\Gamma = \int_{\Gamma_1} | \frac{\partial \varphi^n}{\partial \nu} |^2 \, d\Gamma = \int_{\Gamma_1} |\varphi_n|^2 d\Gamma. \tag{1.3.23}$$

Pour fixer les idées, on normalise ψ^n, $\| \psi^n \|_V = 1$. Alors de l'équation(1.3.21), on déduit :

$$\int_{\Gamma_1} |\varphi^n|^2 d\Gamma + \int_\Omega |\nabla \varphi^n|^2 dx = \int_\Omega |\mu_n \varphi^n|^2 dx = \int_\Omega |\psi^n|^2 dx = 1. \tag{1.3.24}$$

Ceci donne que :

$$\| \Phi^n \|_{\mathcal{H}}^2 = 2. \tag{1.3.25}$$

D'autre part, grâce à l'inégalité d'interpolation, on a :

$$\|\varphi^n\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \le c\|\varphi^n\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi^n\|_W \le \frac{c}{\mu_n} \| \psi^n \|_{L^2(\Omega)} \| \varphi^n \|_W \le \frac{c}{\mu_n}. \tag{1.3.26}$$

En insérant (1.3.26) dans (1.3.23), on trouve

$$\| \mathcal{A}\Phi^n - i\mu_n \Phi^n \|_{\mathcal{H}}^2 \le \frac{c}{\mu_n}.$$

Ceci combiné avec (1.3.25) implique que :

$$\lim_{n\to\infty} \| (\mathcal{A} - i\mu_n)^{-1} \|_{\mathcal{H}} \to \infty.$$

D'aprés la caractérisation de Huang (voir [33]), on montre que l'énérgie du système (1.1.1) n'a pas de taux de décroissance uniforme.

Remarque. Comme la résolevante de $\mathcal{A}$ n'est pas compacte, la méthode de décomposition spectrale de Sz-Nagy-Foias (voir [32]), Foguel (voir [19]) et Benchimol (voir [20]) ne s'applique pas pour conclure la stabilité forte du système. Nous reviendrons sur ce problème par une approche de densité après avoir établi le taux de décroissance rationnel dans la section suivante.

1.4 Etude de la stabilité polynomiale.

Bien que l'énergie $E(t)$ du système (1.1.1) n'a pas de taux de décroissance uniforme, il est naturel d'espérer un taux de décroissance rationnel de l'énergie $E(t)$. Pour cela, on applique une méthode de multiplicateurs, qui est basée sur la fonction de Lyapunov et une thechnique introduite dans ([28]). Pour cela, on a besoin des conditions géométriques sur le domaine Ω.
Supposons que

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \text{ tel que } \Gamma_0 \neq \emptyset \text{ et } \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset, \tag{H 1}$$

et qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$(m \cdot \nu) \geq \gamma^{-1}, \quad \forall\, x \in \Gamma_1 \quad \text{ et } \quad (m \cdot \nu) \leq 0, \quad \forall\, x \in \Gamma_0, \tag{H 2}$$

où $m(x) = x - x_0$ et $(\ \cdot\ )$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$.

Posons également

$$R = \| m \|_\infty .$$

Theorem 1.4.1. *Supposons que les conditions géométriques (H1) et (H2) sont vérifiées. Alors pour toute donnée initiale $U_0 \in D(\mathcal{A})$, il existe une constante $M > 0$ dépendant seulement de u_0 telle que l'énergie du système (1.1.1) satisfait l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq E(0)\frac{2M}{M+t}, \ \forall t \geq 0. \tag{1.4.1}$$

Commencons par citer un résultat classique de Haraux (voir [24]).

Lemma 1.4.2. *Soit $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\int_S^\infty E^2(t)dt \leq ME(0)E(S), \forall S > 0. \tag{1.4.2}$$

Alors $E(t)$ vérifie l'estimation suivante :

$$E(t) \leq E(0)\frac{2M}{M+t}, \ \forall \ t \geq 0. \tag{1.4.3}$$

Dans la suite, on désigne par $E_1(t)$, l'énergie d'ordre supérieure :

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \parallel \mathcal{A}U(t) \parallel_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \parallel U_t(t) \parallel_{\mathcal{H}}^2, \ \forall t \geq 0. \tag{1.4.4}$$

Lemma 1.4.3. **(i)** *Soit $U_0 \in \mathcal{H}$. Alors pour tous $0 \leq S \leq T < \infty$, on a :*

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} \eta^2(t)dt \leq E(0). \tag{1.4.5}$$

(ii) *Soit $U_0 \in D(\mathcal{A})$. Alors pour tous $0 \leq S \leq T < \infty$, on a :*

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} \eta_t^2(t)dt \leq E_1(0). \tag{1.4.6}$$

Démonstration. **(i)** En utilisant (1.1.5), on a :

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} \eta^2(t)dt = -\int_S^T E_t(t)dt \leq E(0), \quad 0 \leq S \leq T < \infty. \tag{1.4.7}$$

(ii) Si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors $U(t) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$. On pose :

$$\widetilde{U} = \frac{dU}{dt} \ \in \mathcal{H}.$$

En dérivant l'équation (1.2.7) par rapport à la variable $t > 0$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{U}(t)}{dt} = \mathcal{A}\widetilde{U}, \\ \widetilde{U}(0) = \mathcal{A}\widetilde{U}_0. \end{cases} \tag{1.4.8}$$

En appliquant (1.4.4) à $\widetilde{U} = U_t$, on obtient :

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} \eta_t^2(t)dt \leq E_1(0). \tag{1.4.9}$$

Lemma 1.4.4. *Soit u une solution forte du système (1.1.1). Aors pour tous $0 \leq S < T < \infty$, on a :*

$$\frac{N}{2}\int_S^T \int_\Omega |u_t|^2 E(t)dxdt + \frac{2-N}{2}\int_0^T \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 E(t)dxdt \leq M_1 E(S)E(0), \tag{1.4.10}$$

où

$$M_1 = 3c_1 + \frac{RE_1(0)}{E(0)} + \frac{R^2\gamma}{2} + \frac{3R}{2}$$

et c_1 est une constante dépendant de R.

Démonstration. On utilise le multiplicateur $(m\cdot\nabla u)E(t)$ qui est souvent employé dans des problèmes non linéaires. En multipliant la première équation du système (1.1.1) par $(m \cdot \nabla u)E(t)$ et en intégrant par rapport à x et t, on obtient

$$\int_S^T \int_\Omega (u_{tt} - \Delta u)(m \cdot \nabla u)E(t)dxdt = 0.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient l'équation suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\int_\Omega u_t(m\cdot\nabla u)E(t)dx\right]_S^T-\int_S^T\int_\Omega u_t(m\cdot\nabla u)E_t(t)dxdt-\\ \int_S^T\int_\Omega u_t(m\cdot\nabla u_t)E(t)dxdt-\int_S^T\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla u)E(t)d\Gamma dt+\\ \int_S^T\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla(m\cdot\nabla u)E(t)dxdt=0.\end{array}\right. \tag{1.4.11}$$

En utilisant de nouveau la formule de Green, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}\int_S^T\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla(m\cdot\nabla u)E(t)dxdt\ =\frac{2-N}{2}\int_S^T\int_\Omega\mid\nabla u\mid^2 E(t)dxdt+\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\frac{1}{2}\int_S^T\int_\Gamma(m\cdot\nu)\big(|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2+|\frac{\partial u}{\partial\tau}|^2\big)E(t)d\Gamma dt.\end{array}\right. \tag{1.4.12}$$

De même, on a :

$$\left\{\begin{array}{l}\int_S^T\int_\Omega u_t(m\cdot\nabla u_t)E(t)dxdt\\ \quad=\frac{1}{2}\int_S^T\int_\Omega(m\cdot\nabla(|u_t|^2))E(t)dxdt\\ \quad=\frac{1}{2}\int_S^T\int_\Gamma(m\cdot\nu)|u_t|^2E(t)d\Gamma dt-\frac{N}{2}\int_S^T\int_\Omega|u_t|^2E(t)dxdt.\end{array}\right. \tag{1.4.13}$$

En insérant (1.4.12) et (1.4.13) dans (1.4.11), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\int_\Omega u_t(m\cdot\nabla u)E(t)dx\right]_S^T-\int_S^T\int_\Omega u_t(m\cdot\nabla u)E_t(t)dxdt-\\ \frac{1}{2}\int_S^T\int_\Gamma(m\cdot\nu)|u_t|^2E(t)d\Gamma dt+\frac{2-N}{2}\int_S^T\int_\Omega\mid\nabla u\mid^2 E(t)dxdt-\\ \int_S^T\int_\Gamma[(m.\nu)|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2+(m.\tau)(\frac{\partial u}{\partial\nu})(\frac{\partial u}{\partial\tau})\tau)]E(t)d\Gamma dt+\\ \frac{1}{2}\int_S^T\int_\Gamma(m\cdot\nu)\left(|\frac{\partial u}{\partial\tau}|^2+|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2\right)E(t)d\Gamma dt+\\ \frac{N}{2}\int_S^T\int_\Omega|u_t|^2E(t)dxdt=0.\end{array}\right. \tag{1.4.14}$$

Comme $u = 0$ sur Γ_0, alors $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ sur Γ_0 et on a :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{N}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t|^2 E(t)dxdt + \frac{2-N}{2}\int_S^T\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 E(t)dxdt + \\ \left[\int_\Omega u_t(m\cdot\nabla u)E(t)dx\right]_S^T - \int_S^T\int_\Omega u_t(m\cdot\nabla u)E_t(t)dxdt - \\ \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u_t|^2E(t)d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_S^T\int_\Gamma (m\cdot\nu)|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2)E(t)d\Gamma dt + \\ \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial u}{\partial\tau}|^2E(t)d\Gamma dt - \int_S^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\tau)(\frac{\partial u}{\partial\nu})(\frac{\partial u}{\partial\tau})E(t)d\Gamma dt = 0. \end{array}\right. \tag{1.4.15}$$

De l'équation (1.4.15), on déduit que

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{N}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t|^2 E(t)dxdt + \frac{(2-N)}{2}\int_S^T\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 E(t)dtdx = \\ -\left[\int_\Omega u_t(m\cdot\nabla u)E(t)dx\right]_S^T + \int_S^T\int_\Omega u_t(m\cdot\nabla u)E_t(t)dtdx \\ +\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u_t|^2E(t)dtd\Gamma + \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2E(t)dtd\Gamma \\ +\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2E(t)d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial u}{\partial\tau}|^2E(t)d\Gamma dt \\ +\int_S^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\tau)(\frac{\partial u}{\partial\nu})(\frac{\partial u}{\partial\tau})E(t)d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{1.4.16}$$

En utilisant la condition géométrique (H 2), on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial u}{\partial\tau}|^2d\Gamma dt + \int_S^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\tau)(\frac{\partial u}{\partial\nu})(\frac{\partial u}{\partial\tau})d\Gamma dt \ \leq \\ -\frac{1}{2}\gamma^{-1}\int_S^T\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial u}{\partial\tau}|^2d\Gamma dt + \int_S^T\int_{\Gamma_1}R|\frac{\partial u}{\partial\nu}||\frac{\partial u}{\partial\tau}|d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{1.4.17}$$

D'autre part, on a

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\gamma^{-1}\int_S^T\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial u}{\partial\tau}|^2d\Gamma dt + \int_S^T\int_{\Gamma_1}R|\frac{\partial u}{\partial\nu}||\frac{\partial u}{\partial\tau}|d\Gamma dt = \\ -\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}\left(\sqrt{\gamma^{-1}}|\frac{\partial u}{\partial\tau}| - R\sqrt{\gamma}|\frac{\partial u}{\partial\nu}|\right)^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}R^2\gamma|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{1.4.18}$$

En combinant (1.4.17) et (1.4.18), on déduit que

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)|\frac{\partial u}{\partial \tau}|^2 d\Gamma dt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} (m\cdot\tau)(\frac{\partial u}{\partial \nu})(\frac{\partial u}{\partial \tau}) d\Gamma dt \leq \\ \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} R^2\gamma |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 d\Gamma dt. \end{aligned} \right. \tag{1.4.19}$$

En utilisant (1.4.4) et le fait que $E(t)$ est décroissante, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} R^2\gamma |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 E(t) d\Gamma dt = \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} R^2\gamma |\eta^2(t)|^2 E(t) d\Gamma dt \\ \leq \frac{1}{2} R^2 \gamma E(0) E(S). \end{aligned} \right. \tag{1.4.20}$$

De plus, en utilisant les conditions aux bords dans système (1.1.1), on déduit

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)|u_t|^2 E(t) d\Gamma dt = \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} (m.\nu)(\eta(t)+\eta_t(t))^2 E(t) d\Gamma dt \\ \leq \int_S^T \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)(\eta^2(t)+\eta_t^2(t)) E(t) d\Gamma dt. \end{aligned} \right. \tag{1.4.21}$$

En utilisant (1.4.5) et (1.4.6) dans (1.4.21), on obtient

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)|u_t|^2 E(t) d\Gamma dt \leq E(0)E(S)[R + \frac{RE_1(0)}{E(0)}]. \tag{1.4.22}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Shwartz, on obtient

$$\int_\Omega u_t (m\cdot\nabla u) dx \leq c_1 E(t), \; \forall\, t > 0. \tag{1.4.23}$$

En multipliant (1.4.23) par $E(t)$, on obtient

$$-\Big[\int_\Omega u_t(m\cdot\nabla u)E(t)dx\Big]_S^T \leq 2c_1 E^2(S). \tag{1.4.24}$$

De plus, en multipliant (1.4.23) par $E_t(t)$ et en intégrant par rapport à t, on obtient l'inégalitée suivante :

$$\int_S^T \int_\Omega u_t(m\cdot\nabla u)E_t(t) dx dt \;\leq \int_S^T c_1 E(t)E_t(t) dt \leq c_1 E^2(S). \tag{1.4.25}$$

Puis en utilisant (1.4.5), on déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 E(t)d\Gamma dt = \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)(\eta(t))^2 E(t)d\Gamma dt \\ \qquad\qquad \leq \frac{R}{2}E(S)E(0). \end{array} \right. \tag{1.4.26}$$

Enfin en combinant (1.4.16), (1.4.19), (1.4.22) et (1.4.24)-(1.4.20)), on déduit l'inégalité recherchée (1.4.10).

Lemma 1.4.5. *Soit u une solution forte du système (1.1.1). Alors pour tout $0 \leq S < T < \infty$, on a :*

$$(1-N)\int_S^T \int_\Omega |u_t|^2 E(t)dtdx + (N-\frac{3}{2})\int_S^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \leq M_2 E(S)E(0), \tag{1.4.27}$$

où

$$M_2 = \frac{(N-1)^2 c_p}{2} + 3(N-1)max\{1, c_p\},$$

et c_p est la constante de Poincaré.

Démonstration. En multipliant la première équation du système (1.1.1) par $(N-1)uE(t)$ et en intégrant par rapport à x et t, on obtient :

$$(N-1)\int_\Omega \int_S^T (u_{tt} - \Delta u)uE(t)dtdx = 0. \tag{1.4.28}$$

L'intégration par partie nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} (N-1)\int_S^T \int_\Omega u_{tt}uE(t)dxdt \; = \; -(N-1)\int_S^T \int_\Omega u_t^2 E(t)dxdt \\ -(N-1)\int_S^T \int_\Omega u_t u E_t(t)dxdt + (N-1)\left[\int_\Omega u_t u E(t)\right]_S^T dx. \end{array} \right. \tag{1.4.29}$$

Par la formule de Green, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(N-1)\int_S^T \int_\Omega \Delta u \, uE(t)dxdt \; = \\ \quad -(N-1)\int_S^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} uE(t)dtdx + (N-1)\int_S^T \int_\Omega |\nabla u|^2 E(t)dxdt. \end{array} \right. \tag{1.4.30}$$

En insérant (1.4.29) et (1.4.30) dans (1.4.28), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} -(N-1)\displaystyle\int_S^T\int_\Omega |u_t|^2 E(t)dxdt + (N-1)\int_S^T\int_\Omega |\nabla u|^2 E(t)dxdt \ = \\ (N-1)\displaystyle\int_S^T\int_\Omega u_t u E_t(t)dxdt - (N-1)\Big[\int_\Omega u_t u E(t)dx\Big]_S^T + \\ (N-1)\displaystyle\int_S^T\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial \nu} u E(t) d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{1.4.31}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Shwartz et de Poincaré, on obtient :

$$\int_\Omega u_t u dx \le max\{1, c_p\}E(t), \ \ \forall\ t\ > 0. \tag{1.4.32}$$

Par la décroissance de l'énergie, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \Big[-(N-1)\displaystyle\int_\Omega u_t u E(t)dx\Big]_S^T + (N-1)\int_\Omega\int_S^T (u_t u E_t(t))dxdt \\ \\ \qquad\qquad \le 3\max\{1, c_p\}(N-1)E^2(S). \end{array}\right. \tag{1.4.33}$$

Puis par les inégalités de Cauchy-Shwartz et de Poincaré, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} (N-1)\displaystyle\int_S^T\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial \nu} u d\Gamma dt \le \frac{(N-1)^2}{2\epsilon}\int_S^T\int_{\Gamma_1} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 d\Gamma dt + \\ \qquad\qquad \displaystyle\frac{\epsilon c_p}{2}\int_S^T\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt. \end{array}\right. \tag{1.4.34}$$

En utilisant (1.4.5), on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 E(t) d\Gamma dt = \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1} (\eta(t))^2 E(t) d\Gamma dt \\ \qquad\qquad \displaystyle\le \frac{1}{2}E(S)E(0). \end{array}\right. \tag{1.4.35}$$

Maintenant en posant $\varepsilon = \frac{1}{c_p}$ dans (1.4.34) et en utilisant (1.4.35), on déduit

$$\left\{\begin{array}{l} (N-1)\displaystyle\int_S^T\int_{\Gamma_1}(\frac{\partial u}{\partial \nu}) u E(t) d\Gamma dt \ \le \\ \quad \displaystyle\frac{1}{2}\int_S^T\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt + \frac{(N-1)^2 c_p}{2}E(S)E(0). \end{array}\right. \tag{1.4.36}$$

Enfin, en combinant (1.4.36), (1.4.33) et (1.4.31), on déduit le résultat demandé (1.4.27).

Démonstration du théorème (4.1). En utilisant (1.4.5) et la décroissance de l'énergie, on obtient :

$$\int_S^T \eta^2(t)E(t)dt \leq E(S)E(0), \ \forall\ 0 \leq S < T < \infty. \tag{1.4.37}$$

En combinant (1.4.10) et (1.4.27), on obtient :

$$\int_S^T \int_\Omega |u_t|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_S^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \ \leq \ (M_1 + M_2)E(0)E(S). \tag{1.4.38}$$

De plus, en combinant (1.4.38) et (1.4.37), on déduit que :

$$\int_S^T E^2(t)dt \leq ME(0)E(S), \ 0 \leq S \leq T < \infty. \tag{1.4.39}$$

où la constante M est donnée par :

$$M = \frac{1}{2} + 2M_1 + M_2.$$

En passant à la limite $T \to \infty$ dans (1.4.39), on obtient

$$\int_S^\infty E^2(t)dt \leq ME(0)E(S), \forall\, S \geq 0.$$

Enfin en appliquant le Lemme (4.2), on obtient la décroissance rationnel de l'énergie $E(t)$ du système (1.1.1).

Theorem 1.4.6. *Pour toute $U \in \mathcal{H}$, l'énergie $E(t)$ du système (1.1.1) décroît asymptotiquement vers zéro*

$$\lim_{t\to\infty} E(t) \to 0.$$

Démonstration. Soit $U_0 \in \mathcal{H}$. Alors il existe une suite $U_0^n \in D(\mathcal{A})$ telle que U_0^n converge vers U_0 dans $\mathcal{H}$. Comme le semi-groupe de contractions $S_{\mathcal{A}}(t)$ est continu par rapport aux données initiales U_0^n, on déduit que $\| S_{\mathcal{A}}(t)U_0^n \|$ converge vers $\| S_{\mathcal{A}}(t)U_0 \|$ dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, $E^n(t)$ converge vers $E(t)$. En utilisant (1.4.1), on déduit la décroissance forte pour toute solution faible du système (1.1.1).

Chapitre 2

Controlabilité exact frontière d'une équation des ondes par un contrôle dynamique.

2.1 Introduction

On considère l'équation des ondes dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ayant une frontière régulière Γ de class C^2, composée de deux morceaux fermés disjoints : $\Gamma_0 \neq \emptyset$ la partie encastrée, et Γ_1 la partie où on applique un contrôle frontière. Ce système est décrit par :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times [0, T], \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times [0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0, T], \\ \eta_t - u_t = v, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0, T], \end{cases} \tag{2.1.1}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \; x \in \Omega, \tag{2.1.2}$$

$$\eta(x, 0) = \eta_0, \quad x \in \Gamma_1, \tag{2.1.3}$$

où $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_N)$ est le vecteur normal unitaire exterieur à Γ et v est le contrôle dynamique.

La commande dynamique peut être réalisée par des amortisseurs de type masse-ressort (voir [26]). Nous mentionnons que les contrôles dynamiques font partie des mécanismes indirects proposés par Russell (voir [30]).

Soit u un solution du système (2.1.1). On définit l'énergie associée $E(t)$ par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx + \int_{\Gamma_1} |\eta|^2 d\Gamma \right\}. \tag{2.1.4}$$

En introduisant $U = (u, u_t, \eta)$ et $V = (0, 0, v)$, on transforme le problème (2.1.1) sous la forme d'une équation d'évolution suivante :

$$\begin{cases} U_t + \mathcal{A}U = V, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire m-dissipatif dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la contrôlabilité exacte du système (2.1.1), en adaptant la méthode d'unicité hilbertienne de J.Lions (voir [24], [39], [40]).

La stabilisation du système (2.1.1) a été étudiée dans le chapitre précédent. D'autre part, dans le cas monodimensionnel, la contrôlabilité exacte du système (2.1.1) a été étudiée par Wehbe dans [2]. D'abord, il a établi deux inégalités d'observabilité directe et inverse. Ensuite, il a montré que le système est exactement contrôlable par un contrôle frontière dynamique et a obtenu les résultats suivants :

Theorem 2.1.1. *Soit $T > 2R$. Alors pour tout $U_0 \in \mathcal{H}$, il existe un contrôle*

$$v(t) = v_0(t) - \frac{d}{dt}v_1(t), \;\; v_0, v_1 \in L^2(0,T)$$

tel que la solution (u, η) de problème (2.4.6) vérifie la condition finale

$$u(T) = u_t(T) = 0, \quad \eta(T) = 0.$$

Theorem 2.1.2. *Soit $T > 2R$. Alors pour tout $U_0 \in D(\mathcal{A})$, il existe un contrôle*

$$v(t) \in L^2(0,T),$$

tel que la solution (u, η) de problème (2.4.6) vérifie la condition finale

$$u(T) = u_t(T) = 0, \quad \eta(T) = 0.$$

Dans le cas multidimensionnel, des difficultés dues à la présence du contrôle dynamique sur la frontière necéssitent des nouvelles techniques pour établir la contrôlabilité exacte du système. En effet, pour appliquer la méthode de HUM, le système ne peut pas s'écrire sous une forme abstraite de second ordre.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous considérons le problème homogène associé (2.1.1) et on montre que ce dernier a une solution dans l'espace de l'énergie. Dans le section 3, en utilisant une méthode du multiplicateurs et sous des conditions géométriques, on établit l'inégalité d'observabilité :

$$\|\Phi_0\|^2_{\mathcal{H}} \leq c_1 \int_0^T \left[\int_{\Gamma_1} |\partial_\nu \varphi|^2 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} |\partial_\nu \varphi_t|^2 \, d\Gamma \right] dt \quad \forall T > 2R, \tag{2.1.6}$$

où c_1 est une constante dépendant de Ω et $\mathit{\Phi}(x,t) = (\varphi(x,t), \varphi_t(x,t), \xi(x,t))$ est l'état du système homogène associé à (2.1.1). Dans la section 4, grâce à la méthode HUM, nous établissons la controlabilié exacte du système (2.1.1) pour les données initiales $U_0 \in \mathcal{H}$ par des contrôles singuliers :

$$v(t) = v_0(t) - \frac{d}{dt} v_1(t), \quad v_0 \in L^2(0,T), \quad v_1 \in L^2(0,T). \tag{2.1.7}$$

2.2 Système homogène.

Dans cette partie, on considère le système homogène associé à (2.1.1). Ensuite, on montre l'existence et l'unicité d'une solution de ce système.

$$\begin{aligned}
\varphi_{tt} - \Delta\varphi &= 0, && \text{dans} \quad \Omega \times [0, T], && (2.2.1)\\
\varphi &= 0, && \text{sur} \;\; \Gamma_0 \times [0, T], && (2.2.2)\\
\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \xi &= 0, && \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0, T], && (2.2.3)\\
\xi_t - \varphi_t &= 0, && \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0, T], && (2.2.4)
\end{aligned}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \; x \in \Omega, \quad \xi(x, 0) = \xi_0, \; x \in \Gamma_1. \tag{2.2.5}$$

Soit $(\varphi, \varphi_t, \xi)$ une solution régulière du système (2.2.1)-(2.2.4) vérifiant les conditions initiales (2.2.5). On définit l'énergie associée à φ par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\varphi_t|^2 + |\nabla\varphi|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\xi|^2 d\Gamma. \tag{2.2.6}$$

On va formuler le problème (2.2.1)-(2.2.4) dans un espace de Hilbert. Pour cela, on définit l'espace :

$$\mathcal{V} = \Big\{ \varphi \in H^1(\Omega) \; : \; \varphi = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_0 \Big\}. \tag{2.2.7}$$

L'espace de l'énergie est défini par

$$\mathcal{H} = \mathcal{V} \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1), \tag{2.2.8}$$

muni du produit scalaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varPhi, \widetilde{\varPhi})_{\mathcal{H}} = \displaystyle\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\widetilde{\varphi} dx + \int_\Omega \psi \widetilde{\psi} dx + \int_{\Gamma_1} \xi \widetilde{\xi} \, d\Gamma, \\ \text{pourtout} \quad \varPhi = (\varphi, \psi, \xi), \; \widetilde{\varPhi} = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\xi}) \; \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \tag{2.2.9}$$

Pour donner un sens convenable au système (2.2.1)-(2.2.4), on définit l'opérateur linéaire non borné $\mathcal{A}$ par :

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{par :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\mathcal{A}) = \Big\{ \varPhi = (\varphi, \psi, \xi) \in \mathcal{H},\ \Delta\varphi \in L^2(\Omega),\ \psi \in V \\ \qquad\qquad\qquad \text{et } \partial_\nu \varphi + \xi = 0,\ \text{sur } \Gamma_1 \Big\}, \end{array} \right. \tag{2.2.10}$$

et

$$\mathcal{A}\varPhi = (\psi, \Delta\varphi, \gamma(\psi)), \quad \forall\, \varPhi = (\varphi, \psi, \xi) \in D(\mathcal{A}), \tag{2.2.11}$$

où l'opérateur de trace γ est défini par :

$$\gamma : V \to L^2(\Gamma_1)$$

$$\psi \to \gamma(\psi) = \psi|_{\Gamma_1}.$$

Maintenant, on va formuler le système (2.2.1)-(2.2.5) sous la forme d'une équation abstraite du premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varPhi_t = \mathcal{A}\varPhi, \\ \varPhi(0) = \varPhi_0 \in \mathcal{H}, \end{array} \right. \tag{2.2.12}$$

où $\varPhi(x,t) = (\varphi(x,t), \varphi_t(x,t), \xi(x,t))$ est l'état du système (2.2.1)-(2.2.4).

Proposition 2.2.1. *L'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans (2.2.10)-(2.2.12) est m-dissipatif dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Soit $\varPhi \in D(\mathcal{A})$. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{A}\varPhi, \varPhi)_{\mathcal{H}} = \Big((\psi, \Delta\varphi, \gamma(\psi)), (\varphi, \psi, \zeta) \Big)_{\mathcal{H}} \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{\Gamma_1} \Big((\partial_\nu \varphi)(\psi) + \psi\zeta \Big) d\Gamma = 0 \end{array} \right. \tag{2.2.13}$$

Il reste à démontrer que $R(I-\mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Pour cela, soit $f=(f_1,f_2,f_3)\in\mathcal{H}$, on doit chercher :

$$\Phi=(\varphi,\psi,\xi)\in D(\mathcal{A}) \text{ tel que } \Phi-\mathcal{A}\Phi = f.$$

Alors, on a le problème suivant :

$$\varphi-\psi = f_1, \tag{2.2.14}$$

$$\psi-\Delta\varphi = f_2, \tag{2.2.15}$$

$$\xi-\psi = f_3. \tag{2.2.16}$$

Ceci implique que

$$\begin{cases} \varphi-\Delta\varphi = f_1+f_2, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi=0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\varphi = f_1-f_3, & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{2.2.17}$$

En multipliant la première équation de système (2.2.17) par $\theta\in\mathcal{V}$, et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega(\varphi\theta+\nabla\theta.\nabla\varphi)dx+\int_\Gamma\varphi\theta d\Gamma = \\ \displaystyle -\int_{\Gamma_1} f_3\theta d\Gamma+\int_{\Gamma_1} f_1\theta d\Gamma+\int_{\Omega_1}(f_1+f_2)\theta dx. \end{cases} \tag{2.2.18}$$

On définit la forme bilinéaire a sur $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ par :

$$a(\varphi,\theta) = \int_{\Omega_1}(\varphi\theta+\nabla\theta.\nabla\varphi)dx+\int_\Gamma\varphi\theta d\Gamma$$

et la forme linéaire L sur $\mathcal{V}$ par :

$$L(\theta)=\int_\Omega(f_1+f_2)\theta dx+\int_{\Gamma_1} f_1\theta d\Gamma-\int_{\Gamma_1} f_3\theta d\Gamma.$$

Par les inégalités de Cauchy-Schwartz, de Poincaré et de traces, on déduit

$$\begin{cases} a(\varphi,\theta) \le \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)}+c_0\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)}+ \\ \qquad c_1\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)} \end{cases} \tag{2.2.19}$$

où c_0 et c_1 sont respectivement les constantes de Poincaré et de traces. L'inégalité (2.2.19) montre que a est continue. D'autre part, on a

$$a(u,u) \geq \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ce qui implique que a est coercive.

De même, on a :

$$\begin{cases} |L(\theta)| \leq & \sqrt{c_0}\|(f_1+f_2)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}+ \\ & \sqrt{c_1}\|(f_1-f_3)\|_{L^2(\Gamma_1)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \tag{2.2.20}$$

Ainsi L est une forme linéaire et continue sur $\mathcal{V}$. Grâce au théorème de Lax-Milgram (voir [18]), on déduit qu'il existe une unique solution $\varphi \in \mathcal{V}$ pour le problème variationnel suiavnt :

$$a(\varphi,\theta) = L(\theta), \ \forall\, \theta \in \mathcal{V}. \tag{2.2.21}$$

Par la formule de Green, on retrouve que φ est solution du problème (2.2.17). En particulier, on a

$$\Delta\varphi = \varphi - (f_1+f_2) \in L^2(\Omega), \quad \psi = \varphi - f_1 \in \mathcal{V}, \quad \xi = f_3 + \psi \in L^2(\Gamma_1). \tag{2.2.22}$$

On déduit que $\Phi = (\varphi,\psi,\xi) \in D(\mathcal{A})$. La démonstration est achevée.

$\mathcal{A}$ étant m-dissipatif dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$, d'après le théorème de Hille-Yosida (voir [27]), il engendre un semi-groupe de contractions sur $\mathcal{H}$. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Theorem 2.2.2. *(Existence et unicité de la solution).*

a- *Si $\Phi_0 \in D(A)$, alors le système (2.2.12) admet une solution forte unique $\Phi(t)$*

qui satisfait

$$\Phi(t) \in C^0(0,T;D(\mathcal{A})) \cap C^1(0,T;\mathcal{H}).$$

b- *Si* $\Phi_0 \in \mathcal{H}$*, alors le système (2.2.12) admet une solution faible unique* $\Phi(t)$ *qui satisfait*

$$\Phi(t) \in C^0(0,T;\mathcal{H}).$$

De plus, on a :

$$\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

2.3 Résultats d'observabilité

Dans ce paragraphe, on établit une inégalité d'observabilité inverse. Pour cela, on a besoin des conditions sur la géométrie du domaine, on suppose qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$(m \cdot \nu) \geq \gamma^{-1}, \quad \forall\, x \in \Gamma_1 \qquad \text{et} \quad (m \cdot \nu) \leq 0, \quad \forall\, x \in \Gamma_0, \tag{2.3.1}$$

où $m(x) = x - x_0$ et $(\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$. On pose $R = \|m\|_\infty$.

Theorem 2.3.1. *Soit $T > 2R$. Alors il existe un constante $c_1 > 0$ telle que pour toute donnée initiale $\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \eta_0) \in D(\mathcal{A})$, la solution $\Phi(x,t)$ du système (2.2.12) satisfait l'inégalité inverse suivante :*

$$\|\Phi_0\|^2_{\mathcal{H}} \leq c_1 \int_0^T \left[\int_{\Gamma_1} |\partial_\nu \varphi|^2 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} |\partial_\nu \varphi_t|^2 \, d\Gamma \right] dt. \tag{2.3.2}$$

Commençons par établir les Lemmes suivants.

