UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

ÉCOLE DOCTORALE 269

IRMA

THÈSE présentée par :

Auguste HOANG DUC

soutenue le : **21 Octobre 2015**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : Mathématiques

Relèvements de représentations Galoisiennes à valeurs dans des groupes algébriques

THÈSE dirigée par :

M. Wintenberger Jean-Pierre Professeur, Université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

M. CHENEVIER Gaëtan Directeur de recherches, Université Paris Sud
M. CONRAD Brian Professeur, Université de Stanford

AUTRES MEMBRES DU JURY :

M. CARAYOL Henri Professeur, Université de Strasbourg
M. CLOZEL Laurent Professeur, Université Paris Sud
M. HARRIS Michael Professeur, Institut de Mathématiques de Jussieu

Auguste Hoang Duc

RELÈVEMENTS DE REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES À VALEURS DANS DES GROUPES ALGÉBRIQUES

Octobre 2015

Auguste Hoang Duc
Institut de Recherche Mathématique Avancée
IRMA, UMR 7501
7 rue René-Descartes
67084 Strasbourg Cedex

Classification MSC2010 : 11F80, 11R37. 11E95, 20G10.

Mots clefs : représentations Galoisiennes, relèvements, théorie du corps de classes, théorie de Hodge p-adique, cohomologie des groupes.

Remerciements

Je tiens à remercier ici toutes les personnes que j'ai rencontré et qui m'ont aidé durant cette thèse.

J'exprime tout d'abord ma gratitude à Jean-Pierre Wintenberger pour avoir accepter de diriger cette thèse. Je lui en suis reconnaissant de m'avoir accordé beaucoup de son temps lorsque j'en avais besoin. J'ai appris beaucoup de mathématiques grâce à lui et ses idées ont largement contribué aux résultats de mes travaux.

Je remercie mes rapporteurs Brian Conrad et Gaëtan Chenevier pour avoir pris le temps de relire ce mémoire et de l'intérêt qu'ils y ont apporté. Leurs remarques et corrections ont été indispensables pour ce travail. Je remercie également les examinateurs Henri Carayol, Laurent Clozel et Michael Harris qui me font l'honneur de faire partie du jury.

Je remercie le personnel de l'IRMA et l'UFR pour leur accueil et leur efficacité offrant de bonnes conditions de travail au sein du département.

Je tiens à remercier mes collègues doctorants dont j'ai eu le plaisir de côtoyer. À mon arrivée j'ai eu de la chance d'avoir été très bien accueilli par les anciens doctorants. Je remercie chaleureusement mes collègues de bureau pour leur bonne humeur : merci à Kees, Audrey, Alain, Camille, Vincent, Elena et aussi Jean. Je me souviendrai des parties de football et des soirées aux bars avec Ambroise, Olivier, Aurélien, Fabien, Phillipe, Gilles et tous les autres. Une pensée également aux nouveaux doctorants : Romain, Simon, Amaury, Florian, Jérôme, Ranine, Stéphane et plein d'autres.

Je remercie ceux grâce à qui j'ai tant appris durant ma scolarité : mes camarades de l'ENS de Lyon et mes camarades de Prépa ainsi que mes professeurs.

Enfin je remercie mes parents et ma famille pour leur soutien et je les embrasse.

Table des matières

Introduction

1 Présentation des résultats

Soient F un corps ℓ-adique ou corps de nombres, Gal_F son groupe de Galois absolu, p un nombre premier et $\pi : \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{H}}$ un morphisme surjectif de groupes réductifs (éventuellement non connexe) sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de noyau $\mathcal{N}$ central de type multiplicatif.

$$1 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\pi} \overline{\mathcal{H}} \longrightarrow 1$$

On s'intéresse aux représentations p-adiques continues (pour la topologie p-adique) de Gal_F à valeurs dans des groupes algébriques linéaires vérifiant des conditions issues de la théorie de Hodge p-adique [Fon94a]. Pour deux représentations $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, on dira que ρ est un *relèvement* de $\overline{\rho}$ si la composée de ρ avec $\pi : \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{H}}$ est égale à $\overline{\rho}$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gal}_F \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\overline{\rho}"'] & \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \arrow[d, "\pi"] \\ & \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \end{tikzcd}$$

Il est connu que l'obstruction à pouvoir relever $\overline{\rho}$ à travers $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est un élément du groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ ([Ser79b]). Comme $\mathcal{N}$ est de type multiplicatif, c'est une suite d'extensions de tores et de groupes cycliques. L'étude de cette obstruction se divise donc naturellement en deux cas : celui où $\mathcal{N}$ est un tore et celui où $\mathcal{N}$ est un groupe cyclique. Dans le cas où $\mathcal{N}$ est un tore, on a le théorème suivant qui est une conséquence d'un théorème de J. Tate ([Ser77], Theorem 4).

Théorème 1.1 (Corollaire II.3.2) – *Si $\mathcal{N}$ est un tore, alors toute représentation $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ se relève en une représentation $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.*

Des contre-exemples simples montrent que ce résultat n'est plus vrai si $\mathcal{N}$ est un groupe fini (le corollaire IV.2.2 fournit de tels contre-exemples). Il faut alors imposer des conditions supplémentaires. On demandera au moins que *les obstructions locales sont nulles*, c'est-à-dire que la restriction de $\overline{\rho}$ à chaque groupe de décomposition se relève.

Si la représentation $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ vérifie des propriétés dites *locales*, alors on peut se demander s'il existe un relèvement vérifiant les mêmes propriétés. Si F est un corps ℓ-adique avec $\ell \neq p$, une propriété locale serait par exemple d'imposer que l'action de l'inertie I_F est triviale (représentation non-ramifiée) ou bien unipotente (représentation semi-stable). Si F est un corps p-adique, il y a des catégories de représentations p-adiques de F données par la théorie de

Fontaine : les représentations de Hodge-Tate, de Rham, semi-stables, potentiellement cristallines et cristallines. Dans ce cas, la question est : peut-on relever une représentation de Hodge-Tate (resp. de de Rham, semi-stable, cristalline) en une représentation de Hodge-Tate (resp. de de Rham, semi-stable, cristalline) ? Les cas semi-stable et cristallin ont étés traités par J-P. Wintenberger ([Win97], [Win95]) modulo une conjecture de Fontaine démontrée par P. Colmez et J-M. Fontaine dans [CF00]. Rappelons qu'à une $\mathbb{Q}_p$-représentation V de Hodge-Tate, il lui est associé une graduation sur $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K$. Cette graduation donne lieu à un sous-groupe à un paramètre $h_{\mathrm{HT}} : (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_{\mathbb{C}_K} \to (\mathrm{GL}_V)_{\mathbb{C}_K}$ défini par J-P. Serre dans [Ser79a]. Ce sous-groupe à un paramètre peut être aussi défini dans le cas où la représentation est à valeurs dans un groupe algébrique.

Théorème 1.2 ([Win95]) – *Soient F un corps p-adique et $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\mathbb{Q}_p)$ une représentation semi-stable (resp. cristalline). On note $\overline{h}_{\mathrm{HT}} : \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}_K} \to \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}_K}$ le sous-groupe à un paramètre associé à la décomposition de Hodge-Tate de $\overline{\rho}$. Alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement semi-stable (resp. cristallin) si et seulement si $\overline{h}_{\mathrm{HT}}$ se relève à $\mathcal{H}_{\mathbb{C}_K}$.*

Donc une condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation semi-stable/cristalline $\overline{\rho}$ se relève en une représentation semi-stable/cristalline est que la structure de Hodge-Tate de $\overline{\rho}$ se relève. Le problème de relèvement a été étudié récemment par B. Conrad [Con11] et S. Patrikis [Pat14]. Citons le résultat suivant de B. Conrad.

Théorème 1.3 ([Con11], Theorem 5.5) – *Soient S_{nr} et S_{mod} deux ensembles finis de places disjoints et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ non-ramifiée en S_{nr} et modérément ramifiée en S_{mod}. On note $n := \sharp(\mathcal{N}/\mathcal{N}^\circ)$ le nombre de composantes connexes de $\mathcal{N}$. Si on suppose qu'en toute place v, $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ admet un relèvement et si $(F, n, S_{\mathrm{nr}} \sqcup S_{\mathrm{mod}})$ n'est pas un cas spécial du théorème de Grunwald-Wang, alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement à $\mathcal{H}$ non-ramifié en S_{nr} et modérément ramifié en S_{mod}.*

Il y a aussi un résultat similaire en rajoutant des conditions en p ([Con11], Proposition 6.9). Le théorème montre donc que l'on peut relever en imposant des conditions en un nombre fini de places. On cherche à étendre ce résultat en imposant des conditions en presque toutes les places.

Dans cette thèse on traite le problème de relèvement dans le cas où F est un corps de nombres. Si F est un corps de nombres, on s'intéresse à des représentations *géométriques* au sens de Fontaine-Mazur [FM95] ainsi qu'à des représentations que l'on appellera *semi-stables* et *de bonne réduction*. La conjecture de Fontaine-Mazur prédit que les représentations géométriques sont celles qui proviennent de la cohomologie étale des variétés, à torsion près par une puissance du caractère cyclotomique. On dit que $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est géométrique (ou de de Rham) si ρ est non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places et de de Rham en toute les places p-adiques. On dit que ρ est *semi-stable* si elle est non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places, si pour toute place ℓ-adique v (avec $\ell \neq p$), la restriction à l'inertie I_{F_v} agit par des unipotents et si pour toute place p-adique v, la restriction à Gal_{F_v} est semi-stable. Enfin on dit qu'elle a *bonne réduction* si elle est non-ramifiée aux places non-archimédiennes ℓ-adiques premières à p et cristalline aux places divisant p. On définit la notion suivante sur les relèvements qui contrôle la ramification.

Définition 1.4 – Si $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est géométrique (resp. semi-stable) et si $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est un relèvement géométrique (resp. semi-stable), alors on dira que ρ est un *relèvement minimal* si pour toute place v non-archimédienne où $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ est de bonne réduction (i.e. non-ramifiée si $v \nmid p$ et cristalline si $v|p$), le relèvement ρ est aussi de bonne réduction en v.

À noter que tout relèvement de bonne réduction est automatiquement minimal. Moralement, un relèvement ρ de $\overline{\rho}$ est minimal s'il n'est pas 'plus ramifié' que $\overline{\rho}$. Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ géométrique. On étudie l'obstruction locale-globale à relever en une représentation géométrique minimale. Par 'locale-globale', on veut dire que l'on suppose que pour toute place v, la restriction de $\overline{\rho}$ au sous-groupe de décomposition Gal_{F_v} se relève en une représentation non-ramifiée ou de de Rham selon que v divise p ou non. On appelle cette condition 'l'obstruction locale'. L'étude du relèvement de la restriction $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_v}} : \mathrm{Gal}_{F_v} \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ dépend de la nature de la place v. Si v une place ℓ-adique, l'obstruction locale est l'obstruction à relever la représentation de Weil-Deligne. Si v est une place réelle, l'obstruction est de relever la conjugaison complexe, c'est-à-dire trouver un élément de $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ d'ordre 2 tel que l'image par π soit l'image de la conjugaison complexe par $\overline{\rho}$ (Proposition II.2.1). Si v est p-adique l'obstruction est de relever le sous-groupe à un paramètre $\overline{h}_{\mathrm{HT}}$ décrivant le structure de Hodge-Tate de $\overline{\rho}$, d'après un théorème de J-P. Wintenberger (Théorème 1.2/Théorème II.2.12).

Si les obstructions locales sont nulles, alors l'obstruction vit dans le sous-groupe de Tate-Shafarevich $\text{Ш}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)) \subset \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ qui est défini comme le noyau de la flèche de localisation

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)) \longrightarrow \prod_v \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_{F_v}, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)),$$

où v parcourt les places de F. Si $\mathcal{N}$ est fini, d'après le théorème de Grunwald-Wang et la dualité de Poitou-Tate, ce groupe est trivial sauf dans certains cas, appelés les *cas spéciaux* du théorème de Grunwald-Wang, auquel cas ce groupe est d'ordre 2. Si $\text{Ш}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ est nul, cela veut dire que $\overline{\rho}$ admet un relèvement global sous hypothèses que $\overline{\rho}$ admet des relèvements locaux.

L'idée générale pour construire des relèvements minimaux est la suivante. On part d'une représentation $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, disons géométrique, et on suppose que pour toute place v il existe un relèvement local $\rho_v : \mathrm{Gal}_{F_v} \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ vérifiant les bonnes conditions. Par le théorème de Tate ou de Grunwald-Wang, on dispose aussi d'un relèvement global $\tilde{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. Le point clef est alors de trouver un caractère $\chi : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $(\chi \cdot \tilde{\rho})_{\mathrm{I}_{F_v}} = \rho_v$ pour tout v. Ce qui revient à pouvoir *interpoler* les caractères locaux $\chi_v := \rho_v \cdot (\tilde{\rho}^{-1})_{|\mathrm{I}_{F_v}}$ en un caractère global.

Si $F = \mathbb{Q}$, alors d'après la théorie du corps de classes tout caractère de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$ est entièrement déterminé par sa restriction aux sous-groupes d'inertie. On montre que si les obstructions locales à relever une représentation géométrique/semi-stable/de bonne réduction sont nulles alors l'obstruction globale est nulle.

Théorème A (Théorème III.2.2) – *Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation géométrique (resp. semi-stable, resp. de bonne réduction). On suppose que les obstructions locales sont nulles, c'est-à-dire que :*

(i) À la place infinie, la conjugaison complexe se relève.

(ii) Pour toute place $v \nmid p$, la restriction $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v}}$ admet un relèvement.

(iii) En p, la restriction $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}}$ se relève en une représentation de Hodge-Tate.

Alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement géométrique (resp. semi-stable, resp. de bonne réduction) minimal.

Dans le cas où F n'est pas égal à $\mathbb{Q}$, la situation est moins favorable. Il y a des contre-exemples pour lesquels le théorème précédent est faux lorsque l'on remplace $\mathbb{Q}$ par un corps de nombres F (cf. Exemples IV.2.3 et IV.2.4). Il faut alors relâcher la condition de minimalité sur le relèvement. On peut procéder de deux façons.

1. La première est de considérer des relèvements minimaux en dehors d'un ensemble fini de places S, que l'on appellera relèvements *S-minimaux*.
2. La deuxième est de chercher un relèvement minimal quitte à restreindre $\overline{\rho}$ à un sous-groupe ouvert $\mathrm{Gal}_{F'}$, où F'/F est une extension finie 'pas trop ramifiée', que l'on appellera *relèvement potentiel*.

Nous donnons la définition suivante de *S-minimalité*.

Définition 1.5 – Soit S un ensemble fini de places de F et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation. Un relèvement $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est dit *S-minimal* si pour toute place $v \notin S$ tel que $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ est de bonne réduction, le relèvement $\rho_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ est aussi de bonne réduction.

Ainsi un relèvement S-minimal peut être ramifié en une place de S sans que $\overline{\rho}$ le soit. On montre le théorème suivant.

Théorème B (Théorèmes III.4.2 et III.4.3) – *Supposons que F est un corps quadratique imaginaire. Soit S un ensemble fini de places de F contenant l'ensemble S_p des places p-adiques. Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation géométrique non-ramifiée en dehors de S. On suppose que :*

(i) Pour tout $v|p$, $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ admet un relèvement de Hodge-Tate.

(ii) En posant $n := \sharp(\mathcal{N}/\mathcal{N}^0)$ le nombre de composantes connexes de $\mathcal{N}$, (F, n, S) n'est pas un cas spécial du théorème de Grunwald-Wang et n est premier avec le nombre de classes de F.

(iii) $S \setminus S_p$ contient une place v_0 telle que la caractéristique résiduelle de v_0 soit première à n et telle que $\sharp\mu_\infty(F_{v_0})/\mathcal{O}_F^+$ (les unités positives de F) soit premier à n.

Alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement géométrique S-minimal.

Des contre-exemples montrent que l'hypothèse que $S \setminus S_p \neq \emptyset$ est nécessaire (cf. Exemple IV.2.3). Cependant on peut raisonnablement conjecturer que le théorème reste vrai si on remplace F par n'importe quel corps de nombres. La preuve du théorème s'appuie sur un lemme d'interpolation de caractères locaux (Proposition III.3.1).

Dans le Chapitre 5 on s'intéresse aux relèvements de représentations de bonne réduction. Il faut toutefois s'autoriser à augmenter le corps F afin d'éviter des contres-exemples comme IV.2.3. On traite deux cas : le cas des représentations abéliennes et le cas des représentations ordinaires.

Théorème C (V.1.3) – *On suppose que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont des groupes réductifs abéliens connexes. Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation de bonne réduction. On suppose que pour toute place $v|p$ de F, le sous-groupe à paramètre de Hodge-Tate se relève. Alors il existe F'/F une extension finie non-ramifiée en dehors de p telle que $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F'}}$ se relève en une représentation de bonne réduction.*

La preuve de ce théorème s'appuie sur la classification des représentations abéliennes de bonne réduction en fonction des représentations du groupe de Serre (Proposition V.1.1).

Pour K un corps p-adique, une représentation $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{H}(\mathbb{Q}_p)$ sera dite *ordinaire* si pour toute représentation linéaire $\mathcal{H} \to \mathrm{GL}_V$, il existe un drapeau $V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n$ stable par Gal_K tel que I_K agit sur V_i/V_{i+1} par $\mathrm{Cycl}_p^{a_i}$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ tel que $a_{i+1} > a_i$. Une représentation du groupe de Galois d'un corps global F sera dite *ordinaire* si la restriction aux sous-groupes de décompositions p-adiques sont ordinaires. Cette définition s'étend au cas des représentations avec coefficients.

Théorème D (V.2.7) – *On suppose que $\mathcal{N}$ est fini d'ordre premier à p. Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation de bonne réduction ordinaire. On suppose que pour tout $v|p$, le sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate se relève. Alors il existe une extension finie F'/F non-ramifiée en dehors de p tel que $\overline{\rho}_{\mathrm{Gal}_{F'}}$ admet un relèvement de bonne réduction ordinaire.*

2 Plan

Dans le chapitre 1, on rappelle des notions sur les représentations Galoisiennes dont la théorie de Hodge p-adique de Fontaine ainsi que la théorie des représentations abéliennes via le tore de Serre. Dans le chapitre 2, on explique la notion de relèvement et la construction de l'obstruction relever. On rappelle aussi le théorème de Tate et le théorème de Wintenberger. Dans le chapitre 3, on introduit la notion de relèvement minimal et S-minimal et on présente les premiers résultats. Dans le chapitre 4, on donne quelques exemples et contre-exemples de relèvements. Enfin dans le chapitre 5, on définit la catégorie des représentations ordinaires, on énonce et démontre les théorèmes C et D sur les relèvements de bonnes réductions.

3 Notations et conventions

Dans tout le texte on utilise les notations suivantes (que l'on rappellera parfois).

F désigne un corps de nombres, $\mathcal{O}_F$ son anneau des entiers et $\mathcal{O}_F^+$ les unités totalement positifs (l'ensemble des $x \in \mathcal{O}_F^\times$ tel que pour toute place infinie réelle v, x est dans la composante connexe de $(F_v)^\times$) On choisit $\overline{F}$ une clôture algébrique et on note Gal_F le groupe de Galois de

$\overline{F}/F$ et I_K le sous-groupe d'inertie. Pour toute place v de F, on se fixe un prolongement de v à $\overline{F}$ et on note $\mathrm{Gal}_{F_v} \subset \mathrm{Gal}_F$ le sous-groupe de décomposition associée à ce prolongement.

p est un nombre premier fixé et on choisit $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. ℓ désignera un nombre premier généralement différent de p. Le corps des coefficients des représentations Galoisiennes que l'on considère sera $\mathbb{Q}_p$, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ou une extension L de $\mathbb{Q}_p$.

K désigne un corps p-adique ou ℓ-adique. On note $\mathrm{rec}_K : K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}_K^{\mathrm{ab}}$ l'application de réciprocité d'Artin de la théorie du corps de classes. Les représentations Galoisiennes seront des représentations de Gal_K dans le cas local ou de Gal_F dans le cas global.

$\mathcal{G}$ est un groupe algébrique abstrait. Tous les groupes algébriques considérés sont linéaires. $\mathcal{H}$ et $\overline{\mathcal{H}}$ sont des groupes algébriques réductifs, $\pi : \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{H}}$ un morphisme de groupes algébriques de noyau $\mathcal{N}$ central de type multiplicatif.

Les représentations $\mathrm{Gal}_F \to \mathcal{G}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ sont considérées comme continues pour la topologie p-adique.

Une extension d'un corps sera toujours sous-entendu incluse dans une clôture algébrique déjà fixée.

Chapitre I

I – Notions sur les représentations Galoisiennes

I.1 Représentations de Weil-Deligne ℓ-adiques

On rappelle ici la classification des représentations ℓ-adiques d'un corps p-adique, avec $\ell \neq p$, par les représentations de Weil-Deligne. On énonce les résultats dans le cas où le corps des coefficients de la représentation est $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et où la représentation est à valeurs dans un groupe algébrique $\mathcal{H}$.

Soient K un corps p-adique, ℓ un nombre premier différent de p et $\mathcal{H}$ un groupe algébrique linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. On rappelle qu'un élément $u \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est dit unipotent si pour toute représentation algébrique (ou de façon équivalente pour une représentation algébrique fidèle) $\mathcal{H} \to \mathrm{GL}_n$, l'image de u dans $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ a toute ses valeurs propres égales à 1. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. On notera $\mathrm{Gal}_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe de Galois absolu de K et $\mathrm{I}_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K^{\mathrm{nr}})$ le sous-groupe d'inertie.

Une représentation ρ de Gal_K à valeurs dans $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est un morphisme de groupe $\mathrm{Gal}_K \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ continue pour la topologie p-adique de $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, c-à-d que pour tout ϕ dans l'anneau de coordonnées de $\mathcal{H}$ la composée $\phi \circ \rho : \mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ est continue. Cela revient à dire que pour une représentation fidèle $r : \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, $r \circ \rho$ est continu.

Définition I.1.1 – Soit $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ une représentation.

1. On dit que ρ a *bonne réduction* (ou est *non-ramifiée*) si l'inertie I_K agit trivialement.
2. On dit que ρ est *semi-stable* si l'inertie I_K agit par des unipotents.
3. On dit que ρ est *potentiellement semi-stable* s'il existe un ouvert de I_K qui agit par des unipotents. Cela revient à dire qu'il existe une sous-extension finie L/K de $\overline{K}$ tel que I_L agisse par des unipotents.

On note q le cardinal du corps résiduel de K et $\mathrm{W}_K := \{\sigma \in \mathrm{Gal}_K | \deg_q \sigma \in \mathbb{Z}\}$ le groupe de Weil de K où $\deg_q \sigma$ est l'entier profini tel que $(\sigma \mod \mathrm{I}_K) = \mathrm{Frob}_q^{\deg_q \sigma}$. Le groupe W_K contient alors I_K et on le munit de la topologie telle que I_K muni de sa topologie usuelle soit un sous-groupe ouvert. L'inclusion $\mathrm{W}_K \to \mathrm{Gal}_K$ est alors continue, mais la topologie sur W_K ne coïncide pas avec la topologie de Gal_K restreinte à W_K.

Définition I.1.2 – Une *représentation de Weil-Deligne* de Gal_K à valeurs dans $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est la donnée :

(i) D'une représentation $\rho_{\mathrm{WD}} : \mathrm{W}_K \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ continue pour la topologie discrète de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, c'est-à-dire que le noyau contient un sous-groupe ouvert de I_K.

(ii) Et d'un endomorphisme $N \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{Lie}(\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)))$ nilpotent.

satisfaisant la condition

$$\mathrm{Ad}(\rho(\sigma)) \circ N = q^{\deg_q \sigma} \cdot N \quad (\forall \sigma \in \mathrm{W}_K), \tag{I.1}$$

où $\mathrm{Ad} : \mathcal{H} \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(\mathcal{H}))$ est la représentation adjointe de $\mathcal{H}$.

À une représentation ℓ-adique $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, on lui associe une représentation de Weil-Deligne de la façon suivante (voir le chapitre 7 de [BH06] pour les détails). On se fixe $t : \mathrm{I}_K \to \mathbb{Z}_\ell$ un caractère continu surjectif (un tel caractère est unique modulo un élément de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_\ell) = \mathbb{Z}_\ell^\times$ et est donné par la projection de I_K sur son pro-ℓ-quotient). Le théorème de monodromie de Grothendieck (voir [Ill94]) montre que ρ est potentiellement semi-stable. Cela implique qu'il existe un sous-groupe ouvert $U \subset \mathrm{I}_K$ et un nilpotent N tel que

$$\rho(\sigma) = \exp(t(\sigma)N) \quad (\forall \sigma \in U),$$

et

$$\mathrm{Ad}(\rho(\sigma)) \circ N = q^{\deg_q \sigma} \cdot N \quad (\forall \sigma \in \mathrm{W}_K),$$

Fixons $\Phi \in \mathrm{W}_K$ un Frobenius. On définit alors $\rho_{\mathrm{WD}} : \mathrm{W}_K \to \mathcal{H}(\mathbb{Q}_\ell)$ par

$$\rho_{\mathrm{WD}}(\Phi^a \sigma) := \rho(\Phi^a \sigma).\exp(-t(\sigma).N), \quad a \in \mathbb{Z},\ \sigma \in \mathrm{I}_K.$$

La donnée de (ρ_{WD}, N) fournit la représentation de Weil-Deligne associée à ρ. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation de Weil-Deligne proviennent d'une représentation Galoisienne.

