

INSTITUT DE
RECHERCHE
MATHÉMATIQUE
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur de
l'Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Jérôme Von Buhren

**Points rationnels d'une famille de sous-schémas
fermés dans une variété semi-abélienne**

Soutenue le 05 février 2015
devant la commission d'examen

Carlo Gasbarri, directeur de thèse
Gaël Rémond, rapporteur
Marc Hindry, rapporteur
Sinnou David, examinateur
Yann Bugeaud, examinateur

www-irma.u-strasbg.fr



Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg et C.N.R.S.
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex

**Points rationnels d'une famille de sous-schémas
fermés dans une variété semi-abélienne**

Jérôme VON BUHREN

REMERCIEMENTS

Pour commencer, je souhaite remercier mon directeur de thèse Carlo GASBARRI. À l'issue de son cours de Master, qui m'a initié à la géométrie arithmétique et aux problèmes qui lui sont associés, il a accepté d'encadrer ma thèse en me proposant ce sujet particulièrement stimulant et intéressant. De plus, durant ces trois années, il s'est montré disponible pour m'aider à résoudre les différents problèmes que j'ai rencontrés, en partageant son expérience et sa grande culture mathématique.

J'aimerais ensuite remercier Gaël RÉMOND d'avoir bien voulu rapporter cette thèse. Grâce à ses remarques et ses corrections, j'ai pu améliorer la rédaction et certains des résultats de ce manuscrit. De plus, il a toujours répondu à mes questions durant ma thèse et une grande partie des démonstrations reprennent les travaux qu'il a effectués dans ses articles consacrés au même sujet. Je remercie également Marc HINDRY qui a accepté de consacrer une partie de son temps pour rapporter cette thèse. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Sinnou DAVID et Yann BUGEAUD pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de siéger dans mon jury.

Ma soutenance marque la fin de mon parcours universitaire que j'ai commencé à l'Université de Strasbourg en 2006. Je tiens à remercier tous les enseignants que j'ai pu avoir durant cette période et qui ont contribué à me donner l'envie et la rigueur nécessaires pour me lancer dans des travaux de recherches.

Je remercie tout particulièrement Claudine MITSCHI qui était responsable du master de mathématiques durant mon parcours : cette filière m'a permis de suivre une formation de haut niveau au sein de l'université, ce qui m'a été d'une grande aide quand j'ai préparé l'agrégation de mathématiques et quand j'ai décidé de commencer un travail aussi exigeant que celui entrepris au cours de cette thèse.

J'exprime toute ma reconnaissance à Benjamin ENRIQUEZ dont j'ai suivi de nombreux cours dès ma première année d'études supérieures et qui a accepté d'encadrer mon mémoire de Master. J'ai toujours trouvé ses enseignements passionnants et les travaux que j'ai effectués sous sa direction en Master ont été mes premiers pas dans le monde de la recherche.

Je souhaite également remercier le personnel de l'administration de l'IRMA dont l'aide fut précieuse pour l'organisation de la soutenance.

Ces trois années n'auraient pas été les mêmes s'il n'y avait pas eu tous les autres doctorants de l'IRMA. Les pauses que nous avons pu avoir, notamment autour de la machine à café, permettaient pendant un laps de temps de penser à autre chose. Je remercie donc mes camarades de bureau passés et présents : Fabien, Aurélien, Guillaume et Audrey, les nombreux doctorants issus de la même promotion de magistère que la mienne : Amaury, Florian, Nassima, Romain, Simon, Stéphane, Vincent et tous les autres que j'ai pu découvrir par la suite : Abdoulaye, Amandine, Antoine, Auguste, Charlotte, Clément, Jérémy, Mohamad, Nicolas, Ranine, Thomas, Yohann et j'en oublie sûrement...

Je remercie ma famille et ma belle-famille : leurs encouragements et leur soutien incessants ont grandement contribué à la réussite de cette thèse. De plus, les moments passés en famille m'ont souvent permis de me changer les idées, notamment durant les périodes où les travaux n'avançaient pas.