Lemma 2.3.2. *Pour toute donnée initiale $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$, la solution $\Phi(x,t)$ du système homogène (2.2.1)-(2.2.5) satisfait l'estimation suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} N \displaystyle\int_0^T \int_\Omega |\varphi_t|^2 dx dt + 2 \left[\int_\Omega \varphi_t (m \cdot \nabla \varphi) dx \right]_0^T + (2 - N) \int_0^T \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx dt \\ \leq \displaystyle\int_0^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) \Big(|\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|^2 + |\frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu}|^2 \Big) d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} R^2 \gamma |\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|^2 d\Gamma dt. \end{array} \right. \tag{2.3.3}$$

Démonstration. En multipliant l'équation (2.2.1) par $2(m \cdot \nabla \varphi)$, on obtient :

$$2 \int_0^T \int_\Omega (\varphi_{tt} - \Delta \varphi)(m \cdot \nabla \varphi) dx dt = 0. \tag{2.3.4}$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\Big[\int_\Omega \varphi_t(m\cdot\nabla\varphi)dx\Big]_0^T - 2\int_0^T\int_\Omega \varphi_t(m\cdot\nabla\varphi_t)dxdt \\ -2\int_0^T\int_\Gamma(\partial_\nu\varphi)(m\cdot\nabla\varphi)d\Gamma dt + 2\int_0^T\int_\Omega \nabla\varphi.\nabla(m\cdot\nabla\varphi)dxdt = 0. \end{array}\right. \tag{2.3.5}$$

D'une part, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\int_0^T\int_\Omega \nabla\varphi.\nabla(m\cdot\nabla\varphi)dxdt = (2-N)\int_0^T\int_\Omega \mid\nabla\varphi\mid^2 dxdt+ \\ \qquad\qquad \int_0^T\int_\Gamma (m\cdot\nu)\Big(|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2+|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}|^2\Big)d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{2.3.6}$$

En utilisant le fait que φ et $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ sont nulles sur Γ_0 dans (2.3.6), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\int_0^T\int_\Omega \nabla\varphi.\nabla(m\cdot\nabla\varphi)dxdt = \\ \quad (2-N)\int_0^T\int_\Omega \mid\nabla\varphi\mid^2 dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt+ \\ \quad \int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt + \int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}|^2 d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{2.3.7}$$

D'autre part, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} -2\int_0^T\int_\Omega \varphi_t(m\cdot\nabla\varphi_t)dxdt \\ \qquad = -\int_0^T\int_\Omega (m\cdot\nabla|\varphi_t|^2)dxdt \\ \qquad = -\int_0^T\int_\Gamma (m\cdot\nu)\varphi_t^2 d\Gamma dt + N\int_0^T\int_\Omega |\varphi_t|^2 dxdt. \end{array}\right. \tag{2.3.8}$$

En utilisant les conditions aux bords (2.2.2) et (2.2.3) dans (2.3.8), on en déduit

$$\left\{\begin{array}{l} -2\int_0^T\int_\Omega \varphi_t(m\cdot\nabla\varphi_t)dxdt = \\ \quad N\int_0^T\int_\Omega |\varphi_t|^2 dxdt - \int_0^T\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt \\ \quad -\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{2.3.9}$$

De plus, on a :

$$\left\{\begin{aligned} & -2\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(m\cdot\nabla\varphi)d\Gamma dt = \\ & \qquad -2\int_0^T\int_\Gamma \Big((m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2+(m\cdot\tau)(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu})(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau})\Big)d\Gamma dt. \end{aligned}\right. \tag{2.3.10}$$

En utilsant les conditions aux bords dans (2.3.10), on en déduit :

$$\left\{\begin{aligned} & -2\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(m\cdot\nabla\varphi)d\Gamma dt \ = \\ & \quad -2\int_0^T\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt - 2\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt \\ & \quad -2\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\tau)(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu})(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau})d\Gamma dt. \end{aligned}\right. \tag{2.3.11}$$

En combimant les identités (2.3.7), (2.3.9) et (2.3.11), on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} & \int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\Big(|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2+|\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu}|^2\Big)d\Gamma dt = \\ & \quad -\int_0^T\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt - \int_0^T\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt \\ & \quad +\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}|^2 d\Gamma dt + \ N\int_\Omega\int_0^T|\varphi_t|^2 dxdt \\ & \quad +\Big[\int_\Omega \varphi_t(m\cdot\nabla\varphi)dx\Big]_0^T - 2\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}d\Gamma dt \\ & \quad +\int_0^T\int_\Omega(2-N)\mid\nabla\varphi\mid^2 dxdt. \end{aligned}\right. \tag{2.3.12}$$

En utilisant (2.3.1) dans (2.3.12), on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} & \int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\Big(|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2+|\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu}|^2\Big)d\Gamma dt = \\ & \quad +\int_0^T\int_{\Gamma_1} m.\nu|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}|^2 d\Gamma dt + N\int_0^T\int_\Omega \varphi_t^2 dxdt \\ & \quad +2\Big[\int_\Omega \varphi_t(m\cdot\nabla\varphi)\Big]_0^T - 2\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\tau)(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu})(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau})d\Gamma dt. \end{aligned}\right. \tag{2.3.13}$$

En utilisant (2.3.1), on obtient l'estimation :

$$\left\{\begin{aligned} & -2\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\tau)(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu})(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau})dtd\Gamma + \int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}|^2 d\Gamma dt \\ & \geq -2R\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\tau)(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu})(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau})d\Gamma dt + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\gamma^{-1}|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}|^2 d\Gamma dt. \end{aligned}\right. \tag{2.3.14}$$

En retranchant le terme $R^2\gamma\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt$ au deuxième membre de (2.3.14), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} -2\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\tau)(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu})(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau})d\Gamma dt+\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}|^2 d\Gamma dt \\ =\ -2\int_{\Gamma_1}\int_0^T(m\cdot\tau)(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu})(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau})d\Gamma dt+\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}|^2 d\Gamma dt \\ \qquad +R^2\gamma\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt-R^2\gamma\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt \\ \geq\ \int_0^T\int_{\Gamma_1}\left(\sqrt{\gamma^{-1}}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}-R\sqrt{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt-\int_0^T\int_{\Gamma_1}R^2\,\gamma|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{2.3.15}$$

Il vient que

$$\left\{\begin{array}{l} -2\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\tau)(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu})(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau})d\Gamma dt+\int_0^T\int_{\Gamma_1}\int_0^T(m\cdot\nu)|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}|^2 d\Gamma dt \\ \geq\qquad\qquad -\int_0^T\int_{\Gamma_1}R^2\gamma|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{2.3.16}$$

En combinant (2.3.13)-(2.3.16), on obtient l'estimation recherchée.

Lemma 2.3.3. *Pour toute donnée initiale $\Phi_0\in D(\mathcal{A})$, la solution $\Phi(x,t)$ du système homogène (2.2.1)-(2.2.5) satisfait :*

$$\left\{\begin{array}{l} (N-\frac{3}{2})\int_0^T\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\,dxdt+(1-N)\int_0^T\int_\Omega\varphi_t^2dxdt \\ \quad +(N-1)\left[\int_\Omega\varphi_t\varphi dx\right]_0^T<\frac{(N-1)^2\,c_p}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2\,d\Gamma dt, \end{array}\right. \tag{2.3.17}$$

où c_p est la constante de Poincaré.

Démonstration. En multipliant l'équation (2.2.1) par $(N-1)\varphi$ et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} (N-1)\int_0^T\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\,dtdx\ =\ (N-1)\int_0^T\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\varphi d\Gamma dt \\ \qquad +(N-1)\int_0^T\int_\Omega\varphi_t^2dxdt-(N-1)\left[\int_\Omega\varphi_t\varphi dx\right]_0^T. \end{array}\right. \tag{2.3.18}$$

Soit $\epsilon > 0$ un réel positif. En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré dans (2.3.18), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} (N-1)\int_0^T\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\varphi d\Gamma dt \;=\\ \quad\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left(\frac{(N-1)}{\sqrt{\epsilon}}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)(\sqrt{\epsilon}\varphi)d\Gamma dt \;\;\leq\\ \quad\frac{\varepsilon}{2}\int_0^T\int_\Omega\mid\varphi\mid^2 dxdt+\frac{(N-1)^2}{2\,\varepsilon}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\mid\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\mid^2 d\Gamma dt \;\;\leq\\ \quad\frac{c_p\,\varepsilon}{2}\int_0^T\int_\Omega\mid\nabla\varphi\mid^2 dxdt+\frac{(N-1)^2}{2\,\varepsilon}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\mid\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\mid^2 d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{2.3.19}$$

En choisissons $\varepsilon=\dfrac{1}{c_p}$ dans (2.3.19), on déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} (N-1)\int_0^T\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\varphi d\Gamma dt \;\;\leq\\ \quad\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\mid\nabla\varphi\mid^2 dxdt+\frac{c_p\,(N-1)^2}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\mid\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\mid^2 d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{2.3.20}$$

En combinant (2.3.18)-(2.3.20), on obtient l'inégalité désirée (2.3.17).

Démonstration du théorème (2.3).

En combinant (2.3.3) et (2.3.17), on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\mid\nabla\varphi\mid^2 dtdx+\int_0^T\int_\Omega|\varphi_t|^2dxdt\\ \qquad+\left[\int_\Omega\left((N-1)\varphi+2m.\nabla\varphi\right)\varphi_t dx\right]_0^T \qquad\leq\\ \int_0^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\left(|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2+|\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu}|^2\right)d\Gamma dt+R^2\gamma\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt\\ \qquad+\frac{(N-1)^2c_p}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{2.3.21}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\mid\int_\Omega\left((N-1)\varphi\varphi_t+2m\cdot\nabla\varphi\varphi_t\right)dx\mid\leq 2RE(0). \tag{2.3.22}$$

En combinant (2.3.21) et (2.3.22), on déduit :

$$\left\{\begin{array}{ll}(T-2R)E(0) & \leq \left((m\cdot\nu)+\dfrac{(N-1)^2c_p}{2}+\dfrac{1}{2}+R^2\gamma\right)\displaystyle\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2d\Gamma dt\\ & \quad +\displaystyle\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu}|^2d\Gamma dt.\end{array}\right. \tag{2.3.23}$$

Alors, pour $T>2R$, on obtient le résultat recherché (2.3.2), où

$$c_1=(m\cdot\nu)+R^2\,\gamma+\frac{(N-1)^2\,c_p}{2}+\frac{1}{2}.$$

2.4 Contrôlabilité exacte

Dans cette section, en adaptant la méthode HUM introduite par J.L.Lions (voir [24], [39], [40]), on étudie la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes sous l'action d'un contrôle frontière dynamique.

On considère le système suivant :

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \tag{2.4.1}$$

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0 \times [0,T], \tag{2.4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0,T], \tag{2.4.3}$$

$$\eta_t - u_t = v, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0,T], \tag{2.4.4}$$

avec les conditions initiales :

$$u(0) = u_0, \ \ u_t(0) = u_1, \quad \text{dans } \Omega, \quad \eta(0) = \eta_0, \quad \text{sur } \Gamma_1. \tag{2.4.5}$$

On se pose d'étudier alors le problème de contrôlabilité exacte suivant : étant donné $T > 2R$ et des données initiales $U_0 = (u_0, u_1, \eta_0)$, existe-t-il un contrôle v qui ramème la solution de (2.4.1)-(2.4.5) à l'équilibre au temps T, i.e. $u(T) = u_t(T) = \eta(T) = 0$?

Dans un premier temps, on va montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (2.4.1)-(2.4.5).

Introduisant $U = (u, u_t, \eta)$, on reformule le problème (2.4.1)-(2.4.5) sous forme d'une équation abstraite du premier ordre :

$$\begin{cases} U_t + \mathcal{A}U = V \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.4.6}$$

où $\mathcal{A}$ est l'opérateur défini dans (2.2.10)-(2.2.11) et $V = (0, 0, v)^T$ est le contrôle dynamique.

Soit Φ la solution du problème homogène (2.2.1)-(2.2.5) associée aux conditions initiales Φ_0. En multipliant la première équation de (2.4.6) par Φ, on obtient

$$(U_t, \Phi)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{A}U, \Phi)_{\mathcal{H}} = (V, \Phi)_{\mathcal{H}}.$$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{cases} \Big(U(t), \Phi(t)\Big)_{\mathcal{H}} - \Big(U(0), \Phi(0)\Big)_{\mathcal{H}} \\ \qquad - \displaystyle\int_0^t \Big(U, \Phi_t\Big)_{\mathcal{H}} dt + \int_0^t \Big(\mathcal{A}U, \Phi\Big)_{\mathcal{H}} dt = \\ \qquad - \displaystyle\int_0^t \int_{\Gamma_1} v(t)\partial_\nu \varphi(t) d\Gamma dt, \quad \forall\, \phi_0 \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{2.4.7}$$

Puisque $\mathcal{A}$ est symétrique, on déduit

$$\begin{cases} \Big(U(t), \Phi(t)\Big)_{\mathcal{H}} = \Big(U(0), \Phi(0)\Big)_{\mathcal{H}} \\ \qquad - \displaystyle\int_0^t \int_{\Gamma_1} v(t)\partial_\nu \varphi(t) d\Gamma dt, \quad \forall\, \phi_0 \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{2.4.8}$$

Theorem 2.4.1. *Soit $T > 0$. Alors pour tout $U_0 \in D(\mathcal{A})'$ et tout $v \in L^2(0, T, L^2(\Gamma_1))$, le système non homogǹe (2.4.6) admet une unique solution faible*

$$U \in C^0([0, T], D(\mathcal{A})')$$

au sens où l'équation (2.4.8) est vérifiée pour toute $\varPhi_0 \in D(\mathcal{A})$. *De plus l'application linéaire*

$$(U_0, v) \longrightarrow U, \tag{2.4.9}$$

est continue de $D(\mathcal{A})' \times L^2(\Gamma_1)$ *dans* $D(\mathcal{A})'$.

Démonstration.

Soit $\varPhi = (\phi, \phi_t, \xi) \in D(\mathcal{A})$ la solution du problème homogène (2.2.1)-(2.2.5) associé aux conditions initiales $\varPhi_0 \in D(\mathcal{A})$. D'après (2.4.8), on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle\, U(t), \varPhi(t)\,\rangle_{D(\mathcal{A})'\times D(\mathcal{A})} \;&=\; \langle\, U(0), \varPhi(0)\,\rangle_{D(\mathcal{A})'\times D(\mathcal{A})} \\ &\quad - \int_0^t \int_\Gamma v(t)\, \partial_\nu \varphi(t)\, d\Gamma dt. \end{aligned} \right. \tag{2.4.10}$$

Maintenant, on définit la forme linéaire $\mathcal{L}$ par :

$$\mathcal{L}(\Phi_0) \;=\; \langle\, U_0, \Phi_0\,\rangle_{D(\mathcal{A})'\times D(\mathcal{A})} + \int_0^t \int_{\Gamma_1} v(s)\xi(s) ds, \quad \forall \Phi_0 \in D(\mathcal{A}). \tag{2.4.11}$$

Alors, on obtient le problème variationnel suivant :

$$\mathcal{L}(\Phi_0) = \langle\, U(t), S_{\mathcal{A}}(t)\Phi_0\,\rangle_{D(\mathcal{A})'\times D(\mathcal{A})}, \quad \forall \Phi_0 \in D(\mathcal{A}). \tag{2.4.12}$$

On choisit le contrôle $v(t)$ comme suit :

$$v(t) = v_0 - \frac{d}{dt} v_1(t), \quad v_0,\, v_1 \in\; L^2(\Omega),\; \frac{d}{dt} v_1 \,\in (H^1(0,T))', \tag{2.4.13}$$

où la dérivée $\dfrac{d}{dt}$ est définie au sens de $(H^1(0,T))'$:

$$-\int_0^t \frac{d}{dt} v_1(t)\mu(t) dt = \int_0^t v_1(t) \frac{d}{dt}\mu(t) dt, \qquad \forall\; \mu \;\in\; H^1(0,T). \tag{2.4.14}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne l'estimation suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \left| \displaystyle\int_0^t \int_{\Gamma_1} v(s)\xi(s) d\Gamma ds \right| \\ = \left| \displaystyle\int_0^t \int_{\Gamma_1} v_0(s)\xi(s) d\Gamma ds + \int_0^t \int_{\Gamma_1} v_1(s)\xi_t(s) d\Gamma ds \right| \\ \\ \leq \| v_0 \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \| \xi \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \| v_1 \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \| \xi_t \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \\ \\ \leq \| v_0 \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \| \Phi_0 \|_{\mathcal{H}} + \| v_1 \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \| \mathcal{A}\Phi_0 \|_{\mathcal{H}} . \end{array}\right. \tag{2.4.15}$$

En utilisant (2.4.11) et (2.4.15), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} |\mathcal{L}(\Phi_0)| \ \leq \ (\| v_0 \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \| v_1 \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)))}) \| \Phi_0 \|_{D(\mathcal{A})} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \| U_0 \|_{D(\mathcal{A})'} \| \Phi_0 \|_{D(\mathcal{A})}, \ \ \forall \Phi_0 \in D(\mathcal{A})'. \end{array}\right. \tag{2.4.16}$$

Ce qui implique que la forme linéaire $\mathcal{L}$ est continue dans $D(\mathcal{A})$. De plus, on a :

$$\| \mathcal{L} \|_{\mathcal{L}(D(\mathcal{A}),\mathbb{R})} \leq \| v_0 \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \| v_1 \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \| U_0 \|_{D(\mathcal{A})'} . \tag{2.4.17}$$

Donc, d'après le théorème de Riesz, il existe un unique élément $\mathbb{Z}(t) \in D(\mathcal{A})'$ tel que

$$\mathcal{L}(\Phi_0) = \langle \mathbb{Z}(t), \Phi_0 \rangle_{D(\mathcal{A})' \times D(\mathcal{A})}, \quad \forall \Phi_0 \in D(\mathcal{A}). \tag{2.4.18}$$

On définit la solution $U(t)$ par :

$$S^{\star}_{\mathcal{A}}(t)\, U(t) \ = \ \mathbb{Z}(t).$$

On en déduit que $U(t)$ satisfait le problème (2.4.12) pour tout $0 \leq t \leq T$. En plus, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \| U(t) \|_{D(\mathcal{A})'} = \| \mathcal{L} \|_{\mathcal{L}(D(\mathcal{A}),\mathbb{R})} \\ \\ \qquad\qquad \leq \| (v_0, v_1) \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \| U_0 \|_{D(\mathcal{A})'}, \quad \forall t \in [0,T]. \end{array}\right. \tag{2.4.19}$$

L'application linéaire (2.4.11) est donc continue de $D(\mathcal{A})' \times L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1)$ dans $D(\mathcal{A})'$.

Soit $U_0 \in D(\mathcal{A})'$ et $v_0, v_1 \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_1))$. Il existe

$$\begin{cases} U_0^n \in C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Gamma_1), \\ (v_0^n, v_1^n) \in C^\infty(\Gamma_1) \times C^\infty(\Gamma_1) \end{cases} \tag{2.4.20}$$

tels que

$$\begin{cases} U_0^n \longrightarrow U_0 \text{ dans } D(\mathcal{A})', \\ v_0^n \longrightarrow v_0 \text{ dans } L^2(0,T; L^2(\Gamma_1)), \\ v_1^n \longrightarrow v_1 \text{ dans } L^2(0,T; L^2(\Gamma_1)). \end{cases} \tag{2.4.21}$$

Soit $U_n \in C^0(0,T; C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Gamma_1))$ solution du problème

$$\begin{cases} U_n' = AU_n + V_n, \\ U_n(0) = U_0^n. \end{cases} \tag{2.4.22}$$

Alors, on a

$$\sup_{0 \le t \le T} \| U_n(t) \|_{D(\mathcal{A})'} \le \| (v_0^n, v_1^n) \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \| U_0^n \|_{D(\mathcal{A})'} .$$

La suite $U_n(t)$ converge vers $\widehat{U}(t)$ dans $L^\infty(0,T; D(\mathcal{A})')$. Finalement, par unicité de la limite, on déduit que $U(t) = \widehat{U}(t) \in C^0(0,T; D(\mathcal{A})')$. Le démonstration est ainsi achevée.

Après avoir étudié l'existence et l'unicité d'une solution faible du (2.4.6), on s'intéresse maintenant à la contrôlabilité exacte du problème (2.4.6). On montre le théorème suivant :

Theorem 2.4.2. *Soit $T > 2R$. Alors pour tout $U_0 \in \mathcal{H}$, il existe un contrôle*

$$v(t) = v_0(t) - \frac{d}{dt}v_1(t), \;\; v_0, v_1 \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_1)),$$

tel que la solution (u, η) de problème (2.4.6) vérifie la condition finale :

$$u(T) = u_t(T) = 0, \quad \eta(T) = 0.$$

Démonstration. Considérons l'espace vectoriel :

$$F = \{\Phi_0 = (\varphi_0, \psi_0, \xi_0) \in D(\mathcal{A}^\infty) \text{ tel que } \int_0^T \int_{\Gamma_1} (|\xi|^2 + |\xi_t|^2) d\Gamma dt < \infty\} \quad (2.4.23)$$

où $\Phi = (\varphi, \psi, \xi) \in D(\mathcal{A}^\infty)$ est la solution du problème homogéne (2.2.1)-(2.2.4). Grâce à l'inégalité inverse, on peut définir une norme sur F par :

$$\|\Phi_0\|_{\mathcal{F}} = \Big(\int_0^T \int_{\Gamma_1} (|\xi|^2 + |\xi_t|^2) d\Gamma dt\Big)^{1/2}. \quad (2.4.24)$$

On désigne encore par $\mathcal{F}$ la complétude de F par cette norme. Il est clair que $\mathcal{F}$ est un espace de Hilbert.

L'inégalité inverse donne l'encadrement suivant de $\mathcal{F}$:

$$D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{H}.$$

On identifie $\mathcal{H}$ à son dual, on obtient :

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{F}' \subset D(\mathcal{A})'.$$

Soit $\Phi = (\varphi, \psi, \xi) \in D(\mathcal{A})$ la solution du problème homogène (2.2.1)-(2.2.5) associée à la condition initiale $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$. On définit le contrôle $v(t)$ par :

$$v(t) = \xi(t) - \frac{d}{dt}\xi_t(t), \quad (2.4.25)$$

où la dérivée $\dfrac{d}{dt}$ est définie au sens de $(H^1(0,T))'$. Puis on résout le problème rétrograde suivant :

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \Delta\psi = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \\ \psi = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times [0,T], \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} + \varrho(t) = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \\ \varrho_t(t) - \psi_t(t) = v, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \\ \psi(T) = \psi_t(T) = 0, & \text{dans} \quad \Omega, \\ \varrho(T) = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1. \end{cases} \tag{2.4.26}$$

Introduisant $\Psi(t) = (\psi(t), \psi_t(t), \varrho(t))$, on transforme le système précédant sous la forme d'une équation d'évolution :

$$\begin{cases} \Psi_t = A\Psi + V, \\ \Psi(T) = 0. \end{cases} \tag{2.4.27}$$

Grâce au théorème (2.4), le problème (2.4.27) admet une unique solution

$$\Psi(t) \in C^0([0,T]; D(\mathcal{A})').$$

De plus, on a :

$$\| \Psi \|_{D(\mathcal{A})'} \leq \| \xi \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \| \xi_t \|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} . \tag{2.4.28}$$

On définit ensuite un opérateur linéaire Λ par :

$$\Lambda : \ D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})', \tag{2.4.29}$$

où $\Lambda\Phi_0 = -\Psi(0)$, $\forall \Phi_0 \in D(\mathcal{A})$.

En utilisant (2.4.24), on obtient :

$$\begin{cases} \langle \Lambda\Phi_0, \tilde{\Phi}_0 \rangle_{D(\mathcal{A})' \times D(\mathcal{A})} = \displaystyle\int_0^T \int_{\Gamma_1} (\xi\tilde{\xi} + \xi_t\tilde{\xi}_t) d\Gamma dt \\ \qquad\qquad = \left(\Phi_0, \tilde{\Phi}_0\right)_{\mathcal{F}}, \quad \forall \Phi_0, \, \tilde{\Phi}_0 \in D(\mathcal{A}), \end{cases} \tag{2.4.30}$$

où $(\cdot\,,\,\cdot)_{\mathcal{F}}$ est le produit scalire associé à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (2.4.30), on déduit que :

$$|\langle\, \Lambda\Phi_0, \tilde{\Phi}_0\, \rangle_{D(\mathcal{A})'\times D(\mathcal{A})}| \leq \|\Phi_0\|_{\mathcal{F}}\|\tilde{\Phi}_0\|_{\mathcal{F}}, \;\; \forall \Phi_0,\, \tilde{\Phi}_0 \in D(\mathcal{A}). \tag{2.4.31}$$

Comme $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{F}$, l'application Λ peut se prolonger en une application continue de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}'$.

En particulier, on a :

$$|\langle \Lambda\Phi_0, \tilde{\Phi}_0\rangle_{\mathcal{F}'\times\mathcal{F}}| \leq \|\Phi_0\|_{\mathcal{F}}\|\tilde{\Phi}_0\|_{\mathcal{F}}, \;\; \forall \Phi_0,\, \tilde{\Phi}_0 \in \mathcal{F}. \tag{2.4.32}$$

$$|\langle \Lambda\Phi_0, \Phi_0\rangle_{\mathcal{F}'\times\mathcal{F}}| = \|\Psi_0\|_{\mathcal{F}}^2, \;\; \forall\, \Phi_0 \in \mathcal{F}. \tag{2.4.33}$$

Par conséquent, la forme bilinéaire

$$(\Phi_0, \tilde{\Phi}_0) \to \langle \Lambda\Phi_0, \tilde{\Phi}_0\rangle_{\mathcal{F}'\times\mathcal{F}} \tag{2.4.34}$$

est continue et coercive sur $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$. Alors d'après le lemme de Lax-Milgram, Λ est un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$. En particulier, pour tout $-U_0 \in \mathcal{H} \subset \mathcal{F}'$, il existe un unique élément $\Phi_0 \in \mathcal{F}$ tel que :

$$\Lambda\Phi_0 = -U_0. \tag{2.4.35}$$

L'unicité de la solution du problème (2.4.27) assure que

$$U = \Psi. \tag{2.4.36}$$

Par conséquent, on a :

$$U(T) = 0 \Longleftrightarrow u(T) = u_t(T) = 0 \text{ et } \eta(T) = (0). \tag{2.4.37}$$

Le démonstration est ainsi achevée.

Partie 2

Stabilisation et contrôlabilité exacte d'un système d'équations des ondes par un feedback et un contrôle frontière ou interne indirect.

Chapitre 3

Stabilisation interne indirecte d'un système multidimensionnel d'équations des ondes.

3.1 Introduction

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$ ayant une frontière régulière Γ de classe C^2 et ν le vecteur unitaire normal exterieur à Γ. Dans ce chapitre, on considère un système de deux équations des ondes couplées avec un contrôle interne localement distribué dans Ω au voisinage de Γ et aggissant sur une seule équation :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - by_t = 0 \ , & \text{dans } \ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y_{tt} - a\Delta y + bu_t + cy_t = 0 \ , & \text{dans } \ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = y = 0, & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où a est une constante strictement positive, $b \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ et $c \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}_+)$. Les conditions initiales sont données par :

$$(u(x,0), y(x,0)) = (u_0, y_0), \quad (u_t(x,0), y_t(x,0)) = (u_1, y_1). \tag{3.1.2}$$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier la stabilisation indirecte du système (3.1.1). Soit $\alpha > 0$, on définit l'ouvert $\mathcal{O}_\alpha$ par :

$$\mathcal{O}_\alpha \equiv \{x \in \Omega : \mid x - y \mid < \alpha, \ \ y \in \Gamma\}. \tag{3.1.3}$$

Il est clair que si α est suffisament petit, on a $\mathcal{O}_\alpha \subset \Omega$. On suppose qu'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\gamma_0 > 0$ telles que :

$$c(x) \ \geq \ \gamma_0 \ > 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}_\alpha \subset \Omega. \tag{3.1.4}$$

La stabilisation indirecte des systèmes couplés a suscité l'intérêt de nombreux auteurs ces dernières années. Les résultats les plus récents dans cette direction sont ceux obtenus par F. Alabau (voir [47]), F. Alabau, P. Cannarsa et V. Komornik (voir [48]), où des estimations polynomiales ont été démontrées pour quelques systèmes hyperboliques linéaires faiblement couplés.

A. Beyrath (voir [62]) a étudié la stabilisation indirecte interne de systèmes d'équations faiblement couplées par un seule feedback localement distribué. Aussi, A. Guesmia (voir [43]) a étudié des systèmes non linéaires ou non dissipatifs et il a donné deux applications à la stabilisation indirecte par un seul feedback non linéaire localement distribué et dégénéré ainsi qu'à la stabilisation d'un système couplé de deux équations des ondes générales.

V. Komornik, B. Rao (voir [44]) ont montré la stabilisation exponentielle d'un système de deux équations des ondes couplées par un opérateur compact en utilisant un résultat de J.S. Gibson.

J. Rauch, X. Zhang, E.Zuazua (voir [45]) ont étudié la décroissance polynomiale d'un système couplé de type hyperbolique-parabolique. Ils ont étudié le comportement asymptotique en temps d'un modèle linéarisé d'interaction fluide-strucure. Dans le domaine constitué de deux parties dans lesquelles l'évolution est gouvernée par l'équation de la chaleur et l'équation des ondes respectivement, ils ont monté un résultat de décroissance polynomiale pour des solutions régulières en supposant une condition de contrôle géométrique et des conditions de transmission à l'interface.

Dans ([7]), Kapitonov a étudié la stabilité indirecte de système (3.1.1) dans le cas où le support de la fonction b coincide avec celui de c. Sous la condition d'égalité de vitesse de propagation, $a = 1$, il a établi un taux de décroissance exponentiel de l'énergie du système. En revanche, quand les vitesses sont différentes aucun taux de décroissance de l'énergie n'est discuté.

Dans ([10]), Ammar-Khodja et Bader ont étudié la stabilité indirecte de système (3.1.1) dans le cas monodimensionnel où le support de b et le support de c sont disjoints. Sous la condition d'égalité de vitesse de propagation, $a = 1$, ils ont établi un taux de décroissance exponentiel de l'énergie dans un sous espace orthogonal à un sous espace de dimension finie mais non précisé. En revanche, quand les vitesses sont différentes, ils ont prouvé la stabilisation forte et non exponentielle mais aucun taux de décroissance de l'énergie n'est discuté.

Notre objectif est de généraliser les résultats de ([7]) dans le cas $a \neq 1$. Pour cela, on suppose qu'il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $b_0 > 0$ telles que :

$$\mathcal{O}_\gamma \subset \mathcal{O}_\alpha \subset \Omega \quad \text{et} \quad b(x) \geq b_0 \quad \text{pour tout}\, x \in \mathcal{O}_\gamma \qquad \text{(Q1)}$$

et

$$\text{supp } \partial_i b \subset \mathcal{O}_\alpha, \quad \text{pour tout} \quad i = 1, 2..., N. \qquad \text{(Q2)}$$

Soit (u, y) une solution régulière du système (3.1.1), on définit l'énergie associée par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |y_t|^2 + a|\nabla y|^2)dx. \tag{3.1.5}$$

On voit facilement que $E(t)$ est décroissante :

$$E'(t) = -\int_\Omega c(x)|y_t|^2 dx. \tag{3.1.6}$$

En introduisant $U = (u, u_t, y, y_t)$, on transforme le problème (3.1.1) sous la forme d'une équation d'évolution :

$$\begin{cases} U_t &= \mathcal{A}U \\ U(0) &= U_0, \end{cases} \tag{3.1.7}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est m-dissipatif dans l'espace de l'énergie. Ainsi, on montre que le problème est bien posé au sens de semi-groupes de contractions.

Nous montrons d'abord que la résolvante de l'opérateur $\mathcal{A}$ est compacte dans l'espace de l'énergie. Alors on peut procéder comme dans Lagnese (voir [35]) à l'application de la théorie de décomposition spectrale Sz-Nagy-Foias (voir[32]), Foguel (voir[19]) et Benchimol (voir[20]) et on montre que l'énérgie du système décroît fortement vers zéro.

Ensuite, pour $a = 1$, on utilise un théorème de Huang (voir[33]) et Pruss(voir[34]) et on établit la stabilisation uniforme de l'énergie du système.

Theorem 3.1.1. *Supposons que les conditions (Q1) et (Q2) sont vérifiées. Soit $a = 1$, alors il existe des constantes strictement positives $\omega > 0$ et $M \geq 1$ telles que l'énergie $E(t)$ du système (3.1.1) vérifie l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq Me^{-\omega t}, \quad \forall\ t \geq 0$$

pour toute solution faible du système (3.1.1).