Théorème I.1.3 ([Fon94b], Prop. 1.3.3 et Prop. 2.3.4) – *Soit (ρ_{WD}, N) une représentation de Weil-Deligne. Alors (ρ_{WD}, N) provient d'une représentation galoisienne (potentiellement semi-stable) si et seulement si l'image $\rho_{\mathrm{WD}}(\mathrm{W}_K)$ est relativement compacte.*

Si (ρ_{WD}, N) est une représentation de Weil-Deligne à image relativement compacte, alors on retrouve alors la représentation Galoisienne ρ via la formule suivante :

$$\rho(\Phi^a \sigma) := \rho_{\mathrm{WD}}(\Phi)^a.\rho_{\mathrm{WD}}(\sigma).\exp(t(\sigma)N) \quad (\forall a \in \hat{\mathbb{Z}},\ \forall \sigma \in \mathrm{I}_K).$$

En particulier, la représentation ρ est semi-stable si et seulement si sa représentation de Weil-Deligne (restreinte au groupe de Weil) est non-ramifiée, et ρ est non-ramifée si et seulement si sa représentation de Weil-Deligne est non-ramifiée et $N = 0$.

I.2 Théorie de Hodge p-adique

I.2.A Classification des représentations p-adiques

Soient K un corps p-adique, $\overline{K}$ une clôture algébrique, K_0 le sous-corps de $\overline{K}$ maximal non-ramifié sur K et $\mathbb{C}_K$ la complétion de $\overline{K}$. On note $B_{\mathrm{cris}} \subset B_{\mathrm{st}} \subset B_{\mathrm{dR}}$ et $B_{\mathrm{HT}} \cong \mathrm{Grad}(B_{\mathrm{dR}})$ les anneaux de Fontaine usuels (voir [Fon94a] pour leurs définitions). On rappelle brièvement leurs structures.

- B_{dR} est une K_0-algèbre à division filtrée.
- B_{HT} est l'algèbre graduée de B_{dR}. On peut identifier B_{HT} à $\mathbb{C}_K[t,t^{-1}]$ en tant que $\mathbb{C}_K$-algèbre.
- B_{st} est une sous K_0-algèbre de B_{dR} muni d'un Frobenius semi-linéaire ϕ et d'un endomorphisme nilpotent N, appelé la monodromie, vérifiant $N\phi = p\phi N$.
- B_{cris} est la sous-K_0-algèbre ${B_{\mathrm{st}}}^{N=0}$.

Toutes ces algèbres sont munies d'une action naturelle de Gal_K compatible avec leurs structures.

Définition I.2.1 – Soient V un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie et $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathrm{GL}_V(\mathbb{Q}_p)$ une $\mathbb{Q}_p$-représentation de Gal_K. On dit que ρ est *de Hodge-Tate* si la B_{HT}-représentation $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{HT}$ est triviale, c-à-d si le morphisme

$$(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{HT}})^{\mathrm{Gal}_K} \otimes_K B_{\mathrm{HT}} \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{HT}}.$$

est surjective (elle est toujours injective). On définit de manière similaire les représentations *de de Rham*, *semi-stables* et *cristallines* en remplaçant B_{HT} respectivement par B_{dR}, B_{st} et B_{cris}.

Pour $* \in \{\mathrm{HT}, \mathrm{dR}, \mathrm{st}, \mathrm{cris}\}$ et V une $\mathbb{Q}_p$-représentation Gal_K, on note le foncteur de Fontaine

$$D_*(V) := (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_*)^{\mathrm{Gal}_K}.$$

La représentation V est alors $*$ si et seulement si $\dim_K D_*(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Les représentations de Hodge-Tate, de de Rham, semi-stables et cristallines sont classées selon la hiérarchie suivante :

$$\text{Cristalline} \Longrightarrow \text{Semi-stable} \Longrightarrow \text{de Rham} \Longrightarrow \text{Hodge-Tate}$$

La notion de représentation de Hodge-Tate admet l'interprétation suivante qui donne lieu à la *structure de Hodge-Tate* et de *sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate*. Si (V, ρ) est une $\mathbb{Q}_p$-représentation de Gal_K, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note

$$V\{k\} := \Big\{x \in V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K \mid \forall \sigma \in \mathrm{Gal}_K, \quad \rho(g) \cdot x = \mathrm{Cycl}_p(\sigma)^k x\Big\},$$

où Cycl_p est le caractère cyclotomique p-adique. C'est un K-espace vectoriel de dimension finie sur lequel Gal_K agit par le caractère ${\mathrm{Cycl}_p}^k$. La représentation V est alors de Hodge-Tate si et seulement si le morphisme naturel de $\mathbb{C}_K$-représentations

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (V\{k\} \otimes_K \mathbb{C}_K) \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K$$

est un isomorphisme (elle est toujours injective d'après [Ser67], Proposition 4). Cette décomposition s'appelle la *structure de Hodge-Tate* de V et les entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $V\{k\} \neq 0$ s'appellent les *poids de Hodge-Tate* de V. L'espace $D_{\mathrm{HT}}(V)$ est naturellement gradué et la graduation s'identifie à

$$D_{\mathrm{HT}}(V) \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V\{k\}.$$

L'espace $D_{\mathrm{dR}}(V)$ est naturellement filtré et a pour espace gradué $D_{\mathrm{HT}}(V)$. L'ensemble des poids de Hodge-Tate de V est donc aussi l'ensemble des sauts de la filtration de $D_{\mathrm{dR}}(V)$.

À une représentation $\mathrm{Gal}_K \to \mathrm{GL}_V(\mathbb{Q}_p)$ de Hodge-Tate, on lui associe ([Ser79a] 1.4) un *sous-groupe à un paramètre* $h_{\mathrm{HT}} : \mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbb{C}_K} \to \mathrm{GL}_{V/\mathbb{C}_K}$ défini de la façon suivante : pour tout $\lambda \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}_K)$ et $x \in V\{k\} \otimes_K \mathbb{C}_K$, on pose $h_{\mathrm{HT}}(\lambda)\cdot x := \lambda^k x$. On appelle h le *sous-groupe à un paramètre associée à la décomposition de Hodge-Tate* de V.

Indiquons pour terminer la proposition suivante qui montre que les propriétés semi-stable et cristalline ne dépendent que de la restriction à l'inertie.

Proposition I.2.2 ([Fon94c], Prop. 5.1.5) – *Une représentations p-adique ρ de Gal_K est semi-stable (resp. cristalline) si et seulement si $\rho_{|\mathrm{I}_K}$ est semi-stable (resp. cristalline) en tant que représentation de I_K, c'est-à-dire si*

$$\dim_{\widehat{K^{\mathrm{nr}}}}(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_*)^{\mathrm{I}_K} = \dim_{\mathbb{Q}_p} V \quad (* = \mathrm{st}, \mathrm{cris}).$$

Cette proposition implique que si ρ et ρ' sont deux représentations telles que ρ est semi-stable/cristalline et telles que $\rho_{|\mathrm{I}_K} = \rho'_{|\mathrm{I}_K}$, alors ρ' est semi-stable/cristalline.

I.2.B Théorie de Hodge à coefficients

Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ munie de l'action triviale de Gal_K que l'on appelle *corps des coefficients* des représentations. On se fixe $\overline{L}$ une clôture algébrique de L et on note $\mathrm{Gal}_L := \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$. Pour tout $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \overline{L})$, on note $L(\sigma) \subset \overline{L}$ l'image du morphisme

$$\begin{array}{ccc} L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K & \longrightarrow & \overline{L} \\ \lambda \otimes x & \longmapsto & \lambda\sigma(x) \end{array}.$$

Cela muni $L(\sigma)$ d'une structure de $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-algèbre. Si $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \overline{L})$ sont tels qu'il existe $\tau \in \mathrm{Gal}_L$ vérifiant $\sigma' = \tau \circ \sigma$, alors τ induit un isomorphisme $L(\sigma) \xrightarrow{\sim} L(\sigma')$ de $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-algèbres et de plus cet isomorphisme est indépendant de τ. On a de plus un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Gal}_L \backslash \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \overline{L})} L(\sigma) \\ \lambda \otimes x & \longmapsto & \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Gal}_L \backslash \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \overline{L})} \lambda\sigma(x) \end{array},$$

où σ parcourt un ensemble de représentants de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \overline{L})$ modulo l'action de Gal_L. Dans la suite, pour alléger les notations, on notera parfois $L \otimes K$ pour $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$

Soit $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathrm{GL}_V(L)$ une représentation L-linéaire (c-à-d que V est un L-espace vectoriel de dimension finie). On peut considérer V comme une $\mathbb{Q}_p$-représentation en oubliant la structure L-linéaire de V. Alors $D_{\mathrm{dR}}(V) := (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{Gal}_K}$ est un $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-module filtré et pour tout σ, $D_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} L(\sigma)$ est un $L(\sigma)$-module filtré.

Définition I.2.3 – On dit que V est de *de Rham* si $D_{\mathrm{dR}}(V)$ est un $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-module libre de rang $\dim_L V$. Pour tout $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \overline{L})$, ses poids de *Hodge-Tate relatifs* à σ sont les sauts de la filtration de $D_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{L\otimes K} L(\sigma)$, c'est-à-dire l'ensemble des $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\mathrm{Fil}^k\big(D_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{L\otimes K} L(\sigma)\big) \neq \mathrm{Fil}^{k+1}\big(D_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{L\otimes K} L(\sigma)\big).$$

On notera $\mathrm{HT}(\sigma)$ l'ensemble des poids de Hodge-Tate avec multiplicité relatifs à σ.

Remarques I.2.4 – Soit V une L-représentation.

1. Si $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \overline{L})$ sont dans la même orbite par Gal_L, alors comme $L(\sigma)$ et $L(\sigma')$ sont isomorphes en tant que $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-algèbre, les poids de Hodge-Tate relatifs à σ et σ' sont les mêmes.
2. Si V provient d'une $\mathbb{Q}_p$-représentation W, c-à-d si $V = L \otimes_{\mathbb{Q}_p} W$, alors V est de de Rham si et seulement si W est de de Rham, auquel cas leurs poids de Hodge-Tate sont les mêmes. En effet, on a
$$(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{Gal}_K} = (L \otimes_{\mathbb{Q}_p} W \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{Gal}_K}$$
et donc $D_{\mathrm{dR}}(V) = L \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_{\mathrm{dR}}(W)$.
3. Plus généralement, si V est une L-représentation et si L'/L est une extension finie, alors V est de de Rham si et seulement si $V' := V \otimes_L L'$ est de de Rham (en tant que L'-représentation). De plus, pour $\sigma' : K \to \overline{L'} = \overline{L}$, les poids de Hodge-Tate de V' relativement à σ' sont égaux aux poids de Hodge-Tate de V relativement à σ'.
4. Si B est de Hodge-Tate, les poids de Hodge-Tate de V en tant que $\mathbb{Q}_p$-représentation est la réunion $\bigcup_\sigma \mathrm{HT}(\sigma)$ des poids de Hodge-Tate avec coefficients.

Définition I.2.5 – Soit V un L-espace vectoriel de dimension finie et $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathrm{GL}_V(L)$ une L-représentation de Gal_K. Pour $* \in \{\mathrm{HT}, \mathrm{dR}, \mathrm{st}, \mathrm{cris}\}$, on dit que ρ est $*$ si la $B_* \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$-représentation $V \otimes_L (B_* \otimes_{\mathbb{Q}_p} L) = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_*$ est triviale, c-à-d si

$$[V \otimes_L (B_* \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)]^{\mathrm{Gal}_K} \otimes_{K\otimes L} B_* \cong V \otimes_L (B_* \otimes_{\mathbb{Q}_p} L).$$

On définit, de la même manière que dans le paragraphe précédent, le foncteur de Fontaine :

$$D_*(V) := (V \otimes_L (B_* \otimes_{\mathbb{Q}_p} L))^{\mathrm{Gal}_K} = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_*)^{\mathrm{Gal}_K}.$$

C'est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension $\leq [K : \mathbb{Q}_p].\dim_{\mathbb{Q}_p} V$ et V a la propriété $*$ si et seulement si il y a égalité, auquel cas c'est un $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$-module libre de rang $\mathrm{rank}_{K\otimes_{\mathbb{Q}_p} L}(D_*(V)) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. La famille de *sous-groupes à un paramètre de Hodge-Tate* $(h_{\mathrm{HT}}(\sigma))_\sigma$ est définie de la façon suivante. Soit $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \overline{L})$.

Supposons que V est de Hodge-Tate. Comme précédemment, l'espace $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K$ est gradué par

$$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V\{k\} \otimes_K \mathbb{C}_K, \tag{I.2}$$

où l'on rappelle que

$$V\{k\} := \{x \in V \otimes_L (L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K) \mid \forall g \in \mathrm{Gal}_K, \quad \rho(g)x = \mathrm{Cycl}_p(g)^k x\}.$$

En identifiant $V \otimes_L (L(\sigma) \otimes_K \mathbb{C}_K)$ à $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K) \otimes_{L\otimes K} L(\sigma)$ et appliquant l'opérateur $\cdot \otimes_{L\otimes K} L(\sigma)$ dans l'équation (I.2), on obtient la graduation

$$V \otimes_L (L(\sigma) \otimes_K \mathbb{C}_K) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (V\{k\} \otimes_K \mathbb{C}_K) \otimes_{L\otimes K} L(\sigma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (V\{k\} \otimes_{L\otimes K} L(\sigma)) \otimes_K \mathbb{C}_K. \quad \text{(I.3)}$$

Le module gradué $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V\{k\} \otimes_{L\otimes K} L(\sigma)$ est isomorphe canoniquement à

$$D_{\mathrm{HT}}(V) \otimes_{L\otimes K} L(\sigma) \cong \mathrm{Grad}(D_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{L\otimes K} L(\sigma)).$$

Les poids de Hodge-Tate sont alors les entiers $k \in \mathbb{Z}$ tel que $V\{k\} \otimes_{L\otimes \mathbb{Q}_p} L(\sigma) \neq 0$. On définit le *sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate* relativement à σ, $h_{\mathrm{HT}}(\sigma) : \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}_K) \longrightarrow \mathrm{GL}_V(L(\sigma) \otimes_K \mathbb{C}_K)$, comme étant le sous-groupe à paramètre associée à la graduation de l'équation (I.3). Si on considère V comme un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, alors on a un sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate sans coefficients

$$h_{\mathrm{HT}} : \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}_K) \to \mathrm{GL}_V(L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K) = \mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{GL}_V(\mathbb{C}_K).$$

Le sous-groupe à un paramètre avec coefficient $h_{\mathrm{HT}}(\sigma)$ n'est alors autre que h_{HT} composé avec la projection naturelle $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K \to L(\sigma) \otimes_K \mathbb{C}_K$.

Dans le cas où le corps des coefficients L est $\overline{\mathbb{Q}}_p$ (ou une extension algébrique infinie de $\mathbb{Q}_p$), on peut se ramener au cas d'une extension finie, car toute $\overline{\mathbb{Q}}_p$-représentation admet une L-structure stable (voir ([BM02], Lemme 2.2.1.1) ou ([Ski09], p.244)). À noter que la filtration sur $D_{\mathrm{dR}}(V)$ (et la graduation sur D_{HT}) ne se fait pas en $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-modules libres, ce qui implique que les sauts de la filtration sur $D_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{L\otimes K} L(\sigma)$ dépendent bien de σ.

Exemple I.2.6 – Soient $K/\mathbb{Q}_p$ et $L/\mathbb{Q}_p$ tels que K contient tous les $\mathbb{Q}_p$-plongements de L. On se donne α_0 un $\mathbb{Q}_p$-plongement de $L \to K$, ce qui donne une application restriction $\mathrm{Gal}_K \to \mathrm{Gal}_L$. D'autre part, en choisissant une uniformisante de π_L de L, la théorie du corps de classes fournit une représentation $\mathrm{Gal}_L \to \mathcal{O}_L^\times$ (la représentation sur le module de Tate de la loi de groupe formelle du Lubin-Tate associé à π_L (cf. [Mil11b], Chapter I)). On considère la représentation $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{O}_L^\times \subset \mathrm{GL}_1(L)$ en composant ces deux applications. D'après ([Ser98], Chapter III, A1), comme K contient tous les $\mathbb{Q}_p$-plongements de L, la graduation de Hodge-Tate sur $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K$ de ρ agissant sur L provient de la graduation

$$L \otimes K = \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L,K)} K(\alpha)$$

où $K(\alpha) = \{w \in L \otimes K \mid \forall x \in L, x.w = \alpha(x).w\}$ (c'est un K-espace vectoriel de dimension 1). De plus le sous-espace $K(\alpha_0)$ est de poids 1 et l'espace $K(\alpha)$, pour $\alpha \neq \alpha_0$, est de poids

0 ([Ser98], Chapter 3, A1, Theorem 2). Donc HT $= \{0,1\}$ avec 1 de multiplicité 1 et 0 de multiplicité $[K:\mathbb{Q}_p]-1$. Soit $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K,\overline{L})$. La graduation sur $L(\sigma)$ est alors

$$L(\sigma) = \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L,K)} K(\alpha)\otimes_{L\otimes K} L(\sigma).$$

On rappelle qu'il y a une bijection ${}_{\mathrm{Gal}_L}\backslash \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K,\overline{L}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L,K)$ (plus généralement, pour deux extensions algébriques $K/\mathbb{Q}_p$, $L/\mathbb{Q}_p$, il y a une bijection ${}_{\mathrm{Gal}_L}\backslash \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K,\overline{L}) \simeq {}_{\mathrm{Gal}_K}\backslash \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L,\overline{K})$ telle que deux plongements $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L,\overline{K})$ et $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K,\overline{L})$ correspondent si et seulement s'il existe un isomorphisme $\tau : \overline{L} \xrightarrow{\sim} \overline{K}$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr] & \overline{L} \arrow[d, "\tau"] & \\ & \overline{K} & L \arrow[l, "\alpha"] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

commute, auquel cas on a $K(\alpha) = L(\sigma)$).

Or $\dim_K(K(\alpha)\otimes_{L\otimes K} L(\sigma))$ vaut 1 si $\sigma\circ\alpha_0 = \mathrm{Id}_L$ et vaut 0 sinon (cela vient du fait que $K(\sigma) = L(\alpha)$ si et seulement si $\sigma\circ\alpha = \mathrm{Id}_L$).

I.2.C Théorie de Hodge dans des groupes algébriques

Soit $\mathcal{G}$ un groupe algébrique linéaire sur L. Pour une représentation $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{G}(L)$ continue, on définit les notions de Hodge-Tate, de de Rham, semi-stable et ristalline de la façon suivante.

Définition I.2.7 – Pour $* \in \{\mathrm{HT}, \mathrm{dR}, \mathrm{st}, \mathrm{cris}\}$, on dit que ρ est $*$ si pour toute représentation algébrique linéaire $\iota : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}_V$, la représentation $\iota\circ\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathrm{GL}_V(L)$ est $*$ au sens classique.

Il suffit en fait de vérifier la condition seulement pour une représentation fidèle $\iota_0 : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}_V$. En effet si $\iota_0 : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}_V$ est une représentation linéaire fidèle de $\mathcal{G}$, alors toute autre représentation linéaire $\iota : \mathcal{G} \to W$ est une sous-représentation d'une somme directe $\bigoplus_i V^{\otimes n_i} \otimes (V^*)^{\otimes m_i}$ pour certains $n_i, m_i \in \mathbb{N}$ (d'après ([Del81], Prop. 3.1) ou bien ([DM81], Prop. 2.20)). Or la catégories des représentations qui sont $*$ est stable par dualité, produit tensoriel et sous-objets. Donc si V est $\iota_0\circ\rho$ est $*$ alors $\iota\circ\rho$ est aussi $*$.

Soit $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{G}(L)$ une représentation de Hodge-Tate. Dans le cas où $L = \mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} = (\mathrm{GL}_V)_{\mathbb{Q}_p}$, si on note $\mathcal{H}^{\mathrm{Zar}}$ l'adhérence de Zariski de l'image de ρ dans GL_V, alors le sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate $h_{\mathrm{HT}} : \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}_K) \to \mathrm{GL}_V(\mathbb{C}_K)$ de ρ est à valeurs dans $\mathcal{H}^{\mathrm{Zar}}(\mathbb{C}_K)$ ([Ser79a], p.159). De même dans le cas avec coefficient, si $\mathcal{G}_{/L} = (\mathrm{GL}_V)_{/L}$, pour $\mathcal{H}^{\mathrm{Zar}}$ l'adhérence de Zariski de $\rho(\mathrm{Gal}_K)$, le sous-groupe à paramètre de Hodge-Tate h_{HT} est à valeurs dans $\mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{H}^{\mathrm{Zar}}(\mathbb{C}_K)$ et les sous-groupes à un paramètre de Hodge-Tate avec coefficients $(h_{\mathrm{HT}}(\sigma))_{\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K,\overline{L})}$ sont à valeurs dans $\mathcal{H}^{\mathrm{Zar}}(L(\sigma)\otimes_K \mathbb{C}_K)$. Dans le cas général où $\mathcal{G}_{/L}$ est un groupe algébrique quelconque, si $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{G}(L)$ est une représentation de Hodge-Tate, alors il existe un unique sous-groupe à paramètre

$$h_{\mathrm{HT}} : \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}_K) \to \mathcal{G}(L(\sigma)\otimes_K \mathbb{C}_K) = \mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{G}(\mathbb{C}_K).$$

tel que pour tout $\iota : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}_V$, la composée $\iota \circ h_{\mathrm{HT}}$ soit le sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate de la représentation linéaire $\iota \circ \rho$. De même pour tout $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \overline{L})$ il existe un unique sous-groupe à paramètre

$$h_{\mathrm{HT}}(\sigma) : \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}_K) \to \mathcal{G}(L(\sigma) \otimes_K \mathbb{C}_K)$$

tel que pour tout $\iota : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}_V$, la composée $\iota \circ h_{\mathrm{HT}}(\sigma)$ soit le sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate de la représentation linéaire $\iota \circ \rho$ associé au plongement σ. Notons que l'on peut voir $h_{\mathrm{HT}}(\sigma)$ comme un sous-groupe à un paramètre à valeurs dans $\mathcal{G}^\sigma(\mathbb{C}_K)$, avec $\mathcal{G}^\sigma{}_{/K} = \mathrm{Res}_K^{L(\sigma)}(\mathcal{G} \otimes_L L(\sigma))$. Si on change L par L' une extension de L, alors on change h_{HT} en composant par l'application naturelle $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathcal{G}_{/L} \to \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}^{L'} \mathcal{G}_{/L'}$.

Exemple I.2.8 – Soit la représentation $\rho : \mathrm{Gal}_K \to L^\times$ associée à un plongement $\alpha_0 : L \to K$ de l'exemple I.2.6. Alors on peut voir ρ comme à valeurs dans $T_L(\mathbb{Q}_p)$, où $T_L = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. Par définition de ρ, on a

$$\forall x \in \mathcal{O}_K, \quad \rho(\mathrm{rec}_K(x)) = \mathrm{Nm}(x),$$

où $\mathrm{rec}_K : K^\times \to \mathrm{Gal}_K^{\mathrm{ab}}$ est l'application de réciprocité et Nm est la norme de K à L. Les tores T_K et T_L sont déployés sur $\mathbb{C}_K$ (et même sur K par hypothèse sur L et K) et on a les isomorphismes canoniques

$$(T_K)_{\mathbb{C}_K} \simeq \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \mathbb{C}_K)} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}, \quad (T_L)_{\mathbb{C}_K} \simeq \prod_{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L, \mathbb{C}_K)} \mathbb{G}_{\mathrm{m}},$$

La norme définit un morphisme de groupes algébriques $T_K \to T_L$ donnée par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Nm} : & T_K(\mathbb{C}_K) & \longrightarrow & T_L(\mathbb{C}_K) \\ & (x_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \mathbb{C}_K)} & \longmapsto & (\prod_{\sigma, \alpha = \sigma \circ \alpha_0} x_\sigma)_{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L, \mathbb{C}_K)} \end{array}$$

De plus le tore $T_L(\mathbb{C}_K)$ agit de façon diagonalisable sur $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K$ avec pour sous-espace propres $K(\alpha) \otimes_K \mathbb{C}_K (\simeq \mathbb{C}_K)$, avec $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L, \mathbb{C}_K)$, et caractère $T_L \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}, \underline{x} \mapsto x_\alpha$. En particulier, le sous-groupe à paramètre de Hodge-Tate $h_{\mathrm{HT}} : \mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbb{C}_K} \to (T_L)_{/\mathbb{C}_K}$ est la composée de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbb{C}_K} \to (\mathbb{T}_K)_{/\mathbb{C}_K}$, donné par $\sigma =$ 'plongement naturel' et la norme.

I.3 Représentations abéliennes localement algébriques

On rappelle ici la description de certaines représentations Galoisiennes abéliennes géométriques en terme des représentations du groupe algébrique $S_{F,\mathfrak{m}}$ définit par J-P. Serre dans [Ser98].

I.3.A Cas de groupes de Galois locaux

Soit K un corps local. On définit le groupe algébrique $(T_K)_{/\mathbb{Q}_p}$ par la restriction à la Weil : $(T_K)_{/\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}^K \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. En particulier on a $T_K(\mathbb{Q}_p) = K^\times$ et $T_K(\overline{\mathbb{Q}_p}) = (K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p)^\times \simeq$

$\prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K,\overline{\mathbb{Q}}_p)}\overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$. On rappelle que par la théorie du corps de classes, il y a une injection $K^\times \to \mathrm{Gal}_K^{\mathrm{ab}}$ continue d'image dense envoyant toute uniformisante sur un Frobenius.