Je voudrais terminer en remerciant du fond du coeur celle qui partage sa vie avec la mienne : merci pour tout Marie-Lise.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
L'ancienne conjecture de MORDELL-LANG plus BOGOMOLOV	1
Le théorème d'approximation de FALTINGS	6
La méthode de VOJTA	8
Plan de la thèse	11
1 Notations, rappels et résultats préliminaires	13
1.1 Les outils arithmétiques	13
1.1.1 Hauteurs des points et des polynômes	13
1.1.2 Hauteur d'un sous-schéma fermé de l'espace projectif	17
1.1.3 Distance sur l'espace projectif associée à une place	18
1.2 Les variétés semi-abéliennes	21
1.2.1 Rappels sur les fibrés projectifs	21
1.2.2 Compactification d'une variété semi-abélienne	24
1.2.3 Construction et propriétés des hauteurs canoniques	25
1.2.4 Plongement explicite associé à une hauteur canonique	28
1.3 Résultats de RÉMOND	29
1.3.1 Inégalité de VOJTA généralisée	30
1.3.2 Plongement adapté	31
1.3.3 Expression polynomiale dans une variété abélienne	32
1.3.4 Le théorème du produit	33
1.4 Résultats préliminaires	34
1.4.1 Le lieu exceptionnel	34
1.4.2 Comparaisons de hauteurs	35
1.4.3 Un lemme de recouvrement	36
1.4.4 Un lemme de dénombrement	38
2 Le cas abélien	41
2.1 Inégalité de VOJTA effective dans le cas abélien	42
2.1.1 Énoncé	42

2.1.2	Préliminaires	43
2.1.3	Mise en place	44
2.1.4	L'hypothèse sur le nombre d'intersection	46
2.1.5	Démonstration de l'inégalité de VOJTA	46
2.2	Démonstration des énoncés	48
3	Le cas torique	53
3.1	Inégalité de VOJTA effective dans le cas torique	54
3.1.1	Énoncé	54
3.1.2	Préliminaires	54
3.1.3	Mise en place	55
3.1.4	L'hypothèse sur le nombre d'intersection	58
3.1.5	Démonstration de l'inégalité de VOJTA	58
3.2	Démonstration des énoncés	60
3.2.1	Résultats généraux	60
3.2.2	Résultats sur les équations aux unités	63
4	Le cas général	65
4.1	Inégalité de VOJTA : le cas général	65
4.1.1	Énoncé	65
4.1.2	Préliminaires	66
4.1.3	Mise en place	68
4.1.4	L'hypothèse sur le nombre d'intersection	70
4.1.5	Démonstration de l'inégalité de VOJTA	72
4.2	Démonstration des énoncés	73
5	Extension d'un théorème de FALTINGS	77
5.1	Inégalité de VOJTA	77
5.1.1	Énoncé et réduction	77
5.1.2	Généralités sur la démonstration	80
5.1.3	Construction d'une section globale	85
5.1.4	Minoration de l'indice	92
5.1.5	Application du théorème du produit	100
5.2	Démonstration des résultats	101
	Bibliographie	107

L'objectif de cette thèse est d'obtenir des informations sur la hauteur des points rationnels d'une partie $\Omega(X, K)$ d'un schéma X sur un corps de nombres K dont la finitude est assurée par un résultat général. Plus précisément, la démarche sera la suivante : on remplace X par une famille $V \rightarrow P$ pour laquelle le résultat de finitude s'applique à chacune des fibres V_p pour tout $p \in P(K)$. En adaptant les méthodes permettant d'obtenir la finitude de $\Omega(X, K)$, notre objectif sera d'établir l'existence de deux constantes $\mu, \nu_K > 0$ telles que

$$\forall p \in P(K), \quad \forall a \in \Omega(V_p, K), \quad h_V(a) \leq \mu \cdot h_P(p) + \nu_K.$$

Dans cette inégalité, h_V et h_P désignent des hauteurs associées respectivement à des faisceaux amples sur V et P . En général, la constante μ ne dépendra pas de K : si L/K est une extension finie, on aura aussi

$$\forall p \in P(L), \quad \forall a \in \Omega(V_p, L), \quad h_V(a) \leq \mu \cdot h_P(p) + \nu_L.$$

Dans la majorité des cas, on pourra même donner une valeur explicite pour μ dépendant de plongements projectifs fixés pour V et P . *A contrario*, la constante ν_K dépend du corps de nombres sur lequel on travaille et reste complètement ineffective. Remarquons qu'en utilisant cette inégalité et le théorème de NORTHCOTT, on retrouve que chaque $V_p(K)$ est fini.

Nous appliquerons cette idée générale à deux théorèmes de finitude. Le premier est l'ancienne conjecture de MORDELL-LANG plus BOGOMOLOV, tandis que le second est le théorème d'approximation de FALTINGS dans une variété abélienne (voir [10, Théorème 2] ou la seconde partie ci-dessous).