Ensuite, dans le cas, où $a \neq 1$, en utilisant un théorème de Huang (voir[33]) et Pruss (voir[34]), on montre la non stabilité uniforme du système (3.1.1). Enfin, on utilise un résultat de [63] (voir aussi [41]) pour établir le taux de décroissance polynomial suivant :

Theorem 3.1.2. *Supposons que les conditions (Q1) et (Q2) sont vérifiées, alors il existe une constante strictement positive C telle que l'énergie $E(t)$ du système (3.1.1) vérifie l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq \frac{C}{t} \parallel U_0 \parallel^2_{D(\mathcal{A})}, \ \forall\ t > 0 \tag{3.1.8}$$

pour toute solution régulière du système (3.1.1).

3.2 Formulation du problème.

On va formuler le problème (3.1.1) dans un espace de Hilbert. D'abord, on définit l'espace de l'énergie comme suit :

$$\mathcal{H} = (\, H_0^1(\Omega) \, \times L^2(\Omega))^2 \tag{3.2.1}$$

muni du produit scalaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \left(U,\ \widetilde{U}\right)_{\mathcal{H}} \ = \ \displaystyle\int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla\widetilde{u})dx \ + \int_\Omega v\widetilde{v}\,dx + \\ a\displaystyle\int_\Omega (\nabla y\cdot\nabla\widetilde{y})dx \ + \int_\Omega z\widetilde{z}dx \\ \forall\, U = (\,u,v,y,z),\ \widetilde{U} = (\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{y},\widetilde{z}) \ \in \mathcal{H}. \end{array}\right. \tag{3.2.2}$$

Pour donner un sens convenable au système (3.1.1), on définit l'opérateur linéaire non borné $\mathcal{A}$ par :

$$D(\mathcal{A}) = \left((H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\times H_0^1(\Omega)\right)^2 \tag{3.2.3}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}U \ = \ (\,v, \Delta u + bz\,, z, a\Delta y - bv - cz), \\ \qquad \forall\ U \ = \ (u,v,y,z) \ \in \ D(\mathcal{A}). \end{array}\right. \tag{3.2.4}$$

Soit $U = (u, u_t, y, y_t)$ une solution régulière du système. Alors (3.1.1) s'écrit sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} U_t \ = \ \mathcal{A}U\ , \\ U(0) \ = \ U_0 \ \in \mathcal{H}. \end{array}\right. \tag{3.2.5}$$

Dans la suite, on va montrer l'existence et l'unicité d'une solution du problème (3.2.5).

Proposition 3.2.1. *L'opérateur $\mathcal{A}$ défini par (3.2.3)-(3.2.4) est m-dissipatif et à résolvante compacte dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Soit $U = (u, v, y, z) \in D(\mathcal{A})$. Alors, de (3.2.4) on déduit que :

$$(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = \Big((v, \Delta u + bz \, , z, a\Delta y - bv - cz), (u, v, y, z) \Big)_{\mathcal{H}}.$$

En utilisant (3.2.2) et la formule de Green, on obtient :

$$\mathrm{Re}\{(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}}\} = - \int_\Omega c|z|^2 dx \ \leq \ 0.$$

Alors l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipatif dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$.

Maintenant, soit $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \ \in \mathcal{H}$, On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$U - \mathcal{A}U = F, \quad U \ \in \ D(\mathcal{A}). \tag{3.2.6}$$

Ceci revient au même de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} u - v = f_1, \\ v - \Delta u - bz = f_2, \\ y - z = f_3, \\ z - a\Delta y + bv + cz = f_4. \end{cases} \tag{3.2.7}$$

Par l'élimination de v et z dans (3.2.7), on obtient le système suivant :

$$u - \Delta u - by = f_1 + f_2 - bf_3, \tag{3.2.8}$$

$$y - a\Delta y + bu + cy = f_3 + bf_1 + cf_3 + f_4. \tag{3.2.9}$$

Soit $\varPhi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ une fonction test. On multiplit (3.2.8) par φ_1. En appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega u\varphi_1 dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi_1 dx - \int_\Omega by\varphi_1 dx = \\ \displaystyle\int_\Omega (f_1 + f_2 - bf_3)\varphi_1 dx. \end{cases} \tag{3.2.10}$$

De même, on multiplit (3.2.9) par φ_2. Puis en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega y\varphi_2 dx + a\int_\Omega (\nabla y\cdot\nabla\varphi_2)dx + \\ \displaystyle\int_\Omega bu\varphi_2 dx + \int_\Omega cy\varphi_2 dx = \\ \displaystyle\int_\Omega (f_3 + bf_1 + cf_3 + f_4)\varphi_2 dx. \end{array}\right. \tag{3.2.11}$$

Maintenant, on combine (3.2.10) et (3.2.11), puis on définit la forme bilinéaire a par :

$$\left\{\begin{array}{rl} a((u,y),(\varphi_1,\varphi_2)) = & \displaystyle\int_\Omega u\varphi_1 dx + \int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla\varphi_1)dx + \\ & \displaystyle\int_\Omega bu\varphi_2 dx + a\int_\Omega (\nabla y\cdot\nabla\varphi_2)dx - \\ & \displaystyle\int_\Omega by\varphi_1 dx + \int_\Omega y\varphi_2 dx + \int_\Omega cy\varphi_2 dx. \end{array}\right. \tag{3.2.12}$$

et la forme linéaire L par :

$$\left\{\begin{array}{rl} L(\varphi_1,\varphi_2) = & \displaystyle\int_\Omega (f_1 + f_2 - bf_3)\varphi_1 dx + \\ & \displaystyle\int_\Omega (f_3 + bf_1 + cf_3 + f_4)\varphi_2\, dx. \end{array}\right. \tag{3.2.13}$$

On vérifie facilement que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur $(H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))^2$ et L est une forme linéaire et continue sur $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$. En utilisant le théorème de Lax-Milgram (voir [27]), on en déduit qu'il existe un unique $(u,y)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ solution du problème variationnel :

$$a((u,y),(\varphi_1,\varphi_2)) = L(\varphi_1,\varphi_2),\ \forall\ (\varphi_1,\varphi_2)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega). \tag{3.2.14}$$

Il est clair que (u,y) est une solution faible des équations (3.2.8) et (3.2.9). En particulier, $u\in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$u - \Delta u = by + f_1 + f_2 - bf_3 \in L^2(\Omega), \tag{3.2.15}$$

Par la régularité du Laplacien, on en déduit que $u \in H^2(\Omega)$. De la même façon, on obtient $y \in H^2(\Omega)$. Ensuite, on définit $v = u - f_1 \in H_0^1(\Omega)$ et $z = y - f_3 \in H_0^1(\Omega)$. Alors $U = (u, v, y, z) \in D(\mathcal{A})$ est la solution unique du problème (3.2.6). Il vient que $U \in D(\mathcal{A})$. Le système (3.2.5) admet donc une solution. De plus, on a

$$\|(u, v, y, z)\|_{D(\mathcal{A})} \leq C\|(f_1, f_2, f_3, f_4)\|_{\mathcal{H}}.$$

Grâce aux injections compactes de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient la compacité de la résolvante de l'opérateur $\mathcal{A}$. La preuve est donc terminée.

Theorem 3.2.2. *(Existence et unicité de la solution).*
(1) Soit $U_0 = (u_0, u_1, y_0, y_1) \in D(\mathcal{A})$. Alors le problème (3.2.5) admet une unique solution forte $U = (u, u_t, y, y_t)$ telle que

$$(u(t), y(t)) \in (C^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)))^2 \cap (C^1(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)))^2 \cap (C^0(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega)))^2. \quad (3.2.16)$$

(2) Soit $U_0 = (u_0, u_1, y_0, y_1) \in \mathcal{H}$. Alors le problème (3.2.5) admet une unique solution faible $U = (u, u_t, y, y_t)$ telle que

$$(u(t), y(t)) \in (C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)))^2 \cap (C^0(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)))^2. \quad (3.2.17)$$

Démonstration. L'opértateur $\mathcal{A}$ est m-dissipatif dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. D'après le théorème de Hille-Yosida(voir[27]), pour toute donnée initiale $U_0 \in D(\mathcal{A})$, le problème (3.2.5) admet une unique solution $U = (u, u_t, y, y_t) \in D(\mathcal{A})$ telle que

$$U \in C^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}).$$

Ceci correspond à la régularité (3.2.16).

De même pour toute donnée initiale $U_0 \in \mathcal{H}$, le problème (3.2.5) admet une unique solution faible $U = (u, u_t, y, y_t) \in \mathcal{H}$ telle que

$$U \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}).$$

Ceci correspond à la régularité (3.2.17). La démonstration est donc achevée.

3.3 Etude de la stabilité forte.

Dans ce paragraphe, on étudie la stabilité forte du système (3.1.1). D'abord on montre que l'opérateur $\mathcal{A}$ n'a pas de valeur propre imaginaire pure. Puis, par la méthode de décomposition spectrale (voir [20]), on montre que l'énergie du système (3.1.1) décroît vers zéro asymptotiquement.

Définissons la fonction η telle que

$$\begin{cases} \eta(x) \ \in \ [0,1], \\ \eta(x) = 0, \quad \text{si } x \in \Omega/\mathcal{O}_\gamma, \\ \eta(x) = 1, \quad \text{si } \ x \in \ \mathcal{O}_{\gamma-\epsilon}, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

où ϵ est une constante telle que $0 < \epsilon < \gamma$.

Proposition 3.3.1. *Supposons que les conditions (Q1) et (Q2) sont vérifiées. Alors, l'opérateur $\mathcal{A}$ n'admet pas de valeur propre imaginaire pure.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{A}$ admet une valeur propre imaginaire pure. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U = (u, v, y, z) \in D(\mathcal{A})$, tel que :

$$\mathcal{A}U = i\lambda U. \tag{3.3.2}$$

Utilisons (3.3.2), on obtient :

$$-\int_\Omega c|z|^2 dx = \mathrm{Re}(\mathcal{A}U, U)_\mathcal{H} = \mathrm{Re}\{i\lambda \parallel U \parallel_\mathcal{H}^2\} = 0. \tag{3.3.3}$$

Utilisons la condition (3.1.4) on déduit que :

$$\int_\Omega c|z|^2 dx = 0 \text{ et } z \equiv 0 \qquad \text{dans} \quad \mathcal{O}_\alpha. \tag{3.3.4}$$

Ecrivons (3.3.2) sous la forme détaillée :

$$v = i\lambda u, \qquad \text{dans } H_0^1(\Omega), \tag{3.3.5}$$

$$\Delta u + bz = i\lambda v, \qquad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{3.3.6}$$

$$z = i\lambda y, \qquad \text{dans } H_0^1(\Omega), \tag{3.3.7}$$

$$a\Delta y - bv - cz = i\lambda z, \qquad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{3.3.8}$$

(i) Il est clair que si $\lambda = 0$, on obtient $v = z = 0$, de plus, on a :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{3.3.9}$$

et

$$\begin{cases} \Delta y = 0, & \text{dans } \Omega, \\ y = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.3.10}$$

Alors $U = 0$ contradiction.

(ii) Supposons maintenant que $\lambda \neq 0$. En utilisant (3.3.4), (3.3.7) et la condition (3.1.4), on déduit que :

$$cy \equiv 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \text{ et } y \equiv 0 \qquad \text{dans} \quad \mathcal{O}_\alpha. \tag{3.3.11}$$

Par l'élimination de v, z dans (3.3.5)-(3.3.8), on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda^2 u + i\lambda b y &= 0, \quad \text{dans } \Omega, & (3.3.12)\\ a\Delta y + \lambda^2 y - i\lambda b u - i\lambda c y &= 0, \quad \text{dans } \Omega, & (3.3.13)\\ u = y &= 0, \quad \text{sur } \Gamma. & (3.3.14)\end{aligned}$$

On divise la démonstration en deux étapes.

Etape 1. Nous multiplions l'équation (3.3.13) par $\eta\overline{u}$. Alors en utilisant la formule de Green et la condition aux bordes $u = 0$ sur Γ, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda \displaystyle\int_\Omega b\eta|u|^2 dx \;= \\ -i\displaystyle\int_\Omega \lambda^2 \eta y \overline{u} dx + ia \int_\Omega \eta(\nabla y \cdot \nabla \overline{u}) dx \\ +\, ia \displaystyle\int_\Omega \overline{u}(\nabla y \cdot \nabla \eta) dx - \int_\Omega \lambda c \eta \overline{u} y dx. \end{array}\right. \tag{3.3.15}$$

Grâce à au fait que $\eta y \equiv 0$ dans Ω et $\lambda \neq 0$, de (3.3.15) on déduit que :

$$\int_\Omega b\eta|u|^2 dx = 0.$$

De plus, grâce à la condition (Q1) ou le fait que $b \in \mathbb{R}^\star$, l'équation précédente implique

$$u \equiv 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}_{\gamma-\epsilon}. \tag{3.3.16}$$

Etape 2. Utilisant (3.3.12), (3.3.13), (3.3.11), (3.3.16), on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda^2 u + i\lambda b y &= 0, \quad \text{dans } \Omega, & (3.3.17)\\ a\Delta y + \lambda^2 y - i\lambda b u &= 0, \quad \text{dans } \Omega, & (3.3.18)\\ u = y = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial y}{\partial \nu} &= 0, \quad \text{sur } \Gamma. & (3.3.19)\end{aligned}$$

En multipliant l'équation (3.3.17) par $2(m\cdot\nabla\bar{u})$ et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$(N-2)\int_\Omega |\nabla u|^2dx - N\lambda^2\int_\Omega |u|^2dx \;= -2\,\mathrm{Re}\,\{i\lambda\int_\Omega b(m\cdot\nabla\bar{u})ydx\,\}. \qquad (3.3.20)$$

Ensuite, en multipliant l'équation (3.3.18) par $(2m\cdot\nabla\bar{y})$ et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$a(N-2)\int_\Omega |\nabla y|^2dx - N\lambda^2\int_\Omega |y|^2dx \;= 2\mathrm{Re}\{i\lambda\int_\Omega b(m\cdot\nabla\bar{y})udx\}. \qquad (3.3.21)$$

Il vient que :

$$\left\{\begin{array}{l} (N-2)\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + a|\nabla y|^2)dx - N\lambda^2\int_\Omega (|u|^2+|y|^2)dx \\ = 2\mathrm{Re}\{i\lambda\displaystyle\int_\Omega (b(m\cdot\nabla\bar{y})u - b(m\cdot\nabla\bar{u}))ydx\}. \end{array}\right. \qquad (3.3.22)$$

Maintenant, en multipliant l'équation (3.3.17) par $N\bar{u}$ et l'équation (3.3.18) par $N\bar{y}$, on obtient les équations :

$$-N\int_\Omega |\nabla u|^2dx + N\lambda^2\int_\Omega |u|^2dx = -iN\lambda\int_\Omega by\bar{u}dx, \qquad (3.3.23)$$

$$-aN\int_\Omega |\nabla y|^2dx + N\lambda^2\int_\Omega |y|^2dx = iN\lambda\int_\Omega bu\bar{y}dx. \qquad (3.3.24)$$

Il vient que

$$-N\int_\Omega (|\nabla u|^2 + a|\nabla y|^2)dx + N\lambda^2\int_\Omega (|u|^2+|y|^2)dx \;= i\lambda N\int_\Omega b(u\bar{y} - y\bar{u})dx. \qquad (3.3.25)$$

En combinant (3.3.25) et (3.3.22), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + a|\nabla y|^2)dx \;= \\ -2\mathrm{Re}\{i\lambda\displaystyle\int_\Omega (b(m\cdot\nabla\bar{y})u - b(m\cdot\nabla\bar{u}))ydx\} \\ -\mathrm{Re}\{i\lambda N\displaystyle\int_\Omega b(u\bar{y} - y\bar{u})dx\}. \end{array}\right. \qquad (3.3.26)$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{cases} i\lambda \int_\Omega b(m \cdot \nabla \bar{y}) u dx = \\ -i\lambda N \int_\Omega b\bar{y}udx - i\lambda \int_\Omega b(m \cdot \nabla u)\bar{y}dx \\ -i\lambda \int_\Omega (m.\nabla b)u\bar{y}dx. \end{cases} \tag{3.3.27}$$

Il vient que

$$\begin{cases} 2\mathrm{Re}\{i\lambda \int_\Omega (b(m \cdot \nabla \bar{y})u - b(m \cdot \nabla \bar{u}))ydx\} = \\ -2\mathrm{Re}\{i\lambda \int_\Omega (Nb\bar{y}udx + (m \cdot \nabla b)u\bar{y})dx\} = \\ 2\mathrm{Im}\{\lambda N \int_\Omega b\bar{y}udx + \lambda \int_\Omega (m \cdot \nabla b)u\bar{y}dx\}. \end{cases} \tag{3.3.28}$$

En utilisant la condition (Q2), on déduit que :

$$-2\mathrm{Re}\{i\lambda \int_\Omega (b(m \cdot \nabla \bar{y})u - b(m \cdot \nabla \bar{u}))ydx\} = 2\mathrm{Im}\{\lambda N \int_\Omega b\bar{y}udx\}. \tag{3.3.29}$$

D'autre part, on a :

$$-\mathrm{Re}\{i\lambda N \int_\Omega b(u\bar{y} - y\bar{u})dx\} = -2N\mathrm{Im}\{\lambda \int_\Omega b\bar{y}udx\}. \tag{3.3.30}$$

En insérant (3.3.29) et (3.3.30) dans (3.3.26), il vient que :

$$2\int_\Omega (|\nabla u|^2 + a|\nabla y|^2)dx = 0. \tag{3.3.31}$$

On en déduit que $u \equiv y \equiv 0$, puis $v \equiv z \equiv 0$, soit encore $U = 0$. D'où vient une contradiction. La démonstration est ainsi achevée.

Theorem 3.3.2. *Supposons les conditions* (Q1) *et* (Q2) *sont vérifiées ou* $b \in \mathbb{R}^+$. *Alors, l'énergie $E(t)$ du système (3.1.1) décroît fortement vers zèro :*

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$$

pour toute solution faible du système (3.1.1).

Démonstration. L'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans (3.2.3) et (3.2.4) est m-dissipatif et à résolvante compacte, de plus, il n'admet pas de valeur propre imaginaire pure. Alors, d'après la théorie de décomposition spectrale de Sz-Nagy-Foias (voir [32]), Foguel (voir [19]) et Benchimol (voir [20]), on en déduit que le semi-groupe de contractions $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t)$ engendré par $\mathcal{A}$ est fortement stable.

3.4 Etude du taux de décroissance exponentielle de l'énergie, cas $a = 1$.

Dans ce paragraphe, on étudie la stabilité du système (3.1.1) dans le cas $a = 1$. En utilisant la méthode de domaine de fréquence, on montre que l'énergie du système (3.1.1) décroît exponentiellement vers zéro pour toute donnée initiale.

Theorem 3.4.1. *Supposons que les conditions* (Q1) *et* (Q2) *sont vérifiées. Si* $a = 1$*, alors il existe deux constantes strictement positives* $\omega > 0$ *et* $M \geq 1$ *telles que l'énergie* $E(t)$ *du système (3.1.1) vérifie l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq Me^{-\omega t}E(0), \quad \forall\, t \geq 0$$

pour toute solution faible du système (3.1.1).

Démonstration.

D'après un résultat de Huang (voir [33]) et Pruss (voir [34]), un C_0 semi-groupe de contractions $e^{t\mathcal{A}}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est exponentiellement stable si et seulement si :

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}) \tag{H1}$$

et

$$\sup_{\beta \in \mathbb{R}} \| (i\beta I - \mathcal{A})^{-1} \| < \infty \tag{H2}$$

sont vraies.

D'après les Propositions 3.2.1 et 3.3.1, la résolvante de $\mathcal{A}$ est compacte, $0 \in \rho(\mathcal{A})$ et il n'a pas de valeur propre imaginaire pure. Ceci entraîne bien la condition (H1). Supposons que la condition (H2) soit fausse. Alors, il existe une suite $\beta_n \in \mathbb{R}$ et une suite $U_n = (u_n, v_n, y_n, z_n) \in D(\mathcal{A})$ telles que

$$\beta_n \to +\infty, \tag{3.4.1}$$

$$\| U_n \|_{\mathcal{H}} = 1, \tag{3.4.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| (i\beta_n I - \mathcal{A})U_n \|_{\mathcal{H}} = 0. \tag{3.4.3}$$

On va montrer que $\| (u_n, v_n, y_n, z_n) \|_{\mathcal{H}} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Cette contradiction conduit à la décroissance exponentielle de l'énergie. La démonstration comporte plusieurs étapes.

Etape 1. D'abord, en utilisant le fait que $U_n = (u_n, v_n, y_n, z_n)$ est uniformément bornée dans l'équation (3.4.3), on obtient que :

$$\int_\Omega c|z_n|^2 dx = \mathrm{Re}\{i\beta_n \| U_n \|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U_n, U_n)\} = o(1). \tag{3.4.4}$$

En utilisant (3.1.4) et la condition (Q 1), on déduit que :

$$\int_{\mathcal{O}_\gamma} |z_n|^2 dx = o(1). \tag{3.4.5}$$

Ensuite, on écrit (3.4.3) sous la forme détaillée :

$$\begin{aligned}
i\beta_n u_n - v_n &= f_n^1 \to 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega), & (3.4.6)\\
i\beta_n v_n - \Delta u_n - b z_n &= f_n^2 \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), & (3.4.7)\\
i\beta_n y_n - z_n &= f_n^3 \to 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega), & (3.4.8)\\
i\beta_n z_n - \Delta y_n + b v_n + c z_n &= f_n^4 \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega). & (3.4.9)
\end{aligned}$$

En utilisant les équations (3.4.5) et (3.4.8), on déduit

$$\int_\Omega c|\beta_n y_n|^2 dx = o(1). \tag{3.4.10}$$

Utilisant (3.1.4) et la condition (Q1) dans l'équation (3.4.8), on déduit que :

$$\int_{\mathcal{O}_\gamma} |\beta_n y_n|^2 dx = o(1). \tag{3.4.11}$$

Grâce aux équations (3.4.2), (3.4.6) et (3.4.8), on déduit que $\beta_n y_n$ et $\beta_n u_n$ sont uniformément bornées dans $L^2(\Omega)$. Alors :

$$\int_\Omega |y_n|^2 dx = \frac{O(1)}{\beta_n^2} \quad \text{et} \quad \int_\Omega |u_n|^2 dx = \frac{O(1)}{\beta_n^2}. \tag{3.4.12}$$

Par l'élimination de v_n et z_n dans (3.4.6)-(3.4.9), on obtient le système suivant

$$\beta_n^2 u_n + \Delta u_n + i\beta_n b y_n = -i\beta_n f_1^n + b f_3^n - f_2^n, \tag{3.4.13}$$

$$\beta_n^2 y_n + \Delta y_n - i\beta_n b u_n - i\beta_n c y_n = -f_4^n - b f_1^n - i\beta_n f_3^n - c f_3^n. \tag{3.4.14}$$

Etape 2. Nous multiplions l'équation (3.4.14) par $h\overline{y}_n$. Alors, en utilisant la formule de Green et la condition $y_n = 0$ sur Γ, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega h|\beta_n y|^2 dx - \int_\Omega h \mid \nabla y_n \mid^2 dx - \\ \displaystyle\int_\Omega \overline{y}_n(\nabla h \cdot \nabla y_n)dx - i\,\beta_n \int_\Omega b h u_n \overline{y}_n dx - \\ \displaystyle i\beta_n \int_\Omega ch|y_n|^2 dx = \\ \displaystyle\quad \int_\Omega (-f_4^n - b f_1^n - i\beta_n f_3^n - c f_3^n) h\overline{y}_n dx. \end{array}\right. \tag{3.4.15}$$

Grâce au fait que f_n^1, f_n^3 convergent vers zéro dans $H_0^1(\Omega)$, f_4^n converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$ et les suites $\beta_n y_n$, $\beta_n u_n$, ∇y_n sont uniformément bornées dans $L^2(\Omega)$, on obtient :

$$\int_\Omega h|\beta_n y_n|^2 dx - \int_\Omega h \mid \nabla y_n \mid^2 dx = o(1). \tag{3.4.16}$$

En utilisant $h(x) = \eta(x)$ dans (3.4.16), on obtient :

$$\int_\Omega \eta|\beta_n y_n|^2 dx - \int_\Omega \eta \mid \nabla y_n \mid^2 dx = o(1). \tag{3.4.17}$$

En utilisant (3.4.11) dans (3.4.17), on déduit :

$$\int_\Omega \eta \mid \nabla y_n \mid^2 dx = o(1) \text{ et } \int_{\mathcal{O}_{\gamma-\varepsilon}} \mid \nabla y_n \mid^2 dx = o(1). \tag{3.4.18}$$

Etape 3. En multipliant l'équation (3.4.14) par $2h(m \cdot \nabla \bar{y}_n)$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\beta_n^2 \displaystyle\int_\Omega y_n h(m \cdot \nabla \bar{y}_n)dx + 2\int_\Omega h\Delta y_n(m \cdot \nabla \bar{y}_n)dx \\ -2\,i\beta_n \displaystyle\int_\Omega bhu_n(m \cdot \nabla \bar{y}_n)dx - 2i\int_\Omega ch\beta_n y_n(m \cdot \nabla \bar{y}_n)dx \ = \\ 2\displaystyle\int_\Omega(-f_4^n - bf_1^n - i\beta_n f_3^n - cf_3^n)h(m \cdot \nabla \bar{y}_n)dx. \end{array} \right. \tag{3.4.19}$$

En utilisant la formule de Green et le fait que $y_n = 0$ sur Γ, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\,i\displaystyle\int_\Omega \beta_n f_n^3 h(m \cdot \nabla \bar{y}_n)dx \ = \ 2i\int_\Omega \beta_n \bar{y}_n h(m \cdot \nabla f_n^3)dx \\ +2\,i\displaystyle\int_\Omega \beta_n \bar{y}_n f_n^3(m \cdot \nabla h)dx + 2iN\int_\Omega \beta_n h \bar{y}_n f_n^3 dx. \end{array} \right. \tag{3.4.20}$$

Comme f_n^1, f_n^3 convergent vers zéro dans $H_0^1(\Omega)$, f_4^n converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$ et les suites $\beta_n y_n$, ∇y_n sont uniformément bornées dans $L^2(\Omega)$, alors, en utilisant (3.4.20), on conclut que :

$$2\int_\Omega(-f_4^n - bf_1^n - i\beta_n f_3^n - cf_3^n)h(m \cdot \nabla \bar{y}_n)dx \ = \ o(1). \tag{3.4.21}$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green et le fait que $y_n = 0$ sur Γ, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}\{2\displaystyle\int_\Omega \beta_n^2 y_n h(m \cdot \nabla \bar{y}_n)dx\} \ = \\ -N\displaystyle\int_\Omega h|\beta_n y_n|^2 dx - \int_\Omega (m \cdot \nabla h)|\beta_n y_n|^2 dx. \end{array} \right. \tag{3.4.22}$$

En utilisant l'équation (3.4.10) et le fait que ∇y_n est borné dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que :

$$-2\mathrm{Re}\{i\beta_n \int_\Omega c h y_n (m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx\} = o(1). \tag{3.4.23}$$

La régularité de $(u_n, v_n, y_n, z_n) \in D(\mathcal{A})$ est suffisante pour effectuer des intégrations dans la deuxième intégrale de (3.4.19). En utilisant la formule de Green et le fait que $y_n = \frac{\partial y_n}{\partial \tau} = 0$ sur Γ, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\int_\Omega \Delta y_n h(m\cdot\nabla\overline{y})dx \ = \\ \int_\Gamma h(m\cdot\nu)|\dfrac{\partial y_n}{\partial\nu}|^2 d\Gamma - \ 2\int_\Omega (\nabla h\cdot\nabla y_n)(m\cdot\nabla\overline{y_n})dx \\ +(N-2)\int_\Omega h|\nabla y_n|^2dx + \int_\Omega (m\cdot\nabla h)|\nabla y_n|^2 dx. \end{array}\right. \tag{3.4.24}$$

En combinant les équations (3.4.19), (3.4.21), (3.4.22), (3.4.23) et (3.4.24), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} -N\,\beta_n^2\int_\Omega h|y_n|^2dx - \beta_n^2\int_\Omega (m\cdot\nabla h)|y_n|^2dx + \int_\Gamma h(m\cdot\nu)|\dfrac{\partial y_n}{\partial\nu}|^2 d\Gamma + \\ (N-2)\int_\Omega h|\nabla y_n|^2dx - 2\mathrm{Re}\{\int_\Omega (\nabla h\cdot\nabla y_n)(m\cdot\nabla\overline{y_n})dx\} + \\ \int_\Omega (m\cdot\nabla h)|\nabla y_n|^2dx - 2\mathrm{Re}\{i\beta_n\int_\Omega b h u_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx\} = o(1). \end{array}\right. \tag{3.4.25}$$

Posons $h(x) = \eta(x)$ dans (3.4.25), on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{l} -N\,\beta_n^2\int_\Omega \eta|y_n|^2dx - \beta_n^2\int_\Omega (m\cdot\nabla \eta)|y_n|^2dx + \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\dfrac{\partial y_n}{\partial\nu}|^2 d\Gamma + \\ (N-2)\int_\Omega \eta|\nabla y_n|^2dx - 2\mathrm{Re}\{\int_\Omega (\nabla \eta\cdot\nabla y_n)(m\cdot\nabla\overline{y_n})dx\} + \\ \int_\Omega (m\cdot\nabla \eta)|\nabla y_n|^2dx - 2\mathrm{Re}\{i\beta_n\int_\Omega b \eta u_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx\} = o(1). \end{array}\right. \tag{3.4.26}$$

En utilisant (3.4.11), (3.4.18) et le fait que $\beta_n u_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} (N-2)\int_\Omega \eta|\nabla y_n|^2dx + \int_\Omega (m\cdot\nabla\eta)|\nabla y_n|^2dx + \\ \int_\Omega (m\cdot\nabla\eta) \mid \nabla\overline{y}_n \mid^2 dx - 2\mathrm{Re}\{\int_\Omega (\nabla\eta\cdot\nabla y_n)(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx\} + \\ \int_\Omega 2\mathrm{Re}\{i\beta_n b\eta u_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx\} = o(1). \end{array}\right. \tag{3.4.27}$$

D'autre part, d'après (3.4.11) et le fait que $\eta = 0$ dans $\Omega/\mathcal{O}_\gamma$, on a :

$$-N\int_\Omega \eta|\beta_n y_n|^2 dx - \int_\Omega (m\cdot\nabla\eta))|\beta_n y_n|^2 dx = o(1). \tag{3.4.28}$$

En insérant (3.4.27) et (3.4.28) dans (3.4.26), on déduit :

$$\int_\Gamma (m\cdot\nu)|\frac{\partial y_n}{\partial\nu}|^2 d\Gamma = o(1). \tag{3.4.29}$$

Etape 4. (i) Notons que $\frac{1}{\beta_n}\Delta\overline{u}_n$ est uniformément bornée, alors multipliant l'équation (3.4.14) par $\frac{1}{\beta_n}\eta\Delta\overline{u}_n$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} (\beta_n^2 y_n + a\Delta y_n - i\beta_n b u_n - i\beta_n c y_n)\dfrac{1}{\beta_n}\eta\Delta\overline{u}_n = \\ (-f_4^n - bf_1^n - i\beta_n f_3^n - cf_3^n)\dfrac{1}{\beta_n}\eta\Delta\overline{u}_n. \end{array}\right. \tag{3.4.30}$$

En utilisant la formule de Green dans (3.4.30) et les conditions $y_n = u_n = f_n^3 = 0$ sur Γ, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} -\displaystyle\int_\Omega \beta_n\eta(\nabla\overline{u}_n\cdot\nabla y_n)dx - \int_\Omega \beta_n y_n(\nabla\eta\cdot\nabla\overline{u}_n)dx + \int_\Omega \frac{a}{\beta_n}\eta\Delta\overline{u}_n\Delta y_n dx \\ +i\displaystyle\int_\Omega b\eta\mid\nabla u_n\mid^2 dx + i\int_\Omega \eta u_n(\nabla b\cdot\nabla\overline{u}_n)dx + i\int_\Omega bu_n(\nabla\eta\cdot\nabla\overline{u}_n)dx \\ +i\displaystyle\int_\Omega c\eta(\nabla y_n\cdot\nabla\overline{u}_n)dx + i\int_\Omega cy_n(\nabla\eta\cdot\nabla\overline{u}_n)dx + i\int_\Omega \eta y_n(\nabla c\cdot\nabla\overline{u}_n)dx = \\ +\displaystyle\int_\Omega (-f_n^4 - bf_n^1 - cf_n^3)(\frac{1}{\beta_n}\eta\Delta\overline{u}_n)dx + i\int_\Omega \eta(\nabla f_n^3\cdot\nabla\overline{u}_n)dx \\ +i\displaystyle\int_\Omega f_n^3(\nabla\eta\cdot\nabla\overline{u}_n)dx. \end{array}\right. \tag{3.4.31}$$

Comme les suites f_n^1 et f_n^3 convergent vers zéro dans $H_0^1(\Omega)$, la suite f_n^4 converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$ et les suites ∇u_n et $\frac{1}{\beta_n}\Delta u_n$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega (-f_n^4 - bf_n^1 - cf_n^3)(\frac{1}{\beta_n}\eta\Delta\overline{u}_n)dx + i\int_\Omega \eta(\nabla f_n^3\cdot\nabla\overline{u}_n)dx \\ +i\displaystyle\int_\Omega f_n^3(\nabla\eta\cdot\nabla\overline{u}_n)dx = o(1). \end{array}\right. \tag{3.4.32}$$