Définition I.3.1 – Soit $\rho : \mathrm{Gal}_K^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{GL}_V(\mathbb{Q}_p)$ une représentation galoisienne abélienne. On dit que ρ est *localement algébrique* s'il existe une représentation algébrique $r : T_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_{V\,\mathbb{Q}_p}$ et un sous-groupe ouvert $U \subset T(\mathbb{Q}_p) = K^\times$ tel que

$$\forall x \in U, \quad \rho(\mathrm{rec}_K(x)) = r(x).$$

Auquel cas, la représentation r est unique et on l'appellera la *représentation algébrique associée à ρ.*

J-P. Serre montre alors une équivalence entre les représentations localement algébrique et les représentation de Hodge-Tate abéliennes.

Théorème I.3.2 ([Ser98], Chap. III, Thm. 1.2) – *Soit $\rho : \mathrm{Gal}_K^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{GL}_V(\mathbb{Q}_p)$ une représentation abélienne p-adique de $K/\mathbb{Q}_p$. Les propositions suivantes sont équivalentes*

(*i*) *ρ est localement algébrique.*

(*ii*) *ρ est de Hodge-Tate et sa restriction à l'inertie est semi-simple (c-à-d que l'image est formée d'éléments semi-simples).*

Soient $\rho : \mathrm{Gal}_K^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{GL}_V(\mathbb{Q}_p)$ une représentation localement algébrique (et donc de Hodge-Tate) et $r : T_K \to \mathrm{GL}_V$ sa représentation algébrique. La preuve du théorème ([Ser98], Chap. III, Appendix) montre de plus que le sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate h_{HT} de ρ est la composée de $r : T_K(\mathbb{C}_K) \to \mathrm{GL}_V(\mathbb{C}_K)$ avec le sous-groupe à paramètre $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}_K) \to T_K(\mathbb{C}_K) \cong \prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K,\mathbb{C}_K)}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}_K)$ de T_K correspondant à l'inclusion sur la composante $\sigma_0 =$ 'plongement naturel'. Ce théorème s'étend naturellement au cas des représentations abéliennes de Gal_K à valeurs dans $\mathcal{G}(L)$. Si $\rho : \mathrm{Gal}_K^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{G}(L)$ est une représentation galoisienne abélienne, on dira que ρ est *localement algébrique* s'il existe une représentation algébrique $r : (T_K)_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}^L\mathcal{G}$ et un sous-groupe ouvert $U \subset T_K(\mathbb{Q}_p) = K^\times$ tel que $\rho(\mathrm{rec}_K(x)) = r(x)$ pour tout $x \in U$.

Théorème I.3.3 – *Soit $\rho : \mathrm{Gal}_K^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{G}(L)$ une représentation abélienne avec $\mathcal{G}$ un groupe algébrique. Les propositions suivantes sont équivalentes*

(*i*) *ρ est localement algébrique.*

(*ii*) *ρ est de Hodge-Tate et sa restriction à l'inertie est semi-simple.*

Auquel cas pour tout $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \overline{L})$ le sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate de $h_{\mathrm{HT}}(\sigma)$ est la composée du caractère $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}_K) \to T_K(\mathbb{C}_K)$ correspondant à l'inclusion naturelle $K \to \mathbb{C}_K$, de r et de la projection $\mathcal{G}(L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K) \to \mathcal{G}(L(\sigma) \otimes_K \mathbb{C}_K)$.

Les représentations cristallines de dimension 1 à coefficients dans une extension finie $L/\mathbb{Q}_p$ sont caractérisées par la théorème suivant. Ce sont les représentations algébriques sur l'inertie et pas seulement localement algébriques.

Théorème I.3.4 ([Con11], Proposition B.4) − *Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie et $\rho : \mathrm{Gal}_K^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{GL}_1(L) = L^\times$. Alors ρ est cristalline si et seulement s'il existe une représentation algébrique $r : (T_K)_{/\mathbb{Q}_p} \to (T_L)_{/\mathbb{Q}_p}$ tel que $r = \rho \circ \mathrm{rec}_K$ sur $\mathcal{O}_K^\times$.*

I.3.B Cas de groupes de Galois globaux

Supposons maintenant que F est un corps de nombres. On définit de la même manière le tore $T_F := \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathbb{G}_m$. Pour $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_v^{n_v})_v$ un modulus de F tel que $n_v = 1$ pour toute places v réelles, on note $U_{F,\mathfrak{m}}$ l'ensemble des adèles qui sont des unités congrus à $1 \mod \mathfrak{m}$ et $E_{F,\mathfrak{m}}$ les unités de F congrues à $1 \mod \mathfrak{m}$ et positives :

$$\begin{aligned} U_{F,\mathfrak{m}} &= \{(x_v)_v \in \mathbb{A}_F^\times \mid \mathrm{val}_v(x_v - 1) \geq n_v \text{ pour tout } v \nmid \infty, \text{ et } x_v \in (K_v^\times)^\circ \text{ si } v|\infty\}, \\ E_{F,\mathfrak{m}} &= \{x \in \mathcal{O}_F^\times \mid x = 1 \mod \mathfrak{m}_v^{n_v} \text{ pour tout } v \nmid \infty, \text{ et } x \in (K_v^\times)^\circ \text{ si } v|\infty\}, \end{aligned}$$

où $\cdot^\circ$ désigne la composante connexe. On note $\mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}}$ le quotient de $\mathbb{I}_F := \mathbb{A}_F^\times$ par $U_{F,\mathfrak{m}}$ et $C_F := \mathbb{I}_F/F^\times$ le groupe de classes des idèles et $C_{F,\mathfrak{m}} = C_F/U_{F,\mathfrak{m}} \simeq \mathbb{I}_F/(U_{F,\mathfrak{m}}.F^\times)$ le quotient de C_F par l'image de $U_{F,\mathfrak{m}}$ dans C_F (le 'ray class group modulo $\mathfrak{m}$' ([Neu13], 7.2)). Le groupe $C_{F,\mathfrak{m}}$ est alors fini et admet pour quotient le groupe de classes des idéaux de F. On a de plus la suite exacte

$$1 \longrightarrow F^\times/E_{F,\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}} \longrightarrow C_{F,\mathfrak{m}} \longrightarrow 1\ .$$

On note $T_{F,\mathfrak{m}}$ le quotient de T_F par l'adhérence de Zariski de $E_{F,\mathfrak{m}}$ dans T_F. J-P. Serre ([Ser98], Chap. II) construit alors un groupe algébrique abélien de type multiplicatif $S_{F,\mathfrak{m}}$ sur $\mathbb{Q}$ obtenu par extension de $C_{F,\mathfrak{m}}$ par $T_{F,\mathfrak{m}}$. Le diagramme suivant est commutatif et les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & F^\times/E_{F,\mathfrak{m}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}} \arrow[r] \arrow[d] & C_{F,\mathfrak{m}} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & T_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}) \arrow[r] & S_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}) \arrow[r] & C_{F,\mathfrak{m}} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Dans ([Ser98], Chap. II, 1.3), le groupe algébrique $S_{F,\mathfrak{m}}$ est construit à partir de ses points à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Ici, on indique brièvement une construction différente de $S_{F,\mathfrak{m}}$ via son algèbre de Hopf. On note $c \in Z^2(C_{F,\mathfrak{m}}, F^\times/E_{F,\mathfrak{m}})$ le cocycle défini par l'extension $\mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}}$. Alors $\mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}}$ est s'identifie à l'ensemble $C_{F,\mathfrak{m}} \times F^\times/E_{F,\mathfrak{m}}$ et la loi de groupe s'identifie à :

$$(x,\sigma) + (y,\tau) = (x + {}^\sigma y + c(\sigma,\tau), \sigma + \tau). \tag{I.4}$$

On définit alors le foncteur en groupe $S_{F,\mathfrak{m}}$ par $S_{F,\mathfrak{m}}(R) = T_{F,\mathfrak{m}}(R) \times C_{F,\mathfrak{m}}$ (pour R une $\mathbb{Q}$-algèbre), avec la même loi de groupe que l'équation (I.4). Si $T_{F,\mathfrak{m}}$ est représenté par la bigèbre (A, Δ_A, e_A), alors $S_{F,\mathfrak{m}}$ est représenté par la bigèbre $B := A^{C_{F,\mathfrak{m}}}$, l'algèbre des fonctions de $C_{F,\mathfrak{m}}$ vers A, où la comultiplication est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta_B : \quad A^{C_{F,\mathfrak{m}}} &\longrightarrow (A \otimes A)^{C_{F,\mathfrak{m}} \times C_{F,\mathfrak{m}}} \xrightarrow{\sim} A^{C_{F,\mathfrak{m}}} \otimes A^{C_{F,\mathfrak{m}}} \\ (x_\gamma)_{\gamma \in C_{F,\mathfrak{m}}} &\longmapsto (\mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes c(\gamma,\gamma')) \circ \Delta_A^2(x_{\gamma.\gamma'})_{(\gamma,\gamma') \in C_{F,\mathfrak{m}} \times C_{F,\mathfrak{m}}} \end{aligned},$$

où $\Delta_A^2 : A \to A \otimes_{\mathbb{Q}} A \otimes_{\mathbb{Q}} A$ et $c(\gamma, \gamma') \in F^\times / E_{F,\mathfrak{m}}$ est identifié à son image à travers $F^\times / E_{F,\mathfrak{m}} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(A, \mathbb{Q}) = T_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q})$. Ces données définissent alors l'algèbre de Hopf du foncteur en groupe $S_{\mathfrak{m}}$.

Définition I.3.5 – On appellera $S_{F,\mathfrak{m}}$ le *groupe de Serre* associé au corps F et au modulus $\mathfrak{m}$ et on appellera $T_{F,\mathfrak{m}}$ le *tore de Serre connexe*.

Le groupe de Serre $S_{F,\mathfrak{m}}$ vérifie la propriété universelle suivante.

Proposition I.3.6 ([Ser98], Chap. II.1) – *Pour $\mathcal{G}_{/\mathbb{Q}}$ un groupe algébrique et deux morphismes $(T_{F,\mathfrak{m}})_{/\mathbb{Q}} \to \mathcal{G}_{/\mathbb{Q}}$, $\mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}} \to \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} F^\times / E_{F,\mathfrak{m}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}} \arrow[d] \\ T_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}) \arrow[r] & \mathcal{G}(\mathbb{Q}) \end{tikzcd} ,$$

il existe un unique morphisme $(S_{F,\mathfrak{m}})_{/\mathbb{Q}} \to \mathcal{G}_{/\mathbb{Q}}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F^\times / E_{F,\mathfrak{m}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ T_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & S_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}) \arrow[dr] & \\ & & \mathcal{G}(\mathbb{Q}) \end{tikzcd} .$$

Pour tout ℓ, J-P. Serre construit aussi une représentation abélienne ℓ-adique de Gal_F

$$\varepsilon_\ell : \mathrm{Gal}_F^{\mathrm{ab}} \longrightarrow S_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_\ell) \tag{I.5}$$

qui est rationnelle et non-ramifiée en dehors de ℓ et du support de $\mathfrak{m}$ ([Ser98] I.2.3). Elle est définie de la façon suivante. On note $\beta_\ell : \mathbb{I}_F \to S_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_\ell)$ la composée de la projection $\mathbb{I}_F \to \mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}}$ et de l'application canonique $\mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}} \to S_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}) \subset S_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_\ell)$ et on note $\alpha_\ell : \mathbb{I}_F \to S_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_\ell)$ la composée de la projection $\mathbb{I}_F \to (F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)^\times \cong T_F(\mathbb{Q}_\ell)$ et de $T_F \to T_{F,\mathfrak{m}} \to S_{F,\mathfrak{m}}$. Le rapport $\beta_\ell.\alpha_\ell^{-1} : \mathbb{I}_F \to S_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_\ell)$, se quotiente alors à travers $\mathbb{I}_F \to \mathrm{Gal}_F^{\mathrm{ab}}$, ce qui définit ε_ℓ (voir [Ser98] pour les détails).

Si $\phi : (S_{F,\mathfrak{m}})_{\mathbb{Q}_\ell} \to \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_\ell}$ est une représentation algébrique, alors en la composant par ε_ℓ, on obtient une représentation Galoisienne abélienne $\phi \circ \varepsilon_\ell : \mathrm{Gal}_F^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{G}(\mathbb{Q}_\ell)$. Comme dans le cas local, on a une notion de représentations localement algébriques définie de la façon suivante. On note $\mathrm{rec}_F : \mathbb{I}_F \to \mathrm{Gal}_F^{\mathrm{ab}}$ l'application donnée par la théorie du corps de classes. La composée de rec_F par l'injection $T_F(\mathbb{Q}_\ell) \simeq \prod_{v|\ell} F_v^\times \to \mathbb{I}_F$ défini un morphisme

$$i_\ell : T_F(\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathrm{Gal}_F^{\mathrm{ab}}$$

Définition I.3.7 – Une représentation abélienne $\rho : \mathrm{Gal}_F^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ est dite *localement algébrique* s'il existe une représentation algébrique $r : (T_F)_{/\mathbb{Q}_\ell} \to \mathcal{G}_{/\mathbb{Q}_\ell}$ telle que $\rho(i_\ell(x)) = r(x)$ pour tout x dans un sous-groupe ouvert de $T_F(\mathbb{Q}_\ell) = (F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)^\times = \prod_{v|p} F_v^\times$.

Cela revient à dire que pour toute place $v|\ell$, la restriction de ρ au sous-groupe de décomposition $\mathrm{Gal}_{F_v}^{\mathrm{ab}}$ est localement algébrique (au sens précédent). Dans ce cas r est unique et est donné par

$$r : \begin{array}{ccc} T_F(\mathbb{Q}_\ell) \simeq \prod_{v|\ell} T_{F_v}(\mathbb{Q}_\ell) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathbb{Q}_\ell) \\ (x_v)_v & \longmapsto & \prod_v r_v(x_v) \end{array},$$

où $r_v : (T_{F_v})_{/\mathbb{Q}_\ell} \to \mathcal{G}_{/\mathbb{Q}_\ell}$ est la représentation algébrique associée à $\rho_{|\mathrm{Gal}_{F_v}^{\mathrm{ab}}}$. On appelle r la *représentation algébrique associée* à ρ.

Définition I.3.8 – Soient $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ une représentation abélienne localement algébrique, r sa représentation algébrique associée et $\mathfrak{m}$ un modulus de F. Pour toute place v de F, on note $i_v : F_v^\times \to \mathrm{Gal}_F^{\mathrm{ab}}$ la composée de $\mathrm{rec}_{F_v} : F_v^\times \to \mathrm{Gal}_{F_v}^{\mathrm{ab}}$ et de l'inclusion $\mathrm{Gal}_{F_v}^{\mathrm{ab}} \hookrightarrow \mathrm{Gal}_F^{\mathrm{ab}}$. On dit que $\mathfrak{m}$ est un *modulus de définition* de ρ si :

1. Pour tout $v|\ell$, pour tout $x \in \mathcal{O}_{F_v}^\times$ tel que $\mathrm{val}_v(x-1) \geq \mathrm{val}_v(\mathfrak{m})$, on a $\rho \circ i_v(x) = r(x)$.
2. Et pour tout $v \nmid \ell$, pour tout $x \in \mathcal{O}_{F_v}^\times$ tel que $\mathrm{val}_v(x-1) \geq \mathrm{val}_v(\mathfrak{m})$, on a $\rho \circ i_v(x) = 1$.

Autrement dit ρ est admet $\mathfrak{m}$ pour modulus, si pour tout v, ρ est triviale si $v \nmid p$ ou bien ρ coïncide avec sa représentation algébrique si $v|p$ sur le sous-groupe ouvert de l'inertie correspondant définit par le modulus $\mathfrak{m}$. A noter que toute représentation localement algébrique admet un modulus de définition ([Ser98], III.2, Prop. 2). Le théorème suivant montre que les représentations algébriques de modulus $\mathfrak{m}$ sont exactement ceux qui proviennent des représentations algébrique de $S_{F,\mathfrak{m}}$.

Théorème I.3.9 ([Ser98], III.2, Thm. 1, Thm. 2) – *Soit $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ une représentation localement algébrique, r sa représentation algébrique et $\mathfrak{m}$ un modulus de définition. Alors il existe une unique représentation algébrique $\phi : (S_{F,\mathfrak{m}})_{/\mathbb{Q}_\ell} \to \mathcal{G}_{/\mathbb{Q}_\ell}$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gal}_F^{\mathrm{ab}} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varepsilon_\ell"'] & \mathcal{G}(\mathbb{Q}_\ell) \\ S_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_\ell) \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Réciproquement, pour une représentation algébrique $\phi : (S_{F,\mathfrak{m}})_{/\mathbb{Q}_\ell} \to \mathcal{G}_{/\mathbb{Q}_\ell}$, la représentation Galoisienne $\rho := \phi \circ \varepsilon_\ell$ est localement algébrique de modulus $\mathfrak{m}$ et sa représentation algébrique r associée est la composée de l'application naturelle $(T_F)_{/\mathbb{Q}_\ell} \to (S_{F,\mathfrak{m}})_{/\mathbb{Q}_\ell}$ avec ϕ.

$$\begin{tikzcd} T_F(\mathbb{Q}_\ell) \arrow[r, "r"] \arrow[d] & \mathcal{G}(\mathbb{Q}_\ell) \\ S_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_\ell) \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Si $\mathfrak{m}'$ est un modulus divisant $\mathfrak{m}$ (i.e $\mathrm{val}_v(\mathfrak{m}') \leq \mathrm{val}_v(\mathfrak{m})$ pour toute place v), alors par construction il existe morphisme surjectif $S_{F,\mathfrak{m}} \to S_{F,\mathfrak{m}'}$. On peut alors parler du plus petit modulus sur lequel est défini ρ que l'on appelle le *conducteur* de ρ.

Dans ce mémoire, on aura besoin de restreindre une représentation $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ à un sous-groupe ouvert $\mathrm{Gal}_{F'}$. On explique ce qui se passe du point de vue du groupe de Serre. Soient F'/F une extension finie Galoisienne de F (incluse dans $\overline{F}$). Tout modulus $\mathfrak{m}$ de F, peut être vu comme un modulus $\mathfrak{m}'$ de F' en posant $\mathrm{val}_w(\mathfrak{m}') = e(w,v).\mathrm{val}_v(\mathfrak{m})$ pour toute place v de F et place w de F' divisant v. La norme de F' vers F fournit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & F'^{\times}/E_{\mathfrak{m}'} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Nm}"'] & \mathbb{I}_{F',\mathfrak{m}'} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Nm}"'] & C_{F',\mathfrak{m}'} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Nm}"'] & 1 . \\ 1 \arrow[r] & F^{\times}/E_{\mathfrak{m}} \arrow[r] & \mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}} \arrow[r] & C_{F,\mathfrak{m}} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Par propriété universelle de $S_{F,\mathfrak{m}}$ (Proposition I.3.6) cela implique qu'il y a un unique morphisme $S_{F',\mathfrak{m}'} \to S_{F,\mathfrak{m}}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & T_{F',\mathfrak{m}'} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Nm}"'] & S_{F',\mathfrak{m}'} \arrow[r] \arrow[d] & C_{F',\mathfrak{m}'} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Nm}"'] & 1 . \\ 1 \arrow[r] & T_{F,\mathfrak{m}} \arrow[r] & S_{F,\mathfrak{m}} \arrow[r] & C_{F,\mathfrak{m}} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

On rappelle que le corps de classes $F_{\mathfrak{m}}$ associé au modulus $\mathfrak{m}$ est l'unique extension abélienne L/F telle que $\mathbb{I}_F/(F^{\times}.\mathrm{Nm}_{L/F}(\mathbb{I}_L)) = C_F/\mathrm{Nm}_{L/F}(C_L)$ soit égal à $C_{F,\mathfrak{m}}$, c-à-d que $F^{\times}.\mathrm{Nm}_{L/F}(\mathbb{I}_L) = F^{\times}.C_{F,\mathfrak{m}}$. C'est une extension non-ramifiée en dehors du support de $\mathfrak{m}$ de groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{m}}/F) \cong C_{F,\mathfrak{m}}$.

Proposition I.3.10 – *Soit $\mathfrak{m}$ un modulus de F et $F_{\mathfrak{m}}$ le corps de classes de $\mathfrak{m}$. Alors l'image de $S_{F_{\mathfrak{m}},\mathfrak{m}} \to S_{F,\mathfrak{m}}$ est dans $T_{F,\mathfrak{m}}$.*

Démonstration – Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{I}_{F_{\mathfrak{m}}} \arrow[r, "\mathrm{Nm}"] \arrow[d] & \mathbb{I}_F \arrow[r] \arrow[d] & \frac{\mathbb{I}_F}{F^{\times}.U_{F,\mathfrak{m}}} \arrow[d, equal] . \\ & \mathbb{I}_{F_{\mathfrak{m}},\mathfrak{m}} \arrow[r, "\mathrm{Nm}"] \arrow[d] & \mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{\mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}}}{F^{\times}/E_{F,\mathfrak{m}}} \arrow[d, equal] \\ F_{\mathfrak{m}}^{\times} \arrow[ur] \arrow[d] & S_{F_{\mathfrak{m}},\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}) \arrow[r] & S_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}) \arrow[r] & C_{F,\mathfrak{m}} \\ T_{F_{\mathfrak{m}},\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[ur] & T_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}) \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "1"'] & & \end{tikzcd}$$

Comme la flèche horizontale $\mathbb{I}_{F_{\mathfrak{m}}} \longrightarrow \frac{\mathbb{I}_F}{F^{\times}.U_{F,\mathfrak{m}}}$ est nulle et que $\mathbb{I}_{F_{\mathfrak{m}}} \to \mathbb{I}_{F_{\mathfrak{m}},\mathfrak{m}}$ est surjective, on en déduit que la composée $\mathbb{I}_{F_{\mathfrak{m}},\mathfrak{m}} \to \mathbb{I}_{F,\mathfrak{m}} \to C_{F,\mathfrak{m}}$ est nulle. D'autre part la composée

$(T_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}})_\mathbb{Q} \to (T_{F,\mathfrak{m}})_\mathbb{Q} \xrightarrow{1} C_{F,\mathfrak{m}}$ est nulle. Par propriété universelle de $S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}}$ (Proposition I.3.6), la composée $(S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}})_\mathbb{Q} \to (S_{F,\mathfrak{m}})_\mathbb{Q} \to C_{F,\mathfrak{m}}$ est nulle. Cela implique que

$$\mathrm{Im}\big((S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}})_\mathbb{Q} \to (S_{F,\mathfrak{m}})_\mathbb{Q}\big) \subset \ker\big((S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}})_\mathbb{Q} \to C_{F,\mathfrak{m}}\big) = (T_{F,\mathfrak{m}})_\mathbb{Q},$$

et que $\mathrm{Im}(S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}} \to S_{F,\mathfrak{m}}) \subset T_{F,\mathfrak{m}}$. □

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire I.3.11 – *Soient $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie et $(\chi_v : \mathrm{Gal}_{F_v}^{\mathrm{ab}} \to L^\times)_v$ une famille de caractères cristallins indexée par les places p-adiques v de F. On note $\chi : \prod_{v|p} \mathcal{O}_{F_v}^\times \to L^\times$ le caractère tel que*

$$\chi\big((x_v)_v\big) = \prod_{v|p} \chi_v(\mathrm{rec}_{F_v}(x_v)),$$

où $\mathrm{rec}_{F_v} : F_v^\times \to \mathrm{Gal}_{F_v}^{\mathrm{ab}}$ est l'isomorphisme de la théorie du corps de classes. Soit $\mathfrak{m}$ un modulus de F à support dans les places p-adiques. Si χ est trivial sur $E_{F,\mathfrak{m}}$, alors il existe un caractère $\psi : \mathrm{Gal}_{F_\mathfrak{m}} \to L^\times$ non-ramifiée en dehors de p tel que pour toutes places $w|p$ de $F_\mathfrak{m}$ on ait $\psi_{|\mathrm{I}_{(F_\mathfrak{m})_w}} = (\chi_w)_{|\mathrm{I}_{(F_\mathfrak{m})_w}}$.

Démonstration – Comme χ_v est cristallin, d'après le théorème I.3.4, il existe une représentation algébrique $r_v : (T_{F_v})_{/\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbb{Q}_p}$ telle que $\chi_v \circ \mathrm{rec}_{F_v} = r_v$ sur $\mathcal{O}_{F_v}^\times$. On peut alors prolonger χ en un caractère algébrique $(T_F)_{/\mathbb{Q}_p} \to (T_L)_{/\mathbb{Q}_p}$ en posant $\chi((x_v)_v) = \prod_v r_v(x_v)$ pour tout $x \in T_F(\mathbb{Q}_p) = \prod_v F_v^\times$.

Comme le morphisme χ est trivial sur $E_{F,\mathfrak{m}}$, il se quotiente à travers $(T_F)_{/\mathbb{Q}_p}/\overline{E_{F,\mathfrak{m}}}$, où $\overline{E_{F,\mathfrak{m}}}$ est le plus petit sous-groupe algébrique $\mathcal{G}_{/\mathbb{Q}_p} \subset (T_F)_{/\mathbb{Q}_p}$ telle que $\mathcal{G}(\mathbb{Q}_p) \supset E_{F,\mathfrak{m}}$. Comme les points de $E_{F,\mathfrak{m}}$ sont à valeurs dans $T_F(\mathbb{Q})$, le groupe $\overline{E_{F,\mathfrak{m}}}$ est défini sur $\mathbb{Q}$ et donc $(T_F)_{/\mathbb{Q}_p}/\overline{E_{F,\mathfrak{m}}}$ est égal à $(T_{F,\mathfrak{m}})_{/\mathbb{Q}_p}$.

On note χ' la composée de $S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_p) \to T_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_p)$ (cf. Proposition I.3.10) avec χ. On note $\psi : \mathrm{Gal}_{F_\mathfrak{m}}^{\mathrm{ab}} \to T_L(\mathbb{Q}_p)$ la composée de $\varepsilon_{F_\mathfrak{m},p} : \mathrm{Gal}_{F_\mathfrak{m}}^{\mathrm{ab}} \to S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_p)$ (cf. I.5) par χ'. Comme $\mathfrak{m}$ est à support dans p, le caractère ψ est non-ramifié en dehors de p. Soit w une place p-adique de $F_\mathfrak{m}$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}_{F_\mathfrak{m}}^{\mathrm{ab}} \arrow[r, "\varepsilon_{F_\mathfrak{m},p}"] \arrow[rrr, bend left, "\psi"] & S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_p) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\chi'"] & T_{F,\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_p) \arrow[r, "\chi"] & T_L(\mathbb{Q}_p) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Gal}_{F_{\mathfrak{m},w}}^{\mathrm{ab}} \arrow[u] \arrow[rrd, bend right] & T_{(F_\mathfrak{m})_w}(\mathbb{Q}_p) \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{Nm}"] & T_{F_w}(\mathbb{Q}_p) \arrow[u] \arrow[r, "r_w"] \arrow[d] & T_L(\mathbb{Q}_p) \\
 & & \mathrm{Gal}_{F_w}^{\mathrm{ab}} \arrow[ru, "\chi_w"'] &
\end{tikzcd}$$

Par définition de χ, la restriction de χ' au sous-groupe $F_{\mathfrak{m},w}^\times \hookrightarrow S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}}$ est égale à la composée

$$F_{\mathfrak{m},w}^\times \xrightarrow{\mathrm{Nm}_{F_{\mathfrak{m},w}/F_w}} F_w^\times \xrightarrow{\chi_w \circ \mathrm{rec}_{F_w}} L^\times,$$

ce qui implique que $\psi_{|\mathrm{Gal}_{(F_{\mathfrak{m}})_w}} = (\chi_w)_{|\mathrm{Gal}_{(F_{\mathfrak{m}})_w}}$. $\square$

Chapitre II

II – Le problème de relèvement

II.1 Obstruction à un relèvement

Dans cette partie on se donne, F un corps (quelconque), et $\pi : \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{H}}$ un morphisme surjectif de groupes algébriques réductifs sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ tel que le noyau $\mathcal{N}$ soit central et de type multiplicatif.

$$1 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\pi} \overline{\mathcal{H}} \longrightarrow 1.$$

On rappelle que $\mathcal{H}$ réductif veut dire que le sous-groupe connexe normal résoluble unipotent maximal (appelé le radical unipotent de $\mathcal{H}$) est trivial et que $\mathcal{N}$ centrale veut dire que $\mathcal{N}$ est inclus dans le centre de $\mathcal{H}$. Un groupe algébrique est dit semi-simple si son sous-groupe connexe normal résoluble maximal (appelé le radical) est trivial. On se donne aussi une représentation

$$\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p).$$

On rappelle que les représentations sont supposées continues pour la topologie p-adique.

Définition II.1.1 – Un *relèvement* de $\overline{\rho}$ est une représentation ρ de Gal_F à valeurs dans $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ telle que $\pi \circ \rho = \overline{\rho}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{Gal}_F \arrow[ur, dashed, "\rho"] \arrow[r, "\overline{\rho}"'] & \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \end{tikzcd}$$

On munit $\mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ de l'action triviale de Gal_F et on note $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ le deuxième groupe de cohomologie, c'est-à-dire le groupe $\mathrm{Z}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ des fonctions $c : \mathrm{Gal}_F \times \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ continues telles que $c(\iota.\sigma, \tau) = c(\iota, \sigma).c(\sigma, \tau)$ pour tout $\iota, \sigma, \tau \in \mathrm{Gal}_F$ modulo le sous-groupe des éléments de la forme $(\sigma, \tau) \mapsto f(\tau).f(\sigma)^{-1}$ où f est une fonction continue $\mathrm{Gal}_F \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.

Si ρ et ρ' sont deux relèvements alors il existe une unique fonction continue $\chi : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\rho' = \rho.\chi$. L'hypothèse que $\mathcal{N}$ est central permet de garantir que χ est un morphisme de groupes. Il est connu (au moins dans le cas discret) que l'obstruction d'un tel problème de relèvement est une classe dans le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$. On rappelle dans les paragraphes suivants les principaux résultats.

Le 'groupe' de cohomologie continue (non-abélienne) $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}_F, \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des homomorphismes continus $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}_F, \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$. À la représentation $\overline{\rho}$, on note $c(\overline{\rho}) : \mathrm{Gal}_F^2 \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ la fonction définie de la façon suivante. On choisit $\hat{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$

une fonction continue relevant $\overline{\rho}$ (son existence est assurée grâce à la Proposition II.1.2). Pour tout $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}_F$, on pose alors

$$c(\overline{\rho})(\sigma, \tau) := \hat{\rho}(\sigma.\tau).\hat{\rho}(\tau)^{-1}.\hat{\rho}(\sigma)^{-1}.$$

La fonction $c(\overline{\rho})$ mesure moralement le défaut de $\hat{\rho}$ à être morphique et vit dans le groupe $\mathrm{Z}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ des 2-cocycles continus. Sa classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$, noté $\delta(\rho)$, est indépendant du choix de $\hat{\rho}$ et il existe la suite exacte suivante d'ensembles pointés ([Ser79b], Chap. VII Annexe)

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}_F, \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)). \tag{II.1}$$

En particulier $\delta(\overline{\rho})$ est nul si et seulement si $\overline{\rho}$ admet un relèvement (continue) à $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. Si l'espace $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ est nul, cela implique que toute représentation $\mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ se relève. Dans la suite on montre que $\delta(\overline{\rho})$ est bien défini et peut être représenté par un cocycle à valeurs finis.

Proposition II.1.2 – *Il existe $U \subset \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un sous-groupe ouvert-fermé (c-à-d un ouvert d'un sous-ensemble fermé) et un sous-groupe ouvert $\overline{U} \subset \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tels que π induise un isomorphisme de groupes topologiques $U \to \overline{U}$.*

Démonstration – On raisonne en plusieurs étapes.

1er cas : Si $\mathcal{N}$ est fini. Alors $\mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est discret et il suffit de prendre $U \subset \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un ouvert intersectant $\mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ trivialement et $\overline{U}$ son image dans $\overline{\mathcal{H}}$.

2eme cas : si $\mathcal{H}$ et $\overline{\mathcal{H}}$ sont des tores. Un morphisme entre deux tores est la composée d'une projection par une isogénie, c'est-à-dire qu'il existe une décomposition $\mathcal{H} = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ et une isogénie $\pi' : \mathcal{T}_2 \to \overline{\mathcal{H}}$ telles que π soit la composée

$$\mathcal{H} = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \xrightarrow{\quad \mathrm{pr}_2 \quad} \mathcal{T}_2 \xrightarrow{\pi'} \overline{\mathcal{H}}$$

On prend alors $U \subset \mathcal{T}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un ouvert intersectant $\ker(\pi')$ trivialement.

3eme cas : si $\mathcal{H}$ est connexe. On note $\mathrm{D}(\mathcal{H})$ le sous-groupe dérivé de $\mathcal{H}$ et $\mathrm{R}(\mathcal{H})$ son radical (c'est aussi la composante connexe de son centre). On rappelle (voir [Bor91], 14.2) que l'application naturelle $\mathrm{R}(\mathcal{H}) \times \mathrm{D}(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$ est surjective à noyau fini. On considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{N} \times (\mathcal{N} \cap \mathrm{D}(\mathcal{H})) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}(\mathcal{H}) \times \mathrm{D}(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}(\overline{\mathcal{H}}) \times \mathrm{D}(\overline{\mathcal{H}}) \arrow[r] \arrow[d] & 0\ , \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r, "\pi"] & \overline{\mathcal{H}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales de la première ligne envoient le premier (resp. deuxième) facteur sur le premier (resp. deuxième) facteur et les flèches verticales (les produits) sont surjectifs à noyau fini.

Le noyau de $\mathrm{D}(\mathcal{H}) \to \mathrm{D}(\overline{\mathcal{H}})$ est fini car égal à $\mathcal{N} \cap \mathrm{D}(\mathcal{H})$ qui est un groupe semi-simple de type multiplicatif (car $\mathcal{N}$ est central). D'après le 1er cas, il existe un ouvert $V_1 \subset \mathrm{D}(\mathcal{H})(\overline{\mathbb{Q}}_p)$

qui soit homéomorphe à son image $\overline{V}_1 \subset \mathrm{D}(\overline{\mathcal{H}})(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. Comme $\mathrm{R}(\mathcal{H}) \to \mathrm{R}(\overline{\mathcal{H}})$ est un morphisme entre deux tores, d'après le 2eme cas, il existe $V_2 \subset \mathrm{R}(\mathcal{H})(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ qui soit isomorphe à son image $\overline{V_2} \subset \mathrm{R}(\overline{\mathcal{H}})(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ ouverte. Comme le noyau de $\mathrm{R}(\overline{\mathcal{H}}) \times \mathrm{D}(\overline{\mathcal{H}}) \to \overline{\mathcal{H}}$ est fini, quitte à rétrécir V_1 et V_2, on peut supposer que $\overline{V_1} \times \overline{V_2}$ intersecte ce noyau trivialement. De même on peut supposer de plus que $V_1 \times V_2$ intersecte trivialement le noyau de $\mathrm{R}(\mathcal{H}) \times \mathrm{D}(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$. On note $\overline{U}$ l'image de $\overline{V_1} \times \overline{V_2}$ dans $\overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ et U l'image de $V_1 \times V_2$ dans $\mathcal{H}$. Comme le morphisme $\mathrm{D}(\overline{\mathcal{H}}) \times \mathrm{R}(\overline{\mathcal{H}}) \to \overline{\mathcal{H}}$ est étale, $\overline{U}$ est un ouvert de $\overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. Par construction π réalise un isomorphisme de $U \subset \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ vers $\overline{U} \subset \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.

Cas général. Il suffit de considérer le morphisme $\mathcal{H}^\circ \to \overline{\mathcal{H}}^\circ$ entre les composantes connexes qui sont ouvertes et de prendre $U \subset \mathcal{H}^\circ(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ comme dans le cas précédent. □

Cela montre en particulier que quitte à faire une extension finie, toute représentation se relève. La preuve montre en fait que $\mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \times U$ est ouvert dans $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ et que $\pi : \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{H}}$ est localement une projection, c'est-à-dire que sur l'ouvert $\mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \times U \subset \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, le morphisme π est la projection sur $U \simeq \overline{U}$. On peut alors trouver une section continue s de $\pi : \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{H}}$ de la façon suivante : si on note $s : \overline{U} \to U$ une section continue sur $\overline{U}$ et qu'on écrit $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p) = \bigsqcup_{i\in I} \pi(a_i)\overline{U}$ une décomposition en classe modulo $\overline{U}$, alors on peut prolonger s à $\overline{H}$ en posant $s(\pi(a_i)u) := a_i s(u)$ $(i \in I,\ u \in \overline{U} \simeq U)$. Cela assure donc l'existence d'un relèvement continu $\hat{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ (non morphique), comme indiqué plus haut, ainsi que l'existence de $\delta(\overline{\rho})$. Dans la suite on appellera $\delta(\overline{\rho})$ l'*obstruction à relever* ρ à travers $\mathcal{H} \xrightarrow{\pi} \overline{\mathcal{H}}$.

Corollaire II.1.3 – *Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation. Il existe un relèvement $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ continu de $\overline{\rho}$ si et seulement si l'élément $\delta(\overline{\rho}) \in \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ est nul.*

Démonstration – C'est une conséquence de la suite exacte II.1 démontré dans ([Ser79b], Chap. VII Annexe), dont la preuve est aussi valable pour la cohomologie continue. □

La proposition suivante montre que l'on a affaire à la cohomologie à valeur discrète.

Proposition II.1.4 – *Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation continue. Alors la connexion $\delta(\overline{\rho})$ peut être représenté par un cocycle à valeurs finies.*

Démonstration – On reprend le diagramme suivant introduit dans la preuve de la proposition II.1.2

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{N} \times (\mathcal{N} \cap \mathrm{D}(\mathcal{H})) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}(\mathcal{H}) \times \mathrm{D}(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}(\overline{\mathcal{H}}) \times \mathrm{D}(\overline{\mathcal{H}}) \arrow[r] \arrow[d] & 0\,, \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r, "\pi"] & \overline{\mathcal{H}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On rappelle que $\mathrm{R}(\mathcal{H}) \times \mathrm{D}(\mathcal{H}) \to \overline{\mathcal{H}}$ est la composé d'une projection $\mathrm{R}(\mathcal{H}) \times \mathrm{D}(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}_2 \times \mathrm{D}(\mathcal{H})$ par une isogénie $\mathcal{T}_2 \times \mathrm{D}(\mathcal{H}) \to \overline{\mathcal{H}}$. Comme $\mathcal{T}_2 \times \mathrm{D}(\mathcal{H}) \to \overline{\mathcal{H}}$ est une isogénie, le cocycle pour relever $\overline{\rho}$ de $\overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ à $\mathcal{T}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p) \times \mathrm{D}(\mathcal{H})(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est à valeur finie. Comme la surjection $\mathrm{R}(\mathcal{H}) \times \mathrm{D}(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}_2 \times \mathrm{D}(\mathcal{H})$ est scindée, le cocyle pour relever $\overline{\rho}$ de $\overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ à $\mathrm{R}(\mathcal{H})(\overline{\mathbb{Q}}_p) \times \mathrm{D}(\mathcal{H})(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est aussi à valeur finie. Donc à fortiori il en est de même pour le cocycle pour relever $\overline{\rho}$ de $\overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ à $\overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.
□

Supposons que F est un corps de nombres. Un cadre naturel en géométrie arithmétique est de se restreindre aux représentations de Gal_F non-ramifiées en dehors d'un ensemble fini de places. Le théorème de Tate ne garantit pas qu'une représentation non-ramifiée presque partout admet un relèvement non-ramifié presque partout. Cependant Conrad a montré que c'est vrai.

Proposition II.1.5 ([Con11], Lem. 5.2, Prop 5.3) – *Si $\overline{\rho}$ est non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places, alors tout relèvement ρ est non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places (non nécessairement les mêmes que celles de $\overline{\rho}$).*

II.2 Cas des corps locaux

Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation. Si v est une place de F, alors on note $\overline{\rho}_v$ la restriction de $\overline{\rho}$ au groupe de décomposition Gal_{F_v}. On appellera *obstruction locale* en v, l'obstruction à relever $\overline{\rho}_v$. On s'intéresse au problème local-global suivant : sachant que l'on peut relever $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ sur chaque groupe de décomposition (rappelons que pour toute place v on s'est fixé un plongement $F^{\mathrm{alg}} \to F_v^{\mathrm{alg}}$) est que cela implique que l'on peut relever ρ et si possible avec des conditions locales ?

II.2.A Cas archimédien

Soit K est un corps local archimédien. Alors $K = \mathbb{R}$ ou $K \simeq \mathbb{C}$ et comme toute représentation de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{C}}$ est trivial, on suppose que $F = \mathbb{R}$. On note c la *conjugaison complexe*, l'élément non-triviale de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Une représentation de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{R}}$ est alors uniquement déterminée par l'image de c et celui-si doit-être un élément d'ordre divisant 2. Donc relever une représentation de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{R}}$ revient alors à relever l'image c en un élément d'ordre 1 ou 2.

Proposition II.2.1 – *Une représentation $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_{\mathbb{R}} \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ se relève à $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ si et seulement si $\overline{\rho}(c)$ se relève en un élément d'ordre divisant* 2.

Définition II.2.2 – On dira que la conjugaison complexe *se relève* si cette condition est vérifiée.

Dans le cas particulier où $\mathcal{N}$ est un tore ou un groupe fini de cardinal impair, toute représentation $\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{R}} \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ se relève. En effet, on choisit $a \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un relèvement quelconque de $\overline{\rho}(c)$, alors on a $a^2 \in \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. Comme $\mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est 2-divisible, en choisissant $b \in \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $b^2 = a^2$, il suffit de définir $\rho(c) := ab^{-1}$.

II.2.B Cas ℓ-adique

On suppose que K est une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ avec $\ell \neq p$. On étudie le cas des relèvements de représentations p-adique de K. Rappelons qu'un groupe compact totalement discontinu G est profini ([NSW08], Proposition 1.1.3), et que pour tout élément $g \in G$, on peut définir g^n pour tout $n \in \hat{\mathbb{Z}}$.

Proposition II.2.3 – *Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation non-ramifiée. Alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement non-ramifié à $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.*

Démonstration – Il suffit de relever l'image $A := \overline{\rho}(\mathrm{Frob}_q)$ du Frobenius $\mathrm{Gal}_K/\mathrm{I}_K \simeq \mathrm{Gal}_{k_K} \simeq \hat{\mathbb{Z}}$ en un élément appartenant à un sous-groupe compact. Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie telle que $A^{\hat{\mathbb{Z}}}$ soit dans $\pi(\mathcal{H}(L))$, l'image de $\mathcal{H}(L)$ par le morphisme $\mathcal{H} \to \overline{\mathcal{H}}$. Soit U un voisinage ouvert de $\mathcal{H}(L)$ tel que son image $\overline{U}$ soit ouvert dans $\mathcal{H}(L)$ et tel que U et $\overline{U}$ soient homéomorphes via π (Proposition II.1.2).

Supposons d'abord que le noyau $\mathcal{N}$ est fini. On sait que l'on a une section continue $s : \pi(\mathcal{H}(L)) \to \mathcal{H}(L)$, et l'image de $A^{\hat{\mathbb{Z}}}$ par cette section est compacte. L'image réciproque de $A^{\hat{\mathbb{Z}}}$ par π vaut alors $\mathcal{N}(L).s(A^{\hat{\mathbb{Z}}})$ qui est compact car $\mathcal{N}$ est fini. On peut donc bien relever A.

Supposons maintenant que le noyau $\mathcal{N}$ est un tore. Soit $A_0 \in \mathcal{H}(L)$ un relèvement quelconque de A. Comme $\mathcal{H}(L)$ est un groupe de Lie p-adique, quitte à réduire U, on peut supposer que U est un sous-groupe profini. Comme $(A^n)_n$ tend vers 0 lorsque $n \to 0$ pour la topologie profinie, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n \in \pi(U) = \overline{U}$. Il existe alors $N \in \mathcal{N}(L)$ telle que $A_0^n.N$ soit dans U. Comme $\mathcal{N}$ est un tore, quitte à augmenter L, on peut supposer qu'il existe $N' \in \mathcal{N}(L)$ tel que ${N'}^n = N$. L'élément $A_0.N'$ est alors un relèvement de A et son sous-groupe engendré est inclus dans le compact $\bigcup_{k=0}^{n-1} U.(A_0.N')^k$.

Dans le cas où $\mathcal{N}$ est quelconque, il suffit de relever A à travers $\mathcal{H}/\mathcal{N}^0 \to \overline{\mathcal{H}}$ et en suite à travers $\mathcal{H} \to \mathcal{H}/\mathcal{N}^0$, où $\mathcal{N}^0$ est la composante connexe de $\mathcal{N}$ qui est un tore.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{N}^0 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\mathcal{H}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{N}/\mathcal{N}^0 \arrow[r] & \mathcal{H}/\mathcal{N}^0 \arrow[r] & \overline{\mathcal{H}} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

□

Soit $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation p-adique. Alors ρ est potentiellement semi-stable, par le théorème de monodromie de Grothendieck ([Ill94], Thm 1.4). Donc il lui est associée une représentation de Weil-Deligne (ρ_{WD}, N) comme dans la Chapitre 1. On rappelle aussi qu'une représentation de Weil-Deligne (ρ_{WD}, N) provient d'une représentation galoisienne (potentiellement semi-stable) si et seulement si l'image $(\rho_{WD}(W_F))$ est relativement compacte (Théorème I.1.3). Toute représentation de Weil-Deligne ne se relève pas forcément, mais par contre elle se relève si on se restreint à une extension finie.

Proposition II.2.4 – *Si $(\overline{\rho}_{\mathrm{WD}}, N)$ est une représentation de Weil-Deligne dans $\overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, alors il existe une extension finie K'/K tel que $(\overline{\rho}_{\mathrm{WD}|K'}, N)$ se relève en représentation de Weil-Deligne de* $\mathrm{Gal}_{K'}$ *à valeurs dans $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.*

Démonstration – Soit $(\overline{\rho}_{WD}, \overline{N})$ une représentation de Weil-Deligne de W_K dans $\overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. Comme l'inertie agit par image finie, quitte à prendre une extension finie, on peut supposer que l'inertie agit trivialement. Dans ce cas, il suffit de relever l'image du Frobenius $\Phi := \overline{\rho}_{\mathrm{WD}}(\mathrm{Frob}_K)$ et de la monodromie $\overline{N}$. On note $\overline{U} = \exp(\overline{N})$. On choisit $\Phi \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un relèvement de $\overline{\Phi}$ et $U \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un relèvement unipotent de $\overline{U}$ (existe car si $D.U$ la décomposition de Jordan d'un relèvement quelconque de U, alors l'image de D est 1, donc $D \in \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, et l'image de U est $\overline{U}$). Comme $\overline{\Phi} \cdot \overline{U} \cdot \overline{\Phi}^{-1} = \overline{U}^q$, Il existe alors $\varepsilon \in \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que

$$\Phi \cdot U^q \cdot \Phi^{-1} = \varepsilon U^q.$$

Comme π est centrale ε et U^q commutent, et comme $\Phi \cdot U^q \cdot \Phi^{-1}$ et U sont unipotents, par unicité de la décomposition de Jordan on en déduit que $\varepsilon = 1$. Donc le couple $(\Phi, \log(U))$ définit une représentation de Weil-Deligne non-ramifiée $W_K \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ qui relève $(\overline{\rho}_{WD}, \overline{N})$. □

Cette proposition admet la version Galoisienne suivante.

Proposition II.2.5 – *Si $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est une représentation, alors il existe une extension finie K'/K telle que $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{K'}}$ se relève à $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.*

Démonstration – Soit $U \subset \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ sous-groupe induisant un isomorphisme sur un sous-groupe ouvert $\overline{U} \subset \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ comme dans la Proposition II.1.2. Il suffit alors de prendre K'/K l'extension finie tel que $\mathrm{Gal}_{K'} = \overline{\rho}^{-1}(\overline{U})$. □

Si $\overline{\rho}$ est semi-stable, on peut en fait prendre $K' = K$.

Théorème II.2.6 – *Toute représentation semi-stable* $\mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *se relève à $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ en une représentation semi-stable.*

Démonstration – Si $\overline{\rho}$ est semi-stable et si $(\overline{\rho}_{\mathrm{WD}}, \overline{N})$ est la représentation de Weil-Deligne associée, alors $\overline{\rho}_{\mathrm{WD}}$ est triviale sur l'inertie. Donc pour relever $(\overline{\rho}_{\mathrm{WD}}, \overline{N})$ il suffit de relever le Frobenius et $\overline{N}$ comme dans la preuve de la proposition précédente. Le fait que le relèvement provienne d'une représentation Galoisienne vient du même argument que dans la proposition II.2.3. □

A noter que si $\overline{\rho}$ est semi-stable alors deux relèvements semi-stables ρ et ρ' coïncidents sur l'inertie I_K. En effet il existe $\chi : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\rho' = \chi.\rho$. Pour $\sigma \in \mathrm{I}_K$, $\rho'(\sigma)$ et $\rho(\sigma)$ sont unipotents et $\chi(\sigma)$ est diagonalisable et par unicité de la décomposition de Jordan cela implique que $\chi(\sigma) = 1$. Ce résultat d'unicité admet un analogue en p-adique (Théorème II.2.12). On termine par le théorème suivant.

Théorème II.2.7 ([Con11], Prop. 5.3) – *Si $\mathcal{N}$ est un tore, alors toute représentation $\overline{\rho}$:* $\mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *se relève à $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$*

II.2.C Relèvements en théorie de Hodge p-adique

Soit K un corps p-adique. Ici on s'intéresse aux représentations p-adiques de K. Soit $\overline{\rho}$: $\mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. Si $\overline{\rho}$ est de Hodge-Tate, de Rham, semi-stable, cristalline, alors la question est de savoir si $\overline{\rho}$ admet un relèvement avec la même propriété. Choisissons $L \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ une sous-extension finie de $\mathbb{Q}_p$ tel que $\pi(\mathcal{H}(L))$ contienne l'image de $\overline{\rho}$. Une condition évidemment nécessaire à l'existence d'un relèvement est que *la structure de Hodge-Tate se relève*, au sens où le sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate $\overline{h}_{\mathrm{HT}} : \mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbb{C}_K} \to (\mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathcal{H}})_{/\mathbb{C}_K}$ associée à $\overline{\rho}$ (vu à valeurs dans $\mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathcal{H}}(\mathbb{Q}_p) = \overline{\mathcal{H}}(L)$) admet un relèvement $h_{\mathrm{HT}} : \mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbb{C}_K} \to \mathcal{H}_{/\mathbb{C}_K}$.

Remarques II.2.8 – Comme $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K$ est isomorphe à $\prod_{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L,\mathbb{C}_K)} \mathbb{C}_K$, le groupe algébrique $(\mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\overline{\mathcal{H}})_{/\mathbb{C}_K}$ est isomorphe au produit $\prod_{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L,\mathbb{C}_K)}(\overline{\mathcal{H}})_{/\mathbb{C}_K}$. Dire que $\overline{h}_{\mathrm{HT}}$ se relève revient à dire que chacune de ses composantes se relève.

Le fait que $\overline{h}_{\mathrm{HT}}$ se relève n'est pas suffisant à l'existence d'un relèvement de Hodge-Tate. En effet, on peut par exemple considérer un caractère d'ordre fini (donc de poids de Hodge-Tate 0) qui n'est pas un carré.