En utilisant maintenant (3.4.11), (3.4.12) et le fait que la suite ∇u_n est bornée dans $L^2(\Omega)$, on déduit de (3.4.31) que :

$$\left\{\begin{array}{l} -\int_\Omega \beta_n y_n(\nabla\eta\cdot\nabla\overline{u}_n)dx + i\int_\Omega \eta u_n(\nabla b\cdot\nabla\overline{u}_n)dx \\ +i\int_\Omega bu_n(\nabla\eta\cdot\nabla\overline{u}_n)dx + i\int_\Omega c\eta(\nabla y_n\cdot\nabla\overline{u}_n)dx \\ +i\int_\Omega cy_n(\nabla\eta\cdot\nabla\overline{u}_n)dx + i\int_\Omega \eta y_n(\nabla c\cdot\nabla\overline{u}_n)dx = o(1). \end{array}\right. \tag{3.4.33}$$

Alors, en insérant (3.4.33) et (3.4.32) dans (3.4.31), il vient que :

$$\left\{\begin{array}{l} -\int_\Omega \beta_n\eta(\nabla\overline{u}_n\cdot\nabla y_n)dx + \int_\Omega \frac{a}{\beta_n}\eta\Delta\overline{u}_n\Delta y_n dx \\ +i\int_\Omega b\eta \mid \nabla u_n \mid^2 dx = o(1). \end{array}\right. \tag{3.4.34}$$

(ii) De façon similaire, en multipliant (3.4.13) par la suite bornée $\frac{1}{\beta_n}\eta\Delta\overline{y}_n$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} (\beta_n^2 u_n + \Delta u_n + i\beta_n b y_n)\frac{1}{\beta_n}\eta\Delta\overline{y}_n = \\ \quad (-i\beta_n f_1^n + bf_3^n - f_2^n)\frac{1}{\beta_n}\eta\Delta\overline{y}_n. \end{array}\right. \tag{3.4.35}$$

En utilisant la formule de Green et les conditions $u_n = y_n = f_n^1 = 0$ sur Γ dans (3.4.35), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} -\int_\Omega \beta_n\eta(\nabla u_n\cdot\nabla\overline{y}_n)dx - \beta_n\int_\Omega u_n(\nabla\eta\cdot\nabla\overline{y}_n)dx + \int_\Omega \frac{1}{\beta_n}\eta\Delta u_n\Delta\overline{y}_n dx \\ -i\int_\Omega \eta y_n(\nabla b\cdot\nabla\overline{y}_n)dx - i\int_\Omega \eta b|\nabla y_n|^2dx - i\int_\Omega (by_n)(\nabla\overline{y}_n\cdot\nabla\eta)dx = \\ i\int_\Omega (\eta(\nabla f_n^1\cdot\nabla\overline{y}_n) + f_n^1(\nabla\eta\cdot\nabla\overline{y}_n))dx + \int_\Omega (bf_n^3 - f_n^2)\frac{1}{\beta_n}\eta\Delta\overline{y}_n dx. \end{array}\right. \tag{3.4.36}$$

Comme les suites f_n^1, f_n^3 convergent vers zéro dans $H_0^1(\Omega)$, la suite f_2^n converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$ et la suite $\frac{1}{\beta_n}\Delta y_n$ est bornée. Alors, en utilisant (3.4.18), on déduit

$$\left\{\begin{array}{l} i\int_\Omega \eta(\nabla f_n^1.\nabla\overline{y}_n)dx + i\int_\Omega f_n^1(\nabla\eta.\nabla\overline{y}_n)dx \\ +\int_\Omega (bf_n^3 - f_n^2)\frac{1}{\beta_n}\eta\Delta\overline{y}_n dx = o(1). \end{array}\right. \tag{3.4.37}$$

Puis en utilisant (3.4.12), (3.4.18) et le fait que la suite $\beta_n u_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, on en déduit :

$$\begin{cases} -\beta_n \displaystyle\int_\Omega u_n \eta(\nabla\eta \cdot \nabla\overline{y}_n)dx - i\int_\Omega \eta y_n(\nabla b \cdot \nabla\overline{y}_n)dx \\ -i\displaystyle\int_\Omega b\eta|\nabla y_n|^2 dxdx - \ i\int_\Omega (by_n)(\nabla y_n.\nabla\eta)dx = o(1). \end{cases} \tag{3.4.38}$$

En insérant (3.4.38) et (3.4.37) dans (3.4.36), on déduit :

$$-\int_\Omega \beta_n \eta(\nabla u_n \cdot \nabla\overline{y}_n)dx + \int_\Omega \frac{1}{\beta_n}\eta\Delta u_n \Delta\overline{y}_n dx = o(1). \tag{3.4.39}$$

(iii) En combinant (3.4.39) et (3.4.34) et en utilisant le fait que $a = 1$, on obtient :

$$\int_\Omega b\eta \mid \nabla u_n \mid^2 dx = o(1).$$

En utilisant le fait que b vérifie la condition (Q1) ou que $b \geq 0$, l'équation précédente implique :

$$\int_{\mathcal{O}_{\gamma-\epsilon}} \mid \nabla u_n \mid^2 dx = o(1). \tag{3.4.40}$$

Etape 5. On multiplie l'équation (3.4.13) par $h\overline{u}_n$. Puis en utilisant la formule de Green, l'équation (3.4.12) et le fait que $u_n = 0$ sur Γ, on obtient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega h|\beta_n u_n|^2 dx - \int_\Omega \overline{u}_n(\nabla u_n \cdot \nabla h)dx \\ -\displaystyle\int_\Omega h \mid \nabla u_n \mid^2 dx + \ i\beta_n \int_\Omega bhy_n\overline{u}_n dx = o(1). \end{cases} \tag{3.4.41}$$

Alors, en utilisant l'équation (3.4.12) et le fait que les suites $\beta_n y_n$ et ∇u_n sont bornées dans $L^2(\Omega)$, on obtient :

$$\int_\Omega h|\beta_n u_n|^2 dx - \int_\Omega h \mid \nabla u_n \mid^2 dx = o(1). \tag{3.4.42}$$

Posons $h(x) = \eta(x)$ dans (3.4.17), on obtient que :

$$\int_\Omega \eta|\beta_n u_n|^2 dx - \int_\Omega \eta \mid \nabla u_n \mid^2 dx = o(1). \tag{3.4.43}$$

En reportant (3.4.40) dans (3.4.43), on déduit que :

$$\int_\Omega \eta|\beta_n u_n|^2 dx = o(1) \text{ et } \int_{\mathcal{O}_{\gamma-\epsilon}} |\beta_n u_n|^2 dx = o(1). \tag{3.4.44}$$

Etape 6. Multipliant (3.4.13) par $2h(m\cdot\nabla\overline{u}_n)$, en utilisant la formule de Green et le fait que $u_n = 0$ sur Γ, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} -\beta_n^2 \displaystyle\int_\Omega (Nh + m\cdot\nabla h)u_n^2 dx + 2\mathrm{Re}\{\int_\Omega \Delta u_n h(m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx\} \\ +2\mathrm{Re}\{\displaystyle\int_\Omega i\beta_n b h y_n (m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx\} \;= \\ 2\mathrm{Re}\,\{\displaystyle\int_\Omega (-i\beta_n f_1^n + b f_3^n - f_2^n)h(m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx\}. \end{array}\right. \tag{3.4.45}$$

Par la formule de Green et le fait que $f_n^1 = 0$ sur Γ, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} -2i\beta_n \displaystyle\int_\Omega f_1^n h(m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx \;= 2Ni\beta_n \int_\Omega \overline{u}_n f_n^1 h dx + \\ 2\,i\beta_n \displaystyle\int_\Omega \overline{u}_n f_n^1 (m\cdot\nabla h) + 2i\beta_n \int_\Omega \overline{u}_n h(m\cdot\nabla f_n^1)dx. \end{array}\right. \tag{3.4.46}$$

Comme les suites f_n^1, f_n^3 convergent vers zéro dans $H_0^1(\Omega)$ et f_n^2 converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$ et les suites $\beta_n u_n$ et ∇u_n sont bornées dans $L^2(\Omega)$, on déduit de (3.4.46) que

$$2\int_\Omega (-i\beta_n f_1^n + b f_3^n - f_2^n)h(m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx = o(1). \tag{3.4.47}$$

D'autre part, par la formule de Green comme dans l'Etape 3, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\displaystyle\int_\Omega \Delta u_n h(m\cdot\nabla\overline{y})dx = \\ +\displaystyle\int_\Gamma h(m\cdot\nu)|\frac{\partial u_n}{\partial\nu}|^2 d\Gamma - 2\int_\Omega (\nabla h\cdot\nabla u_n)(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx \\ +(N-2)\displaystyle\int_\Omega h|\nabla u_n|^2 dx + \int_\Omega (m\cdot\nabla h)|\nabla u_n|^2 dx. \end{array}\right. \tag{3.4.48}$$

Alors, en combinant (3.4.48), (3.4.47) et (3.4.45), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} -N\displaystyle\int_\Omega h|\beta_n u_n|^2 dx - \int_\Omega \beta_n^2 (m\cdot\nabla h)|u_n|^2 dx + \int_\Gamma h(m\cdot\nu)|\frac{\partial u_n}{\partial\nu}|^2 d\Gamma \\ +(N-2)\displaystyle\int_\Omega h|\nabla u_n|^2 dx - 2\mathrm{Re}\{\int_\Omega (\nabla h\cdot\nabla u_n)(m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx\} \\ +\displaystyle\int_\Omega (m\cdot\nabla h)|\nabla u_n|^2 dx + 2\mathrm{Re}\{i\int_\Omega \beta_n b h y_n (m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx\} = o(1). \end{array}\right. \tag{3.4.49}$$

Posons $h(x) = \eta(x)$ dans (3.4.49), on obtient :

$$\begin{cases} -N\displaystyle\int_\Omega \eta|\beta_n u_n|^2dx - \int_\Omega \beta_n^2(m\cdot\nabla\eta)|u_n|^2dx + \int_\Gamma \eta(m\cdot\nu)|\frac{\partial u_n}{\partial\nu}|^2d\Gamma \\ +(N-2)\displaystyle\int_\Omega \eta|\nabla u_n|^2dx - 2\mathrm{Re}\{\int_\Omega(\nabla\eta\cdot\nabla u_n)(m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx\} \\ +\displaystyle\int_\Omega(m\cdot\nabla\eta)|\nabla u_n|^2dx + 2\mathrm{Re}\{i\int_\Omega \beta_n b\eta y_n(m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx\} = o(1). \end{cases} \tag{3.4.50}$$

Enfin, grâce à (3.4.44)et (3.4.40), on déduit de (3.6.26) que :

$$\int_\Gamma (m\cdot\nu)|\frac{\partial u_n}{\partial\nu}|^2d\Gamma = o(1). \tag{3.4.51}$$

Etape 7. (i) Posons $h(x) = N$ dans (3.4.42), on obtient :

$$N\int_\Omega |\beta_n u_n|^2dx - N\int_\Omega |\ \nabla u_n\ |^2\ dx = o(1). \tag{3.4.52}$$

Posons $h(x) = 1$ dans (3.4.49) en utilisant (3.4.51) on obtient :

$$-N\int_\Omega |\beta_n u_n|^2dx + (N-2)\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx + 2\mathrm{Re}\{\int_\Omega i\beta_n b y_n(m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx\} = o(1). \tag{3.4.53}$$

Combinant les équations (3.4.52) et (3.4.53), on obtient :

$$-2\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx + 2\mathrm{Re}\{i\beta_n\int_\Omega b y_n(m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx\} = o(1). \tag{3.4.54}$$

(ii) Posons $h(x) = N$ dans (3.4.16), on obtient :

$$N\int_\Omega |\beta_n y_n|^2dx - N\int_\Omega |\ \nabla y_n\ |^2\ dx = o(1). \tag{3.4.55}$$

D'autre part, posons $h(x) = 1$ dans (3.4.25) en utilisant (3.4.29), on obtient :

$$-N\int_\Omega |\beta_n y_n|^2dx + (N-2)\int_\Omega |\nabla y_n|^2dx - 2\mathrm{Re}\{i\int_\Omega \beta_n b u_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx\} = o(1). \tag{3.4.56}$$

Combinant les équations (3.4.55) et (3.4.56), on obtient :

$$-2\int_\Omega |\nabla y_n|^2dx - 2\mathrm{Re}\{i\beta_n\int_\Omega b u_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx\} = o(1). \tag{3.4.57}$$

Etape 8. En utilisant la formule de Green, et le fait que $u_n = y_n = 0$ sur Γ on obtient que :

$$-2i\beta_n \int_\Omega bu_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx = 2i\beta_n \int_\Omega \overline{y}_n(Nbu_n+b(m\cdot\nabla u_n)+u_n(m\cdot\nabla b))dx. \quad (3.4.58)$$

En utilisant (3.4.12) dans l'équation précédente, on déduit :

$$-2i\beta_n \int_\Omega bu_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx \;=\; 2i\beta_n \int_\Omega b\overline{y}_n(m\cdot\nabla u_n)dx + o(1). \quad (3.4.59)$$

En combinant les équations (3.4.59) et (3.4.57), on obtient :

$$-2\int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx + 2\mathrm{Re}\{i\beta_n \int_\Omega b(m\cdot\nabla u_n)\overline{y}_n dx\} = o(1). \quad (3.4.60)$$

(ii) Ensuite, combinant les équations (3.4.60) et (3.4.54), on obtient :

$$-2\int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx - 2\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = o(1). \quad (3.4.61)$$

Alors

$$\int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx = o(1) \text{ et que } \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = o(1). \quad (3.4.62)$$

En combinant (3.4.52) et (3.4.62), on déduit :

$$\int_\Omega |\beta_n u_n|^2 dx = o(1). \quad (3.4.63)$$

En combinant (3.4.55) et (3.4.62), on déduit que :

$$\int_\Omega |\beta_n y_n|^2 dx = o(1). \quad (3.4.64)$$

En utilisant (3.4.63) et (3.4.6), on conclut que :

$$\int_\Omega |v_n|^2 dx = o(1). \quad (3.4.65)$$

En utilisant (3.4.64) et (3.4.8), on conclut que :

$$\int_\Omega |z_n|^2 dx = o(1). \quad (3.4.66)$$

En utilisant (3.4.62), (3.4.65) et (3.4.66), on déduit que :

$$\| U_n \|_{\mathcal{H}} = o(1), \tag{3.4.67}$$

ce qui contradit l'hyppothèse (3.4.2). Parsuite l'énergie décroit exponenetiellement vers zéro.

3.5 Etude de stabilité non uniforme, cas où $a \neq 1$.

Dans ce paragraphe, en utilisant le théorème de Huang (voir [34]) et Pruss (voir [34]). On démontre que, pour $a \neq 1$, l'énérgie $E(t)$ du système (3.1.1) ne décroît pas exponentiellement vers zéro dans l'espace de lénergie $\mathcal{H}$.

Proposition 3.5.1. *Supposons que $a \neq 1$ et que $c > 0$, alors l'énergie du système (3.1.1) ne décroît pas exponentiellement vers zèro.*

Démonstration.

Pour montrer la non stabilité uniforme, il suffit de construire une suite $\beta_n \in \mathbb{R}$ et une suite $U_n = (u_n, v_n, y_n, z_n) \in D(\mathcal{A})$ telles que

$$\beta_n \to +\infty, \tag{3.5.1}$$

$$\| U_n \|_{\mathcal{H}} \to +\infty \tag{3.5.2}$$

et

$$\| (i\beta_n I - \mathcal{A})U_n \|_{\mathcal{H}} \leq C < +\infty. \tag{3.5.3}$$

Soit $\mu_n^2 > 0$ une valeur propre du Laplacien et φ_n la fonction propre associée :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n = \mu_n^2\varphi_n, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_n = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.5.4}$$

Posons $V_n = (0, \varphi_n, 0, \varphi_n) \in \mathcal{H}$. On cherche une suite $U_n = (u_n, v_n, y_n, z_n) \in D(\mathcal{A})$ solution de l'équation :

$$\mathcal{A}U_n - i\mu_n U_n = V_n, \tag{3.5.5}$$

où $V_n = (0, \varphi_n, 0, \varphi_n)^T \in \mathcal{H}$, ceci équivaut à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} v_n - i\mu_n u_n &= 0, & (3.5.6)\\ \Delta u_n + bz_n - i\mu_n v_n &= \varphi_n, & (3.5.7)\\ z_n - i\mu_n y_n &= 0, & (3.5.8)\\ a\Delta y_n - bv_n - cz_n - i\mu_n z_n &= \varphi_n. & (3.5.9) \end{aligned}$$

Par l'élimination v_n et z_n dans (3.5.6)-(3.5.9), on obtient le système suivant :

$$\mu_n^2 u_n + \Delta u_n + i\mu_n b y_n = \varphi_n, \tag{3.5.10}$$

$$\mu_n^2 y_n + a\Delta y_n - ib\mu_n u_n - i\mu_n c y_n = \varphi_n. \tag{3.5.11}$$

Posons

$$u_n = a_n \varphi_n \text{ et } y_n = b_n \varphi_n. \tag{3.5.12}$$

Puis en reportant (3.5.12) dans (3.5.10)-(3.5.11), on obtient

$$a_n = \frac{i(a-1)}{b^2} + \frac{ic}{b^2\mu_n} + \frac{i}{b\mu_n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{i\mu_n b}. \tag{3.5.13}$$

De (3.5.5), on déduit

$$\| i\mu_n U_n - \mathcal{A}U_n \|_{\mathcal{H}}^2 = \| (0, \varphi_n, 0, \varphi_n) \|_{\mathcal{H}}^2 = 2. \tag{3.5.14}$$

D'autre part, on a

$$\| U_n \|_{\mathcal{H}}^2 = 2(|a_n|^2 + |b_n|^2)\mu_n^2 \sim \frac{(a-1)^2}{b^4}\mu_n^2 \to +\infty. \tag{3.5.15}$$

Ainsi les suites $\beta_n = \mu_n$ et $U_n = (a_n\varphi_n, \varphi_n, b_n\varphi_n, \varphi_n)$ satisfait les conditions (3.4.1)-(3.4.3). Par le critère de Huang (voir [33]) et Pruss (voir [34]), le système (3.1.1) n'est pas uniformément stable dans $\mathcal{H}$. La preuve est terminée.

Remarque. Nous avons montré la non stabilité uniforme dans le cas de vitesses de propagation des ondes différentes ($a \neq 1$) pour les systèmes d'amortissement global (c est constante). Nous pensons que la non stabilité uniforme reste vraie dans le cas d'amortissement local. Mais, nous n'avons pas pu conclure cette conjecture à cause de la complexité du calcul.

3.6 Etude du taux de décroissance polynomial de l'énergie, cas $a \neq 1$.

Dans le paragraphe précédant, nous avons montré la non stabilité uniforme du système (3.1.1) pour $a \neq 1$. Dans ce paragraphe, nous allons établir un taux de décroissance polynomial pour des solutions régulières dans le cas $a \neq 1$ par un théorème de Liu-Rao (voir [60]) et Borichev (voir [63]).

Theorem 3.6.1. *Supposons que les conditions* (Q1) *et* (Q2) *sont vérifiées. Si* $a \neq 1$*, alors il existe une constante strictement positive* C *telle que l'énergie du système (3.1.1) vérifie :*

$$E(t) \leq \frac{C}{t} \parallel U_0 \parallel^2_{D(\mathcal{A})}, \ \ \forall \ t > 0 \tag{3.6.1}$$

pour toute solution forte du système (3.1.1).

Démonstration :

D'après un résultat de Borichev (voir [63]) et Liu-Rao (voir [60]), un C_0 semi-groupe de contractions sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ admet une décroissance polynomiale (3.6.1) si on a

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}), \tag{P 1}$$

$$\sup_{|\beta| \geq 1} \frac{1}{\beta_n^2} \parallel (i\beta I - (A))^{-1} \parallel < +\infty. \tag{P 2}$$

D'après les Propositions 3.2.1, 3.3.1, la résolvante de l'opérateur $\mathcal{A}$ est compacte et il n'a pas de valeur propre imaginaire pure et $0 \in \rho(\mathcal{A})$, Ceci entraîne bien la condition $(P1)$. Supposons que la condition $(P2)$ soit fausse. Alors il existe une suite $\beta_n \in \mathbb{R}$ et une suite $U_n = (u_n, v_n, y_n, z_n) \in D(\mathcal{A})$ telles que

$$\beta_n \to +\infty, \tag{3.6.2}$$

$$\| U_n \| = 1, \tag{3.6.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| \beta_n^2 (i\beta_n I - \mathcal{A}) U_n \|_{\mathcal{H}} = 0. \tag{3.6.4}$$

On va montrer que $\| (u_n, v_n, y_n, z_n) \|_{\mathcal{H}} \to 0$. Cette contradiction permet de conclure la décroissance rationnelle de l'enérgie. La démonstration comporte plusieurs étapes.

Etape 1. En multipliant (3.6.4) par $U_n = (u_n, v_n, y_n, z_n)$, on obtient

$$Re\{i\beta_n^3 \| U_n \|^2 - \beta_n^2 (\mathcal{A}U_n, U_n)\} = \int_\Omega c|z_n|^2 dx = o(1). \tag{3.6.5}$$

En utilisant (3.1.4) et la condition (Q 1), on déduit que :

$$\int_{\mathcal{O}_\gamma} |z_n|^2 dx \ = \frac{o(1)}{\beta_n^2}. \tag{3.6.6}$$

Ecrivons (3.6.4) sous sous forme détaillée suivante :

$$\begin{aligned}
i\beta_n^3 u_n - \beta_n^2 v_n &= f_n^1, \to 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega), && (3.6.7)\\
i\beta_n^3 v_n - \beta_n^2 \Delta u_n - b\beta_n^2 z_n &= f_n^2, \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), && (3.6.8)\\
i\beta_n^3 y_n - \beta_n^2 z_n &= f_n^3, \to 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega), && (3.6.9)\\
i\beta_n^3 z_n - a\beta_n^2 \Delta y_n + b\beta_n^2 v_n + c\beta_n^2 z_n &= f_n^4, \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega). && (3.6.10)
\end{aligned}$$

En utilisant (3.6.6) et (3.6.9), on déduit :

$$\int_\Omega c|y_n|^2 dx \ = \frac{o(1)}{\beta_n^4} \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{O}_\gamma} |y_n|^2 dx = \frac{o(1)}{\beta_n^4}. \tag{3.6.11}$$

En utilisant les équations (3.6.3), (3.6.7) et (3.6.9), on déduit :

$$\| u_n \|_{L^2(\Omega)} = \frac{O(1)}{\beta_n} \quad \text{et} \quad \| y_n \|_{L^2(\Omega)} = \frac{O(1)}{\beta_n}. \tag{3.6.12}$$

Par l'élimination de v_n et z_n dans (3.6.7)-(3.6.10), on obtient :

$$\beta_n^4 u_n + \beta_n^2 \Delta u_n + i\beta_n^3 b y_n = -i\beta_n f_n^1 + b f_n^3 - f_n^2, \tag{3.6.13}$$

$$\beta_n^4 y_n + a\beta_n^2 \Delta y_n - i\beta_n^3 b u_n - i\beta_n^3 c y_n = -f_n^4 - b f_n^1 - i\beta_n f_n^3 - c f_n^3. \tag{3.6.14}$$

Etape 2. On multiplie l'équation (3.6.14) par $h\overline{y}_n$. Puis, en utilisant la formule de Green, (3.6.11), (3.6.12) et le fait que les suites suites f_n^1, f_n^3, f_n^4 convergent vers zéro, respectivement, dans $H_0^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega h|\beta_n^2 y_n|^2 dx - aN\beta_n^2 \int_\Omega h \mid \nabla y_n \mid^2 dx - \\ \displaystyle\beta_n^2 \int_\Omega a\overline{y}_n(\nabla h \cdot \nabla y_n) dx - i\beta_n^3 \int_\Omega h b u_n \overline{y}_n dx = o(1). \end{array} \right. \tag{3.6.15}$$

Prenons $h(x) = \eta(x)$ dans (3.6.15), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \eta|\beta_n^2 y_n|^2 dx - aN\beta_n^2 \int_\Omega \eta \mid \nabla y_n \mid^2 dx - \\ \displaystyle\beta_n^2 \int_\Omega a\overline{y}_n(\nabla \eta \cdot \nabla y_n) dx - i\beta_n^3 \int_\Omega \eta b u_n \overline{y}_n dx = o(1). \end{array} \right. \tag{3.6.16}$$

En utilisant (3.6.11) et le fait que les suites $\beta_n u_n$, ∇y_n sont uniformément bornées dans $L^2(\Omega)$, on déduit à partir de (3.6.16) que :

$$\int_\Omega \eta \mid \beta_n \nabla y_n \mid^2 dx = o(1) \;\text{ et }\; \int_{\mathcal{O}_{\gamma-\epsilon}} \mid \beta_n \nabla y_n \mid^2 dx = o(1). \tag{3.6.17}$$

D'autre part, posons $h(x) = N$ dans (3.6.15) et divisons par β_n^2, on obtient :

$$N \int_\Omega |\beta_n y_n|^2 dx - aN \int_\Omega \mid \nabla y_n \mid^2 dx = o(1). \tag{3.6.18}$$

Etape 3 En multipliant l'équation (3.6.14) par $\frac{2}{\beta_n^2}\eta(m\cdot\nabla\overline{y}_n)$ et par la même technique comme dans l'Etape 2, section 4, de l'équation (3.4.25) on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} -N\,\beta_n^2\displaystyle\int_\Omega \eta|y_n|^2dx-\beta_n^2\int_\Omega(m\cdot\nabla\eta))|y_n|^2dx+\int_\Gamma\eta(m\cdot\nu)|\frac{\partial y_n}{\partial\nu}|^2d\Gamma+ \\ (N-2)\displaystyle\int_\Omega\eta|\nabla y_n|^2dx-2\mathrm{Re}\{\int_\Omega(\nabla\eta\cdot\nabla y_n)(m\cdot\nabla\overline{y_n})dx\}+ \\ \displaystyle\int_\Omega(m\cdot\nabla\eta)|\nabla y_n|^2dx-2\mathrm{Re}\{i\beta_n\int_\Omega b\eta u_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx\}=\frac{o(1)}{\beta_n^2}. \end{array}\right. \tag{3.6.19}$$

Alors, en utilisant (3.6.11), (3.6.17), (3.4.25) et le fait que $\beta_n u_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, on déduit :

$$\int_\Gamma(m\cdot\nu)|\frac{\partial y_n}{\partial\nu}|^2d\Gamma=o(1). \tag{3.6.20}$$

Etape 4. Multipliant (3.6.14) par $\dfrac{1}{\beta_n}\eta\overline{u}_n$. Alors, en utilisant la formule de Green et le fait que $u_n=0$ sur Γ, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega\beta_n^3\eta\overline{u}_n y_n dx-a\int_\Omega\beta_n\eta(\nabla y_n\cdot\nabla\overline{u}_n)dx \\ -\,a\displaystyle\int_\Omega\beta_n\overline{u}_n(\nabla y_n\cdot\nabla\eta)dx-i\beta_n^2\int_\Omega b\eta|u_n|^2dx \\ -\,i\beta_n^2\displaystyle\int_\Omega c\eta\overline{u}_n y_n dx=o(1). \end{array}\right. \tag{3.6.21}$$

En utilisant (3.6.11), (3.6.17) et le fait que la suite $\beta_n u_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ dans (3.6.21), on déduit que

$$\int_\Omega b\eta|\beta_n u_n|^2dx=o(1). \tag{3.6.22}$$

Grâce à la condition (Q 1) et $b>0$, on déduit :

$$\int_{\mathcal{O}_{\gamma-\epsilon}}|\beta_n u_n|^2dx=o(1). \tag{3.6.23}$$

Etape 5. Multiplions l'équation (3.6.13) par $\frac{1}{\beta_n^2}\eta\overline{u}_n$. Alors, comme dans l'Etape 5 de section 4, on obtient :

$$\int_\Omega\eta|\beta_n u_n|^2dx-\int_\Omega\eta\mid\nabla u_n\mid^2dx=o(1). \tag{3.6.24}$$

Alors, de (3.6.23) on déduit :

$$\int_{\mathcal{O}_{\gamma-\epsilon}} \mid \nabla u_n \mid^2 dx = o(1). \tag{3.6.25}$$

Etabe 6. Nous multiplions l'équation (3.6.13) par $\frac{2}{\beta_n^2} h(m \cdot \nabla \overline{u}_n)$. Alors comme dans l'Etape 6 de section 4 de l'équation (3.4.49), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -N \displaystyle\int_\Omega \eta |\beta_n u_n|^2 dx - \int_\Omega \beta_n^2 (m \cdot \nabla \eta) |u_n|^2 dx + \int_\Gamma \eta (m \cdot \nu) |\frac{\partial u_n}{\partial \nu}|^2 d\Gamma \\ +(N-2) \displaystyle\int_\Omega \eta |\nabla u_n|^2 dx - 2\mathrm{Re}\{\int_\Omega (\nabla \eta \cdot \nabla u_n)(m \cdot \nabla \overline{u}_n) dx\} \\ + \displaystyle\int_\Omega (m \cdot \nabla \eta) |\nabla u_n|^2 dx + \ 2\mathrm{Re}\{i \int_\Omega \beta_n b \eta y_n (m \cdot \nabla \overline{u}_n) dx\} = o(1). \end{array} \right. \tag{3.6.26}$$

Enfin, en utilisant (3.6.25) et (3.6.23), on déduit :

$$\int_\Gamma (m \cdot \nu) |\frac{\partial u_n}{\partial \nu}|^2 d\Gamma = o(1). \tag{3.6.27}$$

Etape 7. Il est clair que les Etapes 7, 8 et 9 sont vraie dans le cas $a \neq 1$. Alors, en répétant les Etapes 7, 8 et 9 on conclût que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}} = o(1).$$

Ce résultat contradit l'équation (3.6.3). On déduit la stabilité polynomiale.

Chapitre 4

Stabilisation interne locale indirecte d'un système monodimensionnel des équations des ondes

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère le même système que celui du chapitre 3 dans le cas monodimensionnel sur $]0,1[$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - by_t = 0 \ , & \text{dans }]0,1[\times\mathbb{R}^+, \\ y_{tt} - ay_{xx} + bu_t + cy_t = 0 \ , & \text{dans }]0,1[\times\mathbb{R}^+, \\ u(0) = u(1) = y(0) = y(1) = 0, & \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où a est une constante strictement positive, b et $c \in C^1([0,1])$ et $b \geq 0$, $c \geq 0$.

Les conditions initiales sont données par :

$$(u(x,0),y(x,0)) = (u_0,y_0), \quad (u_t(x,0),y_t(x,0)) = (u_1,y_1). \tag{4.1.2}$$

Supposons qu'il existe $0 < \alpha < \alpha' < 1$ telles que $c \in C^1(\overline{\Omega})$ vérifie :

$$c(x) \ > 0, \quad \text{dans } \ ]\alpha,\alpha'[. \tag{4.1.3}$$

Alors l'amortissement est localisé à l'intérieur du domaine et pas nécessairement au voisinage de la frontière comme dans le cas multidimensionnel.

Soit (u,y) une solution régulière du système (4.1.1). On définit l'énergie associée par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\,|u_t|^2 + |u_x|^2 + |y_t|^2 + a|y_x|^2)dx. \tag{4.1.4}$$

Comme

$$E'(t) = -\int_0^1 c(x)|y_t|^2 dx, \tag{4.1.5}$$

on voit que E est décroissante.

En introduisant $U = (u,u_t,y,y_t)$, on transforme le problème (4.1.1) sous la forme d'une équation d'évolution :

$$\begin{cases} U_t \ = \mathcal{A}U, \\ U(0) \ = \ U_0, \end{cases} \tag{4.1.6}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est m-dissipatif dans l'espace de l'énérgie. Ainsi on montre que le problème est bien posé au sens de semi groupe de contractions.

D'abord la résolvante de l'opérateur $\mathcal{A}$ est compacte dans l'espace de l'énergie. Alors on peut procédeder comme dans Lagnese (voir [35]) à l'application de la théorie de décomposition spectrale Sz-Nagy-Foias (voir[32]), Foguel (voir[19]) et Benchimol (voir [20]) et on montrera que l'énergie du système décroît vers zéro.

Ensuite, pour $a = 1$, on utilise un théorème de Huang (voir[33]) et Pruss (voir[33]) pour établir la stabilisation uniforme de l'énergie.

Dans le cas $a \neq 1$, en utilisant un théorème de Huang (voir[33]) et Pruss (voir[34]), on montre la non stabilité uniforme du système (4.1.1). Enfin, on utilise un théorème de Liu-Rao (voir[60]) et Borichev (voir [63]) pour établir un taux de décroissance rationnelle de l'énergie du système pour les données initiales d'énergie finie .

4.2 Formulation du problème.

On va formuler le problème (4.1.1) dans un espace de Hilbert. D'abord, on définit l'espace de l'énergie comme suit :

$$\mathcal{H} = \Big(H_0^1(]0,1[) \times L^2(]0,1[) \Big)^2 \tag{4.2.1}$$

muni du produit scalaire suivant :

$$\begin{cases} \Big(U,\ \widetilde{U}\Big)_{\mathcal{H}} = \displaystyle\int_0^1 u_x \widetilde{u}_x\, dx + \int_0^1 v\, \widetilde{v}\, dx + a \int_0^1 y_x \widetilde{y}_x dx + \int_0^1 z \widetilde{z} dx, \\ \qquad \forall\, U = (u,v,y,z),\ \widetilde{U} = (\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \ \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Pour donner un sens convenable au système (4.1.1), on définit l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ par :

$$D(\mathcal{A}) = \Big((H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \Big)^2, \tag{4.2.3}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}U = (\, v, u_{xx} + bz\, , z, a y_{xx} - bv - cz), \\ \forall\, U = (u,v,y,z) \in D(\mathcal{A}). \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Posons $U = (u, u_t, y, y_t)$, le système (4.1.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U\ , \\ U(0) = U_0 \ \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

Proposition 4.2.1. *L'opérateur $\mathcal{A}$ défini par (4.2.3)-(4.2.4) est m-dissipatif et à résolvante compacte dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$.*

L'opérateur $\mathcal{A}$ étant m-dissipatif dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, d'après le Théorème de Hille-Yosida, on a le résultat suivant.

Theorem 4.2.2. *(Existence et unicité de la solution).*
(1) Soit $U_0 = (u_0, u_1, y_0, y_1) \in D(\mathcal{A})$, *alors le problème (4.2.5) admet une solution forte* $U = (u, u_t, y, y_t)$ *telle que*

$$(u(t), y(t)) \in (C^2(\mathbb{R}_+, L^2(]0,1[)))^2 \cap (C^1(\mathbb{R}_+, H_0^1(]0,1[)))^2 \cap (C^0(\mathbb{R}^+, H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)))^2.$$

(2) Soit $U_0 = (u_0, u_1, y_0, y_1) \in \mathcal{H}$, *alors le problème (4.2.5) admet une solution faible* $U = (u, u_t, y, y_t)$ *telle que*

$$(u(t), y(t)) \in (C^1(\mathbb{R}_+, L^2(]0,1[)))^2 \cap (C^0(\mathbb{R}_+, H_0^1(]0,1[)))^2.$$

4.3 Etude de la stabilité forte.

Dans ce paragraphe, on étudie la stabilité forte du système (4.1.1). D'abord, on montre que l'opérateur $\mathcal{A}$ n'a pas de valeur propre imaginaire pure. Puis, par la méthode de décomposition spectrale (voir [20]), on montre que l'énergie du système (4.1.1) décroît vers zéro asymptotiquement.

En supposant que les fonctions b et c vérifient la condition :

$$[\gamma, \beta] \ \subset \ [\alpha, \alpha'], \ \text{ et } \ b(x) \geq b_0 > 0 \ \text{ pour tout } x \in]\gamma, \beta[\qquad (\text{Q } 1).$$

Proposition 4.3.1. *Supposons que la condition (Q 1) est vérifiée. L'opérateur $\mathcal{A}$ n'admet pas de valeur propre imaginaire.*

Démonstration.

Supposons que $\mathcal{A}$ admet une valeur propre imaginaire pure. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U = (u, v, y, z) \in D(\mathcal{A})$ tels que :

$$\mathcal{A}U = i\lambda U. \tag{4.3.1}$$

D'où vient

$$-\int_0^1 c|z|^2 dx = \mathrm{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = \mathrm{Re}\{i\lambda \parallel U \parallel_{\mathcal{H}}^2\} = 0. \tag{4.3.2}$$

En utilisant (4.1.3), on déduit que :

$$z \equiv 0, \ \text{ dans }]\alpha, \alpha'[. \tag{4.3.3}$$

De (4.3.1) et (4.3.3), on déduit le système suivant :

$$\begin{aligned} v &= i\lambda u, && \text{dans } H_0^1(]0,1[), && (4.3.4)\\ u_{xx} + bz &= i\lambda v, && \text{dans } L^2(]0,1[), && (4.3.5)\\ z &= i\lambda y, && \text{dans } H_0^1(]0,1[), && (4.3.6)\\ ay_{xx} - bv &= i\lambda z, && \text{dans } L^2(]0,1[). && (4.3.7) \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$, alors $U = 0$, ce qui contradit la condition $U \neq 0$.

Supposons que $\lambda \neq 0$. En utilisant (4.3.3) et (4.3.6), on obtient :

$$y \equiv 0, \quad \text{dans }]\alpha, \alpha'[. \tag{4.3.8}$$

En éliminant v et z dans (4.3.4)-(4.3.7), on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} u_{xx} + \lambda^2 u + i\lambda b y &= 0, \quad \text{dans } L^2(]0,1[), && (4.3.9)\\ ay_{xx} + \lambda^2 y - i\lambda b u &= 0, \quad \text{dans } L^2(]0,1[), && (4.3.10)\\ u(0) = u(1) = y(0) = y(1) &= 0. && (4.3.11) \end{aligned}$$

Considérons la fonction $\eta \in C^0([0,1])$, telle que :

$$\begin{cases} \eta(x) \in [0,1], \\ \eta(x) = 0, \quad \text{si } x \in]0,\gamma[\cup]\beta,1[, \\ \eta(x) = 1, \quad \text{si } x \in [\gamma+\epsilon, \beta-\epsilon], \end{cases} \tag{4.3.12}$$

où $\epsilon > 0$ est une constante assez petite telle que $0 < \gamma + \epsilon < \beta - \epsilon < 1$.

Nous multiplions l'équation (4.3.10) par $\eta \overline{u}$. Puis, en utilisant la formule d'intégration par patie, on obtient :

$$\begin{cases} i \displaystyle\int_0^1 \lambda b \eta |u|^2 dx \ = \\ \quad + \displaystyle\int_0^1 \lambda^2 \eta y \overline{u} dx - a \int_\Omega \eta y_x \overline{u}_x dx \\ \quad - a \displaystyle\int_0^1 \overline{u} y_x \eta_x dx. \end{cases} \tag{4.3.13}$$

Grâce à (4.3.8), le second membre de (4.3.13) est nul, ce qui implique que

$$\int_\Omega b \eta |u|^2 dx = 0 \ \text{ et } \ \int_{\gamma+\epsilon}^{\beta-\epsilon} b|u|^2 dx = 0. \tag{4.3.14}$$

En utilisant la condition (Q 1), on déduit que :

$$u = 0, \quad \text{dans} \quad]\gamma + \epsilon, \beta - \epsilon[. \tag{4.3.15}$$

Comme u et y sont dans $H^2(0,1)$, on déduit que :

$$u(\gamma + \epsilon) = u_x(\gamma + \epsilon) = y(\gamma + \epsilon) = y_x(\gamma + \epsilon) = 0.$$

Posons maintenant :

$$X = (u, u_x, y, y_x) \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & -i\lambda b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{i\lambda b}{a} & 0 & \frac{-\lambda^2}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant (4.3.9)-(4.3.10). Alors, on a le problème suivant :

$$\begin{cases} X' = M\,X, \quad x \in]0, \gamma + \epsilon[, \\ X(\gamma + \epsilon) = 0. \end{cases} \tag{4.3.16}$$

D'après la théorie des equations differentielles ordinaires, le problème (4.3.16) admet une solution unique et comme zèro une solution de ce problème alors, $X = 0$ sur $]0, \gamma + \epsilon, [$. En répétant le même travail sur $]\beta - \epsilon, 1[$ et on déduit finalement que $U = 0$. Et par suite l'opérateur $\mathcal{A}$ n'admet pas de valeur propre imagimaire.

Theorem 4.3.2. *Supposons que la condition (Q 1) est vérifiée. L'énergie $E(t)$ du système (4.1.1) décroît fortement vers zéro :*

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$$

pour toute solution faible du système (4.1.1).

Démonstration.

L'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans (4.2.3) et (4.2.4) est m-dissipatif et a résolvante compacte. Il n'admet pas de valeur propre imaginaire pure. D'après la théorie de décomposition spectrale de Sz-Nagy-Foias (voir [32]), Foguel (voir [19]) et Benchimol (voir [20]), on déduit que le semi-groupe de contractions $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t)$ engendré par $\mathcal{A}$ est fortement stable.

4.4 Etude du taux de décroissance exponentiel de l'énergie, cas $a = 1$.

Dans ce paragraphe, on étudie la stabilité du système (4.1.1) dans le cas $a = 1$. On montre que l'énérgie du système (4.1.1) décroît exponentiellement vers zèro pour tout donné initiale, en utilisant la méthode de fréquence de domaine.

Theorem 4.4.1. *Supposons que la condition (Q 1) est vérifiée. Soit $a = 1$ alors, il existe des constantes strictement positives $\omega > 0$ et $M \geq 1$ telles que l'enérgie $E(t)$ du système (4.1.1) vérifie l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq Me^{-\omega t}, \quad \forall\ t \geq 0$$

pour toute solution faible du système (4.1.1).

Démonstration.

D'après un résultat de Huang [33] et Pruss [33], un C_0 semi-groupe de contractions $e^{t\mathcal{A}}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est exponentiellement stable si et seulement si :

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}), \qquad \text{(H 1)}$$

$$\sup_{|\beta|\geq 1} \| (i\beta_n I - \mathcal{A})^{-1} \| < \infty. \qquad \text{(H 2)}.$$

D'abord, la résolvante de $\mathcal{A}$ est compacte, le fait que $\mathcal{A}$ n'ait pas de valeur propre purement imaginaire entraîne bien la condition (H 1). Supposons que la condition (H2) soit fausse. Alors il existe une suite $\beta_n \in \mathbb{R}$ et une suite $U_n = (u_n, v_n, y_n, z_n) \in D(\mathcal{A})$, telles que

$$\beta_n \to \infty, \tag{4.4.1}$$

$$\| U_n \|_{\mathcal{H}} = 1, \tag{4.4.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| (i\beta_n I - \mathcal{A})U_n \|_{\mathcal{H}} = 0. \tag{4.4.3}$$

On va montrer que $\| (u_n, v_n, y_n, z_n) \|_{\mathcal{H}} \to 0$. Cette contradiction permet de conclure la décroissance exponentielle de l'énergie.
La démonstration comporte plusieurs étapes.

Etape 1. D'abord, multipliant (4.4.3) par la suite uniformément bornée $U_n = (u_n, v_n, y_n, z_n)$, on obtient :

$$\int_0^1 c|z_n|^2 dx = \mathrm{Re}\{i\beta_n \| U_n \|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U_n, U_n)\} = o(1). \tag{4.4.4}$$

En utilisant (4.1.3), on déduit que :

$$\int_\alpha^{\alpha'} |z_n|^2 dx = o(1). \tag{4.4.5}$$

Ensuite, on écrit (4.4.3) sous la forme :

$$\begin{aligned}
i\beta_n u_n - v_n &= f_n^1 \to 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(]0,1[), && (4.4.6)\\
i\beta_n v_n - u_{nxx} - bz_n &= f_n^2 \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(]0,1[), && (4.4.7)\\
i\beta_n y_n - z_n &= f_n^3 \to 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(]0,1[), && (4.4.8)\\
i\beta_n z_n - ay_{nxx} + bv_n + cz_n &= f_n^4 \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(]0,1[). && (4.4.9)
\end{aligned}$$

En utilisant les équations (4.4.5) et (4.4.8), on déduit :

$$\int_0^1 c|\beta_n y_n|^2 dx = \frac{O(1)}{\beta_n} \ \text{ et } \ \int_\alpha^{\alpha'} |\beta_n y_n|^2 dx = \frac{O(1)}{\beta_n}. \tag{4.4.10}$$

En utilisant le fait que $\beta_n y_n$ et $\beta_n u_n$ sont uniformément bornées dans $L^2(\Omega)$, on déduit :

$$\int_0^1 |y_n|^2 dx = o(1) \quad \text{et} \quad \int_0^1 |u_n|^2 dx = o(1). \tag{4.4.11}$$

En éliminant v_n et z_n dans (4.4.6)-(4.4.9), on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \beta_n^2 u_n + u_{nxx} + i\beta_n b y_n &= -i\beta_n f_n^1 + b f_n^3 - f_n^2, & (4.4.12)\\ \beta_n^2 y_n + a y_{nxx} - i\beta_n b u_n - i\beta_n c y_n &= -f_n^4 - b f_n^1 - i\beta_n f_n^3 - c f_n^3. & (4.4.13) \end{aligned}$$

Etape 2. D'abord, nous multiplions l'équation (4.4.13) par $h(x)\overline{y_n}$. En utilisant la formule d'intégration par paties et le fait que $y_n = 0$ sur Γ, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 h|\beta_n y_n|^2 dx - a\int_0^1 h \mid y_{nx} \mid^2 dx - a\int_0^1 \overline{y}_n(h' y_{nx})dx \\ \displaystyle -i\,\beta_n \int_0^1 b h u_n \overline{y_n} dx - i\beta_n \int_0^1 c(x)h(x)|y_n|^2 dx \\ \displaystyle = \int_0^1 (-f_n^4 - b f_n^1 - i\beta_n f_n 3 - c f_n^3) h\overline{y_n} dx. \end{array} \right. \tag{4.4.14}$$

En utilisant (4.4.10), (4.4.11), la convergence de f_n^1, f_n^3 dans $H_0^1(]0,1[)$, f_4^n dans $L^2(\Omega)$ et le fait que les suites $\beta_n y_n$, $\beta_n u_n$, y_{nx} sont uniformément bornées dans $L^2(]0,1[)$, on obtient que :

$$\int_0^1 h|\beta_n y_n|^2 dx - a\int_0^1 h \mid y_{nx} \mid^2 dx = o(1). \tag{4.4.15}$$

Maintenant, prenons $h(x) = \eta(x)$ dans (4.4.15). Puis, en utilisant (4.4.10), on déduit que :

$$\int_0^1 \eta \mid y_{nx} \mid^2 dx = o(1) \quad \text{et} \quad \int_{\gamma+\epsilon}^{\beta-\epsilon} \mid y_{nx} \mid^2 dx = o(1). \tag{4.4.16}$$

Etape 3. (i) Notons que $\frac{1}{\beta_n}\eta(x)\overline{u}_{nxx}$ est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$. Alors, multiplions l'équation (4.4.13) par $\frac{1}{\beta_n}\eta(x)\overline{u}_{nxx}$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1(\beta_n^2 y_n + a y_{nxx} - i\beta_n b u_n - i\beta_n c y_n)\frac{1}{\beta_n}\eta(x)\overline{u}_{nxx}dx = \\ \displaystyle\int_0^1(-f_n^4 - b f_n^1 - c f_n^3)\frac{1}{\beta_n}\eta(x)\overline{u}_{nxx}dx + \\ \displaystyle i\int_0^1(f_{nx}^3\eta(x) + f_n^3\eta')\overline{u}_{nx}dx. \end{array}\right. \tag{4.4.17}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties, le fait que les suites f_n^1, f_n^3 convergent dans $H_0^1(]0,1[)$ et f_n^4 convergent dans $L^2(]0,1[)$ et que u_{nx} est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$, on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle -\int_0^1 \beta_n\eta\overline{u}_{nx}y_{nx}dx + \int_0^1\frac{a}{\beta_n}\eta\overline{u}_{nxx}y_{nxx}dx \\ \displaystyle -\beta_n\int_0^1 \eta_x y_n\overline{u}_{nx}dx + i\int_0^1 b\eta \mid u_{nx}\mid^2 dx + \\ \displaystyle i\int_0^1(b\eta)_x u_n\overline{u}_{nx}dx + i\int_0^1(c\eta)_x\overline{u}_{nx}y_n dx + \\ \displaystyle i\int_0^1 c\eta\overline{u}_{nx}y_{nx}dx = o(1). \end{array}\right. \tag{4.4.18}$$

En utilisant (4.4.10), (4.4.11), (4.4.16) et le fait que u_{nx} est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$, on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle -\int_0^1 \beta_n\eta\overline{u}_{nx}y_{nx}dx + \int_0^1\frac{a}{\beta_n}\eta\overline{u}_{nxx}y_{nxx}dx + \\ \displaystyle i\int_0^1 b\eta\mid u_{nx}\mid^2 dx = o(1). \end{array}\right. \tag{4.4.19}$$

(ii) De même, en multipliant (4.4.12) par $\frac{1}{\beta_n}\eta\overline{y}_{nxx}$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1(\beta_n^2 u_n + u_{nxx} + i\beta_n b y_n)\frac{1}{\beta_n}\eta\overline{y}_{nxx}dx = \\ \displaystyle\int_0^1(-i\beta_n f_1^n + b f_3^n - f_2^n)\frac{1}{\beta_n}\eta\overline{y}_{nxx}dx. \end{array}\right. \tag{4.4.20}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties et le fait que les suites f_n^1, f_n^3 convergent dans $H_0^1(]0,1[)$ et f_n^2 convergent dans $L^2(]0,1[)$, à partir de (4.4.17), on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^1 \beta_n \eta u_{nx}\overline{y}_{nx}dx - \beta_n \int_0^1 \eta_x u_n \overline{y}_{nx}dx + \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\beta_n}\eta u_{nxx}\overline{y}_{nxx}dx - i\int_0^1 (b\eta)_x y_n y_{nx}dx - i\int_0^1 b\eta |y_{nx}|^2 dx = o(1) \end{array}\right. \tag{4.4.21}$$

En utilisant (4.4.10), (4.4.11) et (4.4.16) dans (4.4.22), on déduit que :

$$-\int_0^1 \beta_n \eta u_{nx}\overline{y}_{nx}dx + \int_0^1 \frac{1}{\beta_n}\eta u_{nxx}\overline{y}_{nxx}dx = o(1). \tag{4.4.22}$$

(iii) En prenant $a = 1$ dans (4.4.19), on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^1 \beta_n \eta \overline{u}_{nx} y_{nx}dx + \int_0^1 \frac{1}{\beta_n}\eta \overline{u}_{nxx} y_{nxx}dx + \\ i\displaystyle\int_0^1 b\eta \mid u_{nx} \mid^2 dx = o(1). \end{array}\right. \tag{4.4.23}$$

En combinant les équations (4.4.22) et (4.4.23), la partie imaginaire de l'équation obtenu converge vers zéro, ce qui implique :

$$\int_0^1 b\eta \mid u_{nx} \mid^2 dx = o(1). \tag{4.4.24}$$

En utilisant le fait que la condition $(Q1)$ est vérifiée, on déduit que :

$$\int_{\gamma+\epsilon}^{\beta-\epsilon} \mid u_{nx} \mid^2 dx = o(1). \tag{4.4.25}$$

Etape 4. (i) En multipliant l'équation (4.4.12) par $h(x)\overline{u_n}$ et en utilisant la formule d'intégration par parties, et le fait que $u_n(0) = u_n(1) = 0$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 h|\beta_n u|^2 dx - a \int_0^1 h \mid u_{nx} \mid^2 dx \\ \displaystyle -a \int_0^1 \overline{u}_n (h_x u_{nx}) dx + i\, \beta_n \int_0^1 bhy_n \overline{u_n} dx = \\ \displaystyle \int_0^1 (-i\beta_n f_1^n + bf_3^n - f_2^n) h\overline{u_n} dx. \end{array}\right. \tag{4.4.26}$$

En utilisant (4.4.11), la convergence de f_n^1, f_n^3 dans $H_0^1(]0,1[)$, f_2^n dans $L^2(]0,1[)$ et le fait que les suites $\beta_n y_n$, $\beta_n u_n$, u_{nx} sont uniformément bornées dans $L^2(]0,1[)$, on obtient :

$$\int_0^1 h|\beta_n u_n|^2 dx - \int_0^1 h \mid u_{nx} \mid^2 dx = o(1). \tag{4.4.27}$$

Considérons la fonction ζ telle que

$$\left\{\begin{array}{lll} \zeta(x) \in [0,1], & & \\ \zeta(x) = 0, & \text{si}\, x \in & [0, \gamma + \epsilon], \\ \zeta(x) = 1, & \text{si}\, x \in & [\beta - \epsilon, 1]. \end{array}\right. \tag{4.4.28}$$

Posons $h(x) = \zeta(x)$ dans (4.4.27), on déduit que :

$$\int_0^1 \zeta|\beta_n u_n|^2 dx - \int_0^1 \zeta \mid u_{nx} \mid^2 dx = o(1) \tag{4.4.29}$$

(ii) Multiplions (4.4.12) par $2(x-1)\zeta\overline{u}_{nx}$. En utilisant la formule d'intégration par parties et le fait que $\| y_n \| = \| \zeta_x y_n \| = o(1)$, on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle \mathrm{Re}\{\beta_n^2 \int_0^1 (x-1)\zeta\partial_x |u_n|^2 dx\} + \mathrm{Re}\{\int_0^1 (x-1)\zeta\partial_x |u_{nx}|^2 dx\} - \\ \displaystyle \mathrm{Re}\{2i \int_0^1 \beta_n (b\zeta y_n + (x-1) b_x \zeta y_n + \zeta(x-1) b y_{nx}) \overline{u}_n dx\} \\ \displaystyle = \mathrm{Re}\{\, 2 \int_0^1 (x-1)(-i\beta_n f_n^1 + bf_3^n - f_2^n)\zeta(\overline{u}_{nx}) dx\}. \end{array}\right. \tag{4.4.30}$$

En utilisant la formule de Green dans (4.4.30), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} -\beta_n^2 \int_0^1 (\zeta + (x-1)\zeta_x)|u_n|^2 dx - \int_0^1 ((x-1)\zeta_x + \zeta)|u_{nx}|^2 dx \\ -\mathrm{Re}\{2i \int_0^1 \beta_n (b\zeta y_n + (x-1)b_x \zeta y_n + \zeta(x-1)by_{nx})\overline{u}_n dx\} = o(1) \end{array}\right. \tag{4.4.31}$$

En utilisant le fait que $\| u_n \| = \| \zeta_x u_n \| = \| \zeta_x u_{nx} \| = o(1)$, $\beta_n y_n$ est borné dans $L^2(]0,1[)$ dans (4.4.31), on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} -\beta_n^2 \int_0^1 \zeta |u_n|^2 dx - \int_0^1 \zeta |u_{nx}|^2 dx \\ -\mathrm{Re}\{2i \int_0^1 \beta_n \zeta (x-1) by_{nx}\overline{u}_n dx\} = o(1). \end{array}\right. \tag{4.4.32}$$

En combinant les équations (4.4.32) et (4.4.29), on déduit que :

$$-2\int_0^1 \zeta |u_{nx}|^2 dx - \mathrm{Re}\{2i \int_0^1 \beta_n \zeta(x-1) by_{nx}\overline{u}_n dx\} = o(1). \tag{4.4.33}$$

Etape 5. En utilisant $h(x) = \zeta(x)$ dans l'équation (4.4.15), on déduit que :

$$\int_0^1 \zeta |\beta_n y_n|^2 dx - \int_0^1 \zeta \mid y_{nx} \mid^2 dx = o(1) \tag{4.4.34}$$

De plus, multiplions (4.4.13) par $2(x-1)\zeta\overline{y}_{nx}$. En utilisant la formule d'intégration par parties, le fait que $\| y_n \| = \| \zeta_x y_n \| = o(1)$ et (4.4.10),on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{l} +\mathrm{Re}\{\beta_n^2 \int_0^1 (x-1)\zeta \partial_x |y_n|^2 dx + \int_0^1 (x-1)\zeta\partial_x |y_{nx}|^2 dx\} \\ -\mathrm{Re}\{2i \int_0^1 (x-1)\beta_n b u_n \zeta \overline{y}_n dx\} = \\ +2\mathrm{Re}\{\int_0^1 (x-1)(-f_4^n - bf_1^n - i\beta_n f_3^n - cf_3^n)\zeta(\overline{y}_{nx})dx\}. \end{array}\right. \tag{4.4.35}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties et le fait que $\| y_n \| = \| \zeta_x y_n \| = \| \zeta_x u_{nx} \| = o(1)$ et $\beta_n u_n$ est borné dans $L^2(]0,1[)$, on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} -\beta_n^2 \int_0^1 \zeta |y_n|^2 dx - \int_0^1 \zeta |y_{nx}|^2 dx \\ -\mathrm{Re}\{2i \int_0^1 (x-1)\beta_n b u_n \zeta \overline{y}_n dx\} = o(1). \end{array}\right. \tag{4.4.36}$$

En combinant les équations (4.4.34) et (4.4.36), on déduit que :

$$-2\int_0^1 \zeta |y_{nx}|^2 dx - \mathrm{Re}\{2i\int_0^1 \beta_n \zeta (x-1) b u_n \overline{y}_{nx} dx\} = o(1) \tag{4.4.37}$$

Etape 6. En combinant les équations (4.4.33) et (4.4.37), le partie imagianaire de l'équation obtenu converge vers zéro, ceci implique que :

$$-2\int_0^1 \zeta |y_{nx}|^2 dx - 2\int_0^1 \zeta |u_{nx}|^2 dx = o(1). \tag{4.4.38}$$

En utilisant le définition de ζ, on déduit, à partir de (4.4.38), que :

$$\int_{\beta-\epsilon}^1 |y_{nx}|^2 dx = \int_{\beta-\epsilon}^1 |u_{nx}|^2 dx = o(1). \tag{4.4.39}$$

De la même manière, en utilisant la fonction ϑ :

$$\begin{cases} \vartheta(x) \in [0,1], & \\ \vartheta(x) = 1 & \text{si } x \in [0, \gamma+\epsilon], \\ \vartheta(x) = 0 & \text{si } x \in [\beta-\epsilon, 1], \end{cases} \tag{4.4.40}$$

on démontre que :

$$\int_0^{\gamma+\epsilon} |y_{nx}|^2 dx = \int_0^{\gamma+\epsilon} |u_{nx}|^2 dx = o(1). \tag{4.4.41}$$

En combinant les équations (4.4.41), (4.4.39), (4.4.16) et (4.4.25), on déduit que :

$$\int_0^1 |y_{nx}|^2 dx = \int_0^1 |u_{nx}|^2 dx = o(1). \tag{4.4.42}$$

En utilsant $h(x) = 1$ dans (4.4.15), combinant (4.4.42) et l'équation obtenu, on conclut que :

$$\int_0^1 |\beta_n y_n|^2 dx = o(1). \tag{4.4.43}$$

En utilsant $h(x) = 1$ dans (4.4.27) et en combinant (4.4.42) et l'équation obtenu, on conclut que :

$$\int_0^1 |\beta_n u_n|^2 dx = o(1). \tag{4.4.44}$$

En combinant les équations (4.4.43) et (4.4.8), on déduit :

$$\int_0^1 |z_n|^2 dx = o(1). \tag{4.4.45}$$

En combinant les équations (4.4.44) et (4.4.6), on déduit :

$$\int_0^1 |v_n|^2 dx = o(1). \tag{4.4.46}$$

A partir des équations (4.4.42), (4.4.44), (4.4.45) et (4.4.46), on conclut que :

$$\| U_n \|_{\mathcal{H}} = o(1), \tag{4.4.47}$$

ceci contradit l'hyppothèse (4.4.2) et par suite l'énérgie $E(t)$ décroît exponentiellement vers zéro.

4.5 Etude du taux de décroissance rationnel de l'énergie pour $a \neq 1$

Dans le paragraphe précédant, nous avons montré la non stabilité uniforme du système (4.1.1) pour $a \neq 1$. Dans ce paragraphe, nous allons établir un taux de décroissance polynomial pour des solutions régulières dans le cas $a \neq 1$ par un théorème de Liu-Rao (voir [60]) et Borichev (voir [63]).

Theorem 4.5.1. *Supposons que la condition (Q 1) est vérifiée. Soit $a \neq 1$ alors, il existe une constante strictement positive C telle que l'énergie du système (4.1.1) vérifie :*

$$E(t) \leq \frac{C}{t} \parallel U_0 \parallel^2_{D(\mathcal{A})}, \ \ \forall \ t > 0 \tag{4.5.1}$$

pour toute solution forte du système (4.1.1).

Démonstration.

D'après un résultat de Borichev (voir [63]) et Liu-Rao (voir [60]), un C_0 semi-groupe de contractions sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ admet une décroissance polynomiale si :

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}) \tag{P 1}$$

$$\sup_{|\beta|\geq 1} \frac{1}{\beta_n^2} \parallel (i\beta I - \mathcal{A})^{-1} \parallel < \infty \qquad\qquad (\text{P } 2).$$

D'abord, la résolvante de l'opérateur $\mathcal{A}$ est compacte, le fait que $\mathcal{A}$ n'ait pas de valeur propre purement imaginaire entraîne bien la condition $(P\,1)$. Supposons que la condition $(P\,2)$ soit fausse. Alors il existe une suite $\beta_n \in \mathbb{R}$ et une suite $U_n = (u_n, v_n, y_n, z_n) \in D(\mathcal{A})$ telles que :

$$\beta_n \to \infty, \tag{4.5.2}$$

$$\parallel U_n \parallel = 1. \tag{4.5.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \parallel \beta_n^2(i\beta_n I - \mathcal{A})U_n \parallel_{\mathcal{H}} = 0. \tag{4.5.4}$$

On va montrer que $\parallel (u_n, v_n, y_n, z_n) \parallel_{\mathcal{H}} \to 0$. Cette contradiction permet de conclure la décroissance rationnel de l'enérgie. La démonstration comporte plusieurs etapes.