Proposition II.2.9 – *Soit* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. *Si* $\overline{\rho}$ *admet un relèvement et si* h_{HT} *se relève, alors il existe une extension* K'/K *tel que* $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{K'}}$ *admet un relèvement de Hodge-Tate.*

Démonstration – Soit $\hat{\rho}$ un relèvement, $L/\mathbb{Q}_p$ tel que $\hat{\rho}$ soit à valeurs dans $\mathcal{H}(L)$ et $\Theta \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ son opérateur de Sen. Comme la structure de Hodge-Tate de $\overline{\rho}$ se relève, il existe $N \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{N}(\mathbb{Q}_p))$ tel que $\Theta + N$ soit semi-simple à valeurs propres entiers dans toute représentations linéaire de $\mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{H}$. On prend K'/K une extension finie, telle l'on puisse définir le caractère $\chi : \mathrm{Gal}_{K'} \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ par $\chi(\sigma) = \exp(N \log \mathrm{Cycl}_p(\sigma))$. La représentation $\chi.\rho_{|\mathrm{Gal}_{K'}}$ est alors un relèvement de Hodge-Tate. □

Exemple II.2.10 – Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathrm{GL}_V(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation. Supposons que son image $\overline{\rho}$ dans $\mathrm{GL}_{\mathrm{Sym}^2 V}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ soit de Hodge-Tate. Comme le morphisme $\mathrm{GL}_V(\overline{\mathbb{Q}}_p) \to \mathrm{GL}_{\mathrm{Sym}^2 V}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ a pour noyau $\{-1,1\}$, cela implique que l'opérateur de Sen de ρ est semi-simple. Si on note $(a_1,\dots,a_n)$ ses valeurs propres, alors les $(a_i + a_j)_{i \leq j}$ sont les valeurs propres de l'opérateur de Sen de $\overline{\rho}$ et sont donc entiers. On en déduit que soit tous les $(a_i)_{i\leq n}$ sont entiers auquel cas ρ est de Hodge-Tate, soit tous les $(a_i)_{i\leq n}$ sont des demi-entiers. Dans le dernier cas, on peut alors choisir K'/K une extension finie et $\chi : \mathrm{Gal}_{K'} \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ un caractère tel que $\chi^2 = \mathrm{Cycl}_p$, et la tordue $\chi.\rho_{|\mathrm{Gal}_{K'}}$ est alors de Hodge-Tate. G. Di Matteo [DM13] démontre en fait qu'il n'est pas nécessaire de prendre une extension finie : si $\mathrm{Sym}^2 V$ est de Hodge-Tate, alors il existe un caractère $\chi : \mathrm{Gal}_K \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $V(\chi)$ soit de Hodge-Tate.

Remarques II.2.11 – Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation de Hodge-Tate admettant un relèvement (non-nécessairement de Hodge-Tate) $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ et telle que μ_{HT} se relève. Si $\mathcal{N}$ est fini, alors ρ est de Hodge-Tate. En effet si on note $\Theta \in \mathrm{Lie}(\mathcal{H})$ l'opérateur de Sen de ρ et $\overline{\Theta} \in \mathrm{Lie}(\overline{\mathcal{H}})$ celui de $\overline{\rho}$, Comme la structure de Hodge-Tate se relève, l'opérateur de Sen $\overline{\Theta}$ se relève en un $\Theta + N$, avec $N \in \mathrm{Lie}(\mathcal{N})$, tel que $\Theta + N$ est semi-simple à valeurs propres entiers dans toute représentation $\mathcal{H} \to \mathrm{GL}_n$. Comme $\mathcal{N}$ est fini, on a $N = 0$ et donc Θ est semi-simple à valeurs propres entiers et ρ est de Hodge-Tate.

Si $\overline{\rho}$ est semi-stable ou cristallin, J-P. Wintenberger démontre que cette condition est suffisante.

Théorème II.2.12 (Wintenberger) – *On suppose que* $\mathcal{N}$ *est fini. Soit* K *un corps* p*-adique et* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathcal{H}}(L)$ *une représentation semi-stable (resp. cristalline). On suppose que le sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate* $\overline{h}_{\mathrm{HT}} : \mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbb{C}_K} \to (\mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\overline{\mathcal{H}})_{/\mathbb{C}_K}$ *se relève en* $h_{\mathrm{HT}} : \mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbb{C}_p} \to \mathcal{H}_{/\mathbb{C}_p}$. *Alors* $\overline{\rho}$ *admet un relèvement semi-stable (resp. cristallin)* $\mathrm{Gal}_K \to \mathcal{H}(L)$ *dont le sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate est* h_{HT} *et ce relèvement est unique sur l'inertie.*

Démonstration – Voir ([Win95], Thm 1.1.3) pour le cas cristallin. Voir ([Win97], Thm 2.2.2) et la conjecture de Fontaine démontrée dans [CF00] pour le cas semi-stable. □

Il y a des sous-groupes à un paramètre qui ne se relèvent pas. Par exemple si on prend $\mathrm{SL}_2 \to \mathrm{PGL}_2$, et $\mu : \mathbb{G}_m \to \mathrm{PGL}_2, t \mapsto \mathrm{diag}(t, 1)$, alors μ ne se relève pas, mais par contre il se relève à GL_2.

Si $\overline{\mathcal{T}}$ est un tore maximale de $\overline{\mathcal{H}}$ et si $\mathcal{T}$ est un tore maximale de $\mathcal{H}$ envoyé sur $\overline{\mathcal{T}}$, alors μ_{HT} se relève si et seulement si μ_{HT} est dans l'image de $X_*(\mathcal{T}) \to X_*(\overline{\mathcal{T}})$. En particulier, c'est le cas si $X_*(\mathcal{T}) \to X_*(\overline{\mathcal{T}})$ est surjective (ce qui est indépendant du tore choisi).

Les propositions suivantes sont respectivement dues à B. Conrad et S. Patrikis.

Proposition II.2.13 ([Con11], Prop 6.5, Cor. 6.7) – *Soit K est un corps p-adique et une représentation $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ de propriété $* \in \{\mathrm{HT}, \mathrm{dR}, \mathrm{st}, \mathrm{cris}\}$.*

- *Si $\mathcal{N}$ est un tore et si $\overline{\rho}_{|\mathrm{I}_K}$ admet un relèvement de Hodge-Tate, alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement de propriété $*$.*
- *Si $\overline{\rho}_{|\mathrm{I}_K}$ admet un relèvement de Hodge-Tate et si $* \in \{\mathrm{st}, \mathrm{cris}\}$, alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement de propriété $*$.*
- *Si $\overline{\rho}$ admet un relèvement (quelconque) et si $* \in \{\mathrm{HT}, \mathrm{dR}\}$, alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement de propriété $*$.*

Proposition II.2.14 ([Pat14], Corollary 3.2.12) – *Si $\mathcal{N}$ est un tore, alors toute représentation de Hodge-Tate $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ admet un relèvement de Hodge-Tate à $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.*

En combinant cette propositio net le premier point de la proposition précédente, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire II.2.15 ([Pat14], Corollary 3.2.13) – *Si $\mathcal{N}$ est un tore et si $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est de propriété $* \in \{\mathrm{HT}, \mathrm{dR}, \mathrm{st}, \mathrm{cris}\}$, alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement de propriété $*$.*

On remarque donc que les obstructions locales n'apparaissent que pour les cas des places infinies et des places p-adiques (c'est-à-dire le relèvement de la conjugaison complexe et du sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate). En particulier :

Proposition II.2.16 – *Si $\mathcal{N}$ est un tore et si $X_*(\mathcal{H}) \to X_*(\overline{\mathcal{H}})$ est surjective, alors toutes les obstructions locales sont nulles.*

Exemple II.2.17 –

1. Si $\mathcal{H} = \mathrm{GL}_n$ et $\overline{\mathcal{H}} = \mathrm{PGL}_n$, alors $\mathcal{N}$ est un tore (déployé) et $X_*(\mathcal{T}) \to X_*(\overline{\mathcal{T}})$ est surjective.
2. Si $\mathcal{H} = \mathrm{SL}_n$ et $\overline{\mathcal{H}} = \mathrm{PGL}_n$, alors $\mathcal{N}$ n'est pas un tore et l'image de $X_*(\mathcal{T}) \to X_*(\overline{\mathcal{T}})$ est d'indice n.
3. Si $\mathcal{H} = \mathrm{GL}_V \simeq \mathrm{GL}_2$ et $\overline{\mathcal{H}} = \mathrm{Im}(\mathrm{GL}_V \to \mathrm{GL}_{\mathrm{Sym}^2 V})$ ($\overline{\mathcal{H}}$ munie de la forme quadratique $\mathrm{Sym}^2 \det$ est alors isomorphe à $\mathrm{GO}(2, 1)$), alors $\mathcal{N} \simeq \mu_2$ et $X_*(\mathcal{T}) \to X_*(\overline{\mathcal{T}})$ est surjective.

II.3 Nullité de l'obstruction

Soient F un corps local ou global et p un nombre premier. D'après le corollaire II.1.3, l'obstruction à un relèvement est donnée par un élément du groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$. Il y a deux cas favorables à la nullité de cette obstruction : le cas où $\mathcal{N}$ est un tore et le cas où $\mathcal{N}$ est cyclique. Le premier cas se traite avec le théorème de Tate (Théorème II.3.1 et corollaire II.3.2) qui montre que toute représentation se relève. Dans le deuxième cas, ce n'est pas la nullité de $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ que l'on obtient mais plutôt la nullité du groupe de Tate-Shafaverich $Ш^2(\mathrm{Gal}_F, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ sous les conditions données par le théorème de Grunwald-Wang.

II.3.A Théorème de Tate

Le théorème suivant montre que le groupe de cohomologie est nul lorsque $\mathcal{N}$ est un tore. Dans ce cas, il n'y a donc pas d'obstructions à relever la représentation.

Théorème II.3.1 (Tate ([Fro77],Thm. 4)) – *Soit F un corps de nombre ou un corps p-adique. On munit $\mathbb{C}^\times$ de la structure de Gal_F-module trivial discret. Alors $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathbb{C}^\times) = 0$.*

En utilisant ce théorème, les propositions II.1.4 et II.1.5, on en déduit :

Corollaire II.3.2 – *Si $\mathcal{N}$ est un tore, alors toute représentation $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ admet un relèvement ρ à $\overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. De plus si F est un corps de nombre et $\overline{\rho}$ est non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places, alors on peut choisir ρ non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places.*

On peut améliorer ce résultat pour obtenir le théorème suivant de B. Conrad dans le cas d'un noyau non nécessairement torique.

Théorème II.3.3 ([Con11], Theorem. 5.5) – *Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\mathbb{Q}_p)$ une représentation non-ramifiée en dehors d'un ensemble finie de place S et modérément ramifiée en un ensemble fini de places T. On note $n := \sharp(\mathcal{N}/\mathcal{N}^0)$ la cardinal du groupe des composantes connexes de $\mathcal{N}$. On suppose que pour toute place v (finie ou infinie) de F, la représentation $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ se relève à $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.*

- *Si $(F, \emptyset, n)$ n'est pas un cas spécial du théorème de Grunwald-Wang, alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement à $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ non-ramifiée presque partout.*
- *Supposons que $\overline{\rho}$ admet un relèvement. Alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement non-ramifié en S et modérément ramifié en T sauf (éventuellement) si : $(F, S \cup T, n)$ est un cas spécial du théorème de Grunwald-Wang (Théorème IV.2.5), que $S_F \neq \emptyset$ et $2^{s_F - 1} | val_v(2)$ pour tout $v \in S_F$ (voir Définition II.3.9).*

Si on souhaite se restreindre aux représentations non-ramifiées en dehors de S, alors il faut remplacer le groupe de Galois absolu par $\mathrm{Gal}(F_S/F)$ où F_S/F est l'extension maximale non-ramifiée en dehors de S et regarder plutôt le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(F_S/F), \mathbb{C}^\times)$. Le calcul de ce groupe est donnée par l'énoncé suivant qui est l'une des formes équivalentes de la conjecture de Leopoldt ([NSW08], Theorem 10.3.6 et p.641).

Conjecture II.3.4 (Leopoldt) – *Soient F un corps de nombres et S ensemble (non nécessairement fini) de places de F contenant les places infinies. Alors pour tout nombre premier p divisible par un élément de S, la p-partie de $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(F_S/F), \mathbb{C}^\times)$ est nulle.*

Voici une conséquence de la conjecture de Leopoldt pour le problème qui nous intéresse. D'abord introduisons la notion suivante (qui sera repris au chapitre suivant).

Définition II.3.5 – Soit S un ensemble fini de places de F et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation non-ramifiée en dehors de S. On dit qu'un relèvement $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ de $\overline{\rho}$ est S-minimal si ρ est non-ramifié en dehors de S.

Proposition II.3.6 – *Soient n un entier, S un ensemble fini de places de F contenant les diviseurs de n. Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation non-ramifiée en dehors de S. On suppose qu'il existe des groupes algébriques $\mathcal{H}'$, $\overline{\mathcal{H}}'$ et un diagramme de groupes algébriques, où les lignes sont exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathcal{H}' & \longrightarrow & \overline{\mathcal{H}'} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{H}} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

On suppose aussi qu'il existe $\overline{\rho'} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}'}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un relèvement de $\overline{\rho}$ non-ramifié en dehors de S. Alors sous la conjecture de Leopoldt, la représentation $\overline{\rho}$ admet un relèvement à $\mathcal{H}$ S-minimal.

Démonstration – Comme $\overline{\rho}$ provient d'une représentation de $\overline{\mathcal{H}'}$, son obstruction $\delta(\overline{\rho})$ à relever à $\mathcal{H}$ est dans l'image de $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_{F,S}, \mu_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_{F,S}, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$. Comme cette image est dans $\bigoplus_{\ell | n} \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ (les points de torsion non premières à n de $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_{F,S}, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$) et que S contient les places divisant n, la conjecture de Leopoldt implique que cet espace est nul. □

Corollaire II.3.7 – *Soit S un ensemble de places de F contenant les places divisant n. Alors sous la conjecture de Leopoldt, toute représentation $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ non-ramifiée en dehors de S admet un relèvement à $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ non ramifiée en dehors de S.*

Démonstration – Il suffit de prendre $\mathcal{H}' = \mathrm{SL}_n$ et $\overline{\mathcal{H}'} = \mathrm{PGL}_n$ et d'appliquer la proposition. □

II.3.B Le groupe de Tate-Shafarevich

Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation. On suppose que pour toute place v de F la restriction de $\overline{\rho}$ au groupe de décomposition admet un relèvement. On dira alors que les obstructions locales sont nulles. L'obstruction $\delta(\overline{\rho})$ est alors dans le groupe de Tate-Shafarevich

$$Ш^2(\mathrm{Gal}_F, \overline{\mathcal{N}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)) := \ker\left(\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \overline{\mathcal{N}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)) \to \prod_v \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_{F_v}, \overline{\mathcal{N}}(\overline{\mathbb{Q}}_p))\right),$$

où v parcourt toutes les places de F (archimédiennes et non-archimédiennes). L'annulation de ce groupe donne alors un principe de Hasse pour le problème de relèvement. Le calcul de ce groupe est conditionné par le théorème de Grunwald-Wang. On rappelle la définition de *cas spécial* du théorème de Grunwald-Wang (voir section IV.2.B ou ([AT09], Chap. IX)).

Définition II.3.8 – Soit F un corps de nombres, $n = 2^t n'$ un entier (avec n' impair) et S un ensemble fini de places de F. Le triplet (F, n, S) est alors un *cas spécial* (du théorème de Grunwald-Wang) si

(*i*) $F(\zeta_{2^t})/F$ n'est pas cyclique.

(*ii*) et pour toute place v de F (nécessairement 2-adique), si $F_v(\zeta_{2^t})/F_v$ n'est pas cyclique alors $v \in S$.

Une autre définition équivalente, et plus effective, est la suivante ([NSW08], Chap. IX).

Définition II.3.9 – On note $s = s_F$ le plus grand entier tel que $\eta_s \in F$, où $\eta_s := \zeta_{2^s} + \zeta_{2^s}^{-1}$. On dit que (F, n, S) est un *cas spécial* si les trois points suivants sont vérifiés :

(*i*) -1, $2+\eta_s$ et $-(2+\eta_s)$ ne sont pas des carrés dans F. Ce qui équivaut à dire que l'extension $F(\zeta_{2^{s+1}})/F$ est biquadratique.

(*ii*) $t \geq s + 1$ où $t = \mathrm{val}_2(n)$.

(*iii*) S contient S_F l'ensemble des places v divisant 2 tel que -1, $2 + \eta_s$ et $-(2 + \eta_s)$ ne sont pas des carrés dans F_v.

Le théorème de Grunwald-Wang (Théorème IV.2.5) indique alors qu'en dehors des cas spéciaux (F, n, S), un élément $x \in F^\times$ est une puissance n-ieme si c'est une puissance n-ieme en dehors de S. En utilisant l'isomorphisme de Kummer $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}_F, \mu_n(\overline{F})) \cong F^\times/(F^\times)^m$, cela revient à dire que le groupe de Tate-Shafarevich

$$Ш^1_S\big(\mathrm{Gal}_F, \mu_n(\overline{F})\big) = \ker\left(\mathrm{H}^1_S\left(\mathrm{Gal}_F, \mu_n(\overline{F})\right) \to \prod_{v\in S} \mathrm{H}^1_S\left(\mathrm{Gal}_{F_v}, \mu_n(\overline{F}_v)\right)\right)$$

est nul si (F, n, S) n'est pas un cas spécial. En utilisant la dualité de Poitou-Tate ([NSW08], Thm. 8.6.7), on obtient la proposition suivante.

Proposition II.3.10 – *Si N est un groupe fini de cardinal n et si (F, n, S) n'est pas un cas spécial du théorème de Grunwald-Wang, alors $Ш^2_S(\mathrm{Gal}_F, N(\overline{\mathbb{Q}}_p)) = 0$.*

En conséquence, si le noyau de $\pi : \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{H}}$ est fini, si en toute place non-archimédienne, $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ admet un relèvement et si $(F, \sharp\mathcal{N}, \emptyset)$ est non-spécial, alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement global.

Remarques II.3.11 – Indiquons quelques exemples de cas non-spéciaux.

1. Si $F = \mathbb{Q}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, le triplet $(\mathbb{Q}, n, \emptyset)$ n'est pas spécial, d'après le troisième point de la définition.
2. Si $\sqrt{-1} \in F$, alors pour tout n et S, le triplet (F, n, S) n'est pas spécial, d'après le premier point.
3. Comme $\eta_2 = 0$, on a toujours $s + 1 \geq 3$. En particulier si n n'est pas multiple de 8, alors (F, n, S) n'est pas un cas spécial, d'après le deuxième point.

On reviendra sur le théorème de Grunwald-Wang à la section IV.2.B, lorsque l'on parlera de relèvement de caractères d'ordre fini.

III – Relèvement avec conditions locales

III.1 Minimalité

Soit F un corps de nombres et comme précédemment une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}} \longrightarrow 0$$

de groupe algébriques réductifs sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$, avec $\mathcal{N}$ central de type multiplicatif. On s'intéresse aux représentations de Gal_F non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places et vérifiant les conditions de théorie de Hodge p-adique aux places divisant p et des conditions de ramification aux places ℓ-adiques. Ces conditions sont les mêmes que celles vérifiées par les représentations Galoisiennes issues de la géométrie algébrique. Rappelons le critère de Néron-Ogg-Shafarevich ([ST68], Theorem 1) : une variété abélienne sur un corps p-adique a bonne réduction si et seulement si la représentation Galoisienne sur le module de Tate ℓ-adique (pour un $\ell \neq p$ ou bien pour tout $\ell \neq p$) est non-ramifiée. Ce résultat admet l'analogue p-adique suivant ([CI99], Theorem 1) : une variété abélienne sur un corps p-adique a bonne réduction si et seulement si la représentation Galoisienne sur le module de Tate p-adique est cristalline. Cela suggère la définition suivante.

Définition III.1.1 – Soient K un corps p-adique, ℓ un nombre premier et $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

1. On dit que ρ est *de bonne réduction* si $\ell \neq p$ et ρ est non-ramifiée ou bien si $\ell = p$ et ρ est cristalline.
2. On dit que ρ est *semi-stable* si $\ell \neq p$ et l'inertie agit par des unipotents ou bien si $\ell = p$ et ρ est semi-stable au sens de Fontaine.

Pour les représentations d'un corps de nombres F, on distinguera les 3 catégories suivantes de représentations.

Définition III.1.2 – Soit $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{G}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation dans un groupe algébrique $\mathcal{G}$.

1. Elle est dite *géométrique* si elle est non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places et de de Rham aux places divisant p.
2. Elle est dite *semi-stable* si elle est non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places, si pour toute places ℓ-adique v, l'inertie I_v agit par des unipotents et si pour toute places p-adique v, la restriction $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ est semi-stable au sens de Fontaine.

3. Elle dite *de bonne réduction*, si elle est non-ramifiée en toutes les places ℓ-adiques et cristalline en toutes les places p-adiques.

La hiérarchie est alors la suivante :

$$\text{Bonne réduction} \Longrightarrow \text{Semi-stable} \Longrightarrow \text{Géométrique.}$$

Par exemple, le caractère cyclotomique p-adique de Gal_F est de bonne réduction.

Définition III.1.3 – Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation. On dira qu'un relèvement $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est *minimal* si pour toute place non-archimédienne v où $\overline{\rho}$ est de bonne réduction (au sens de la définition III.1.1), ρ est de bonne réduction en v.

Soit $\overline{\rho}$ est une représentation géométrique et S l'ensemble fini des places ramifiées de $\overline{\rho}$. On cherche des relèvements qui sont géométriques dont l'ensemble des places de ramification est le plus petit possible (au mieux égale à S). Un relèvement *géométrique minimal* (on dira parfois minimal s'il n'y a pas d'ambiguïté) de $\overline{\rho}$ est alors une représentation géométrique $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ qui relève $\overline{\rho}$ et dont les places de ramifications sont les mêmes que ceux de $\overline{\rho}$. On définit de même la notion de relèvement *semi-stable minimal* dans le cas où $\overline{\rho}$ est semi-stable.

On rappelle (Proposition II.2.3) que si K est un corps p-adique, alors toute ℓ-représentation non-ramifiée de Gal_K admet un relèvement non-ramifié. Dans le cas d'un corps global, l'exemple dans la partie IV.2 montre qu'il existe des représentations admettant un relèvement, mais qui n'admettent pas de relèvements minimaux.

Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ géométrique, S l'ensemble des places non-ramifiées de $\overline{\rho}$ et S_p l'ensemble des places p-adiques de F. Supposons que $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ admet un relèvement $\tilde{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. Les autres relèvements diffèrent de ρ d'un caractère $\chi : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. L'idée générale est de construire un caractère $\chi : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\chi.\tilde{\rho}$ soit géométrique minimal. Cette condition ne dépend que du comportement de χ sur les sous-groupes d'inerties. Si on suppose de plus que les obstructions locales sont nulles, alors pour toute places v il existe $\chi_v : \mathrm{Gal}_{F_v} \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\chi_v.(\tilde{\rho})_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ ait la bonne propriété. D'après la proposition II.1.5, le relèvement $\tilde{\rho}$ est non-ramifiée presque partout, donc les χ_v sont trivial sauf pour un nombre fini de v. Il faut alors interpoler les $(\chi_v)_v$, c'est-à-dire trouver $\chi : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un caractère global tel que $(\chi_v)_{|\mathrm{I}_{F_v}} = (\chi_v)_{\mathrm{I}_{F_v}}$ pour tout v.

III.2 Relèvements minimaux de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$

III.2.A Théorèmes pour $\mathbb{Q}$

Dans cette partie on considère le cas $F = \mathbb{Q}$. Ce cas est favorable car $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ est le produit direct de ses sous-groupes d'inertie, grâce à la théorie du corps de classes.

Proposition III.2.1 – *Si on note $(\mathrm{I}_p^{\mathrm{ab}})_{p\ premier}$ les sous-groupes d'inertie de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$, alors l'application canonique*

$$\prod_p \mathrm{I}_p^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$$

est un isomorphisme de groupes topologiques.

Démonstration – D'après la théorie de corps de classes ([Gra03], Theorem 3.7.3), le groupe $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ est isomorphe à $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}/\overline{\mathbb{Q}^\times.\mathbb{R}_{>0}}$ et les sous-groupes d'inertie correspondent à l'injection $\mathbb{Z}_p^\times \hookrightarrow \mathbb{I}/\overline{\mathbb{Q}^\times.\mathbb{R}_{>0}}$. Le sous-groupe $\mathbb{Q}^\times.\mathbb{R}_{>0}$ des idèles $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}} = \prod_p \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{R}^\times$ est formé des éléments $(\prod_p x_p \times r) \in \prod_p \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{R}^\times$ tels que

$$\forall p, \quad x_p.p^{-\mathrm{val}_p(x_p)} = \mathrm{sign}(r).$$

On en déduit alors facilement que $\mathbb{Q}^\times.\mathbb{R}_{>0}$ est fermé et que $\prod_p \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^\times.\mathbb{R}_{>0}$ est un isomorphisme. C'est un homéomorphisme car $\prod_p \mathbb{Z}_p^\times$ est ouvert. □

En conséquence si on se donne une famille de caractères $\chi_p : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ sur les sous-groupes de décomposition telle que χ_p est non-ramifiée pour presque tout p, alors il existe un unique caractère $\chi : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\chi_{|\mathrm{I}_p^{\mathrm{ab}}} = (\chi_p)_{|\mathrm{I}_p^{\mathrm{ab}}}$ pour tout p.

Sous l'hypothèse où les obstructions locales sont nulles, on a l'existence de relèvements minimaux.

Théorème III.2.2 – *Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation géométrique (resp. semi-stable, resp. de bonne réduction). On suppose que les obstructions locales sont nulles, c'est-à-dire que :*

(i) À la place infinie, la conjugaison complexe se relève.

(ii) Pour toute place $v \nmid p$, la restriction $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v}}$ admet un relèvement.

(iii) En p, la restriction $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}}$ se relève à $\mathcal{H}$ en une représentation de Hodge-Tate.

Alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement géométrique (resp. semi-stable, resp. de bonne réduction) minimal.

Remarques III.2.3 – Avant de démontrer le théorème, faisons d'abord quelques remarques.

1. Si $\mathcal{N}$ est un tore alors les conditions à l'infinie et en $v \nmid p$ sont automatiquement vérifiées (Propositions II.2.1 et II.2.6).
2. Si $\overline{\rho}$ est semi-stable ou de bonne réduction, alors alors condition en p est équivalente à demander que le sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate se relève (Théorème II.2.12).

Le théorème est une conséquence des théorèmes III.2.4 et III.2.5 suivants qui traitent respectivement le cas torique et le cas cyclique, dont la démonstration suit ces deux théorèmes.

Théorème III.2.4 – *On suppose que $\mathcal{N}$ est un tore. Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation géométrique (resp. semi-stable, resp. de bonne réduction). Alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement géométrique (resp. semi-stable, resp. de bonne réduction) minimal.*

Démonstration – D'après le Corollaire II.3.2, il existe un relèvement global $\hat{\rho} : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ non-ramifié presque partout.

Soit $\rho_p : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un relèvement de Hodge-Tate donné par hypothèse. D'après la Proposition II.2.13, on peut choisir ρ_p de de Rham (resp. semi-stable, resp. cristalline) si $\overline{\rho}$ est de de Rham (resp. semi-stable, resp. cristalline). On définit $\chi_p : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ par $\chi_p := \rho_p.\hat{\rho}^{-1}_{|\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}}$.

Pour v une place finie première à p, d'après la Proposition II.2.6, il existe un relèvement $\rho_v : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v} \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ de $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v}}$ et on peut choisir ρ_v semi-stable (resp. non-ramifiée) si $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v}}$ l'est. On pose alors $\chi_v := \rho_v.\hat{\rho}_{|\mathrm{I}_v}^{-1} : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v} \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. Comme $\hat{\rho}$ est non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places, les χ_v sont non-ramifiés pour presque tout v. On peut alors former le caractère $\chi : \prod_v \mathrm{I}_v^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, où $\mathrm{I}_v^{\mathrm{ab}}$ est le sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v}^{\mathrm{ab}}$, défini par

$$\chi((x_v)_v) = \prod_{\chi_v} (x_v).$$

D'après la Proposition III.2.1, le morphisme χ définit un caractère $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que la restriction à I_v est égale à χ_v pour tout v. La représentation $\chi.\rho$ est alors égal à ρ_v sur $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v}$, pour toute place finies v, et c'est donc un relèvement de $\overline{\rho}$ qui est (géométrique) minimal. □

Le cas où $\mathcal{N}$ est fini se traite de façon similaire, mais les hypothèses sont plus contraignantes.

Théorème III.2.5 – *On considère $\mathcal{N}$ fini. Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation géométrique (resp. semi-stable, resp. de bonne réduction). On suppose que :*

(i) La conjugaison complexe de $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{\mathbb{R}}}$ se relève.

(ii) Pour $v \nmid p$, la restriction $\overline{\rho}_{\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v}}$ se relève (cette condition est automatiquement vérifiée dans la cas semi-stable ou bonne réduction).

(iii) En p, $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}}$ admet un relèvement de Hodge-Tate.

Alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement géométrique (resp. semi-stable, resp. de bonne réduction) minimal.

Démonstration – On note n le cardinal de $\mathcal{N}$. Par hypothèse toutes les obstructions locales sont nulles, donc l'obstruction à relever vit dans le groupe de Tate-Shafarevich $\text{Ш}^2(\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$. Comme $(\mathbb{Q}, n, \emptyset)$ n'est pas un cas spécial du théorème de Grunwald-Wang (voir la remarque qui suit la Proposition II.3.10), le groupe $\text{Ш}^2(\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ est nul. On peut donc choisir un relèvement global $\hat{\rho} : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.

On choisit $\chi_p : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\chi_p.\hat{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}}$ soit de de Rham (resp. semi-stable, resp. cristalline). Pour une place $v \nmid p$ telle que $\overline{\rho}_{\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v}}$ est non-ramifiée, on pose $\chi_v := \hat{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v}}^{-1}$. Pour une place $v \nmid p$ telle que $\overline{\rho}_{\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v}}$ est semi-stable, d'après le théorème II.2.6, il existe χ_v tel que $\chi_v.\hat{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_v}}$ est semi-stable.

Il reste à interpoler les $(\chi_v)_v$ en $\chi : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ comme dans la preuve précédente, et $\chi.\hat{\rho}$ sera alors un relèvement de géométrique (resp. semi-stable, resp. de bonne réduction) minimal. □

Démontrons maintenant le théorème III.2.2.

Démonstration du Théorème III.2.2 – Comme le noyau $\mathcal{N}$ est de type multiplicatif, c'est un produit de tores et de groupes cycliques. Si $\mathcal{N}$ se décompose en produit $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$, il suffit de relever à travers $\pi_1 : \mathcal{H}/\mathcal{N}_1 \to \overline{\mathcal{H}}$ puis à travers $\pi_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}/\mathcal{N}_1$

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{N}_1 \arrow[d] & & \\ 1 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_2"] & \overline{\mathcal{H}} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathcal{N}_2 \arrow[r] & \mathcal{H}/\mathcal{N}_1 \arrow[r, "\pi_1"'] & \overline{\mathcal{H}} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} .$$

Par hypothèses, les obstructions locales sont nulles pour le relèvement $\mathcal{H} \to \overline{\mathcal{H}}$, donc a fortiori elles sont nulles pour le relèvement $\mathcal{H}/\mathcal{N}_1 \to \overline{\mathcal{H}}$. En appliquant le théorème III.2.5, il existe $\rho_1 : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{H}/\mathcal{N}_1(\overline{\mathbb{Q}_p})$ un relèvement géométrique (resp. semi-stable, resp. de bonne réduction) minimal de $\overline{\rho}$.

En appliquant le Théorème III.2.4, il existe une représentation $\rho_2 : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$ un relèvement géométrique (resp. semi-stable, resp. de bonne réduction) minimal de ρ_1. C'est alors un relèvement géométrique (resp. semi-stable, resp. de bonne réduction) minimal de $\overline{\rho}$. $\square$

Dans le cas $F = \mathbb{Q}$, si $\overline{\rho}$ est semi-stable ou de bonne réduction, on peut noter qu'un relèvement minimal est unique. En effet, comme les relèvements locaux sont uniques sur l'inertie (Théorème II.2.12 et la remarque qui suit le Théorème II.2.6), deux relèvements minimaux diffèrent par un caractère non-ramifié partout. Or il n'y a pas de caractère de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$ non-ramifié partout. Le théorème III.2.4 s'applique en particulier dans le cas $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n$ et on a le corollaire suivant.

Corollaire III.2.6 – *Toute représentation $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ de de Rham ou semi-stable ou de bonne réduction admet une relèvement minimal à $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.*

Démonstration – Il suffit d'appliquer le théorème III.2.4 en remarquant que tout sous-groupe à paramètre de PGL_n admet un relèvement à GL_n. $\square$

III.2.B Enveloppe algébrique de représentations géométriques de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$

Dans ([Win97], Prop. 3.2.1), J-P, Wintenberger démontre la proposition suivante (qui est le lemme principal pour démontrer le Théorème II.2.12). On rappelle qu'un groupe algébrique semi-simple connexe $\mathcal{G}$ est dit *simplement connexe* ([Hum75], Chap. XI.31) si le groupe des caractères $X(\mathcal{T})$ (avec $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}$ un tore maximal) est égal au groupe des poids Λ (le quotient $\Lambda/X(\mathcal{T})$ étant appelé le groupe fondamental de $\mathcal{G}$). Cela revient à dire que si $\mathcal{G}'$ est un groupe algébrique connexe et $f : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ est une isogénie, alors f est un isomorphisme [Mil11a].

Proposition III.2.7 ([Win97], Prop. 3.2.1) – *Soit $\mathcal{H}$ un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}_p$ et $\mu : \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathcal{H}$ un sous-groupe à paramètre. Alors il existe un groupe algébrique $\mathcal{H}'$ réductif connexe tel que $\mathrm{D}(\mathcal{H}')$ soit simplement connexe et un morphisme $f : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ tel que f induise une isogénie centrale sur les groupes dérivés $\mathrm{D}(\mathcal{H}') \to \mathrm{D}(\mathcal{H})$ et un sous-groupe à paramètre $\mu' : \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathcal{H}'$ relevant μ.*

Nous étendons ce résultat au cas de relèvement de représentations (Théorème III.2.9). Le lemme préliminaire suivant permet de passer du cas d'un noyau fini au cas où le noyau est un tore.

Lemme III.2.8 – *Soit une extension centrale $\mathcal{H}'$ d'un groupe algébrique réductif $\mathcal{H}$ par $\mathcal{N}$ un groupe de type multiplicatif :*

$$1 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 1\ .$$

On suppose que $\mathcal{H}'$ est de groupe dérivée simplement connexe. Alors il existe $\mathcal{T}$ un tore contenant $\mathcal{N}$ et un groupe algébrique $\mathcal{H}''$ contenant $\mathcal{H}'$ tels que la diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1\ , \\ 1 \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[r] & \mathcal{H}'' \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{III.1}$$

et tel que $\mathcal{H}''$ soit réductif de groupe dérivée simplement connexe.

Démonstration – Comme $\mathcal{N}$ est de type multiplicatif, on peut le plonger dans un tore $\mathcal{T}$. On pose alors $\mathcal{H}''$ l'image de $\mathcal{H}'$ à travers $\mathrm{Ext}(\overline{\mathcal{H}}, \mathcal{N}) \to \mathrm{Ext}(\overline{\mathcal{H}}, \mathcal{T})$ (c'est le produit $\mathcal{H}' \times \mathcal{T}$ quotienté par le sous-groupe $\{(n,n) | n \in \mathcal{N}\}$). On obtient alors le diagramme commutatif (III.1).

Le groupe $\mathcal{H}''$ est alors réductif : en effet, son radical unipotent $\mathrm{R_u}(\mathcal{H}'')$ est envoyé dans le radical unipotent de $\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H}$ est réductif, on en déduit que $\mathrm{R_u}(\mathcal{H}'') \subset \mathcal{T}$. Comme $\mathcal{T}$ est un tore, on en déduit que $\mathrm{R_u}(\mathcal{H}'') = 0$. Comme $\mathcal{H}''$ est un quotient de $\mathcal{T} \times \mathcal{H}'$, le groupe dérivée $\mathrm{D}(\mathcal{H}'')$ est égale au groupe dérivée $\mathrm{D}(\mathcal{T} \times \mathcal{H}') \simeq \mathrm{D}(\mathcal{H}')$ et est donc simplement connexe. □

Par exemple, si on a $\mathcal{H} = \mathrm{SL}_2$ et $\overline{\mathcal{H}} = \mathrm{PGL}_2$, alors on peut prendre $\mathcal{H}' = \mathrm{GL}_2$. Cependant si on relève une représentation à $\mathcal{H}'$, on ne sait a priori rien sur les relèvements dans $\mathcal{H}$. Le théorème suivant montre que l'on peut relever les représentations semi-stables vers un groupe algébrique de groupe dérivé simplement connexe.

Théorème III.2.9 – *Soient $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ un groupe réductif et $\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation semi-stable. Alors il existe :*

(i) $\mathcal{H}'_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ *un groupe réductif connexe tel que* $\mathrm{D}(\mathcal{H}')$ *soit simplement connexe.*

(ii) $f : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ *un morphisme de groupes algébrique induisant sur les groupes dérivée une isogénie centrale* $\mathrm{D}(\mathcal{H}') \to \mathrm{D}(\mathcal{H})$.

(iii) Un relèvement $\rho' : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{H}'(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *géométrique de* $\overline{\rho}$ *par* f.

Démonstration – L'enveloppe algébrique $\overline{\rho(\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}})}^{\mathrm{Zar}}$ est connexe. En effet, si on note $\mathcal{G}$ le groupe des composantes connexes de $\overline{\rho(\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}})}^{\mathrm{Zar}}$, alors la composée de ρ et de $\overline{\rho(\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}})}^{\mathrm{Zar}} \to \mathcal{G}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est une représentation semi-stable de ρ dans $\mathcal{G}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. Or $\mathcal{G}$ est un groupe fini de type multiplicatif et tout caractère semi-stable (au sens ℓ-adique et p-adique) du groupe Galois d'un corps local est non-ramifié. La représentation $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{G}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est alors non-ramifiée partout, donc trivial, et on en déduit que $\overline{\rho(\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}})}^{\mathrm{Zar}}$ est connexe. Quitte à remplacer $\mathcal{H}$ par sa composante neutre, on peut donc supposer que $\mathcal{H}$ est connexe.

Sur le groupe de décomposition $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}$, la Proposition III.2.7 montre l'existence de $\mathcal{H}'$ et de f qui vérifie les conditions (i) et (ii), et tel que le sous-groupe à un paramètre $\mu : \mathbb{G}_m \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ défini par la décomposition de Hodge-Tate de $\overline{\rho}$ se relève par f en un sous-groupe à un paramètre $\mu' : \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathcal{H}'$.

On note $\mathcal{N}$ le noyau de f. D'après le lemme III.2.8, on peut supposer que $\mathcal{N}$ est un tore. Par choix de $(\mathcal{H}', f)$ et en appliquant le théorème III.2.4, on peut donc relever $\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ à $\mathcal{H}'(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ en une représentation semi-stable. □

Une conséquence du théorème est que le groupe pro-algébrique associé à la catégorie Tannakienne des représentations géométriques de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$ a une partie semi-simple simplement connexe. En effet d'après le théorème c'est la limite projective de tels groupes.

III.3 Lemme de prolongement de caractères

Dans ce paragraphe on donne une condition nécessaire et suffisante (Proposition III.3.1) pour interpoler une famille de caractères définis sur les sous-groupes de décomposition. Elle sera utilisée dans la partie suivante. C'est une conséquence de la théorie du corps de classes.

Soit F un corps de nombres et Γ un groupe abélien topologique séparé. Pour toute v place non-archimédienne de F on se donne Gal_{F_v} un sous-groupe de décomposition et $\chi_v : \mathrm{Gal}_{F_v} \to \Gamma$ un morphisme de groupe continu tel que pour presque tout v, le caractère χ_v est trivial sur le groupe d'inertie. On peut considérer χ_v comme un caractère de $F_v^\times$ via la théorie du corps de classes. La restriction à l'inertie correspond alors à un caractère $\mathcal{O}_v^\times \to \Gamma$ encore noté χ_v. On note $\mathcal{O}_F^+$ les unités positives de F (l'ensemble des $x \in \mathcal{O}_F^\times$ tel que $\sigma(x) > 0$ pour tout $\mathbb{Q}$-plongement $\sigma : F \to \mathbb{R}$).

Proposition III.3.1 – *On suppose que Γ est n-divisible avec n le nombre de classes de F. Avec les données précédentes, les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Il existe un morphisme de groupe continu $\chi : \mathrm{Gal}_F \to \Gamma$ tel pour toute place finie v, on a $\chi_{|\mathrm{I}_v} = (\chi_v)_{|\mathrm{I}_v}$.*
- (ii) *Pour tout x dans $\mathcal{O}_F^+$, on a $\prod_{v<\infty} \chi_v(x) = 1$.*

Démonstration – On considère la suite exacte suivante, où les flèches sont des morphismes de groupes continus et la suite est exacte dans la catégorie des groupes :

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_F^+ \longrightarrow F^\times \times \prod_{v<\infty} \mathcal{O}_v^\times \times \prod_{v|\infty} (F_v^\times)^\circ \longrightarrow \mathbb{A}_F^\times := \prod_{v<\infty} F_v^\times \times \prod_{v|\infty} F_v^\times ,$$

où $(F_v^\times)^\circ$ désigne la composante connexe neutre et où le produit $\prod\limits_{v<\infty} F_v^\times$ est sous-entendu restreint aux unités. Les morphismes dans le diagramme précédent sont les suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_F^+ & \longrightarrow & F^\times \times \prod\limits_{v<\infty} \mathcal{O}_v^\times \times \prod\limits_{v|\infty} (F_v^\times)^\circ \\ x & \longmapsto & x \times \prod\limits_{v<\infty} x^{-1} \times \prod\limits_{v|\infty} x^{-1} \end{array} ,$$

$$\begin{array}{ccc} F^\times \times \prod\limits_{v<\infty} \mathcal{O}_v^\times \times \prod\limits_{v|\infty} (F_v^\times)^0 & \longrightarrow & \prod\limits_{v<\infty} F_v^\times \times \prod\limits_{v|\infty} F_v^\times \\ x \times \prod\limits_{v<\infty} y_v \times \prod\limits_{v|\infty} z_v & \longmapsto & \prod\limits_{v<\infty} x.y_v \times \prod\limits_{v|\infty} x.z_v \end{array},$$

En quotientant par $F^\times$ et $\prod\limits_{v|\infty} (F_v^\times)^\circ$, elle induit la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_F^+ \longrightarrow \prod_{v<\infty} \mathcal{O}_v^\times \longrightarrow A := \Big(\prod_{v<\infty} F_v^\times \times \prod_{v|\infty_\mathbb{R}} \{\pm 1\} \Big) / F^\times ,$$

où A est le groupe de classes d'idèles de F quotienté par sa composante neutre, où $\infty_\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des places réelles et où l'injection de $F^\times$ dans $\prod\limits_{v<\infty} F_v^\times \times \prod\limits_{v|\infty_\mathbb{R}} \{\pm 1\}$ se fait par l'inclusion diagonale et en prenant de le signe les composantes infinies. Le quotient séparé de A est $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$. On en déduit que (i) implique (ii).

Montrons l'implication réciproque. On prend $v_1, \ldots, v_h$ des places finies de F tel que les idéaux premiers associés engendre le groupe de classes de F et on note π_i une uniformisante associée à v_i. D'après le lemme d'approximation ([Neu99], Chap. II, 3.4), on a une surjection continue

$$\begin{array}{ccc} \Big(\prod\limits_{v<\infty} \mathcal{O}_v^\times \Big) / \mathcal{O}_F^+ \times \prod\limits_{i=1}^h \pi_i^\mathbb{Z} & \longrightarrow & A := \Big(\prod\limits_{v<\infty} F_v^\times \times \prod\limits_{v|\infty_\mathbb{R}} \{\pm 1\} \Big) / F^\times \\ \big(\prod\limits_{v<\infty} x_v \mod \mathcal{O}_F^+ \big) \times \prod\limits_{i=1}^h \pi_i^{\alpha_i} & \longmapsto & \big(\prod\limits_{v<\infty} x'_v \times \prod\limits_{v|\infty_\mathbb{R}} 1 \big) \mod F^\times \end{array},$$

où $x'_v = x_v$ si $v \notin \{v_i : i = 1, \ldots, h\}$ et $x'_v = x_v \pi_i^{\alpha_i}$ si $v = v_i$. On note N son noyau.

Lemme III.3.2 – *La bijection* $\left(\frac{\prod_{v<\infty} \mathcal{O}_v^\times}{\mathcal{O}_F^+} \times \prod\limits_{i=1}^h \pi_i^\mathbb{Z} \times \prod\limits_{v|\infty_\mathbb{R}} \{\pm 1\} \right) / N \to A$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration – On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \prod\limits_{v<\infty} \mathcal{O}_v^\times \times \prod\limits_{i=1}^h \pi_i^\mathbb{Z} \times \prod\limits_{v|\infty_\mathbb{R}} \{\pm 1\} & \xrightarrow{\quad u \quad} & \prod\limits_{v<\infty} F_v^\times \times \prod\limits_{v|\infty_\mathbb{R}} \{\pm 1\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Big(\prod\limits_{v<\infty} \mathcal{O}_v^\times \Big) / \mathcal{O}_F^+ \times \prod\limits_{i=1}^h \pi_i^\mathbb{Z} \times \prod\limits_{v|\infty_\mathbb{R}} \{\pm 1\} & \longrightarrow & A = \Big(\prod\limits_{v<\infty} F_v^\times \times \prod\limits_{v|\infty_\mathbb{R}} \{\pm 1\} \Big) / F^\times \end{array}$$

Pour Ω un ouvert de $\left(\frac{\prod_{v<\infty} \mathcal{O}_v^\times}{\mathcal{O}_F^+} \times \prod\limits_{i=1}^h \pi_i^\mathbb{Z} \times \prod\limits_{v|\infty_\mathbb{R}} \{\pm 1\} \right) / N$, on note Ω' son antécédent dans

$$\prod_{v<\infty} \mathcal{O}_v^\times \times \prod_{i=1}^h \pi_i^\mathbb{Z}$$

et Ω'' l'image de Ω' dans $\prod\limits_{v<\infty}' F_v^\times \times \prod_{v|\infty_\mathbb{R}} \{\pm 1\}$. Alors Ω'' est ouverte car l'application u est ouverte et son image dans A est ouverte car A est un quotient. Ce qui prouve que l'image de Ω dans A est ouverte. □

Supposons maintenant (ii). Les $(\chi_v)_v$ définissent un caractère continue $\chi : (\prod_v \mathcal{O}_v^\times)/\mathcal{O}_F^+ \to \Gamma$. Comme Γ est n-divisible et que le quotient de A par $(\prod_v O_v^\times)/\mathcal{O}_F^+$ est égal au groupe de classes, on peut prolonger χ à $(\prod_v \mathcal{O}_v^\times)/\mathcal{O}_F^+ \times \prod_{i=1}^h \pi_i^\mathbb{Z} \to \Gamma$ de sorte que le noyau contienne N.

On a alors un caractère de A d'après le lemme, ce qui définit un caractère du groupe de Gal_F qui vérifie (i). □

III.4 Résultats pour les corps de nombres

Dans cette section, on s'intéresse au cas général où F est un corps de nombre. Cependant la notion de minimalité introduite plus haut (Définition III.1.3) est trop forte pour espérer l'existence d'un tel relèvement. On introduit une autre notion de minimalité légèrement plus faible.

Définition III.4.1 – Soit S un ensemble fini de places de F et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation. Un relèvement $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est dit *S-minimal* si pour toute place $v \notin S$ tel que $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ est non-ramifiée, le relèvement $\rho_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ est aussi non-ramifié.

La différence avec la minimalité est lorsque ρ est ramifiée en une place de S alors que $\overline{\rho}$ est non-ramifiée. De même que le cas minimal, si $\overline{\rho}$ est géométrique, on parlera de relèvement géométrique S-minimal. Pareil si $\overline{\rho}$ est semi-stable ou de bonne réduction. Les résultats présentés ici ne concernent que les corps quadratiques imaginaires F. Dans ce cas $\mathcal{O}_F^+$, le groupe des unités totalement positifs, est fini. Si v est une place de caractéristique résiduelle première avec $\sharp\mathcal{O}_F^+$ et Γ est un groupe divisible par $\sharp(k_{F_v}^\times/\mathcal{O}_F^+)$, alors tout caractère $\Phi : \mathcal{O}_F^+ \to \Gamma$ se prolonge en un caractère $F_v^\times \to \Gamma$. En effet on a la décomposition $F_v^\times = (k_{F_v})^\times \times U_v^1 \times \pi_v^\mathbb{Z}$, où l'inclusion $\mathcal{O}_F^+ \to F_v^\times$ est à valeur dans $(k_{F_v})^\times$. Comme Γ est suffisamment divisible, on peut prolonger Φ à $(k_{F_v})^\times$ puis à $F_v^\times$.

Comme dans le cas $F = \mathbb{Q}$ on sépare le cas où $\mathcal{N}$ est un tore (Théorème III.4.2) et où $\mathcal{N}$ est cyclique (Théorème III.4.3).

Théorème III.4.2 – *Supposons que $\mathcal{N}$ est un tore. Soient F un corps quadratique imaginaire, S un ensemble fini de places de F contenant l'ensemble S_p des places p-adiques. Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation géométrique non-ramifiée en dehors de S. On suppose que $S \setminus S_p$ contient une place v_0 dont la caractéristique résiduelle est première avec $\sharp\mathcal{O}_F^+$. Alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement géométrique S-minimal.*

Démonstration – Comme le noyau est un tore d'après le corollaire II.3.2, il existe une relèvement $\rho_0 : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ non-ramifié en dehors d'un ensemble fini de places.

On définit les ensembles de places suivants :

– S_p l'ensemble des places divisant p.

- S_{nr} l'ensemble des places où ρ_0 est non-ramifiée
- S_r l'ensemble (fini) des places ne divisant pas p où ρ_0 est ramifiée et où $\overline{\rho}$ est non-ramifiée.
- S_0 l'ensemble des places ne divisant pas p où ρ_0 est ramifiée.
- S_∞ l'ensemble des places infinies de F.

Soit $v_0 \in S \setminus S_p$ comme dans l'hypothèse.

D'après le Corollaire II.2.15, on peut prendre $\rho_v : \mathrm{Gal}_{F_v} \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un relèvement semi-stable de $\overline{\rho}_{|F_v}$. On note alors

$$\chi_v : \mathrm{Gal}_{F_v} \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p), \quad \sigma \mapsto \rho_v(\sigma).\rho_0(\sigma)^{-1}.$$

Pour $v \in S_{nr}$, on prend $\chi : \mathrm{Gal}_{F_v} \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ le caractère trivial. Pour $v \in S_r$, on note

$$\begin{array}{rccc} \chi_v : & \mathrm{Gal}_{F_v} & \longrightarrow & \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \\ & \sigma & \longmapsto & \rho_0(\sigma)^{-1} \end{array}.$$

Pour chaque $v \in \Sigma := S_p \cup S_{nr} \cup S_r$, on voit χ_v comme un caractère de $F_v^\times$.