Etape 1. Multiplions (4.5.4) par $U_n = (u_n, v_n, y_n, z_n)$, on obtient que :

$$Re\{i\beta_n^3 \parallel U_n \parallel^2 - \beta_n^2(\mathcal{A}U_n, U_n)\} = \int_0^1 c|\beta_n z_n|^2 dx = o(1), \tag{4.5.5}$$

Ceci implique, en utilisant (4.1.3) que :

$$\int_\alpha^{\alpha'} |\beta_n z_n|^2 dx \ = o(1). \tag{4.5.6}$$

D'après (4.5.4), il existe $(f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4) \in \mathcal{H}$, tels que :

$$\begin{aligned}
i\beta_n^3 u_n - \beta_n^2 v_n &= f_n^1 \to 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(]0,1[), && (4.5.7)\\
i\beta_n^3 v_n - \beta_n^2 u_{nxx} - b\beta_n^2 z_n &= f_n^2 \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(]0,1[), && (4.5.8)\\
i\beta_n^3 y_n - \beta_n^2 z_n &= f_n^3 \to 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(]0,1[), && (4.5.9)\\
i\beta_n^3 z_n - a\beta_n^2 y_{nxx} + b\beta_n^2 v_n + c\beta_n^2 z_n &= f_n^4 \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(]0,1[). && (4.5.10)
\end{aligned}$$

En utilisant (4.5.6), (4.5.9) et (4.1.3), on déduit que :

$$\int_0^1 c|\beta_n^2 y_n|^2 dx \ = o(1) \quad \text{et} \int_\alpha^{\alpha'} |\beta_n^2 y_n|^2 dx = o(1) \tag{4.5.11}$$

En utilisant les équations (4.5.7) et (4.5.9), on déduit que :

$$\| u_n \|_{L^2(]0,1[)} = \frac{O(1)}{\beta_n} \quad \text{et} \quad \| y_n \|_{L^2(]0,1[)} = \frac{O(1)}{\beta_n}, \tag{4.5.12}$$

En combinant (4.5.7)-(4.5.8) et (4.5.10)-(4.5.9) et en éliminant v et z, on obtient :

$$\begin{aligned} \beta_n^2(\beta_n^2 u_n + u_{nxx} + i\beta_n b y_n) &= -i\beta_n f_n^1 + b f_n^3 - f_n^2 \ \to \ 0 \text{ dans } L^2(]0,1[) & (4.5.13)\\ \beta_n^2(\beta_n^2 y_n + a y_{nxx} - i\beta_n b u_n - i\beta_n c y_n) &= -f_n^4 - b f_n^1 - i\beta_n f_n^3 - c f_n^3 \ \to \ 0 \text{ dans } L^2(]0,1[) & (4.5.14)\end{aligned}$$

Etape 2. Multiplions l'équation (4.5.14) par $h\overline{y}_n$. En utilisant la formule d'intégration par partie et le fait que $y_n(0) = y_n(1) = 0$, on obtient que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 h|\beta_n^2 y_n|^2 dx - a\beta_n^2 \int_0^1 h \mid y_{nx} \mid^2 dx \\ \displaystyle - \beta_n^2 \int_0^1 a\overline{y}_n(h_x y_{nx})dx - \ i\beta_n^3 \int_0^1 hbu_n\overline{y}_n dx \\ \displaystyle - i\, \beta_n^3 \int_0^1 hc|y_n|^2 dx = \int_0^1 (-f_n^4 - bf_n^1 - i\beta_n f_n^3 - cf_n^3)h\overline{y}_n dx. \end{array} \right. \tag{4.5.15}$$

En utilisant (4.5.11), le fait que les suites suites f_n^3, f_n^4 convergent vers zéro, respectivement, dans $H_0^1(]0,1[)$ et $L^2(]0,1[)$ et que le suite $\beta_n y_n$ est uniformément borné dans $L^2(]0,1[)$, on obtient :

$$\int_0^1 (-f_n^4 - bf_n^1 - i\beta_n f_n^3 - cf_n^3)h\overline{y}_n dx = o(1). \tag{4.5.16}$$

En utilisant (4.5.16), (4.5.11) dans (4.5.15), on déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 h|\beta_n^2 y_n|^2 dx - \beta_n^2 \int_0^1 a\overline{y_n}(h_x y_{nx})dx \\ \displaystyle - a\beta_n^2 \int_0^1 h \mid y_{nx} \mid^2 dx - \ i\beta_n^3 \int_0^1 bhu_n\overline{y}_n dx = o(1). \end{array} \right. \tag{4.5.17}$$

Prenons $h(x) = \eta(x)$ dans (4.5.17), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \eta|\beta_n^2 y_n|^2 dx - \beta_n^2 \int_0^1 a\overline{y_n}(\eta_x y_{nx})dx \\ \displaystyle -a\beta_n^2 \int_0^1 \eta \mid y_{nx} \mid^2 dx - \ i\beta_n^3 \int_0^1 b\eta u_n \overline{y_n} dx = o(1). \end{array} \right. \tag{4.5.18}$$

En utilisant (4.5.11) et le fait que les suite $\beta_n u_n$, y_{nx} est borné dans $L^2(]0,1[)$, dans (4.5.18), on déduit :

$$\int_0^1 \eta\beta_n^2 \mid y_{nx} \mid^2 dx = o(1) \text{ et } \int_{\gamma+\epsilon}^{\beta-\epsilon} \beta_n^2 \mid y_{nx} \mid^2 dx = o(1). \tag{4.5.19}$$

Etape 3. Multiplions (4.5.14) par $\dfrac{1}{\beta_n}\eta\overline{u}_n$. En utilisant la formule d'intégration par partie, on obtient que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \beta_n^3 \eta\overline{u}_n y_n dx - a\int_0^1 \beta_n \eta y_{nx} \overline{u}_{nx} dx \\ \displaystyle - a\int_0^1 \beta_n \overline{u}_n y_{nx} \eta_x dx - i\beta_n^2 \int_0^1 b\eta u_n^2 dx \\ \displaystyle - i\beta_n^2 \int_0^1 c\eta\overline{u}_n y_n dx = o(1) \end{array} \right. \tag{4.5.20}$$

En utilisant (4.5.11), (4.5.19) et le fait que les suites $\beta_n u_n$ et u_{nx} sont uniformément bornée dans $L^2(]0,1[)$, on déduit :

$$\int_0^1 b\eta|\beta_n u_n|^2 dx = o(1). \tag{4.5.21}$$

En utilisant le fait que la condition (Q 1) est vérifiée, on déduit que :

$$\int_{\gamma+\epsilon}^{\beta-\epsilon} |\beta_n u_n|^2 dx = o(1). \tag{4.5.22}$$

Etape 4. Multiplions l'équation (4.5.13) par $\frac{1}{\beta_n^2}h\overline{u_n}$. En utilisant la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 h|\beta_n u_n|^2 dx - \int_0^1 h \mid u_{nx} \mid^2 dx \\ \displaystyle - \int_0^1 \overline{u_n} u_{nx} h_x dx + i\beta_n \int_0^1 bhy_n \overline{u_n} dx \\ \displaystyle = \int_0^1 \frac{1}{\beta_n^2} h\overline{u_n}(-i\beta_n f_n^1 + bf_n^3 - f_n^2) dx. \end{array}\right. \tag{4.5.23}$$

En utilisant le fait que les suites $\beta_n u_n$ et u_{nx} sont uniformément bornée dans $L^2(]0,1[)$ et que $\| u_n \| = \| y_n \| = o(1)$, on déduit :

$$\int_0^1 h|\beta_n u_n|^2 dx - \int_0^1 h \mid u_{nx} \mid^2 dx = o(1) \tag{4.5.24}$$

En prenant $h(x) = b\eta(x)$ dans (4.5.24) et en utilisant (4.5.21) et la condition (Q 1), on déduit que :

$$\int_0^1 b\eta \mid u_{nx} \mid^2 dx = o(1) \text{ et } \int_{\gamma+\epsilon}^{\beta-\epsilon} \mid u_{nx} \mid^2 dx = o(1). \tag{4.5.25}$$

Etape 6. On répète les étapes 4,5 et 6 du théorème 4.4.1 et on déduit que :

$$\int_0^1 |y_{nx}|^2 dx = \int_0^1 |u_{nx}|^2 dx = \int_0^1 |v_n|^2 dx = \int_0^1 |z_n^2| dx = o(1). \tag{4.5.26}$$

D'après les équations (4.5.26), on obtient que :

$$\| U_n \|_{\mathcal{H}} = o(1), \tag{4.5.27}$$

ce qui contradit l'hyppothèse (4.5.3). Et par suite l'énérgie $E(t)$ du système (4.1.1), décroît rationnellement vers Zèro, dans le cas où $a \neq 1$.

Chapitre 5

Stabilisation frontière indirecte d'un système multidimensionnel d'équations des ondes.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la stabilisation frontière indirecte d'un système d'équations des ondes couplées par des termes de vitesse.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, ayant un frontière régulière Γ de clasee C^2. Soit $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de Γ telle que $\overline{\Gamma_0} \bigcap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. On considère le système d'équations des ondes suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + b y_t = 0 \ , & \text{dans } \ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y_{tt} - \Delta y - b u_t = 0 \ , & \text{dans } \ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \ \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ y = 0, & \text{sur } \ \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = -y_t & \text{sur } \ \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

où ν est le vecteur unitaire normal exterieur à Γ_1 et $b \in \mathbb{R}^*$. Les conditions initiales sont données par :

$$(u(x,0), y(x,0)) = (u_0(x), y_0(x)), \qquad (u_t(x,0), y_t(x,0)) = (u_1(x), y_1(x)). \tag{5.1.2}$$

Dans ([60]), Z. Lui et B. Rao ont étudié la stabilisation frontière indirecte de systèmes d'équations des ondes faiblement couplées :

$$\begin{cases} u_{tt} - a\Delta u + \alpha y = 0 \ , & \text{dans } \ \Omega, \\ y_{tt} - \Delta y + \alpha u = 0 \ , & \text{dans } \ \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ y = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ a\frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma u + u_t = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{5.1.3}$$

Par une méthode spectrale, ils ont obtenu un taux de décroissance polynomial de l'énergie du système (5.1.3).

Aussi dans ([59]), Z. Lui et B. Rao ont étudié la stabilisation frontière indirecte d'un système d'équations des ondes faiblement couplées :

$$\begin{cases} u_{tt} - a\Delta u + \alpha y = 0 \ , & \text{dans } \Omega, \\ y_{tt} - \Delta y + \alpha u = 0 \ , & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ y = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ a\frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma u_t = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Dans [10], Ammar-Khodja et Bader, ont étudié la stabilité simultané du système (5.1.1) dans le cas monodimensionnel. Ils ont établi un taux de décroissance exponentiel de l'énérgie.

Dans ce chapitre, notre objectif est de généraliser les traveaux dans [10]. D'abord, dans le système (5.1.1), les équations sont couplées par y_t et u_t que l'on appèlle un couplage fort. Nous allons montrer que l'énergie de ce système a un taux de décroissance exponentiel. C'est un résultat nouveau pour des systèmes partiellement amortis.

Soit (u, y) une solution régulière du système (5.1.1). On définit l'énergie associée par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\,|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |y_t|^2 + |\nabla y|^2)dx. \tag{5.1.5}$$

Un calcul direct donne

$$E'(t) = -\int_{\Gamma_1} |y_t|^2 d\Gamma. \tag{5.1.6}$$

Le système est donc dissipatif au sens où E est décroissante.

En introduisant $U = (u, u_t, y, y_t)$, on transforme le problème (5.1.1) sous la forme d'une équation d'évolution :

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{5.1.7}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est m-dissipatif dans l'espace de l'énérgie. On va montrer que le problème est bien posé au sens de semi-groupes de contractions.

Nous montrons que la résolvante de l'opérateur $\mathcal{A}$ est compacte dans l'espace de l'énergie. Alors on peut procéder comme dans Lagnese (voir[35]) à l'application de la théorie de décomposition spectrale Sz-Nagy-Foias (voir[32]), Foguel (voir[19]) et Benchimol (voir[20]). On montre que l'énérgie du système décroît fortement vers zéro. Ensuite, par un théorème de Huang (voir[33]) et Pruss (voir[34]), on établi la stabilisation uniforme de l'énergie du système :

Theorem 5.1.1. *Supposons que b est suffisament petit. Alors, il existe des constantes strictement positives $\omega > 0$ et $M \geq 1$ telles que l'enérgie $E(t)$ du système (5.1.1) vérifie l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq ME(0)\, e^{-\omega t}, \quad \forall\, t \geq 0$$

pour toute solution faible du système (5.1.1).

5.2 Formulation du problème

Pour formuler le problème (5.1.1) dans un espace de Hilbert, on définit les espaces :

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \quad u = 0 \,\text{sur}\, \Gamma_0\}. \tag{5.2.1}$$

On définit l'espace de l'énergie

$$\mathcal{H} = H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega), \tag{5.2.2}$$

muni du produit scalaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} (U, \widetilde{U})_{\mathcal{H}} = \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \widetilde{u})\, dx + \int_\Omega v\, \widetilde{v}\, dx + \int_\Omega (\nabla y \cdot \nabla \widetilde{y}) dx + \int_\Omega z \widetilde{z} dx, \\ \qquad \forall\, U = (u, v, y, z), \widetilde{U} = (\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in \mathcal{H}, \end{array} \right. \tag{5.2.3}$$

où $(\ \cdot\ )$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$.

Pour donner un sens convenable au système (5.1.1), on définit l'opérateur linéaire non borné $\mathcal{A}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\mathcal{A}) = \{(u, v, y, z) \in \mathcal{H}, u \in H^2(\Omega), v \in H^1_0(\Omega), \Delta y \in L^2(\Omega), \\ \qquad z \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \text{ tel que } \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = -z \,\text{sur}\, \Gamma_1\} \end{array} \right. \tag{5.2.4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}U = (v, \Delta u - bz, z, \Delta y + bv), \\ \forall\, U = (u, v, y, z) \in D(\mathcal{A}). \end{array} \right. \tag{5.2.5}$$

En posant $U = (u, u_t, y, y_t)$ une solution régulière du système (5.1.1), alors on peut reformuler le problème (5.1.1) sous la forme d'une équation abstraite du premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0 \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \tag{5.2.6}$$

On s'intéresse d'abord à l'existence et l'unicité d'une solution du problème (5.2.6).

Proposition 5.2.1. *L'opérateur $\mathcal{A}$ défini par (5.2.4)-(5.2.5) est m-dissipatif et a résolvante compacte dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Soit $U = (u, v, y, z) \in D(\mathcal{A})$. Alors de (5.2.5), on obtient que :

$$(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = \Big((\, v, \Delta u - bz\,, z, \Delta y + bv), (u, v, y, z) \Big)_{\mathcal{H}}.$$

En utilisant (5.2.3) et la formule de Green, on obtient :

$$\mathrm{Re}\{(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}}\} = -\int_{\Gamma_1} |z|^2 d\Gamma \;\leq\; 0.$$

Maintenant soit $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \;\in \mathcal{H}$. On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$U - \mathcal{A}U = F, \quad U \;\in\; D(\mathcal{A}). \tag{5.2.7}$$

Ceci révient au même de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} u - v = f_1 \;\;, \\ v - \Delta u + bz = f_2 \;, \\ y - z = f_3 \\ z - \Delta y - bv = f_4. \end{cases} \tag{5.2.8}$$

En éliminant v et z dans (5.2.8), on obtient le système suivant :

$$u - \Delta u + by \;\;=\;\; f_1 + f_2 + bf_3, \tag{5.2.9}$$

$$y - \Delta y - bu \;\;=\;\; f_3 - bf_1 + f_3 + f_4, \tag{5.2.10}$$

avec les conditions aux bords

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad y = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad \partial_\nu y + y = f_3 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \tag{5.2.11}$$

Soit $\phi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ une fonction test. On multiplie (5.2.9) par φ_1. Puis en appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{cases} \int_\Omega u\varphi_1 dx + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 dx + \int_\Omega by\varphi_1 dx = \\ \int_\Omega (f_1 + f_2 + bf_3)\varphi_1 dx. \end{cases} \tag{5.2.12}$$

De même, on multiplie (5.2.10) par φ_2, Puis en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{cases} \int_\Omega (y - bu)\varphi_2 dx + \int_\Omega \nabla y . \nabla \varphi_2 dx + \int_{\Gamma_1} y\varphi_2 d\Gamma = \\ \int_\Omega (f_3 - bf_1 + f_3 + f_4)\varphi_2 dx + \int_{\Gamma_1} f_3\varphi_2 d\Gamma. \end{cases} \tag{5.2.13}$$

En combinant les équations (5.2.12) et (5.2.13), on obtient :

$$\begin{cases} \int_\Omega (u + by)\varphi_1 dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 dx + \\ \int_\Omega (y - bu)\varphi_2 dx + \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla \varphi_2 dx + \int_{\Gamma_1} y\varphi_2 d\Gamma = \\ \int_\Omega (f_3 + bf_1 + f_3 + f_4)\varphi_2 dx + \\ \int_\Omega (f_1 + f_2 - bf_3)\varphi_1 dx + \int_{\Gamma_1} f_3\varphi_2 d\Gamma. \end{cases} \tag{5.2.14}$$

Puis, on définit la forme bilinéaire a par :

$$\begin{cases} a((u, y), (\varphi_1, \varphi_2)) = \int_\Omega (u + by)\varphi_1 dx + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 dx + \\ \qquad \int_\Omega (y - bu)\varphi_2 dx + \int_\Omega \nabla y . \nabla \varphi_2 dx + \\ \qquad \int_{\Gamma_1} y\varphi_2 d\Gamma, \end{cases} \tag{5.2.15}$$

et la forme linéaire L par :

$$\begin{cases} L(\varphi_1, \varphi_2) = \int_\Omega (f_3 + bf_1 + f_3 + f_4)\varphi_2 dx + \\ \qquad \int_\Omega (f_1 + f_2 - bf_3)\varphi_1 dx + \int_{\Gamma_1} f_3\varphi_2 d\Gamma. \end{cases} \tag{5.2.16}$$

Par un calcul simple, on montre que la forme bilinéaire a est continue, coercive sur $(H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2$ et L est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$. Grâce au théorème de

Lax-Milgram (voir[27]), on en déduit qu'il existe $(u,y) \in H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ unique solution du problème variationnel :

$$a((u,y),(\varphi_1,\varphi_2)) = L(\varphi_1,\varphi_2), \ \forall\, (\varphi_1,\, \varphi_2) \in (H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)). \tag{5.2.17}$$

D'autre part, (u,y) est une solution faible du système (5.2.9), (5.2.10) avec les conditions aux bords (5.2.11). On a donc

$$u - \Delta u = f_1 + f_2 + bf_3 - by \quad \text{dans } \ L^2(\Omega), \tag{5.2.18}$$

$$u = 0 \qquad\qquad \text{sur} \quad \Gamma. \tag{5.2.19}$$

D'après la régularité du Laplacien, on en déduit que $u \in H^2(\Omega)$.

De même, on a

$$y - \Delta y = f_3 - bf_1 + f_3 + f_4 + bu \quad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{5.2.20}$$

$$y = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} + y = f_3 \qquad \text{dans}\, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1). \tag{5.2.21}$$

Comme $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$, d'après la régularité du Laplacien, on en déduit que $y \in H^2(\Omega)$. Ainsi on a montré que $(u,v,y,z) \in D(\mathcal{A})$. De plus, on a

$$\|(u,v,y,z)\|_{D(\mathcal{A})} \le C\|(f_1,f_2,f_3,f_4)\|_{\mathcal{H}}.$$

D'après les injections compactes de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et de $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient la compacité de la résolvante de l'opérateur $\mathcal{A}$.

Theorem 5.2.2. *(Existence et unicité de la solution).*
(1) Soit $U_0 = (u_0,u_1,y_0,y_1) \in D(\mathcal{A})$, alors le problème (5.2.6) admet une unique solutin forte $U = (u,u_t,y,y_t) \in D(\mathcal{A})$, telle que :

$$\begin{cases} u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ y(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)). \end{cases} \tag{5.2.22}$$

(2) Soit $U_0 = (u_0, u_1, y_0, y_1) \in \mathcal{H}$*, alors le problème (5.2.6) admet une unique solution faible* $U = (u, u_t, y, y_t) \in \mathcal{H}$*, telle que :*

$$\begin{cases} u(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)). \\ y(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_+, H_{\Gamma_0}^1(\Omega)). \end{cases} \tag{5.2.23}$$

Démonstration. (1) Soit $U_0 \in D(\mathcal{A})$. L'opérateur $\mathcal{A}$ étant m-dissipatif, d'après le théorème de Hille-Yosida (voir [27]), le problème (5.2.6) admet une unique solution forte $U = (u, u_t, y, y_t) \in D(\mathcal{A})$ telle que

$$U \in C^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}).$$

Ceci, par un calcul simple, implique la régularité (5.2.22).

(2) De même, si $U_0 \in \mathcal{H}$, alors d'après le théorème de Hille-Yosida le problème (5.2.6) admet une unique solution faible $U = (u, u_t, y, y_t)$ telle que

$$U \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}).$$

Ceci, par un calcul simple, implique la régularité (5.2.23). La démonstration est donc achevée.

5.3 Etude de la stabilité forte.

Dans cette section, on montre la stabilité forte du systeème (5.2.6). Comme la résolvante de l'opérateur $\mathcal{A}$ est compacte, d'après la méthode de Sz-Nagy-Foias (voir [32]), Foguel (voir [19]), Benchimol (voir [20]) et Arendt (voir [17]), il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ n'admet des valeur propre imaginaire.

On suppose qu'il existe une constante $\delta > 0$ et un point $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que, $m(x) = x - x_0$ vérifiant :

$$(m \cdot \nu) \geq \gamma, \quad \forall\, x \in \Gamma_1 \quad \text{ et } \quad (m \cdot \nu) \leq 0, \quad \forall\, x \in \Gamma_0. \tag{5.3.1}$$

Proposition 5.3.1. *Suppossons que b assez petit. Alors l'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans (5.2.4) et (5.2.5) n'admet pas de valeur propre imaginaire pure.*

Démonstration. Soit $i\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) une valeur propre de $\mathcal{A}$ avec le vecteur propre associé $U = (u, v, y, z) \in D(\mathcal{A})$. Alors, on a :

$$\mathcal{A}U = i\lambda U. \tag{5.3.2}$$

De l'équation (5.3.2), on déduit :

$$-\int_{\Gamma_1} |z|^2 d\Gamma = \mathrm{R}e(\mathcal{A}U, U) = \mathrm{R}e\{i\lambda \parallel U \parallel_{\mathcal{H}}^2\} = 0. \tag{5.3.3}$$

On a donc $z = 0$ sur Γ_1. En utilisant le fait que $U \in D(\mathcal{A})$, on déduit que :

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = -z = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1. \tag{5.3.4}$$

Ecrire maintenent l'équation (5.3.2) sous la forme détaillée suivante :

$$v = i\lambda u, \quad \text{dans } H_0^1(\Omega), \tag{5.3.5}$$

$$\Delta u - bz = i\lambda v, \quad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{5.3.6}$$

$$z = i\lambda y, \quad \text{dans } H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \tag{5.3.7}$$

$$\Delta y + bv = i\lambda z, \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{5.3.8}$$

Si $\lambda = 0$, alors $v = z = 0$. Puis, on obtient les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ , & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 \ , & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{5.3.9}$$

et

$$\begin{cases} \Delta y = 0 \ , & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y = 0 \ , & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{5.3.10}$$

Il est clair que les problemes (5.3.9) et (5.3.10) admettent $u = 0$ et $y = 0$ comme unique solution ce qui contradit l'hypothèse $U \neq 0$.

Supposons que $\lambda \neq 0$. En utilisant (5.3.4) et (5.3.7), on obtient :

$$y = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \tag{5.3.11}$$

En éliminant v et z dans (5.3.5)-(5.3.6) et (5.3.7)-(5.3.8), et en utilisant (5.3.11), on obtient le système suivant :

$$\Delta u + \lambda^2 u - i\lambda by = 0, \quad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{5.3.12}$$

$$\Delta y + \lambda^2 y + i\lambda bu = 0, \quad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{5.3.13}$$

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma, \tag{5.3.14}$$

$$y = 0, \quad \text{sur } \Gamma, \tag{5.3.15}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1. \tag{5.3.16}$$

On divise la démonstration en plusieurs étapes.

Etape 1. Multiplions l'équation (5.3.13) par $\overline{u}$. Puis, en utilisant la formule de Green et les conditions aux bords, on obtient

$$\int_\Omega \lambda^2 y\overline{u}dx + i\int_\Omega \lambda b|u|^2dx - \int_\Omega (\nabla y\cdot\nabla\overline{u})dx = 0. \tag{5.3.17}$$

De même nous multilplions l'équation (5.3.12) par $\overline{y}$. Alors, en utilisant le formule de Green et les conditions aux bords, on obtient :

$$\int_\Omega \lambda^2 u\overline{y}dx - i\int_\Omega \lambda b|y|^2dx - \int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla\overline{y})dx = 0. \tag{5.3.18}$$

On additionne les parties imaginaires de (5.3.17) et (5.3.18), on déduit l'égalité suivante :

$$\int_\Omega |u|^2dx = \int_\Omega |y|^2dx. \tag{5.3.19}$$

Etape 2. Multiplions l'équation (5.3.13) par $\overline{y}$. Alors en utilisant la formule de Green et les conditions aux bords, on obtient :

$$\int_\Omega \lambda^2|y|^2dx - \int_\Omega |\nabla y|^2\,dx = -Re\{i\int_\Omega \lambda bu\overline{y}dx\}. \tag{5.3.20}$$

Etape 3. En multipliant l'équation (5.3.13) par $2(m\cdot\nabla\overline{y})$, on obtient :

$$2\int_\Omega \Delta y(m\cdot\nabla\overline{y})dx + 2\int_\Omega \lambda^2 y(m\cdot\nabla\overline{y})dx = -2i\int_\Omega \lambda bu(m\cdot\nabla\overline{y})dx. \tag{5.3.21}$$

La régularité de $(u,v,y,z)\in D(\mathcal{A})$ est suffisante pour effectuer des intégrations dans la première intégrale de (5.3.21). Alors on a :

$$2\int_\Omega \Delta y(m\cdot\nabla\overline{y})dx = -2\int_\Omega \nabla y\cdot\nabla(m\cdot\nabla\overline{y})dx + 2\int_\Gamma \partial_\nu y(m\cdot\nabla\overline{y})d\Gamma. \tag{5.3.22}$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} -2\mathrm{Re}\left\{\displaystyle\int_\Omega \nabla y\cdot\nabla(m\cdot\nabla\overline{y})dx\right\} = \\ (N-2)\displaystyle\int_\Omega |\nabla y|^2\,dx - \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla y|^2d\Gamma. \end{array}\right. \tag{5.3.23}$$

En utilisant (5.3.4), (5.3.23) et le fait que $y = \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = 0$ sur Γ_1 dans (5.3.22), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\mathrm{Re}\{\displaystyle\int_\Omega \Delta y(m\cdot\nabla\overline{y})dx\} = \\ \displaystyle\int_\Omega (N-2)|\nabla y|^2dx + \int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\frac{\partial y}{\partial\nu}|^2 d\Gamma. \end{array}\right. \tag{5.3.24}$$

En insérant (5.3.24) dans (5.3.21) et en utilisant le formule de Green, on déduit

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,\mathrm{Re}\left\{i\lambda b\displaystyle\int_\Omega u(m\cdot\nabla\overline{y})dx\right\} = \\ N\lambda^2\displaystyle\int_\Omega |y|^2dx + (2-N)\int_\Omega|\nabla y|^2dx - \int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\frac{\partial y}{\partial\nu}|^2d\Gamma. \end{array}\right. \tag{5.3.25}$$

En multipliant (5.3.20) par $(1-N)$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} (1-N)\displaystyle\int_\Omega \lambda^2|y|^2dx - (1-N)\int_\Omega |\ \nabla y\ |^2\ dx\ = \\ -(1-N)Re\{i\displaystyle\int_\Omega \lambda bu\overline{y}dx\}. \end{array}\right. \tag{5.3.26}$$

En combinant (5.3.26) et (5.3.25), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Re}\,\{i\,\lambda b\displaystyle\int_\Omega u((N-1)\overline{y} + 2(m\cdot\nabla\overline{y})dx\} = \\ \lambda^2\displaystyle\int_\Omega |y|^2dx + \int_\Omega|\nabla y|^2dx - \int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\frac{\partial y}{\partial\nu}|^2d\Gamma. \end{array}\right. \tag{5.3.27}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda^2\displaystyle\int_\Omega |y|^2dx + \int_\Omega|\nabla y|^2dx - \int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\frac{\partial y}{\partial\nu}|^2d\Gamma \\ \leq (N-1)|\lambda||b|\Big(\displaystyle\int_\Omega |u|^2dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega|y|^2dx\Big)^{1/2} \\ \quad +2R|\lambda||b|\Big(\displaystyle\int_\Omega|u|^2dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega|\nabla y|^2dx\Big)^{1/2}. \end{array}\right. \tag{5.3.28}$$

Soit $\epsilon > 0$. On écrit le membre de droite de (5.3.28) sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(N-1)|\lambda||b|}{\sqrt{2\epsilon}}\Big(\displaystyle\int_\Omega|u|^2dx\Big)^{1/2}\sqrt{2\epsilon}\Big(\int_\Omega|y|^2dx\Big)^{1/2} \\ \quad +\dfrac{2R|\lambda||b|}{\sqrt{\epsilon}}\Big(\displaystyle\int_\Omega|u|^2dx\Big)^{1/2}\sqrt{\epsilon}\Big(\int_\Omega|\nabla y|^2dx\Big)^{1/2}. \end{array}\right. \tag{5.3.29}$$

En utilisant l'inégalité de Young et celle de Poincaré, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\int_\Omega (1-N)^2\lambda^2 b^2|u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |y|^2dx\right)^{1/2} \\ \qquad +2\left(\int_\Omega (R\lambda b)^2|u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla y|^2dx\right)^{1/2} \leq \\ \left(\frac{(R\lambda b)^2}{\epsilon}+\frac{(N-1)^2\lambda^2b^2}{4\epsilon}\right)\int_\Omega |u|^2dx+\epsilon(1+c_0)\int_\Omega |\nabla y|^2dx, \end{array}\right. \tag{5.3.30}$$

où $c_0 = \dfrac{1}{\alpha}$ et α est la petite valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Puis, en insérant (5.3.30) dans (5.3.28) et grâce à la condition géométrique (5.3.1) et l'identité (5.3.19), on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda^2\int_\Omega |y|^2dx+\int_\Omega |\nabla y|^2dx \leq \\ \frac{\lambda^2b^2}{\epsilon}(R^2+\frac{(N-1)^2}{4})\int_\Omega |y|^2dx+\ \epsilon(1+c_0)\int_\Omega |\nabla y|^2dx. \end{array}\right. \tag{5.3.31}$$

Maintenant choisissons $\epsilon = \frac{1}{1+c_0}$ dans (5.3.31), on obtient :

$$\int_\Omega |y|^2dx \leq b^2(1+c_0)(R^2+\frac{(N-1)^2}{4})\int_\Omega |y|^2dx \tag{5.3.32}$$

En utilisant le fait que b est petit, on obtient :

$$\int_\Omega |y|^2dx = 0, \tag{5.3.33}$$

pourvue que

$$1-b^2(1+c_0)(R^2+\frac{(N-1)^2}{4}) > 0. \tag{5.3.34}$$

Enfin, en combinant (5.3.19) et (5.3.33), on déduit que $u = 0$. Puis, de (5.3.5) et (5.3.7) on obtient $v = z = 0$, soit $U = 0$. On obtient donc une contradiction et la démonstrtation est terminée.

Remarque. Nous avons établi l'unicité pour le coefficient b assez petit. Le cas général reste un problème ouvert à notre connaissance.

Theorem 5.3.2. *Soit $b > 0$ assez petit. Alors pour toute donnée initiale $U_0 \in \mathcal{H}$, l'énergie $E(t)$ du système (5.1.1) décroît vers zéro*

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = 0.$$

Démonstration. L'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans (5.2.4) et (5.2.5) est m-dissipatif et a la résolvante compacte. De plus, il n'admet pas des valeur propre imaginaire pure. D'après la théorie de décomposition spectrale de Sz-Nagy-Foias (voir [32]), Foguel (voir [19]) et Benchimol (voir [20]), le semi-groupe de contractions $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t)$ engendré par $\mathcal{A}$ est fortement stable sur $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que l'énergie de toute solution faible décroît vers zéro.

5.4 Etude du taux de décroissance exponentiel de l'énergie.

Dans ce paragraphe, on établira le taux de décroissance exponentiel de l'énergie $E(t)$ en utilisant le théorème de Huang (voir [33]) et Pruss (voir [34]).

D'abord, on définit deux ouverts $\mathcal{O}_0$ et $\mathcal{O}_1$ par

$$\begin{cases} \mathcal{O}_0 = \{x \in \Omega,\ |x-y| < \epsilon,\ \forall\, y \in \Gamma_0\}, \\ \mathcal{O}_1 = \{x \in \Omega,\ |x-y| < \epsilon,\ \forall\, y \in \Gamma_1\}. \end{cases} \tag{5.4.1}$$

Comme $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$, on peut choisir $\epsilon > 0$ assez petit tels que

$$\Gamma_0 \subset \mathcal{O}_1^c \ \text{ et } \ \Gamma_1 \subset \mathcal{O}_0^c.$$

Puis, on définit la fonction η par :

$$\begin{cases} \eta(x) \in [0,1], \\ \eta(x) = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{O}_0, \\ \eta(x) = 1 \qquad \text{sur } \ \mathcal{O}_1. \end{cases} \tag{5.4.2}$$

Theorem 5.4.1. *Supposons que $b > 0$ est suffisament petit. Alors, il existe des constantes strictement positives $\omega > 0$ et $M \geq 1$ telles que l'enérgie $E(t)$ du système (5.1.1) vérifie l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq \, ME(0)\, e^{-\omega t}, \quad \forall\, t \geq 0$$

pour toute solution faible du système (5.1.1).

Démonstration. D'après un résultat de Huang (voir [33]) et Pruss (voir [34]), un C_0 semi-groupe de contractions $e^{t\mathcal{A}}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est exponentiellement stable si et seulement si :

$$\begin{cases} i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}), & \text{(H 1)} \\ \\ \sup\limits_{|\beta|\geq 1} \| (i\beta I - \mathcal{A})^{-1} \| < \infty. & \text{(H 2).} \end{cases} \tag{5.4.3}$$

La résolvante de $\mathcal{A}$ étant compacte, le fait que $\mathcal{A}$ n'ait pas de valeur propre imaginaire pure entraîne bien la condition (H1). Supposons que la condition (H2) est fausse. Alors, il existe une suite $\beta_n \in \mathbb{R}$ et une suite $U_n = (u_n, v_n, y_n, z_n) \in D(\mathcal{A})$ telles que :

$$\beta_n \to +\infty, \tag{5.4.4}$$

$$\| U_n \|_{\mathcal{H}} = 1. \tag{5.4.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| (i\beta_n I - \mathcal{A})U_n \|_{\mathcal{H}} = 0. \tag{5.4.6}$$

On va montrer que $\| (u_n, v_n, y_n, z_n) \|_{\mathcal{H}} \to 0$. Cette contradiction permet de conclure la décroissance exponentielle de l'enérgie. La démonstration comporte plusieurs étapes.

Etape 1. D'abord, en utilisant (5.4.6) et le fait que U_n est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$, on obtient :

$$\mathrm{Re}\{i\beta_n \| U_n \|^2_{\mathcal{H}} - (\mathcal{A}U_n, U_n)\} = o(1). \tag{5.4.7}$$

Ceci implique que

$$\int_{\Gamma_1} |z_n|^2 d\Gamma = o(1). \tag{5.4.8}$$

Le fait que $U_n \in D(\mathcal{A})$ implique que

$$\frac{\partial y_n}{\partial \nu} = -z_n, \text{ sur } \Gamma_1. \tag{5.4.9}$$

Ceci donne

$$\int_{\Gamma_1} |\frac{\partial y_n}{\partial \nu}|^2 d\Gamma = o(1). \tag{5.4.10}$$

Ensuite, on écrit (5.4.6) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} i\beta_n u_n - v_n &= f_n^1 \to 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega), && (5.4.11)\\ i\beta_n v_n - \Delta u_n + b z_n &= f_n^2 \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), && (5.4.12)\\ i\beta_n y_n - z_n &= f_n^3 \to 0 \quad \text{dans} \quad H_{\Gamma_0}^1(\Omega), && (5.4.13)\\ i\beta_n z_n - \Delta y_n - b v_n &= f_n^4 \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega). && (5.4.14) \end{aligned}$$

En utilisant les équations (5.4.8) et (5.4.13), on déduit :

$$\int_{\Gamma_1} |\beta_n y_n|^2 d\Gamma = o(1). \tag{5.4.15}$$

Les suite $\beta_n y_n$ et $\beta_n u_n$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$, alors on a :

$$\int_\Omega |y_n|^2 dx = o(1) \quad \text{et} \quad \int_\Omega |u_n|^2 dx = o(1). \tag{5.4.16}$$

Enfin, en éliminant v_n et z_n dans (5.4.11)-(5.4.14), on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \beta_n^2 u_n + \Delta u_n - i\beta_n b y_n &= -i\beta_n f_n^1 - b f_n^3 - f_n^2, && (5.4.17)\\ \beta_n^2 y_n + \Delta y_n + i\beta_n b u_n &= -f_n^4 + b f_n^1 - i\beta_n f_n^3. && (5.4.18) \end{aligned}$$

Etape 2. On mltiplie (5.4.17) par $2\eta(m \cdot \nabla \overline{u}_n)$. Puis, en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\beta_n^2 \displaystyle\int_\Omega (N\eta + (m \cdot \nabla \eta))|u_n|^2 dx \\ +2\mathrm{Re}\{\displaystyle\int_\Omega \Delta u_n \eta (m \cdot \nabla \overline{u}_n) dx\} - 2\mathrm{Re}\{\displaystyle\int_\Omega i\beta_n b \eta y_n (m \cdot \nabla \overline{u}_n) dx\} = \\ +2\mathrm{Re}\{\displaystyle\int_\Omega (-i\beta_n f_n^1 - b f_n^3 - f_n^2)\eta (m \cdot \nabla \overline{u}_n) dx\} \end{array} \right. \tag{5.4.19}$$

En utilisant la formule de Green dans le deuxième membre de l'équation (5.4.19), on déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2i \displaystyle\int_\Omega \beta_n f_n^1 \eta (m \cdot \nabla \overline{u}_n) dx = 2Ni\beta_n \displaystyle\int_\Omega \eta f_n^1 \overline{u}_n dx \\ + 2i\beta_n \displaystyle\int_\Omega (m \cdot \nabla \eta) f_n^1 \overline{u}_n dx + 2i\beta_n \displaystyle\int_\Omega \eta (m \cdot \nabla f_n^1) \overline{u}_n dx. \end{array} \right. \tag{5.4.20}$$

En insérant (5.4.20) dans (5.4.19) et en utilisant le fait que les suites f_n^1, f_n^2, f_n^3 convergent vers zéro respectivement, dans $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ et le fait que $\beta_n u_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} -\beta_n^2 \displaystyle\int_\Omega (N\eta + (m\cdot\nabla\eta))|u_n|^2 dx + 2\mathrm{Re}\{\int_\Omega \Delta u_n \eta (m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx\} \\ -2\mathrm{Re}\{\displaystyle\int_\Omega i\,\beta_n\, b\,\eta\, y_n(\,m\cdot\nabla\overline{u}_n\,)\,dx\} = o(1). \end{array}\right. \tag{5.4.21}$$

D'autre part, la régularité de $(u_n, v_n, y_n, z_n) \in D(\mathcal{A})$ est suffisante pour effectuer des intégrations dans la deuxième intégrale de (5.4.21). En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\mathrm{Re}\{\displaystyle\int_\Omega \eta\Delta u_n(m\cdot\nabla\bar{u}_n)dx\} = \\ -2\mathrm{Re}\{\displaystyle\int_\Omega \nabla u_n\cdot\nabla(\eta(m\cdot\nabla\bar{u}_n))dx\} + 2\displaystyle\int_\Gamma \eta\frac{\partial u_n}{\partial\nu}(\,m\cdot\nabla\bar{u}_n\,)d\Gamma. \end{array}\right. \tag{5.4.22}$$

A nouveau, par la formule de Green, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} -2\mathrm{Re}\{\displaystyle\int_\Omega (\nabla u_n\cdot\nabla(\eta(m\cdot\nabla\bar{u}_n)))dx\} \\ \quad = -2\mathrm{Re}\{\displaystyle\int_\Omega (\nabla u_n\cdot\nabla\eta)(m\cdot\nabla\bar{u}_n)dx\} - 2\mathrm{Re}\{\int_\Omega \eta(\nabla u_n\cdot\nabla(m\cdot\nabla\bar{u}_n))dx\} \\ \quad = \displaystyle\int_\Omega (m\cdot\nabla\eta)\mid\nabla u_n\mid^2 dx + (N-2)\int_\Omega \eta\mid\nabla u_n\mid^2 dx \\ \quad -\displaystyle\int_\Gamma \eta(m\cdot\nu)|\nabla u_n|^2 d\Gamma - 2\mathrm{Re}\{\int_\Omega (\nabla u_n\cdot\nabla\eta)(m\cdot\nabla\bar{u}_n))dx\}. \end{array}\right. \tag{5.4.23}$$

Puis, en insérant (5.4.22) dans (5.4.23), et grâce à la condition aux limites $u = \dfrac{\partial u_n}{\partial\tau} = 0$ sur Γ, on déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\mathrm{Re}\{\displaystyle\int_\Omega \eta\Delta u_n(m\cdot\nabla\bar{u})dx\} = \\ \quad -2\mathrm{Re}\{\displaystyle\int_\Omega (\nabla u_n\cdot\nabla\eta)(m\cdot\nabla\bar{u}_n)dx\} + \int_{\Gamma_1} \eta(m\cdot\nu)|\frac{\partial u_n}{\partial\nu}|^2 d\Gamma \\ \quad -(2-N)\displaystyle\int_\Omega \eta\mid\nabla u_n\mid^2 dx + \int_\Omega (m\cdot\nabla\eta)\mid\nabla u_n\mid^2 dx. \end{array}\right. \tag{5.4.24}$$

En reportant (5.4.24) dans (5.4.21), on déduit :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\frac{\partial u_n}{\partial\nu}|^2 d\Gamma = \\ \displaystyle\quad\beta_n^2\int_\Omega(N\eta+(m\cdot\nabla\eta))|u_n|^2dx-(N-2)\int_\Omega\eta\mid\nabla u_n\mid^2 dx \\ \displaystyle\quad+2\,\mathrm{Re}\{\int_\Omega(\nabla u_n\cdot\nabla\eta)(m\cdot\nabla\overline{u}_n)dx\}-\int_\Omega(m\cdot\nabla\eta)\mid\nabla u_n\mid^2 dx \\ \displaystyle\quad+2\,\mathrm{Re}\{i\,\beta_n\int_\Omega b\,\eta\,y_n\,(\,m\cdot\nabla\overline{u}_n\,)dx\}+o(1).\end{array}\right. \tag{5.4.25}$$

On sait que $\beta_n u_n, \beta_n y_n$ et ∇u_n sont bornées dans $L^2(\Omega)$. Alors, grâce à la condition géométrique, on déduit de (5.4.25) qu'il existe une constante positive M telle que :

$$\| \frac{\partial u_n}{\partial\nu} \|_{L^2(\Gamma_1)} \leq\ M\cdot \tag{5.4.26}$$

Etape 3. D'après (5.4.17), on a $\frac{1}{\beta_n}\Delta u_n$ est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$. En multipliant l'équation (5.4.18) par $\frac{1}{\beta_n}\Delta\overline{u}_n$ et en utilisant la formule de Green et les conditions aux bouds $u_n=0$ sur Γ et $y_n=0$ sur Γ_0, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle -\int_\Omega\beta_n(\nabla\overline{u}_n.\nabla y_n)dx+\int_{\Gamma_1}\beta_n y_n\frac{\partial\overline{u}_n}{\partial\nu}d\Gamma \\ \displaystyle +\int_\Omega\frac{1}{\beta_n}\Delta\overline{u}_n\Delta y_n dx-ib\int_\Omega\mid\nabla u_n\mid^2 dx = \\ \displaystyle\int_\Omega((-f_n^4+bf_n^1)(\frac{1}{\beta_n}\Delta\overline{u}_n))dx-i\int_\Omega f_n^3\Delta\overline{u}_n dx\end{array}\right. \tag{5.4.27}$$

Par la formule de Green, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle -i\int_\Omega f_n^3\Delta\overline{u}_n dx\ = \\ \displaystyle -\int_{\Gamma_1}f_n^3\frac{\partial u_n}{\partial\nu}d\Gamma+i\int_\Omega\nabla f_n^3\nabla\overline{u}_n dx\end{array}\right. \tag{5.4.28}$$

Nous savons que la suite $\frac{1}{\beta_n}\Delta\overline{u}_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et que les suites f_n^1, f_n^3, f_n^4 convergent vers zéro, respectivement dans $H_0^1(\Omega)$, $H_{\Gamma_0}^1$ et $L^2(\Omega)$. Alors, grâce à (5.4.26), on déduit :

$$\int_\Omega((-f_n^4+bf_n^1)(\frac{1}{\beta_n}\Delta\overline{u}_n))dx-i\int_\Omega f_n^3\Delta\overline{u}_n dx=o(1). \tag{5.4.29}$$

De (5.4.26) et (5.4.15), on déduit :

$$\int_{\Gamma_1} \beta_n y_n \frac{\partial \overline{u}_n}{\partial \nu} d\Gamma = o(1). \tag{5.4.30}$$

En reportant (5.4.29) et (5.4.30) dans (5.4.27), on déduit :

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_\Omega \beta_n (\nabla \overline{u}_n \cdot \nabla y_n) dx + \int_\Omega \frac{1}{\beta_n} \Delta \overline{u}_n \Delta y_n dx \\ -ib \displaystyle\int_\Omega \mid \nabla u_n \mid^2 dx = o(1). \end{cases} \tag{5.4.31}$$

De façon similaire, nous multiplions (5.4.17) par $\frac{1}{\beta_n} \Delta \overline{y}_n$. En utilisant la formule de Green et le fait que $u_n = 0$ sur Γ et $y_n = 0$ sur Γ_0, on obtient :

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_\Omega \beta_n (\nabla u_n . \nabla \overline{y}_n) dx + \int_\Omega \frac{1}{\beta_n} \Delta u_n \Delta \overline{y}_n dx \\ +i \displaystyle\int_\Omega b |\nabla y_n|^2 dx - i \int_{\Gamma_1} b y_n \frac{\partial y_n}{\partial \nu} d\Gamma = \\ + \displaystyle\int_\Omega (-i\beta_n f_n^1 - b f_n^3 - f_n^2) \frac{1}{\beta_n} \Delta \overline{y}_n dx. \end{cases} \tag{5.4.32}$$

Par la formule de Green et le fait que les suites f_1^n convergent vers zèro dans $H_0^1(\Omega)$ on obtient :

$$\int_\Omega -i f_n^1 \Delta \overline{y}_n dx = i \int_\Omega (\nabla f_n^1 \cdot \nabla \overline{y}_n) + o(1). \tag{5.4.33}$$

Nous savons que $\frac{1}{\beta_n} \Delta \overline{y}_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. En utilisant (5.4.33) et le fait que les suites f_n^1, f_n^2, f_n^3 convergent vers zéro respectivement dans $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $H_{\Gamma_0}^1$, on déduit :

$$\int_\Omega (-i\beta_n f_n^1 - b f_n^3 - f_n^2) \frac{1}{\beta_n} \Delta \overline{y}_n dx = o(1). \tag{5.4.34}$$

Alors, grâce à (5.4.10), (5.4.15) et (5.4.34), on en déduit que

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_\Omega \beta_n (\nabla u_n \cdot \nabla \overline{y}_n) dx + \int_\Omega \frac{1}{\beta_n} \Delta u_n \Delta \overline{y}_n dx \\ +i \displaystyle\int_\Omega b |\nabla y_n|^2 dx = o(1). \end{cases} \tag{5.4.35}$$

Enfin, en combinant (5.4.31), (5.4.35) et en prenant la partie imaginaire, on en déduit :

$$\int_\Omega \mid \nabla u_n \mid^2 dx = \int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx + o(1). \tag{5.4.36}$$

Etape 4. Nous multiplions l'équation (5.4.18) par $\overline{y_n}$. Puis en utilisant la formule de Green et le fait que $y_n = 0$ sur Γ_0, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \int_\Omega |\beta_n y_n|^2 dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial y_n}{\partial \nu} \overline{y}_n d\Gamma \\ - \int_\Omega \mid \nabla y_n \mid^2 dx + i\beta_n b \int_\Omega u_n \overline{y}_n dx \; = \\ + \int_\Omega (-f_4^n + b f_1^n - i\beta_n f_3^n) \overline{y_n} dx. \end{array}\right. \tag{5.4.37}$$

On sait que les suites f_n^1, f_n^3, f_n^4 convergent vers zéro respectivement dans $H_0^1(\Omega)$, $H^1_{\Gamma_0}$, $L^2(\Omega)$ et que les suites $\beta_n y_n, \beta_n u_n$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$. Alors, grâce à (5.4.10) et (5.4.15), on obtient :

$$\int_\Omega |\beta_n y_n|^2 dx - \int_\Omega \mid \nabla y_n \mid^2 dx = o(1). \tag{5.4.38}$$

De façon similaire, nous multiplions l'équation (5.4.17) par $\overline{u}_n$. Puis, en utilisant la formule de Green et les conditions aux bords $u_n = 0$ sur Γ, on obtient :

$$\int_\Omega |\beta_n u_n|^2 dx - \int_\Omega \mid \nabla u_n \mid^2 dx - i\beta_n \int_\Omega y_n \overline{u}_n dx = o(1). \tag{5.4.39}$$

En utilisant (5.4.16) et le fait que les suites $\beta_n u_n$ est borné dans $L^2(\Omega)$, on déduit de (5.4.39) que

$$\int_\Omega |\beta_n u_n|^2 dx - \int_\Omega \mid \nabla u_n \mid^2 dx = o(1). \tag{5.4.40}$$

Etape 5. En multipliant l'équation (5.4.18) par $2(m \cdot \nabla \bar{y}_n)$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\int_\Omega \beta_n^2 y_n (m \cdot \nabla \bar{y}_n) dx + 2\int_\Omega \Delta y_n (m \cdot \nabla \bar{y}_n) dx \\ +2i \int_\Omega b\beta_n u_n (m \cdot \nabla \bar{y}) dx \; = \\ +2 \int_\Omega (-f_4^n + b f_1^n - i\beta_n f_3^n)(m \cdot \nabla \bar{y}_n) dx. \end{array}\right. \tag{5.4.41}$$

En utilisant la formule de Green, et grâce à (5.4.15) et au fait que f_n^3 converge vers zéro dans $H^1(\Omega)$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} -2i \int_\Omega \beta_n f_n^3 (m \cdot \nabla \bar{y}_n) dx \; = \\ 2i \int_\Omega \beta_n \bar{y}_n (m \cdot \nabla f_n^3 + N f_n^3) dx + o(1). \end{array}\right. \tag{5.4.42}$$

Comme les suites f_n^1, f_n^3, f_n^4 convergent vers zéro respectivement dans $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ et les suite $\beta_n y_n$, ∇y_n sont bornées dans $L^2(\Omega)$, par (5.4.42) on a :

$$2\int_\Omega(-f_4^n + bf_1^n - i\beta_n f_3^n)(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx = o(1). \tag{5.4.43}$$

D'autre part, d'après la formule de Green et (5.4.15), on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\mathrm{Re}\{\int_\Omega \beta_n^2 y_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx\} \\ = -N\int_\Omega|\beta_n y_n|^2dx + o(1). \end{array}\right. \tag{5.4.44}$$

En utilisant la formule de Green et par le même calcul que dans (5.4.22), on trouve facilement que :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\int_\Omega \Delta y_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx = 2\int_\Gamma(\frac{\partial y_n}{\partial\nu})(m\cdot\nabla\overline{y}_n)d\Gamma \\ +(N-2)\int_\Omega|\nabla y_n|^2dx - \int_\Gamma(m\cdot\nu)|\nabla y_n|^2d\Gamma. \end{array}\right. \tag{5.4.45}$$

En insérant (5.4.43), (5.4.44) et (5.4.45) dans (5.4.41), on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} -N\int_\Omega|\beta_n y_n|^2dx + (N-2)\int_\Omega|\nabla y_n|^2dx \\ +2Re\{\int_\Gamma(\frac{\partial y_n}{\partial\nu})(m\cdot\nabla\overline{y}_n)d\Gamma\} - \int_\Gamma(m\cdot\nu)|\nabla y_n|^2d\Gamma \\ +\mathrm{Re}\{\int_\Omega 2i\beta_n b u_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx\} = o(1). \end{array}\right. \tag{5.4.46}$$

Par la condition aux bords $\dfrac{\partial y_n}{\partial\tau} = 0$ sur Γ_0, on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} -2Re\{\int_\Gamma(\frac{\partial y_n}{\partial\nu})(m\cdot\nabla\overline{y}_n)d\Gamma\} + \int_\Gamma(m\cdot\nu)|\nabla y_n|^2d\Gamma = \\ -\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\frac{\partial y_n}{\partial\nu}|^2d\Gamma - 2Re\{\int_{\Gamma_1}(\frac{\partial y_n}{\partial\nu})(m\cdot\nabla\overline{y}_n)d\Gamma\} \\ +\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\nabla y_n|^2d\Gamma. \end{array}\right. \tag{5.4.47}$$

Soit ϵ un réel strictement positif. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} 2Re\{\int_{\Gamma_1}(\frac{\partial y_n}{\partial\nu})(m\cdot\nabla\overline{y}_n)d\Gamma\} \leq \\ \quad +\frac{R^2}{\epsilon}\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial y_n}{\partial\nu}|^2d\Gamma + \epsilon\int_{\Gamma_1}|\nabla y_n|^2d\Gamma, \end{array}\right. \tag{5.4.48}$$

En insérant (5.4.48) dans (5.4.47), on déduit que :

$$\begin{cases} -2Re\,\{\int_\Gamma (\frac{\partial y_n}{\partial \nu})(m\cdot\nabla \overline{y}_n)d\Gamma\} + \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla y_n|^2 d\Gamma, \\ \qquad \geq -\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\frac{\partial y_n}{\partial \nu}|^2 d\Gamma - \frac{R^2}{\epsilon}\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial y_n}{\partial \nu}|^2 d\Gamma \\ \qquad -\epsilon\int_{\Gamma_1}|\nabla y_n|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\nabla y_n|^2 d\Gamma, \end{cases} \tag{5.4.49}$$

En utilisant (5.3.1) dans (5.4.49), on obtient :

$$\begin{cases} -2Re\,\{\int_\Gamma (\frac{\partial y_n}{\partial \nu})(m\cdot\nabla \overline{y}_n)d\Gamma\} + \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla y_n|^2 d\Gamma, \\ \geq \ -\frac{R^2}{\epsilon}\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial y_n}{\partial \nu}|^2 d\Gamma + (\gamma-\epsilon)\int_{\Gamma_1}|\nabla y_n|^2 d\Gamma, \end{cases} \tag{5.4.50}$$

Choisissons $\epsilon < \gamma$, on obtient :

$$\begin{cases} -2Re\{\int_\Gamma (\frac{\partial y_n}{\partial \nu})(m\cdot\nabla \overline{y}_n)d\Gamma\} + \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla y_n|^2 d\Gamma \\ \qquad \geq \ -\frac{R^2}{\epsilon}\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial y}{\partial \nu}|^2 d\Gamma. \end{cases} \tag{5.4.51}$$

En insérant tilisant (5.4.51) dans (5.4.46) et en utilisant (5.4.10), on déduit que

$$\begin{cases} N\int_\Omega |\beta_n y_n|^2 dx + (2-N)\int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx \ \leq \\ \quad +\mathrm{Re}\{\int_\Omega 2i\beta_n b u_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx\} + o(1). \end{cases} \tag{5.4.52}$$

En multipliant (5.4.38) par $(1-N)$, on obtient :

$$(1-N)\int_\Omega |\beta_n y_n|^2 dx - (1-N)\int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx = o(1). \tag{5.4.53}$$

En combinant (5.4.52) et (5.4.53), on obtient

$$\begin{cases} \int_\Omega |\beta_n y_n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx \ \leq \\ \quad + \int_\Omega 2i\beta_n b u_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx + o(1). \end{cases} \tag{5.4.54}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{cases} \int_\Omega 2i\beta_n b u_n(m\cdot\nabla\overline{y}_n)dx \ \leq \\ \quad (Rb)^2\int_\Omega |\beta_n u_n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx. \end{cases} \tag{5.4.55}$$

En reportant (5.4.55) dans (5.4.54), on déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega |\beta_n y_n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx \quad \leq \\ \qquad (Rb)^2 \displaystyle\int_\Omega |\beta_n u_n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx. \end{array}\right. \tag{5.4.56}$$

Alors, on a :

$$\int_\Omega (1 - R^2 b^2)\ |\beta_n y_n|^2 dx \leq o(1). \tag{5.4.57}$$

Si $|b| < \frac{1}{R}$, alors on a :

$$\int_\Omega |\beta_n y_n|^2 dx = o(1). \tag{5.4.58}$$

Ceci, combiné avec (5.4.13), implique que

$$\int_\Omega |z_n|^2 dx = o(1) \tag{5.4.59}$$

Etape 6. En insérant (5.4.58) dans (5.4.38), on obtient

$$\int_\Omega |\ \nabla y_n\ |^2\ dx = o(1). \tag{5.4.60}$$

Ceci, combiné avec (5.4.36), implique

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = o(1). \tag{5.4.61}$$

Puis en insérant (5.4.61) dans (5.4.40), on obtient

$$\int_\Omega |\beta_n u_n|^2 dx = o(1). \tag{5.4.62}$$

Ceci, combiné avec (5.4.11), implique

$$\int_\Omega |v_n|^2 dx = o(1). \tag{5.4.63}$$

Enfin, en combinant (5.4.59), (5.4.60), (5.4.61) et (5.4.63), on en déduit que :

$$\|\ U_n\ \|_{\mathcal{H}} = o(1), \tag{5.4.64}$$

ce qui contradit l'hyppothèse (5.4.5). La démonstration est achevée.

Chapitre 6

Controlabilité exacte frontière et indirecte d'un système multidimensionnel d'équations des ondes.

6.1 Introduction

Soit Ω un domaine borné non vide de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière Γ de classe C^2. Soit $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de Γ telle que $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. Nous considérons le système d'équations des ondes couplées suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + b y_t = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y_{tt} - \Delta y - b u_t = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ y = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ y = v, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{6.1.1}$$

avec les conditions initiales :

$$(u(x,0), y(x,0)) = (u_0, y_0) \quad , \quad (u_t(x,0), y_t(x,0)) = (u_1, y_1), \tag{6.1.2}$$

où b est une constante strictement positive.

Dans ([49], [50]), Alabau-Boussouira a étudié l'observabilité indirecte d'un système d'équations des ondes faiblement couplées. Par une méthode de multiplicateurs, l'auteur a montré que, pour un temps T assez grand, l'observation de la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sur le bord Γ_1 permet de restituer une énérgie affaible de la donnée initiale.

De plus, Liu et Rao ([60]) ont étudié la contrôlabilité exacte indirecte d'un système monodimensionnel de deux équations des ondes faiblement couplées. Par une analyse non harmonique, ils ont établi des inégalités d'observabilité faibles et montré la contrôlabilité exacte pour des donnés initales régulières.

Ammar Khodja et Bader (voir [54]) ont étudié les problèmes de stabilité d'un système de deux équations des ondes monodimensionelles sous l'effet d'un seul contrôle interne. Ils ont démontré que le contrôle interne qui agit seulement sur une des équations ne donne pas la stabilité exponentielle si les vitesses de propagation sont différentes. De plus, ils ont étudié la stabilité simultanée frontière du même système.

Wehbe-Youssef, (voir [6]), ont étudié l'observabilité indirecte interne d'un système d'équations des ondes faiblement couplées. Par une méthode de multiplicateurs par morceaux, ils ont montré que pour un temps T assez grand, l'observation locale de la vitesse de la première composante de la solution sur un voisinage d'une partie du bord permet de restituer une énérgie affaiblie de la donnée initiale de la deuxième composante.

Pour les systèmes partiellement contrôlés, la transmission de la dissipation d'une équation à une autre, joue un rôle trés important pour la contrôlabilité et la stabilisation indirecte (voir [48], [52], [60], [61]).

Loreti et Rao (voir [57]) ont étudié la stabilisation d'un système de deux équations linéaires, dont une seule équation est amortie par un contrôle feedback. Ils ont montré qu'un contrôle convenablement choisi peut compenser les parties réeles des valeurs propres du système, et donc fournira le meilleur taux de décroissance polynomiale de l'énérgie du système pour des données initiales régulières.

Dans ce chapitre, notre objectif est d'étudier la contrôlabilité exacte d'un système de deux équations des ondes (6.1.1).

Le chapitre est organisé comme suit :

Dans la section 2, nous considérons le problème homogène associé à (6.1.1) et on montre que ce dernier a une solution dans l'espace de l'énérgie usuel.

Dans la section 3, en utilisant une méthode de multiplicateurs adaptés, on montre les inégalités d'observabilité suivantes :

$$E(0) \leq c_1 \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\frac{\partial \psi}{\partial \nu}|^2 d\Gamma dt \quad \forall T > M, \tag{6.1.3}$$

$$E(0) \geq c_2 \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\frac{\partial \psi}{\partial \nu}|^2 d\Gamma dt \quad \forall T > M, \tag{6.1.4}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives et $\Phi(x,t) = (\varphi(x,t), \psi(x,t), \xi(x,t), \varrho(x,t))$ est l'état du système homogène associé à (6.1.1).

Dans la section 4, pour un temps $T > 0$ assez grand, et des données initiales $\{u_0, u_1, y_0, y_1\}$ convenables, nous montrons qu'il existe un contrôle v tel que la solution du système (6.1.1) satisfait la condition

$$u(T,v) = u_t(T,v) = y(T,v) = y_t(T,v) = 0. \tag{6.1.5}$$

Autrement dit, il s'agit d'étudier l'existence d'un contrôle v qui ramène le système à l'état d'équilibre au temps T_0.

6.2 Système homogène :

Dans cette partie, on considère le système homogène associé à (6.1.1) :

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} - \Delta\varphi + b\psi_t &= 0, \qquad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, &(6.2.1)\\ \psi_{tt} - \Delta\psi - b\varphi_t &= 0, \qquad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, &(6.2.2)\\ \varphi = \psi &= 0, \qquad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, &(6.2.3)\end{aligned}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),$$

$$\psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \ x \in \Omega, \tag{6.2.4}$$

Soit (φ, ψ) une solution régulière du système (6.2.1)-(6.2.4), on définit l'énergie associée par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\varphi_t|^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\psi_t|^2 + |\nabla\psi|^2)dx. \tag{6.2.5}$$

On va formuler le problème (6.2.1)-(6.2.4) dans un espace de Hilbert. Pour cela, on définit l'espace de l'énergie comme suit :

$$\mathcal{H} = (H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))^2 \tag{6.2.6}$$

muni du produit scalaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Phi, \widetilde{\Phi})_{\mathcal{H}} = \displaystyle\int_\Omega \left(\nabla\varphi \cdot \nabla\widetilde{\varphi} + \xi\widetilde{\xi} + \nabla\psi \cdot \nabla\widetilde{\psi} + \varrho\widetilde{\varrho}\right)dx, \\ \qquad\qquad \Phi = (\varphi, \xi, \psi, \varrho), \ \ \widetilde{\Phi} = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\xi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\varrho}) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \tag{6.2.7}$$

Pour donner un sens convenable au système (6.2.1)-(6.2.4), on définit l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ par :

$$D(\mathcal{A}) = \{\Phi = (\varphi, \xi, \psi, \varrho) \in \mathcal{H},\ \varphi,\ \psi\ \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \text{ et } \xi, \varrho \in H_0^1(\Omega)\}, \tag{6.2.8}$$

$$\mathcal{A}\Phi = (\xi, \Delta\varphi - b\varrho, \varrho, \Delta\psi + b\xi),\ \ \forall \Phi = (\varphi, \xi, \psi, \varrho) \in D(\mathcal{A}). \tag{6.2.9}$$

Maintenant, On va formuler le système (6.2.1)-(6.2.4) sous forme d'une équation abstraite du premier ordre

$$\begin{cases} \Phi_t = \mathcal{A}\Phi, \\ \Phi(0) = \Phi_0 \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{6.2.10}$$

où $\Phi(x,t) = (\varphi(x,t), \varphi_t(x,t), \psi(x,t), \psi_t(x,t))$ est l'état du système (6.2.1)-(6.2.4).

Proposition 6.2.1. *L'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans (6.2.8)-(6.2.9) est m-dissipatif dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$.*

Démonstration :

Soit $\Phi \in D(\mathcal{A})$. En utilisant (6.2.9), on obtient que :

$$(\mathcal{A}\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} = 0.$$

Il reste à démontrer que $R(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Pour cela, soit $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ on doit chercher :

$$\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \in D(\mathcal{A}) \quad \text{tel que } \Phi - \mathcal{A}\Phi = f.$$

Alors, on a le problème suivant :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = f_1, \tag{6.2.11}$$

$$\varphi_2 - \Delta\varphi_1 + b\varphi_4 = f_2, \tag{6.2.12}$$

$$\varphi_3 - \varphi_4 = f_3, \tag{6.2.13}$$

$$\varphi_4 - \Delta\varphi_3 - b\varphi_2 = f_4, \tag{6.2.14}$$

(6.2.15)

En éliminant φ_2 et φ_4, on obtient le système :

$$\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + b\varphi_3 = f_1 + f_2 + bf_3, \tag{6.2.16}$$

$$\varphi_3 - \Delta\varphi_3 - b\varphi_1 = f_3 + f_4 - bf_1. \tag{6.2.17}$$

Soit $(\theta_1, \theta_2) \in (H_0^1(\Omega))^2$ une fonction test. En multipliant (6.2.16) par θ_1 et (6.2.17) par θ_2 et en utilisant la formule de Green dans les équations obtenues, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega (\varphi_1\theta_1 + \nabla\theta_1.\nabla\varphi_1 + \varphi_3\theta_2 + \nabla\theta_2.\nabla\varphi_3)dx + \\ \displaystyle\int_\Omega b(\varphi_3\theta_1 - \varphi_1\theta_2)dx = \\ \displaystyle\int_\Omega ((f_1 + f_2 + bf_3)\theta_1 + (f_3 + f_4 - bf_1)\theta_2)dx. \end{array} \right. \tag{6.2.18}$$

Maintenant, on définit la forme bilinéaire a par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a((\varphi_1, \varphi_3), (\theta_1, \theta_2)) = \displaystyle\int_\Omega (\varphi_1\theta_1 + \nabla\theta_1.\nabla\varphi_1 + \varphi_3\theta_2 + \nabla\theta_2.\nabla\varphi_3)dx + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \displaystyle\int_\Omega b(\varphi_3\theta_1 - \varphi_1\theta_2)dx \end{array} \right. \tag{6.2.19}$$

et la forme linéaire L par :

$$L(\theta_1, \theta_2) = \int_\Omega \Big((f_1 + f_2 + bf_3)\theta_1 + (f_3 + f_4 - bf_1)\theta_2 \Big) dx. \tag{6.2.20}$$

Par un calcul simple, on démontre que a est continue, coercive sur $(H_0^1(\Omega))^2$ et L est continue sur $H_0^1(\Omega)$. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe $(\varphi_1, \varphi_3) \in (H_0^1(\Omega))^2$ tel que :

$$a((\varphi_1, \varphi_3), (\theta_1, \theta_2)) = L(\theta_1, \theta_2), \ \forall\ (\theta_1, \theta_2) \in (H_0^1(\Omega))^2. \tag{6.2.21}$$

En particulier, si $(\theta_1, \theta_2) \in (\mathcal{D}(\Omega))^2$, on conclut que l'équation :

$$a((\varphi_1, \varphi_3), (\theta_1, \theta_2)) = L(\theta_1, \theta_2), \;\; \forall \; (\theta_1, \theta_2) \in (\mathcal{D}(\Omega))^2 \tag{6.2.22}$$

admet une solution (φ_1, φ_3). Enfin, en utilisant (6.2.16) et (6.2.17), on trouve $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \in D(\mathcal{A})$.

Theorem 6.2.2. *(Existence et unicité).*
a- *Soit $\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in D(A)$. Alors le système (6.2.10) admet une solution $\Phi(t)$ satisfait*

$$\Phi(t) \in C^0(0, +\infty; D(\mathcal{A})) \cap C^1(0, +\infty; \mathcal{H}).$$

b- *Soit $\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in \mathcal{H}$. Le système (6.2.10) admet une solution faible $\Phi(t)$ satisfait*

$$\Phi(t) \in C^0(0, +\infty; \mathcal{H})$$

De plus, on a :

$$\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Démonstration.

(1) Soit $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$, alors d'après le théorème de Hille-Yosida (voir [18]), le problème (6.2.10) admet une solution $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$ telle que :

$$\Phi \in C^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}).$$

(2) Soit $\Phi_0 \in \mathcal{H}$, alors d'après le théorème de Hille-Yosida le problème (6.2.10) admet une solution unique faible $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$, telle que

$$\varphi(t), \psi(t) \in C^0(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)), \; \varphi_t(t), \psi_t(t) \in C^0(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)).$$

Ceci achève la démonstration.