Décomposons les idèles de F en $\mathbb{A}^\times := \mathbb{A}_\Sigma^\times \times \mathbb{A}_\infty^\times \times \mathbb{A}_{S_0}^\times$, où chaques facteurs sont respectivement les idèles à support dans les places Σ, ∞ et S_0. Les $(\chi_v)_{v\in\Sigma}$ définissent un caractère

$$\chi_\Sigma : \mathbb{A}_\Sigma^\times \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}_p}).$$

Comme $\mathcal{N}$ est un tore, la restriction $(\chi_\Sigma^{-1})_{|\mathcal{O}_F^+} : \mathcal{O}_F^+ \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ se prolonge à $F_{v_0}^\times$, d'après la remarque ci-dessus. On note χ_{v_0} un tel prolongement. Pour $v \in S_0$ tel que $v \neq v_0$, on prend $\chi_v : \mathcal{O}_v^\times \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ le caractère trivial. Alors d'après la proposition III.3.1, il existe un caractère $\chi : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que pour tout $v \in \Sigma$, $\chi_{|\mathrm{Gal}_{F_v}} = \chi_v$. La représentation $\rho_0 \otimes \chi$ est alors un relèvement cherché. $\square$

L'exemple IV.2.3 montre que l'hypothèse que S non-vide est essentielle : il existe des représentation non ramifiée en dehors de p qui ne se relèvent pas en une représentation non ramifiée en dehors de p.

Théorème III.4.3 – *Supposons que $\mathcal{N}$ est cyclique de cardinal n. Soient F un corps quadratique imaginaire, S un ensemble fini de places de F contenant l'ensemble S_p des places p-adiques. Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation géométrique non-ramifiée en dehors de S. On suppose que :*

(i) *n est premier avec le nombre de classes de F.*

(ii) *Pour tout $v|p$, $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ admet un relèvement de Hodge-Tate.*

(iii) *Pour toute place réelle, la conjugaison complexe se relève.*

(iv) *$(F, n, \emptyset)$ n'est pas un cas spécial du théorème de Grunwald-Wang.*

(v) *$S \setminus S_p$ contient une place v_0 dont la caractéristique résiduelle est première avec $\sharp\mathcal{O}_F^+$ et avec $\sharp(k_{F_v}^\times/\mathcal{O}_F^+)$.*

Alors $\overline{\rho}$ admet un relèvement géométrique minimal

Démonstration – Comme les obstructions à un relèvement local sont nulles, la connexion $\delta(\overline{\rho})$ est un élément de

$$\text{Ш}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) := \ker(\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \prod_v \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_{F_v}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

où v parcourt toutes les places de F. Comme (F, n) n'est pas un cas spécial, d'après IV.2.7, ce groupe est nul. Il existe alors un relèvement global $\rho_0 : \mathrm{Gal}_F \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.

Il suffit terminer comme dans la preuve précédente en tordant ρ_0 par un caractère convenable.
□

On traite le cas cristallin au chapitre 5, où l'on obtient un résultat de minimalité sous condition d'agrandir F.

Chapitre IV

IV – Exemples

IV.1 Cas de $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n$

Dans le cas où $\mathcal{H} = \mathrm{GL}_n$ et $\overline{\mathcal{H}} = \mathrm{PGL}_n$, les théorèmes III.2.4 et III.4.2 s'appliquent favorablement pour les représentations semi-stables. En effet d'après le lemme suivant, les obstructions locales sont toujours nulles.

Lemme IV.1.1 – *Tout cocaractère (ou sous-groupe à un paramètre)* $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \to (\mathrm{PGL}_n)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ *se relève à* $(\mathrm{GL}_n)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$.

Démonstration – Soit $\mu : (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \to \mathrm{PGL}_{n\overline{\mathbb{Q}}_p}$ un sous-groupe à un paramètre. Soit $\overline{T}$ un tore maximale de PGL_n contenant l'image de μ et T le tore maximal de GL_n qui est envoyé sur T'. En identifiant $X_*(T)$ à $\mathbb{Z}^n$ et $X_*(\overline{T})$ à $\mathbb{Z}^{n-1}$, l'application $X_*(T) \to X_*(\overline{T})$ s'identifie à

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n \\ (p_i)_{i\in[1,n]} & \longmapsto & (p_j - p_n)_{j\in[1,n-1]} \end{array}.$$

Donc l'application $X_*(T) \to X_*(\overline{T})$ est surjective, et μ se relève. □

Proposition IV.1.2 – *Si* $F = \mathbb{Q}$ *et si* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *est une représentation géométrique, semi-stable ou de bonne réduction. Alors la représentation* $\overline{\rho}$ *admet un relèvement* $\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *minimal.*

Démonstration – C'est une conséquence du Théorème III.2.4 et du lemme précédent. □

En particulier pour le cas de $\mathrm{GL}_2 \to \mathrm{PGL}_2$, on obtient le résultat suivant (l'analogue Galoisien de celui de Ramakrishnan [Ram14] pour le cas de $\mathbb{Q}$). Il existe une représentation fidèle Ad de PGL_2 de dimension 3 est obtenue de la façon suivante. On note $V = \mathrm{Sym}^2(\mathbb{A}^2)$ le carré symétrique de l'espace vectoriel de dimension 2. Alors V est dimension 3 et on le muni de la forme quadratique $q(x \otimes y) = \det(x, y)^2$ où det un élément quelconque non nulle de $\Lambda^2(\mathbb{A}^2)$. Alors l'application $\mathrm{GL}(\mathbb{A}^2) \to \mathrm{GL}(V), f \mapsto \frac{1}{\det f}\mathrm{Sym}^2 f$ a pour noyau $\mathbb{G}_m$ et induit un isomorphisme de groupe algébriques $\mathrm{PGL}(\mathbb{A}^2) \simeq \mathrm{SO}(V, q)$.

Corollaire IV.1.3 – *On suppose que* $F = \mathbb{Q}$. *Soit* $\mathrm{Ad} : (\mathrm{GL}_2)_{/\overline{\mathbb{Q}}_p} \to (\mathrm{GL}_3)_{/\overline{\mathbb{Q}}_p}$ *la représentation adjointe définit ci-dessus. Soit* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_3(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *une représentation géométrique auto-duale (i.e.* $\overline{\rho}$ *préserve une forme quadratique). Alors il existe* $\chi : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *un caractère,* $\sigma \in \mathrm{GL}_3(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *et* $\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *une représentation tel géométrique tels que* $\sigma.\overline{\rho}.\sigma^{-1} = \mathrm{Ad}(\rho) \otimes \chi$ *et* ρ *soit minimale.*

Démonstration – Par hypothèse $\overline{\rho}$ préserve une forme quadratique q. En posant $\chi = \det\overline{\rho}$, la représentation $\chi.\overline{\rho}$ est à valeurs dans $\mathrm{SO}(q)$. Comme toutes les formes quadratiques sont conjugués, il existe $\sigma \in\in \mathrm{GL}_3(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\sigma.\chi.\overline{\rho}.\sigma^{-1}$ soit à valeurs dans l'image de Ad. Il reste alors d'appliquer la proposition précédente à $\sigma.\chi.\overline{\rho}.\sigma^{-1}$. □

IV.2 Racines de caractères

Ici on étudie le cas où $\pi : \mathbb{G}_\mathrm{m} \xrightarrow{x\mapsto x^n} \mathbb{G}_\mathrm{m}$ ou bien $\pi : \mu_{nm} \xrightarrow{x\mapsto x^n} \mu_m$. Dans le deuxième cas, en considérant le corps de décomposition de la représentation, cela peut se ramener à chercher une sur-extension cyclique d'une extension cyclique.

IV.2.A Cas de $\mu_4 \to \mu_2$

Commençons par le cas où $\mathcal{H} = \mu_4$, $\overline{\mathcal{H}} = \mu_2$ et $\pi : x \mapsto x^2$. On se donne une représentation $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \mu_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ non-triviale. On peut aussi voir $\overline{\rho}$ comme un caractère d'ordre 2 à valeurs dans $\mathbb{G}_\mathrm{m}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. On cherche une racine carrée de $\overline{\rho}$, c'est-à-dire $\rho : \mathrm{Gal}_F \to \mu_4(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\rho^2 = \overline{\rho}$. La représentation $\overline{\rho}$ se quotiente à travers une extension quadratique $F[\sqrt{\varepsilon}]$, avec $\varepsilon \in F^\times\backslash(F^\times)^2$. L'existence d'un relèvement équivaut alors à l'existence d'une extension de E/F cyclique d'ordre 4 contenant $F[\sqrt{\varepsilon}]$.

Théorème IV.2.1 – *Soient $\varepsilon \in F^* \setminus (F^*)^2$, $\sqrt{\varepsilon}$ une racine carré de ε dans $\overline{F}$ et $a, b \in F$ tel que $a + b\sqrt{\varepsilon} \notin F(\varepsilon)^2$. Soit α une racine carrée de $a + b\sqrt{\varepsilon}$. Alors $F[\alpha]/F$ est une extension galoisienne cyclique d'ordre 4 si et seulement s'il existe $c \in F^\times$ tel que $a^2 - b^2\varepsilon = c^2\varepsilon$.*

Démonstration – Voir [[Ser08], Théorème 1.2.4]. On présente ici une autre démonstration.

Comme $\alpha^2 - a = b\sqrt{\varepsilon}$, il est clair que $F[\alpha]$ contient $F[\sqrt{\varepsilon}]$.

Supposons que $a^2 - b^2\varepsilon = c^2\varepsilon$. On note β une racine carré de $a - b\sqrt{\varepsilon}$ dans $\overline{F}$. Alors on a $\alpha\beta = \pm c\sqrt{\varepsilon}$, et on en déduit que $F(\alpha)$ est le corps de décomposition sur F de $(X^2 - a)^2 - b^2\varepsilon$ dont les racines sont $(\alpha, -\alpha, \beta, -\beta)$. On considère les extensions Galoisiennes :

$$F \subset F[\sqrt{\varepsilon}] \subset F[\alpha].$$

On note $\sigma \in \mathrm{Gal}(F[\sqrt{\varepsilon}]/F)$ l'automorphisme non trivial de $F[\sqrt{\varepsilon}]$. On prolonge σ en un automorphisme de $F[\alpha]$ en envoyant α sur β. L'automorphisme σ est alors d'ordre 4 car il correspond au cycle $(\alpha, \beta, -\alpha, -\beta)$

Supposons que $F(\alpha)/F$ est Galoisienne cyclique d'ordre 4. Soit σ un générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F(\alpha)/F)$. On note $\beta := \sigma(\alpha)$. On a alors $\beta^2 = \sigma(\alpha^2) = a - b\sqrt{\varepsilon}$ (on a $\sigma(\sqrt{\varepsilon}) = -\sqrt{\varepsilon}$, car σ est non trivial dans $\mathrm{Gal}(F(\varepsilon)/F)$). Donc $(\alpha\beta)^2 = a^2 - b^2\varepsilon$. De plus σ^2 est l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(F(\alpha)/F(\sqrt{\varepsilon}))$, donc $\sigma^2(\alpha) = -\alpha$ et on en déduit que $\alpha\beta \in F(\sqrt{\varepsilon})$. Donc il existe $u, v \in F$ tel que $\alpha.\beta = u + v\sqrt{\varepsilon}$ et $(u + v\sqrt{\varepsilon})^2 = a^2 - b^2\varepsilon$. En utilisant le fait que $\alpha\beta \notin F$, on en déduit que $u = 0$ et que v est un carré. □

En particulier $F[\sqrt{\varepsilon}]/F$ admet une sur-extension cyclique d'ordre 4 si et seulement si ε est somme de deux carrés et on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire IV.2.2 – *Le caractère* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \mathrm{Gal}(F[\sqrt{\varepsilon}]/F) \simeq \mu_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *admet une racine carré si et seulement si* ε *est somme de deux carrés dans* F.

Exemple IV.2.3 – Prenons $F = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le caractère donné par l'extension quadratique $E := F[\sqrt{-1}]$. L'extension E/F admet une sur-extension cyclique de degré 4, à savoir $\mathbb{Q}[\zeta_{20}] = F[\sqrt{-1}, \sqrt{10+2\sqrt{5}}]$. Comme E est le corps de classes de Hilbert de F, la représentation $\overline{\rho}$ est de bonne réduction (ce qui revient à dire non-ramifié partout puisque l'image est finie) et n'admet pas de relèvement de bonne réduction (car toute extension cyclique de degré 4 est ramifiée).

Exemple IV.2.4 – Prenons $F = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le caractère donné par l'extension quadratique $E := F[\sqrt{-1}]$. Le corps F est de nombres de classes 1 et le caractère $\overline{\rho}$ est non-ramifiée en toutes les places non-archimédiennes. Ce caractère n'admet pas de racine carré d'après le Théorème précédent (on peut aussi le voir en constant que la conjugaison complexe agit non-trivialement).

IV.2.B Grunwald-Wang

La recherche de racines n-ieme d'un caractère d'ordre fini est un problème dual à la recherche de racine n-ieme d'un élément de $F^\times$. On rappelle d'abord cette dualité.

On se donne S un ensemble fini de places de F et n un entier. on note $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}_F, \mathbb{C}^\times)^n$ l'ensemble des puissances n-ieme des caractères continus $\mathrm{Gal}_F \to \mathbb{C}^\times$ et $Q(F,n,S)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}_F, \mathbb{C}^\times)$ formé des caractères $\chi : \mathrm{Gal}_F \to \mathbb{C}^\times$ tel que pour toute places $v \notin S$ la restriction $\chi_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ est une puissance n-ieme dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}_{F_v}, \mathbb{C}^\times)$. L'espace $Q(F,n,S)$ contient alors $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}_F, \mathbb{C}^\times)^n$ et le quotient $\frac{Q(F,n,S)}{\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}_F,\mathbb{C}^\times)^n}$ est l'obstruction locale-globale à trouver une racine n-ieme d'un caractère.

On note $P(F,n,S)$ l'ensemble des éléments $x \in F^\times$ tel que pour tout $v \notin S$, x est une puissance n-ieme dans ${F_v}^\times$. De la même manière $P(F,n,S)$ contient $(F^\times)^n$ et le quotient $\frac{P(F,n,S)}{(F^\times)^n}$ est l'obstruction locale-globale pour qu'un élément de $F^\times$ ait une racine n-ieme. Le calcul de ce quotient est donné par le théorème de Grunwald-Wang.

Théorème IV.2.5 (Grunwald-Wang) – *Soient* $F/\mathbb{Q}$ *un corps de nombres* $n = 2^t n'$ *un entier (avec* n' *impaire). Soit* S *un ensemble fini de places de* F *(*S *ne contient pas nécessairement les places infinies). On note* $P(F,n,S)$ *comme au-dessus. On note* s *le plus grand entier tel que* $\eta_s \in F$ *(où* $\eta_s = \zeta_{2^s} + \zeta_{2^s}^{-1}$*). On rappelle (déjà introduite à la Définition II.3.9) que* (F,n,S) *est un cas spécial si :*

(*i*) *Les éléments* -1, $2+\eta_s$ *et* $-(2+\eta_s)$ *ne sont pas des carrés dans* F. *Ce qui équivaut à dire que* $\mathrm{Gal}(F(\zeta_{2^{s+1}})/F)$ *est isomorphe à* $C_2 \times C_2$.

(*ii*) *On a* $t \geq s+1$.

(*iii*) *Et* S *contient l'ensemble des places* v *divisant* 2 *tel que* -1, $2+\eta_s$ *et* $-(2+\eta_s)$ *ne sont pas des carrés dans* F_v.

La résultat est le suivant.

1. *Si* (F,n,S) *n'est pas un cas spécial, alors* $P(F,n,S) = (F^\times)^n$.
2. *Si* (m,S,F) *est un cas spécial, alors* $P(F,n,S) = (F^\times)^n \sqcup a_0(F^\times)^n$ *où*

$$a_0 = (1+\zeta_{2^s})^m = \eta_{s+1}^m = (2+\eta_s)^{m/2}.$$

et a_0 *vérifie* $a_0 \in (F^\times)^{n/2}$ *et* $a_0 \notin (F^\times)^n$.

Démonstration – Voir ([AT09], Chapter X.1) ou ([NSW08], Chapter IX.2). □

Le lien entre $Q(F,n,S)$ et $P(F,n,S)$ est donné par la proposition suivante

Proposition IV.2.6 – *Il existe un accouplement parfait (non-canonique)*

$$\frac{Q(F,n,S)}{\operatorname{Hom}(\mathrm{Gal}_F,\mathbb{C}^\times)^n} \times \frac{P(n,S)}{(F^\times)^n} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration – Pour K un corps de nombres ou p-adique, on a la suite exacte de cohomologie

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}_K,\mathbb{C}^\times) \xrightarrow{\cdot^n} \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}_K,\mathbb{C}^\times) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_K,\mu_n(\mathbb{C}^\times)) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_K,\mathbb{C}^\times)$$

D'après le théorème de Tate, on en déduit que $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}_K,\mathbb{C}^\times)/\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}_K,\mathbb{C}^\times)^n$ est isomorphe à $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}_K,\mu_n(\mathbb{C}^\times))$. En prenant $K = F_v$, Le groupe $Q(F,n,S)/\operatorname{Hom}(\mathrm{Gal}_F,\mathbb{C}^\times)^n$ s'identifie à $\text{Ш}^2_S(\mathrm{Gal}_F,\mu_n(\mathbb{C}^\times))$. Par dualité de Poitou-Tate ([NSW08], 8.6.7), ce groupe s'identifie, via le cup-produit, au dual de $\text{Ш}^1_S(\mathrm{Gal}_F,\mu_n(\mathbb{C}^\times)^\vee)$. D'après la suite exacte de Kummer ($0 \to \mu_n(\overline{K}) \to \overline{K}^\times \to \overline{K}^\times \to 0$), ce groupe s'identifie à $P(F,n,S)/(F^\times)^n$. □

Corollaire IV.2.7 – *Si* (F,n,S) *n'est pas un cas spécial, alors* $Q(F,n,S)/\operatorname{Hom}(\mathrm{Gal}_F,\mathbb{C}^\times)^n$ *est nul et est d'ordre* 2 *sinon.*

L'élément $a_0 \in P(F,n,S)\setminus(F^\times)^n$ dans le théorème de Grunwald-Wang permet d'exhiber un élément non-nul du dual de $Q(F,n,S)/\operatorname{Hom}(\mathrm{Gal}_F,\mathbb{C}^\times)^n$, mais on ne peut cependant pas exhiber un élément non-nul de ce groupe. B. Conrad donne seulement un exemple de tel caractère pour $F = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ et $n = 8$ ([Con11] Example 2.1).

Chapitre V

V – Relèvements de représentations de bonne réduction

V.1 Relèvement de représentations abéliennes

La Proposition II.1.2, montre que pour toute représentation $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ il existe F'/F une extension finie telle que $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F'}}$ se relève à $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ avec ramification minimale. Dans cette section et la suivante, on montre l'existence d'un relèvement minimal pour une représentation $\overline{\rho}$ de bonne réductions quitte à faire une extension finie F'/F non-ramifiée en dehors de p dans le cas où $\overline{\rho}$ est abélien et le cas où ρ est ordinaire à noyau fini premier à p.

Soit K un corps p-adique et $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie. On rappelle que d'après le théorème I.3.4, les caractères cristallins $\mathrm{Gal}_K \to L^\times$ sont les représentations algébriques sur l'inertie. La proposition suivante donne un critère analogue pour les représentation de bonne réduction de Gal_F. On note $\mathfrak{m}_\infty$ le modulus de F dont le support est l'ensemble des places infinies de F.

Proposition V.1.1 – *Soit $\rho : \mathrm{Gal}_F^{\mathrm{ab}} \to L^\times = T_L(\mathbb{Q}_p)$ une représentation abélienne. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) ρ est de bonne réduction.

(ii) Il existe une représentation $\phi : (S_{F,m_\infty})_{\mathbb{Q}_p} \to (T_L)_{\mathbb{Q}_p}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gal}_F^{\mathrm{ab}} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varepsilon_p"'] & T_L(\mathbb{Q}_p) \\ S_{F,\mathfrak{m}_\infty}(\mathbb{Q}_p) \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd} .$$

Démonstration – Supposons qu'il existe ϕ tel que $\rho = \phi \circ \varepsilon_p$. Alors d'après la deuxième partie du théorème I.3.9, la représentation ρ est localement algébrique de modulus $\mathfrak{m}_\infty$. Ce qui implique que ρ est non-ramifiée en dehors des places p-adiques et que sur les places p-adiques elle coïncide avec sa représentation algébrique sur l'inertie. Donc ρ est de bonne réduction.

Réciproquement si ρ est de bonne réduction, alors ρ est non-ramifiée en dehors de p et coïncide avec sa représentation algébrique en p. Ce qui signifie que $\mathfrak{m}_\infty$ est un modulus de définition de ρ. L'existence de ϕ est alors donnée par la première partie du du Théorème I.3.9. $\square$

Corollaire V.1.2 – *Soit $\mathfrak{m}$ un modulus de F à support dans les places infinies et p-adiques, $\phi : (S_{F,m})_{\mathbb{Q}_p} \to (T_L)_{\mathbb{Q}_p}$ une représentation algébrique et $\rho := \phi \circ \varepsilon_p$. Alors il existe une extension finie F'/F non-ramifiée en dehors de p telle que $\rho_{|\mathrm{Gal}_{F'}}$ soit de bonne réduction.*

Démonstration – Comme $\mathfrak{m}$ est à support infini et p-adique et que ρ est localement algébrique de modulus $\mathfrak{m}$, ρ est non-ramifiée en dehors de p et pour toute place $v|p$ elle coïncide avec sa représentation algébrique sur un sous-groupe ouvert O_v de I_{F_v} (où $O_v = \mathrm{rec}_{F_v}(U_{F_v}^{\mathrm{val}_v(\mathfrak{m})})$). Il suffit alors de prendre F'/F l'extension telle que $\mathrm{Gal}_{F'}$ est engendré par les inerties $(\mathrm{I}_{F_v})_{v\nmid p}$ et les $(O_v)_{v|p}$. $\square$

On suppose ici que $\mathcal{H}$ et $\overline{\mathcal{H}}$ sont des groupes algébriques réductifs abéliens connexes. Ce sont alors les tores ([Spr98], Chapter 3). On rappelle que la catégorie des groupes de type multiplicatif sur un corps algébriquement clos, est isomorphe à la catégorie des $\mathbb{Z}$-module de type fini (via le foncteur des caractères). Les tores correspondent aux $\mathbb{Z}$-modules libres et le μ_n correspond à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Théorème V.1.3 – *Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation de bonne réduction. On suppose que pour toute place $v|p$, $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ admet un relèvement de Hodge-Tate. Alors il existe F'/F une extension finie non-ramifiée en dehors de p telle que $\overline{\rho}_{\mathrm{Gal}_{F'}}$ se relève en une représentation de bonne réduction.*

Démonstration – Comme $\mathcal{H}_{/\overline{\mathbb{Q}}_p}$ et $\overline{\mathcal{H}}_{/\overline{\mathbb{Q}}_p}$ sont des tores, d'après la classification des sous-modules libres, il existe des isomorphismes $\mathcal{H} \simeq \prod_{i=1}^s \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, $\mathcal{H} \simeq \prod_{i=1}^s {\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}^{\varepsilon_i}$ et des entiers positifs $(a_i)_{i=1\ldots s}$ telle le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \overline{\mathcal{H}} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 . \\
1 \arrow[r] & \prod_{i=1}^s \mu_{a_i} \arrow[r] & \prod_{i=1}^s \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \arrow[r, "\pi'"'] & \prod_{i=1}^s {\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}^{\varepsilon_i} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

où ${\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}^{\varepsilon_i} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ si $a_i \neq 0$ et ${\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}^{\varepsilon_i} = 1$ si $a_i = 0$, $\mu_{a_i} = 0$ si $a_i = 0$ et π' est donnée par $\pi'((x_i)_i) = (x_i^{a_i})_i$. La suite exacte $1 \to \mathcal{N} \to \mathcal{H} \xrightarrow{\pi} \overline{\mathcal{H}} \to 1$ alors est un produit de suites exactes du type

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \xrightarrow{x \mapsto x^n} \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow 1 ,$$

où n est un entier, ou du type

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow 1 \longrightarrow 1 .$$

Le relèvement par la deuxième suite exacte étant trivial, il suffit alors de montrer le théorème lorsque $\mathcal{H} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, $\overline{\mathcal{H}} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ et $\pi(x) = x^n$, ce que l'on suppose désormais.

Pour toute place $v|p$ de F, on note $\rho_v : \mathrm{Gal}_{F_v} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un relèvement cristallin. Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie contenant l'image des ρ_v et contenant tous les plongements de F.

Comme ρ_v est cristalline, il existe une représentation algébrique $r_v : (T_{F_v})_{/\mathbb{Q}_p} \to (T_L)_{/\mathbb{Q}_p}$, où $T_L := \mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{G}_m$, telle que $r_v(x) = \rho_v(\mathrm{rec}_v(x))$ pour tout $x \in \mathcal{O}_L^\times$, où $\mathrm{rec}_v : F_v^\times \to \mathrm{Gal}^{\mathrm{ab}}_{F_v}$ est l'application de réciprocité (I.3.4). On note

$$\begin{array}{rccc} R: & T_F(\mathbb{Q}_p) = \prod_v T_{F_v}(\mathbb{Q}_p) & \longrightarrow & T_L(\mathbb{Q}_p) \\ & \prod_{v|p} x_v & \longmapsto & \prod_{v|p} r_v(x_v) \end{array}$$

Alors R est une représentation algébrique définie sur $\mathbb{Q}_p$.

On note $\overline{r}_v : (T_{F_v})_{/\mathbb{Q}_p} \to (T_L)_{/\mathbb{Q}_p}$ la représentation algébrique associée à $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_v}}$ et $\overline{R} = \prod_{v|p} \overline{r}_v$ la représentation algébrique de $\overline{\rho}$ (cf. la remarque qui suit Définition I.3.7). Alors on a $R^n = \overline{R}$. D'après la proposition V.1.1, la représentation $\overline{\rho}$ est localement algébrique avec modulus $\mathfrak{m}_\infty$. On note $\overline{\phi} : (S_{F,\mathfrak{m}_\infty})_{/\mathbb{Q}_p} \to (T_L)_{/\mathbb{Q}_p}$ la représentation donné par la proposition V.1.1 appliquée à $\overline{\rho}$.

Soit $\mathfrak{m}$ un modulus de définition de $\overline{\rho}$. On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Gal}^{\mathrm{ab}}_F \arrow[r, "\overline{\rho}"] \arrow[d, "\varepsilon_\ell"'] & T_L(\mathbb{Q}_p) \arrow[d, equal] \\
T_F(\mathbb{Q}_p) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\overline{R}"'] \arrow[d, equal] & S_{F,\mathfrak{m}_\infty}(\mathbb{Q}_p) \arrow[r, "\overline{\phi}"] & T_L(\mathbb{Q}_p) \\
T_F(\mathbb{Q}_p) \arrow[rr, "R"'] & & T_L(\mathbb{Q}_p) \arrow[u, "\cdot^n"']
\end{tikzcd}$$

Alors $\overline{R}(E_{F,\mathfrak{m}_\infty}) = 1$, où $E_{F,\mathfrak{m}_\infty}$ sont les unités positives de F. Comme $R^n = \overline{R}$, on en déduit que $R(E_{F,\mathfrak{m}_\infty}) \subset \mu_n(L)$.

Montrons qu'il existe un modulus $\mathfrak{m}$ à support dans les places p-adiques et infinies, tel que $R(E_{F,\mathfrak{m}}) = 1$. Soit $n_1 \geq 0$ tel que $\mathrm{val}_L(x-1) < n$ pour tout $x \in \mu_n(L) \setminus \{1\}$, où val_L est la valuation normalisé de L. Il existe $n_2 \geq 0$ tel que pour tout $v|p$, $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F_v, L)$ et $x \in U^{n_2}_{F_v}$ on ait $\mathrm{val}_L(\sigma(x) - 1) > n_1$. Alors pour tout $v|p$ et $x \in U^{n_1}_{F_v}$ on a $\mathrm{val}_L(r_v(x) - 1) > n$, car r_v est un produit des $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F_v, L)$. Il suffit alors de prendre $\mathfrak{m}$ tel que $\mathrm{val}_v(\mathfrak{m}) \geq n_2$ pour tout $v|p$. Alors $R(E_{F,\mathfrak{m}}) = 1$.

Donc R définit une représentation $(T_{F,\mathfrak{m}})_{/\mathbb{Q}_p} \to (T_L)_{/\mathbb{Q}_p}$. En composant $(S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}})_{/\mathbb{Q}_p} \to (T_{F,\mathfrak{m}})_{/\mathbb{Q}_p}$ (cf. Proposition I.3.10) avec R, on obtient une représentation $\phi : (S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}})_{/\mathbb{Q}_p} \to (T_L)_{/\mathbb{Q}_p}$. On note

$$\rho : \mathrm{Gal}^{\mathrm{ab}}_{F_\mathfrak{m}} \longrightarrow T_L(\mathbb{Q}_p).$$

La composé de $\varepsilon_\ell : \mathrm{Gal}^{\mathrm{ab}}_{F_\mathfrak{m}} \to S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_p)$ avec $\phi : S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}}(\mathbb{Q}_p) \to T_L(\mathbb{Q}_p)$. La représentation ρ est alors un relèvement de $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_\mathfrak{m}}}$, car ϕ relève $\overline{\phi}_{|S_{F_\mathfrak{m},\mathfrak{m}}}$. D'après le corollaire V.1.2, il existe une extension finie $F'/F_\mathfrak{m}$ non-ramifiée en dehors de p tel que $\rho_{|\mathrm{Gal}_{F'}}$ soit de bonne réduction. $\square$

V.2 Relèvement de représentations ordinaires

Dans cette partie K est un corps p-adique. On rappelle la définition des représentations ordinaires selon [PR94] et on donne quelques propriétés. Les représentations ordinaires correspondent aux catégories des modules (ϕ, N)-modules filtrées ordinaires que l'on définit également.

Définition V.2.1 – Une représentation $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathrm{GL}_V(\mathbb{Q}_p)$ sera dite *ordinaire* s'il existe une filtration $(V_i)_{i=1..n}$ décroissante exhaustive et séparée stable par Gal_K et une suite d'entiers relatifs $(a_i)_{i=0..n}$ strictement croissante telles que pour tout i, la restriction à l'inertie $\rho_{|\mathrm{I}_K}$ agit sur V_i/V_{i+1} par $\mathrm{Cycl}_p^{a_i}$.

Matriciellement cela signifie que dans une base, la restriction à l'inertie s'écrit

$$\begin{bmatrix} \chi_p^{a_n} & * & \cdots & * \\ & \chi_p^{a_{n-1}} & \cdots & * \\ & & \ddots & * \\ & & & \chi_p^{a_1} \end{bmatrix}$$

Soit $\mathcal{G}$ un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}_p$. Une représentation $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{G}(\mathbb{Q}_p)$ sera dite *ordinaire* si pour toute représentation linéaire $R : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}_V$, la composée $R \circ \rho$ est ordinaire (on verra qu'il suffit de le vérifier pour une représentation fidèle).

On définit maintenant la catégorie des (ϕ, N)*-modules filtrés ordinaires*. Soit $K_0 \subset K$ le sous-corps maximal non-ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$. Alors un (ϕ, N)-module filtré sur K est la donnée de

- D un K_0-espace vectoriel de dimension finie.
- $\phi : D \to D$ un morphisme additif Frob_p-semi-linéaire (où Frob_p est le Frobenius de K_0).
- $N : D \to D$ un endomorphisme linéaire nilpotent tel que $N \circ \phi = p.\phi \circ N$.
- D'une filtration $(D_K^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sur $D \otimes_{K_0} K$ décroissante exhaustive séparée.

Les nombres de Hodge de D sont les $i \in \mathbb{Z}$ tel que le nombre suivant est non nul

$$h_H(D, i) := \dim_K(D_K^i/D_K^{i+1}).$$

On note $P_0 = \mathrm{Frac}(\mathrm{Witt}(\overline{k}))$. Pour α un rationnel, on note $D_{[\alpha]}$ le sous-K_0-espace vectoriel de $P_0 \otimes_{K_0} K$ engendré par les x tels que

$$\phi^s(x) = p^r x,$$

avec $r/s = \alpha$. Les nombres de Newton de D sont les α tels que le nombre suivant est non-nul

$$h_N(D, \alpha) := \dim_{K_0}(D_{[\alpha]}).$$

Définition V.2.2 – On dit que D est *ordinaire* si

1. D est admissible, c'est-à-dire si $t_H(D) = t_N(D)$ et $t_H(D') \leq t_N(D')$ pour tout sous-(ϕ, N)-module filtré D', où $t_H(D) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} i.h_H(D, i)$ et $t_N(D) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} i.h_N(D, i)$.
2. Et l'ensemble des nombres de Hodge est égal à l'ensemble des nombres de Newton avec multiplicité (en particulier cela implique que les nombres de Newton sont entiers).

On rappelle que d'après la conjecture C_{st} (démontrée dans [CF00]) les (ϕ, N)-modules admissibles correspondent aux représentations semi-stables via le foncteur de Fontaine D_{st}. En particulier toute représentation ordinaire est semi-stable.

Les fonctions h_H et h_N sont additives sur les modules admissibles, c'est-à-dire que si

$$0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow D_3 \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de modules admissibles, alors $h_H(D_2,i) = h_H(D_2,i) + h_H(D_3,i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $h_N(D_2,\alpha) = h_N(D_1,\alpha) + h_N(D_3,\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Théorème V.2.3 ([PR94], Théorème 1.5) – *Il y a une anti-équivalence de catégorie entre les représentations Galoisiennes ordinaires de* Gal_K *et les* (ϕ, N)*-modules filtrées sur* K *ordinaires, donnée par*

$$D^*_{st}(V) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B_{\mathrm{st}})^{\mathrm{Gal}_K}.$$

La catégorie des (ϕ, N)-module filtrés ordinaire forme une sous-catégorie de la catégorie des (ϕ, N)-modules filtrés admissibles. De même la catégorie des représentations ordinaires forme une sous-catégorie de la catégorie des représentations Galoisiennes semi-stables. Ces catégories sont stables par sous-objets, produits tensoriels, quotients et dualité. En particulier ce sont des catégories Tannakiennes neutres (avec pour foncteur fibre celui qui associe les sous-espace vectoriel sous-jacent) et sont équivalentes à la catégorie des représentations d'un groupe pro-algébrique. Ainsi toute sous-représentation d'une représentation ordinaire est ordinaire et pour vérifier qu'une représentation $\mathrm{Gal}_K \to \mathcal{G}(\mathbb{Q}_p)$ est ordinaire il suffit de le vérifier à travers une représentation fidèle de $\mathcal{G}$.

Proposition V.2.4 – *Soit*

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0$$

une extension de $\mathbb{Q}_p$*-représentations de* Gal_K*. Si* V_1 *et* V_2 *sont ordinaires et* V *est semi-stable, alors* V *est ordinaire.*

Démonstration – On note $D := D^*_{st}(V)$, $D_1 := D^*_{st}(V_1)$ et $D_2 := D^*_{st}(V_2)$. Alors D est une extension de D_1 par D_2. Les nombres de Hodge (resp. Newton) de D est l'union des nombres de Hodge (resp. Newton) de D_1 et D_2. Comme D_1 et D_2 sont ordinaires, leurs nombres de Hodge sont égaux à leurs nombres de Newton, et donc il en est de même pour D. De plus D est admissible car V est semi-stable. On en déduit que D est ordinaire. □

Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie, $\mathcal{G}$ un groupe algébrique sur L. Une représentation $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{G}(L)$ sera dite *ordinaire* si $\rho : \mathrm{Gal}_K \to (\mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{G})(\mathbb{Q}_p)$ est ordinaire. Une représentation $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{G}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ sera dite *ordinaire* si $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{G}(L)$ est ordinaire avec $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie telle que $\mathcal{G}(L)$ contient l'image de la représentation.

Proposition V.2.5 – *Si* $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{G}(L)$ *est ordinaire, alors l'adhérence de Zariski* $(\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}})_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{G}$ *de* $\rho(\mathrm{I}_K)$ *est un groupe résoluble connexe tel que* $\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}}/\mathrm{R}(\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}})$ *est un tore de rang au plus* 1*, où* $\mathrm{R}(\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}})$ *est le radical unipotent.*

Démonstration – Soit $\mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_V$ une représentation linéaire fidèle. Comme ρ est ordinaire, il existe un drapeau $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n$ de V stable par $\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}}$ et tel que I_K agisse par une puissance du caractère cyclotomique. L'adhérence de Zariski $\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}}$ est alors un sous-groupe du sous-groupe de Borel $B_{/\mathbb{Q}_p}$ de GL_V associé à ce drapeau. Comme ce sous-groupe de Borel est résoluble, il en est de même pour le sous-groupe $\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}}$.

Comme la représentation $\mathrm{I}_K \to \mathcal{G}^{\mathrm{Zar}}/(\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}})^0$ est ordinaire (donc semi-stable) à image finie, elle est triviale. Donc $\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}}$ est connexe.

Pour tout $i \in [1, n]$, on note $a_i \in \mathbb{Z}$ tel que I_K agit sur V_i/V_{i+1} par $\mathrm{Cycl}_p^{a_i}$. L'image de I_K dans $\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{GL}_{V_i/V_{i+1}}$ est alors dans le sous-tore donné par l'image de

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{GL}_{V_i/V_{i+1}} \\ & \lambda & \longmapsto & (\lambda^{a_i})_i \end{array} .$$

Ce tore est de rang 1 ou 0 selon que tous les $(a_i)_i$ sont nuls ou pas. Or le groupe algébrique $\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}}/\mathrm{R}(\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}})$ est un sous-groupe de $B_{/\mathbb{Q}_p}/\mathrm{R}(B)_{/\mathbb{Q}_p} \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{GL}_{V_i/V_{i+1}}$ qui s'identifie à l'adhérence de Zariski de I_K dans $\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{GL}_{V_i/V_{i+1}}$. Donc $\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}}/\mathrm{R}(\mathcal{G}^{\mathrm{Zar}}) \subset \varphi$ est un tore de rang 0 ou 1. □

On rappelle qu'un groupe algébrique $\mathcal{G}_{/k}$ sur un corps k est dit *trigonalisable*, s'il est isomorphe à un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires supérieures de $(\mathrm{GL}_n)_{/k}$ ([Bor91], Chapter 15). Auquel cas toutes les représentations de $\mathcal{G}_{/k}$ sont trigonalisables ([Bor91], Corollary 15.5.(i)).

Proposition V.2.6 – *Soient K un corps p-adique et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_K \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation (semi-stable) ordinaire. Si $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est un relèvement semi-stable, alors ρ est ordinaire.*

Démonstration – Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie telle que $\pi(\mathcal{H}(L))$ contient $\overline{\rho}(\mathrm{Gal}_K)$. On note $\overline{\mathcal{H}}'_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{H}$ l'adhérence de Zariski de $\overline{\rho}(\mathrm{I}_K)$ et $\mathcal{H}'$ celui de $\rho(\mathrm{I}_K)$. Comme $\overline{\rho}$ est ordinaire $\overline{\mathcal{H}}'$ est résoluble (cf Proposition V.2.5). Comme $\mathcal{H}'$ est une extension de deux groupes résolubles (c'est une extension de $\overline{\mathcal{H}}'$ et d'un sous-groupe de $\mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{N}$), il est résoluble. De plus comme ρ est semi-stable, $(\mathcal{H}')_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ est connexe (en effet $\rho : \mathrm{I}_K \to \mathcal{H}'/\mathcal{H}'^0(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, la projection de ρ dans le groupe des composantes connexes de $\mathcal{H}$, est semi-stable à image finie donc est triviale).

Le groupe $\mathcal{H}'/\mathrm{R}(\mathcal{H}')$ est une extension de $\overline{\mathcal{H}}'/\mathrm{R}(\overline{\mathcal{H}}')$ par un sous-groupe de $\mathrm{Res}^L_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{N}$. D'après la proposition V.2.5, $\overline{\mathcal{H}}'/\mathrm{R}(\overline{\mathcal{H}}')$ est un tore de rang ≤ 1. Comme $\mathcal{N}$ est finie et que $\mathcal{H}'$ est connexe, on en déduit que $\mathcal{H}'/\mathrm{R}(\mathcal{H}')$ est un tore de rang ≤ 1. Le groupe $\mathcal{H}'$ est alors une extension de $\mathcal{H}'/\mathrm{R}(\mathcal{H}')$, un tore de rang ≤ 1, et de $\mathrm{R}(\mathcal{H}')$ un groupe unipotent. D'après ([Bor91], Theorem 15.4, Corollary 15.5.(ii)), $\mathcal{H}'$ est trigonalisable.

Soit $R : \mathcal{H}' \to \mathrm{GL}_V$ une représentation linéaire. Comme $\mathcal{H}'$ est trigonalisable, il existe un drapeau $V_n \subset V_{n-1} \subset \cdots \subset V_1$ stable par $\mathcal{H}'$. Sur chaque quotient V_i/V_{i+1}, de dimension 1, $R \circ \rho$ est une puissance entière de Cycl_p sur I_K. La représentation semi-stable V est une extension de représentations ordinaires de dimension 1, donc est ordinaire d'après la Proposition V.2.4. □

Soit F un corps de nombres. On montre le théorème principal de cette partie. On dit qu'une représentation p-adique de Gal_F est *ordinaire* si les restrictions aux groupes de décomposition p-adiques sont ordinaires.

Théorème V.2.7 – *Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation. On suppose que $\mathcal{N}$ est fini d'ordre premier à p, que $\overline{\rho}$ est de bonne réduction et ordinaire. On suppose que pour tout $v|p$,* *le sous-groupe à un paramètre de Hodge-Tate se relève. Alors il existe une extension finie F'/F non-ramifiée en dehors de p tel que $\overline{\rho}_{\mathrm{Gal}_{F'}}$ admet un relèvement de bonne réduction.*

Démonstration – On prend $U \subset \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un sous-groupe pro-p tel que π induise un isomorphisme de U sur un ouvert $\overline{U} \subset \overline{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ comme dans la proposition II.1.2. Soit F_1/F la plus petite extension finie telle que $\overline{\rho}(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F_1)) \subset \overline{U} \cong U$. Comme $\overline{\rho}$ est non-ramifiée en dehors de p, l'extension F_1/F est non-ramifiée en dehors de p. On note $\rho' : \mathrm{Gal}_{F_1} \to U \subset \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ la composée de $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_1}}$ avec $\overline{U} \xrightarrow{\sim} U$. La représentation ρ' est alors un relèvement de $\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}_{F_1}}$ non-ramifiée en dehors de p.

On note $\rho_w : \mathrm{Gal}_{F_w} \to \mathcal{H}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ un relèvement cristallin et $\chi_w : \mathrm{Gal}_{F_w} \to \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\rho' \otimes \chi_w = \rho_w$ sur $\mathrm{Gal}_{F_{1,w}}$. La représentations ρ_w est à valeurs dans $U \times \mathcal{N}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ et ses composantes sont données par ρ' et χ_w. Nous allons montrer que $\chi_w = 1$ sur $\mathrm{I}_w(\overline{F}/F_1(\mu_p))$, le sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}_{F_1(\mu_p)}$, où $F_1(\mu_p)$ est l'extension de F_1 auquel on a rajouté les racines p-ieme de l'unité.

D'après la proposition V.2.6, la représentation ρ_w est ordinaire. Dans une représentation linéaire fidèle, la restriction à l'inertie de ρ_w est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} \chi_p^{a_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \chi_p^{a_n} \end{pmatrix}$$

La restriction de ρ_w à $\mathrm{I}_w(\overline{F}/F_1(\mu_p))$ est alors à image dans un sous-groupe compact de

$$\Gamma = \begin{pmatrix} U^1_{\mathbb{Q}_p} & \overline{\mathbb{Q}}_p & \cdots \\ & \ddots & \overline{\mathbb{Q}}_p \\ & & U^1_{\mathbb{Q}_p} \end{pmatrix},$$

où $U^1_{\mathbb{Q}_p} = (1 + p\mathbb{Z}_p)^{\mathbb{Z}_p} = \{x \in \mathbb{Z}_p^\times \mid x = 1 \mod p\}$. Un tel sous-groupe est pro-p, car Γ est le produit semi-directe d'un $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel par un pro-p-groupe. Comme $\mathcal{N}$ est d'ordre premier à p, on en déduit que ρ_w est à valeurs dans U et donc χ_w est trivial sur l'inertie. Donc $\rho' = \rho_w$ sur $\mathrm{I}_w(\overline{F}/F_1(\mu_p))$ et $\rho'_{|\mathrm{Gal}_{F_1(\mu_p)}}$ est de bonne réduction ordinaire. □

Bibliographie

[AT09] Emil Artin and John Tate. *Class field theory.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009. Reprinted with corrections from the 1967 original.

[BH06] Colin J. Bushnell and Guy Henniart. *The local Langlands conjecture for* GL(2), volume 335 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[BM02] Christophe Breuil and Ariane Mézard. Multiplicités modulaires et représentations de $GL_2(\mathbf{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en $l = p$. *Duke Math. J.*, 115(2) :205–310, 2002. With an appendix by Guy Henniart.

[Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[CF00] Pierre Colmez and Jean-Marc Fontaine. Construction des représentations p-adiques semi-stables. *Invent. Math.*, 140(1) :1–43, 2000.

[CI99] Robert Coleman and Adrian Iovita. The Frobenius and monodromy operators for curves and abelian varieties. *Duke Math. J.*, 97(1) :171–215, 1999.

[Con11] Brian Conrad. Lifting global representations with local properties. *preprint*, 2011.

[Del81] Pierre Deligne. Hodge cycles on abelian varieties. In *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, pages 9–100. Springer, 1981.

[DM81] Pierre Deligne and James S. Milne. Tannakian categories. In *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, pages 101–228. Springer, 1981.

[DM13] Giovanni Di Matteo. On admissible tensor products in p-adic Hodge theory. *Compos. Math.*, 149(3) :417–429, 2013.

[FM95] Jean-Marc Fontaine and Barry Mazur. Geometric Galois representations. In *Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993)*, Ser. Number Theory, I, pages 41–78. Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[Fon94a] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes p-adiques. *Astérisque*, 223 :59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Fon94b] Jean-Marc Fontaine. Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables. *Astérisque*, 223 :321–347, 1994. Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Fon94c] Jean-Marc Fontaine. Représentations p-adiques semi-stables. *Astérisque*, 223 :113–184, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Fro77] Albrecht Frohlich. *Algebraic Number Fields (L-Functions and Galois Properties) : Proceedings of a Symposium Organized by the London Mathematical Society*. Academic Press, 1977.

[Gra03] Georges Gras. *Class field theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. From theory to practice, Translated from the French manuscript by Henri Cohen.

[Hum75] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[Ill94] Luc Illusie. Autour du théorème de monodromie locale. *Astérisque*, 223 :9–57, 1994. Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Mil11a] James S. Milne. Algebraic groups, lie groups, and their arithmetic subgroups, 2011. Available at www.jmilne.org/math/.

[Mil11b] James S. Milne. Class field theory (v4.01), 2011. Available at www.jmilne.org/math/.

[Neu99] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder.

[Neu13] Jürgen Neukirch. *Class field theory*. Springer, Heidelberg, 2013. The Bonn lectures, edited and with a foreword by Alexander Schmidt, Translated from the 1967 German original by F. Lemmermeyer and W. Snyder, Language editor : A. Rosenschon.

[NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008.

[Pat14] Stefan Patrikis. Variations on a theorem of tate. *arXiv preprint arXiv :1207.6724*, 2014.

[PR94] Bernadette Perrin-Riou. Représentations p-adiques ordinaires. *Astérisque*, 223 :185–220, 1994. With an appendix by Luc Illusie, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Ram14] Dinakar Ramakrishnan. An exercise concerning the selfdual cusp forms on GL(3). *Indian J. Pure Appl. Math.*, 45(5) :777–785, 2014.

[Ser67] J.-P. Serre. Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles. In *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, pages 118–131. Springer, Berlin, 1967.

[Ser77] Jean-Pierre Serre. Modular forms of weight one and Galois representations. In *Algebraic number fields : L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975)*, pages 193–268. Academic Press, London, 1977.

[Ser79a] Jean-Pierre Serre. Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, volume 65 of *Astérisque*, pages 155–188. Soc. Math. France, Paris, 1979.

[Ser79b] Jean-Pierre Serre. *Local fields*, volume 67 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1979. Translated from the French by Marvin Jay Greenberg.

[Ser98] Jean-Pierre Serre. *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, volume 7 of *Research Notes in Mathematics*. A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1998. With the collaboration of Willem Kuyk and John Labute, Revised reprint of the 1968 original.

[Ser08] Jean-Pierre Serre. *Topics in Galois theory*, volume 1 of *Research Notes in Mathematics*. A K Peters Ltd., Wellesley, MA, second edition, 2008. With notes by Henri Darmon.

[Ski09] Christopher Skinner. A note on the p-adic Galois representations attached to Hilbert modular forms. *Doc. Math.*, 14 :241–258, 2009.

[Spr98] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*, volume 9 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second edition, 1998.

[ST68] Jean-Pierre Serre and John Tate. Good reduction of abelian varieties. *Ann. of Math. (2)*, 88 :492–517, 1968.

[Win95] Jean-Pierre Wintenberger. Relèvement selon une isogénie de systèmes l-adiques de représentations galoisiennes associés aux motifs. *Invent. Math.*, 120(2) :215–240, 1995.

[Win97] Jean-Pierre Wintenberger. Propriétés du groupe tannakien des structures de Hodge p-adiques et torseur entre cohomologies cristalline et étale. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47(5) :1289–1334, 1997.

Auguste HOANG DUC

Relèvements de représentations Galoisiennes à valeurs dans des groupes algébriques

Résumé

Soient 1 -> N -> H -> H' -> 1 une suite exacte centrale de groupes algébriques sur Q_p^alg et F un corps de nombres. Etant donnée une représentation Galoisienne r' : Gal_F -> H', on s'intéresse à ses relèvements à valeurs dans H à travers le morphisme H -> H'. Un relèvement r : Gal_F -> H sera dit minimal, s'il est non-ramifié aux places où r' est non-ramifiée et est de Rham/semi-stable/cristalline aux places divisant p si r' l'est. Dans cette thèse, nous montrons l'existence de relèvements minimaux dans certains cas.

Mots clés : Représentation Galoisienne, Relèvement, Théorie de Hodge p-adique, Cohomologie

Résumé en anglais

Let 1 -> N -> H -> H' -> 1 be an exact sequence of algebraic groups over Q_p^alg and F be a number field. Given a Galois representation r' : Gal_F -> H', we are interested in its lifts with values in H through the morphism H -> H'. We say a lift r : Gal_F -> H is minimal, if it is unramied at places where r' is unramified and is de Rham/semi-stable/crystalline at p-adic places if r' is so. In this thesis, we prove the existence of such minimal lifts in some cases.

Key words : Galois representation, Lift, p-adic Hodge theory, Cohomology