6.3 Résultat d'observabilité

Dans ce paragraphe, on établit une inégalité d'observabilité inverse. Pour cela, on a besoin des conditions sur la géométrie du domaine. On suppose qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$(m \cdot \nu) \geq \gamma^{-1}, \quad \forall\, x \in \Gamma_1 \quad \text{ et } \quad (m.\nu) \leq 0, \quad \forall\, x \in \Gamma_0, \tag{6.3.1}$$

où $m(x) = x - x_0$ et $(\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$.

On résume le résultat de l'observabilité indirecte frontière dans l'énoncé suivant :

Theorem 6.3.1. *On suppose que* $0 < b < b_0 = \dfrac{1}{4R + 3\max\{1, c_0\}}$*, où* c_0 *est le constante de Poincarré. Il existe une constante* $T_0 > 0$*, telle que, pour tout* $T > T_0$ *et tout* $\Phi_0 \in \mathcal{H}$*, la solution faible* $\Phi(x,t) = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$ *du système (6.2.10) vérifie*

$$E(0) \leq c_1 \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\frac{\partial \psi}{\partial \nu}|^2 d\Gamma dt, \quad \forall T > T_0, \tag{6.3.2}$$

$$E(0) \geq c_2 \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\frac{\partial \psi}{\partial \nu}|^2 d\Gamma dt, \quad \forall T > T_0, \tag{6.3.3}$$

où c_1, c_2 sont deux constantes positives et

$$T_0 = \frac{\frac{6}{b} + 8R + 6\max\{1, c_0\}}{1 - b(4R + 3\max\{1, c_0\})}.$$

Démonstartion.

Etape 1. Multiplions l'équation (6.2.2) par φ_t. Puis, en utilisant la formule de Green et le fait que $\varphi_t = 0$ sur Γ, on obtient que :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \psi_{tt} \varphi_t dxdt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla \psi \cdot \nabla \varphi_t) dxdt - \\ \displaystyle b \int_0^T \int_\Omega |\varphi_t|^2 dxdt = 0. \end{cases} \tag{6.3.4}$$

En intégrant par parties entre 0 et T, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\int_\Omega \psi_t\varphi_t dx\right]_0^T - \int_0^T\int_\Omega \psi_t\varphi_{tt}dxdt \\ +\left[\int_\Omega (\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)dx\right]_0^T - \int_0^T\int_\Omega (\nabla\psi_t\cdot\nabla\varphi)dxdt \\ -b\int_0^T\int_\Omega |\varphi_t|^2dxdt = 0. \end{array}\right. \tag{6.3.5}$$

De même, multiplions l'équation (6.2.1) par ψ_t. En utilisant la formule de Green et le fait que $\psi_t = 0$ sur Γ, on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{l} \int_0^T\int_\Omega \psi_t\varphi_{tt}dxdt + \int_0^T\int_\Omega (\nabla\psi_t\cdot\nabla\varphi)dxdt \\ +b\int_0^T\int_\Omega |\psi_t|^2dxdt = 0. \end{array}\right. \tag{6.3.6}$$

En combinant (6.3.5) et (6.3.6), on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} -b\int_0^T\int_\Omega |\psi_t|^2dxdt + b\int_0^T\int_\Omega |\varphi_t|^2dxdt = \\ \left[\int_\Omega \psi_t\varphi_t dx\right]_0^T + \left[\int_\Omega (\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)dx\right]_0^T. \end{array}\right. \tag{6.3.7}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$|\int_\Omega \psi_t\varphi_t dx| \leq \frac{1}{2}\int_\Omega (|\varphi_t|^2 + |\psi_t|^2)dx \leq E(t). \tag{6.3.8}$$

De l'inégalité (6.3.8), on déduit que :

$$\left[\int_\Omega \psi_t\varphi_t dx\right]_0^T + \left[\int_\Omega (\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)dx\right]_0^T \leq 2E(0). \tag{6.3.9}$$

En utilisant (6.3.9) dans (6.3.7), on déduit que :

$$b\int_0^T\int_\Omega |\varphi_t|^2dxdt \leq b\int_0^T\int_\Omega |\psi_t|^2dxdt + 2E(0). \tag{6.3.10}$$

Etape 2. Multiplions l'équation (6.2.2) par $2(m\cdot\nabla\psi)$. En utilisant l'intégration par parties entre 0 et T, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\left[\int_\Omega \psi_t(m\cdot\nabla\psi)dx\right]_0^T - 2\int_0^T\int_\Omega \psi_t(m\cdot\nabla\psi_t)dxdt \\ -2\int_0^T\int_\Omega \Delta\psi(m\cdot\nabla\psi)dxdt - 2b\int_0^T\int_\Omega \varphi_t(m\cdot\nabla\psi)dxdt = 0. \end{array}\right. \tag{6.3.11}$$

En utilisant la formule de Green, on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} -2\displaystyle\int_0^T\int_\Omega \Delta\psi(m\cdot\nabla\psi)dxdt = -2\int_0^T\int_\Gamma \partial_\nu\psi(m\cdot\nabla\psi)d\Gamma dt \\ +2\displaystyle\int_0^T\int_\Omega (\nabla\psi)\cdot\nabla(m\cdot\nabla\psi)dxdt. \end{array}\right. \tag{6.3.12}$$

En utilisant le formule de Rellich, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\displaystyle\int_0^T\int_\Omega (\nabla\psi).\nabla(m.\nabla\psi)dxdt = \\ \quad (2-N)\displaystyle\int_0^T\int_\Omega |\nabla\psi|^2 dxdt + \\ \quad \displaystyle\int_0^T\int_\Gamma (m.\nu)(|\partial_\nu\psi|^2 + |\partial_\tau\psi|^2)d\Gamma dt \end{array}\right. \tag{6.3.13}$$

En combinant (6.3.12)-(6.3.13) et en utilisant le fait que $\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = 0$ sur Γ, on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} -2\displaystyle\int_0^T\int_\Omega \Delta\psi(m\cdot\nabla\psi)dxdt = \\ -\displaystyle\int_0^T\int_\Gamma (m\cdot\nu)|\partial_\nu\psi|^2 d\Gamma dt + (2-N)\int_0^T\int_\Omega |\nabla\psi|^2 dxdt. \end{array}\right. \tag{6.3.14}$$

En utilisant (6.3.14) dans (6.3.11) et la formule de Green, on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{l} +N\displaystyle\int_0^T\int_\Omega |\psi_t|^2 dxdt + (2-N)\int_0^T\int_\Omega |\nabla\psi|^2 dxdt \\ -\displaystyle\int_0^T\int_{\Gamma_0} (m.\nu)|\partial_\nu\psi|^2 d\Gamma dt - \int_0^T\int_{\Gamma_1} (m.\nu)|\partial_\nu\psi|^2 d\Gamma dt = \\ -2\left[\displaystyle\int_\Omega \psi_t(m.\nabla\psi)dx\right]_0^T + 2b\int_0^T\int_\Omega \varphi_t(m.\nabla\psi)dxdt. \end{array}\right. \tag{6.3.15}$$

Ensuite, multiplions l'équation (6.2.2) par ψ. En utilisant la formule de Green et le fait que $\psi = 0$ sur Γ, on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{l} +\displaystyle\int_0^T\int_\Omega \psi_{tt}\psi_t dxdt + \int_0^T\int_\Omega |\nabla\psi|^2 dxdt \\ -b\displaystyle\int_0^T\int_\Omega \varphi_t\psi dxdt = 0. \end{array}\right. \tag{6.3.16}$$

En intégrant par parties entre 0 et T, on déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^T\int_\Omega|\psi_t|^2dxdt+\int_0^T\int_\Omega|\nabla\psi|^2dxdt= \\ -\left[\displaystyle\int_\Omega\psi_t\psi dx\right]_0^T+b\int_0^T\int_\Omega\varphi_t\psi dxdt. \end{array}\right. \tag{6.3.17}$$

Multiplions (6.3.17) par $(N-1)$. En combinant l'équation obtenue et (6.3.15), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\displaystyle\int_0^T\int_\Omega|\psi_t|^2dxdt+2\int_0^T\int_\Omega|\nabla\psi|^2dxdt \\ -2\displaystyle\int_0^T\int_{\Gamma_0}|\partial_\nu\psi|^2d\Gamma dt-2\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\partial_\nu\psi|^2d\Gamma dt\ = \\ -4\left[\displaystyle\int_\Omega\psi_t(m.\nabla\psi)dx\right]_0^T+4b\int_0^T\int_\Omega\varphi_t(m.\nabla\psi)dxdt \\ -2\left[\displaystyle\int_\Omega\psi_t\psi dx\right]_0^T+2b\int_0^T\int_\Omega\varphi_t\psi dxdt. \end{array}\right. \tag{6.3.18}$$

Etape 3. Multiplions (6.2.1) par φ. En utilisant la formule de Green et l'intégration par parties entre 0 et T et le fait que $\varphi=0$ sur Γ, on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^T\int_\Omega|\varphi_t|^2dxdt+\int_0^T\int_\Omega|\nabla\varphi|^2dxdt\ = \\ -\left[\displaystyle\int_\Omega\varphi_t\varphi dx\right]_0^T-b\int_0^T\int_\Omega\psi_t\varphi dxdt. \end{array}\right. \tag{6.3.19}$$

En combinant les équations (6.3.18) et (6.3.19) et en utilisant (6.3.1), on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T E(t)dt-2\int_0^T\int_{\Gamma_1}(m.\nu)|\partial_\nu\psi|^2d\Gamma dt \\ \qquad +\displaystyle\int_0^T\int_\Omega(\frac{3}{2}|\nabla\psi|^2+\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2)dxdt\ \ \le \\ +\displaystyle\frac{3}{2}\int_0^T\int_\Omega(|\varphi_t|^2+|\psi_t|^2)dxdt \\ +4b\displaystyle\int_0^T\int_\Omega\varphi_t(m.\nabla\psi)dxdt+2b\int_0^T\int_\Omega\varphi_t\psi dxdt \\ -b\displaystyle\int_0^T\int_\Omega\psi_t\varphi dxdt-4\left[\int_\Omega\psi_t(m.\nabla\psi)\right]_0^T \\ -2\left[\displaystyle\int_\Omega\psi_t\psi dx\right]_0^T-\left[\int_\Omega\varphi_t\varphi dx\right]_0^T. \end{array}\right. \tag{6.3.20}$$

En utilisant l'équation (6.3.10), on obtient que :

$$\frac{3}{2}\int_0^T \int_\Omega (|\varphi_t|^2 - |\psi_t|^2)dxdt \leq \frac{6}{b}E(0). \tag{6.3.21}$$

En utilisant l'inégalité de Caushy-Shwartz, on déduit que :

$$4\,|\int_\Omega \psi_t(m.\nabla\psi)dx| \leq 4RE(0) \text{ et } 4\,|\left[\int_\Omega \psi_t(m.\nabla\psi)dx\right]_0^T| \leq 8RE(0). \tag{6.3.22}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Shwartz et l'inégalité de Poincaré, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
|2\left[\int_\Omega \psi_t\psi dx\right]_0^T| &\leq 4\max\{1,c_0\}E(0), && (6.3.23)\\
|\left[\int_\Omega \varphi_t\varphi dx\right]_0^T| &\leq 2\max\{1,c_0\}E(0), && (6.3.24)\\
|4b\int_0^T \int_\Omega \varphi_t(m.\nabla\psi)dxdt| &\leq 4bR\int_0^T E(t)dt, && (6.3.25)\\
|2b\int_0^T \int_\Omega \varphi_t\psi dxdt| &\leq 2b\max\{1,c_0\}\int_0^T E(t)dt, && (6.3.26)\\
|b\int_0^T \int_\Omega \varphi\psi_t dxdt| &\leq b\max\{1,c_0\}\int_0^T E(t)dt, && (6.3.27)
\end{aligned}$$

où c_0 est la constante de Poincaré.

Puisque $E(t) = E(0)$, on peut dire que :

$$\int_0^T E(t)dt = TE(0). \tag{6.3.28}$$

En utilisant (6.3.21)-(6.3.27) dans (6.3.20), on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{l}
TE(0) \leq +\displaystyle\int_0^T \int_{\Gamma_1} (m.\nu)|\partial_\nu\psi|^2 d\Gamma dt \\
\qquad +\left((\dfrac{6}{b} + 8R + 6\max\{1,c_0\}) + bT(4R + 3\max\{1,c_0\})\right)E(0).
\end{array}\right. \tag{6.3.29}$$

Ensuite, on a :

$$\begin{cases} \left(T(1-b(4R+3\max\{1,c_0\}))-(\frac{6}{b}+8R+6\max\{1,c_0\})\right)E(0) \\ \qquad \leq +2\,R\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\partial_\nu\psi|^2 d\Gamma dt. \end{cases} \tag{6.3.30}$$

D'après l'inégalité (6.3.30), on déduit le résultat demandé dans (6.1.3). En utilisant l'inégalité (6.3.15), on obtient que :

$$\begin{cases} \int_0^T\int_{\Gamma_1}(m.\nu)|\partial_\nu\psi|^2 d\Gamma dt = \\ N\int_0^T\int_\Omega|\psi_t|^2 dxdt+(2-N)\int_0^T\int_\Omega|\nabla\psi|^2 dxdt- \\ \int_0^T\int_{\Gamma_0}(m.\nu)|\partial_\nu\psi|^2 d\Gamma dt\ +2\left[\int_\Omega\psi_t(m.\nabla\psi)dx\right]_0^T- \\ 2b\int_0^T\int_\Omega\varphi_t(m.\nabla\psi)dxdt \end{cases} \tag{6.3.31}$$

En utilisant la condition (6.3.1), et les inégalités (6.3.22) et (6.3.25) dans (6.3.31), on obtient l'inégalité (6.3.3).

6.4 Contrôlabilité exacte indirecte.

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + b y_t = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y_{tt} - \Delta y - b u_t = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ y = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ y = v, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{6.4.1}$$

où $(u(x,0), y(x,0)) = (u_0, y_0)$ et $(u_t(x,0), y_t(x,0)) = (u_1, y_1)$.

La solution de système (6.4.1) peut être définie par la méthode de transposition (voir [24]).
On se pose alors le problème de contrôlabilité exacte indirecte suivant : étant donné $T > 0$ et des données initiales $U_0 = (u_0, u_1, y_0, y_1)$, existe-t-il un contrôle v qui ramème la solution de (6.4.1) à l'équilibre au temps T, i.e. $u(T) = u_t(T) = y(T) = y_t(T) = 0$?

Dans un prémier temps, on va montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (6.4.1).

Theorem 6.4.1. *Soit $T > 0$ et $v \in L^2(]0,T[, L^2(\Gamma_1))$. Pour toute donnée initiale*

$$U_0 = (u_0, u_1, y_0, y_1) \in (L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))^2,$$

le système (6.4.1) admet une solution faible

$$U(x,t) \in C^0([0,T],(L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega))^2).$$

De plus, pour tout $U_0 \in (L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega))^2$ *et* $v \in L^2(]0,T[;L^2(\Gamma_0))$*, l'application linéaire :*

$$(U_0, v) \longrightarrow (U, U_t) \tag{6.4.2}$$

est continue de

$$(L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega))^2 \times L^2(]0,T[;L^2(\Gamma_1)) \ \textit{dans}\ \ C^0\Big(0,T;(L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega))^2\Big).$$

Démonstration.

Soit $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$ la solution du problème homogène $(6.2.1)-(6.2.4)$ associée aux condition initiale $\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)$. Multiplions la prémière équation de (6.4.1) par φ et la deuxième par ψ. Par l'intégration par parties, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} +\displaystyle\int_\Omega u_t(t)\varphi(t)dx + \int_\Omega y_t(t)\psi(t)dx - \int_\Omega u(t)\varphi_t(t)dx \\ -\displaystyle\int_\Omega y(t)\psi_t(t)dx - \int_\Omega bu(t)\psi(t)dx - \int_\Omega by(t)\varphi(t)dx \ = \\ +\displaystyle\int_\Omega u_t(0)\varphi(0)dx + \int_\Omega y_t(0)\psi(0)dx - \int_\Omega \varphi_t(0)u(0)dx \\ -\displaystyle\int_\Omega \psi_t(0)y(0)dx - \int_\Omega bu(0)\psi(0)dx - \int_\Omega y(0)\varphi(0)dx \\ -\displaystyle\int_\Gamma\int_0^t \frac{\partial\psi}{\partial\nu} v d\Gamma dt. \end{array}\right. \tag{6.4.3}$$

Notons $\mathcal{H}' = (H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega))^2$. D'après (6.4.3), on définit la forme linéaire L par :

$$\left\{\begin{array}{l} L(\phi_0) \ = \ \langle\, (u_t, -u, y_t, -y), \Phi(t)\,\rangle_{\mathcal{H}'\times\mathcal{H}} \\ \qquad\quad = \langle\, (u_1, -u_0, y_1, -y_0), \Phi(0)\,\rangle_{\mathcal{H}'\times\mathcal{H}} - \displaystyle\int_\Gamma\int_0^t \frac{\partial\psi}{\partial\nu} v d\Gamma dt, \end{array}\right. \tag{6.4.4}$$

où

$$\begin{cases} \langle\,(u_1,-u_0,y_1,-y_0),\varPhi(0)\,\rangle_{\mathcal{H}'\times\mathcal{H}} \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_\Omega u_t(0)\varphi(0)dx + \int_\Omega y_t(0)\psi(0)dx \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_\Omega \varphi_t(0)u(0)dx - \int_\Omega \psi_t(0)y(0)dx \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_\Omega bu(0)\psi(0)dx - \int_\Omega y(0)\varphi(0)dx, \end{cases} \tag{6.4.5}$$

pour tout $\Phi_0 \in \mathcal{H}$.

On choisit le contrôle $v \in L^2(0,T,L^2(\Gamma_1))$. En utilisant (6.3.3) dans (6.4.5), on obtient que :

$$|L(\Phi_0)| \leq c(\|\, U_0 \,\|_{\mathcal{H}'} + \|\, v \,\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_1))}) \,\|\, \Phi_0 \,\|_{\mathcal{H}}, \tag{6.4.6}$$

ceci implique que la forme linéaire L est continue dans $\mathcal{H}$. De plus, on a :

$$\|\, L \,\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathbb{R})} \leq \|\, v \,\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \|\, U_0 \,\|_{\mathcal{H}'} \,. \tag{6.4.7}$$

Donc d'après le théorème de Riesz, il existe une élement $\mathbb{Z}(x,t) \in \mathcal{H}'$ tel que :

$$L(\Phi_0) = \langle\,\mathbb{Z},\Phi_0\,\rangle_{\mathcal{H}'\times\mathcal{H}}, \quad \forall\Phi_0 \in \mathcal{H}. \tag{6.4.8}$$

On définit la solution $U(x,t)$ par

$$S^\star_{\mathcal{A}}(t)\,U(x,t) \,=\, \mathbb{Z}(x,t).$$

On déduit que, pour tout $0 \leq t \leq T$, $U(x,t)$ est la solution unique de problème (6.4.5). De plus, on a :

$$\begin{cases} \|\, U(t) \,\|_{\mathcal{H}'} = \|\, L(v,U_0;t) \,\|_{L(\mathcal{H},\mathbb{R})}, \\ \\ \qquad\qquad \leq c\Big(\,\|\, v \,\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \|\, U_0 \,\|_{\mathcal{H}'}\,\Big), \quad \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{6.4.9}$$

Ceci implique que l'application linéaire (6.4.2) est continue de $(L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega))^2\times L^2(]0,T[;L^2(\Gamma_1))$ dans $C^0\Big(0,T;(L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega))^2\Big)$.

Après avoir étudié l'existence et l'unicité d'une solution faible du (6.4.1), on s'intéresse maintenant à la contrôlabilité exacte du problème (6.4.1). On montre le théorème suivant :

Theorem 6.4.2. *Supposons que $0 < b < b_0$. Pour tout $T > T_0$ où b_0, T_0 sont données dans le théorème 2.3 et tout*

$$U_0 \in (L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))^2,$$

il existe un contrôle

$$v(t) \in L^2(0,T,L^2(\Gamma_1))$$

tel que la solution du systéme contrôlé (6.4.1) vérifie

$$u(T) = u_t(T) = y(T) = y_t(T) = 0.$$

Démonstration.

Grâce aux inégalités (6.1.3)-(6.3.3), on considère la semi norme définie par :

$$\parallel \Phi_0 \parallel^2_{\mathcal{H}} = \int_0^T \int_\Gamma |\frac{\partial \psi}{\partial \nu}|^2 d\Gamma dt, \tag{6.4.10}$$

où $\varPhi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$ désigne la solution du problème homogène (6.2.1)-(6.2.4).

Choisissons le contrôle $v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} \in L^2(0,T,L^2(\Gamma))$.

Maintenant on résout le problème rétrograde suivant :

$$\begin{cases} \chi_{tt} - \Delta\chi + b\zeta_t = 0 \ , & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \zeta_{tt} - \Delta\zeta - b\chi_t = 0 \ , & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \chi = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \zeta = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \zeta = -\frac{\partial\psi}{\partial\nu}, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \chi(T) = \chi_t(T) = \zeta(T) = \zeta_t(T) = 0, & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{6.4.11}$$

Grâce au théorème (4.2), le système (6.4.11) admet un solution $\Psi(x,t) = (\chi, \chi_t, \zeta, \zeta_t) \in C^0([0,T]; \mathcal{H}')$.

On définit ensuite un opérateur linéaire Λ par :

$$\Lambda : \mathcal{H} \longrightarrow (H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega))^2$$

où

$$\Lambda\Phi_0 = (\psi_t(0), -\psi(0), \zeta_t(0), -\zeta(0)), \qquad \forall \Phi_0 \in \mathcal{H}. \tag{6.4.12}$$

De plus, pour tout Φ_0, $\tilde{\Phi}_0 \in \mathcal{H}$, on a :

$$\begin{cases} \langle \Lambda\Phi_0, \tilde{\Phi}_0 \rangle_{\mathcal{H}'\times\mathcal{H}} = \displaystyle\int_0^T \int_{\Gamma_1} (\frac{\partial\psi}{\partial\nu} \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\nu}) d\Gamma dt, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \big(\Phi_0, \tilde{\Phi}_0\big)_{\mathcal{H}}, \end{cases} \tag{6.4.13}$$

où $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ est le produit scalire associé à la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$.
Utilisant l'inégalité de Cauchy-Shwartz dans (6.4.13), on déduit que :

$$|\langle \Lambda\Phi_0, \tilde{\Phi}_0 \rangle_{\mathcal{H}'\times\mathcal{H}}| \leq \|\Phi_0\|_{\mathcal{H}} \|\tilde{\Phi}_0\|_{\mathcal{H}} \quad , \ \forall \Phi_0, \ \tilde{\Phi}_0 \in \mathcal{H}. \tag{6.4.14}$$

En particulier, on a :

$$|\langle \Lambda\Phi_0, \Phi_0 \rangle| = \|\Psi_0\|^2_{\mathcal{H}}, \forall\, \Phi_0 \in \mathcal{H}. \tag{6.4.15}$$

Donc l'inégalité inverse dans le théorème (1.1) et (6.4.15) impliquent que l'opérateur Λ est coercif et continu sur $\mathcal{H}$. Alors d'après le lemme de Lax-Milgram, Λ est isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$. En particulierr, pour toute $U_0 \in (L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))^2$, il existe une solution $\Phi_0 \in \mathcal{H}$, tel que

$$\Lambda\Phi_0 = (u_1, -u_0, y_1, -y_0). \tag{6.4.16}$$

L'unicité de la solution du problème (6.4.11) donne

$$U = \Psi. \tag{6.4.17}$$

Par conséquent, on a

$$u(T) = u_t(T) = y(T) = y_t(T) = 0. \tag{6.4.18}$$

Bibliographie

[1] A. Wehbe, *Rational energy decay rate in a wave equation with dynamical control*, Applied Mathematics Letters, volume 16, issue 3, pages 357-364, April 2003.

[2] A. Wehbe, *Observability and controllability for a vibrating string with dynamical boundary control*, Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2010(2010), No. 114, pp. 1-13.

[3] A. Wehbe, *Optimal energy decay rate in the Rayleigh beam equation with boundary dynamical controls*, Bull. Belg. Math. Soc. 12(2005), 1-16.

[4] B. Rao, A. Wehbe, *Polinomial energy decay rate and strong stability of Kirchhoff plates with non-compact resolvent*, J. Evol. Equ., 5 (2005), pp. 137-152.

[5] S. Nicaise, *Stability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications*, Rend. Mat. Appl.(7) 23 (2003), no.1, 83-116.

[6] A. Wehbe, W.Youssef, *Observabilité et contrôlabilité exacte internes indirectes d'un système hyperbolique faiblement couplé*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 1169Ű1173

[7] B. Kapitonov, *Uniform stabilization and exact controllability for a class of coupled hyperbolic systems*, Comput. Appl. Math., 15 (1996), pp. 199Ű212.

[8] B. Rao, *Exact boundary controllability of a hybrid system of elasticity by the HUM method*, ESIAM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, January 2001, Vol. 6, pp. 183-199.

[9] Kangsheng Liu, Bopeng Rao, *Stabilité exponentielle des équations des ondes avec amortissement local de KelvinŰVoigt*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 769Ű774.

[10] F. Ammar-khodjar, Bader, *Stability of systems of one dimensional wave equations by internal or boundary control force*, SIAM J. Control Optim. vol 39, No.6 (2001), pp.1833-1851.

[11] M. Ailal, F. Ammar-khodjar, *Stability of coupled second order equations*, Comput. Appl. Math.19 (2000), no.1.

[12] F. Ammar-khodja, A. Benabdallah, *Stability of coupled systems*, Abstr. Appl. Anal.1 (1996), no.3, 327-340.

[13] Ali wehbe, Wael youssef, *Stabilization of the uniform Ttiimoshenko beam by one locally distributed feedback*, Vol. 88, No. 7, July 2009, 1067-1078.

[14] Ali wehbe, Wael youssef, *Indirect locally internal observability and controllability of weakly coupled wave equations*, Differential Equations and Applications-DEA, Vol. 3, No. 3, (2011), 449-462.

[15] A. Soufyane, A. Wehbe, *Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping*, Electronic Journal of Differential Equation, Vol. 2003(2003), No. 29, pp. 1-14.

[16] I. Lasiecka, R. Triggiani, *Carleman estimates and exact boundary controllability for a system of coupled, nonconservative second-order hyperbolic equations,* in Paritial Differential Equation Methodes in Control and Shape Analysis, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 188, Dekker, New York, 1997, pp. 215-243.

[17] W. Arendt, C. J. Batty, *Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988), 837-852.

[18] H. Brezis, *Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1992.

[19] S. R. Foguel, *Powers of contraction in Hilbert space*, Pacific J. Math., 13(1963), 551-561.

[20] C. D. Benchimol, *A note on weak stabilization of contraction semi-groups*, SIAM J. Control optim. 16 (1978), 373-379.

[21] B. A. Francis, H_∞ *– control theory*, Lecture Notes in Control and Sciences, 1986.

[22] K. Clover, J.C. Doyle, *State-space formulea for all controllers that satisfy an* H_∞*-norm bound*, Systems and control Letters (1988).

[23] I. C. Gohberg, M.G. Krein, *Introduction to the theory of linear noneslfadjoint operators*, AMS, Providence, 1969.

[24] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization*, Masson, Paris, 1994.

[25] W. Littman, L. Markus, *Some recent results on control and stabilization of flexible structures*, Proc. COMCON Workshop, Montpellier 1987.

[26] Ö. Morgül, *Dynamic boundary control of a Euler-Bernoulli beam*, IEEE Transactions on automatic control, Vol. 37, No. 5, pp. 639-642, May 1992.

[27] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, V. 44, Springer-Verlag, 1983.

[28] B. Rao, *Stabilization of elastic plates with dynamical boundary control*, SIAM J. Control Optim. Vol. 36, No. 1, pp. 148-163, 1998.

[29] D. L. Russell, *Decay rates for weakly damped systems in Hilbert space obtained with control-theoretic methods*, J. Differential Equations, 19 (1975), 344-370.

[30] D. L. Russell, *A General framework for the study of indirect damping mechanisms in elastic systems*, J. Math. Anal and Appl. (1993).

[31] D.L. Russell, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions,* , SIAM Rev. 20(1978), 639-739.

[32] B. Sz-Nagy, C. Foias, *Analyse Harmonique ds opérateurs de l'espace de Hilbert*, Masson, Paris, 1967.

[33] F. L. Huang, *Strong asymptotic stability of linear dynamical systems in Banch spaces*, J.Berlin. 1985.

[34] J. Pruss, On the Spectrum of C_0 semi groups *Trans. Amer. Math. Soc.* 284 (1984), 847-857.

[35] J.Lagnese, *Boundary stabilization of thin plates*, SIAM studies in Applied Mathematics 10, SIAM, Philadelphia, PA. 1989.

[36] S. Saks, A. Zygmund, *Fonctions Analytiques*, Masson 1970.

[37] C. Castro, E. Zuazua, *Boundary controllability of a hybrid system consisting in two flexible beams connected by a point mass*, SIAM J. Control Optim. 36 1576-1595, 1998.

[38] S. Hanssen, E. Zuazua, *Exact controllability and stabilization of a vibration string with an interior point mass*, SIAM J. Control Optim. 36 1357-1391, 1995.

[39] J. L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, Vol. I, Masson, Paris, 1988.

[40] J. L. Lions, *Exact Controllability, stabilizability, and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev. 30, 1-68, 1988.

[41] Z. Liu and B. Rao, *Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation*, Z. Angew. Math. Phys., Vol 56 No. 4 (2005), pp. 630-644.

[42] Z. Liu, B. Rao, *A spectral approach to the indirect boundary control of a system of weakly coupled wave equations*, Discrete and continuous dynamical systems, Vol. 23, No 1,2, 2009.

[43] A. Guesmia, *Inégalités intégrales et applications à la stabilization des systèmes distribués non dissipatifs*, Habilitation à diriiger des recherches, Université Paul Verlaine, France, 2006.

[44] V. Komornik, B.Rao, *Boundary stabilization of compactly coupled wave equations*, Asymptot. Anal.14 (1997), no.4, 339-359.

[45] J. Rauch, X. Zhang, E. Zuazua, *Polynomial decay for hyperb*, Olic-Parabolic coupled system. J. Math. Pures Appl. (9) 84 (2005), no.4 407-470.

[46] B. Rao, A. Wehbe, *Polinomial energy decay rate and strong stability of Kirchhoff plates with non-compact resolvent*, J. Evol. Equ., 5 (2005), pp. 137-152.

[47] F. Alabau, *Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems,* in : Siam J. on Control and optimization, 2002, vol.41, p.511-541.

[48] F. Alabau, P. Cannarsa, V. Komornik, *Indirect Internal stabilization of weakly coupled systems,* J. Evol. Equ., 2(2002), pp.127-150.

[49] F. Alabau-Bousouira, *Observabilité frontière indirecte de systèmes faiblement couplés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér.I Math, 333 :645-650, 2011.

[50] F. Alabau-Bousouira, *A two level energy method for indirect boundary observability and Controllability of weakly coupled hyperbolic systems*, SIAM j. control. Optim, 42(7) :871-906, 2003. Vol. I, Masson, Paris, 1988.

[51] F. Alabau, *Stabilization frontière indirecte de systèmes faiblement couplés*, C.R.Acad. Sci. Paris Sér I Math 328, 1015-1020 (1999).

[52] F. Alabau-Bousouira, *Indirect Boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems*, SIAM j. control. Optim, 41 :511-541, 2002.

[53] F. Alabu, V. Komornik, *Boundary observability, contrôllability, and stabilization of linear elastodynamic systems*, Siam J. Optim.73, (1999), no.2.,521-542.

[54] F. Alabau-Bousouira, *Stabilizabiloty of systems of one-dimensional wave equations by one internal or boundary control force*, SIAM J Control Optim. 39 (2001), no.6, 1833-185.

[55] V. Komornik ,P. Loreti, *Fourier series in control theory, Springer-Verlag, New york, 2005.*

[56] Z. Liu and B. Rao, *A spectral approach to the indirect boundary control of a system of weakly coupled wave equations*, Discrete and continuous dynamical systems, Vol. 23, No 1,2, 2009.

[57] P. Loreti, B. Rao, *Compensation spectrale et taux de décroissance optimal de l'énérgie de systèmes partiellement amortis*, C.R. Acad. Sci. Paris, 337, Série I (2003), 531-536.

[58] Z. Liu, B. Rao, *Energy decay of the termoelastic Bresse system*, Z. Angew. Math. Phys. 60 (2009), no. 1, 54-69.

[59] Z. Liu, B. Rao, *Optimal decay rate and control for a system of partially Famped Wave Equations*, (2006) SIAM J control optm 35 : 1574-1590.

[60] Z. Liu, B .Rao, *Frequency domain approach for the polynomial stability of a system of partially damped wave equation*, J.Math. Anal. Appl. 335 (2007), no.2, 860-881.

[61] A. Beyrath, *Indirect internal stabilization of weakly coupled systems with locally distributed damping*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 333 :451-456, 2001.

[62] A. Beyrath, *Indirect linear locally distributed damping of coupled systems*, Bol. Soc. Parana. Mat. (3) 22 (2004), no.3, 373-379.

[63] A. Borichev, Y. Tomilov, *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups*, Math. Ann., Vol. 347, No. 2, (2010), pp. 455-478.