L'ancienne conjecture de MORDELL-LANG plus BOGOMOLOV

Contexte

Soit A une variété semi-abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et soit $h_{\text{can}} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ une hauteur canonique sur A . Si Γ est un sous-groupe de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et $\varepsilon > 0$ un réel, on introduit l'ensemble

$$\Gamma_\varepsilon = \{a + b \mid a \in \Gamma, b \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ avec } h_{\text{can}}(b) \leq \varepsilon\}.$$

Rappelons que si Γ est un groupe abélien, son rang est par définition la dimension de l'espace vectoriel $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. L'ancienne conjecture de MORDELL-LANG plus BOGOMOLOV est la suivante.

Théorème - *Si X est un sous-schéma fermé de A et si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un réel $\varepsilon > 0$, un entier $n \in \mathbb{N}$, des points $a_1, \dots, a_n \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ et des sous-variétés semi-abéliennes B_1, \dots, B_n de A tels que*

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_i + B_i \subset X \quad \text{et} \quad X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n (a_i + B_i(\bar{\mathbb{Q}})) \cap \Gamma_\varepsilon.$$

Le cas $\varepsilon = 0$ correspond à la conjecture de MORDELL-LANG énoncée par LANG dans [16, Chapitre 8]. Dans un premier temps, LAURENT a démontré dans [18] cet énoncé dans le cas torique. Ensuite, FALTINGS l'a prouvé quand A est une variété abélienne sur un corps de nombres K et $\Gamma = A(K)$ en utilisant une nouvelle méthode introduite par VOJTA. Ce dernier a étendu la démonstration de FALTINGS dans [36] aux points entiers d'un sous-schéma fermé d'une variété semi-abélienne. Finalement, MCQUILLAN a démontré dans son intégralité la conjecture de MORDELL-LANG dans [22] en généralisant les travaux de HINDRY dans [13].

Par la suite, POONEN a énoncé dans [28] la conjecture de MORDELL-LANG plus BOGOMOLOV et il l'a démontrée quand la variété semi-abélienne est isotriviale (en utilisant notamment les résultats de CHAMBERT-LOIR dans [6] sur l'équirépartition des petits points). Finalement, RÉMOND a démontré l'énoncé en toute généralité dans [33].

Remarquons que le résultat est en général faux si l'on considère d'autres schémas en groupes. Voici un contre-exemple donné par VOJTA dans [36] : si $A = \mathbb{G}_{a, \mathbb{Q}}^2$, que X a pour équation $x^2 - 2y^2 = 1$ et que l'on considère le groupe de type fini $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, alors $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ contient une infinité de solutions tandis qu'il n'y a aucun sous-schéma en groupes non trivial de A contenu dans X .

Signalons qu'il existe des versions quantitatives du résultat précédent dans les cas torique et abélien. Par exemple, en définissant le degré de X *via* le plongement

$$\mathbb{G}_{m, \mathbb{Q}}^g \hookrightarrow (\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1)^g \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \quad \text{avec} \quad N = 2^g - 1,$$

RÉMOND a montré dans [32] que l'on peut choisir dans le théorème ci-dessus les valeurs

$$\varepsilon = (\deg X)^{-g^2 m^{3m}} \quad \text{et} \quad n = (\deg X)^{(r+1)g^2 m^{3m^2}}$$

où $m = \dim X + 1$ et $r = \text{rang } \Gamma$. (Pour un énoncé analogue dans le cas abélien, on pourra se reporter à [32, Théorème 1.3]).

On peut également introduire l'ensemble $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ donné par

$$\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) = \{a + b \mid a \in \Gamma, b \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } h_{\text{can}}(b) \leq \varepsilon(1 + h_{\text{can}}(a))\}. \quad (0.0.1)$$

De manière élémentaire, on a $\Gamma_\varepsilon \subset \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$, mais RÉMOND a démontré que cet ensemble ne contient pas trop de points. En notant Z_X l'union des translatés de sous-variétés semi-abéliennes non nulles de A contenus dans X , on a le résultat suivant (voir [33, Théorème 1.2]).

Théorème (RÉMOND) - *Si X est un sous-schéma fermé de A et si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est fini.*

Contrairement au cas précédent, si X est un sous-schéma fermé intègre de A tel que $X \neq Z_X$, alors on peut toujours choisir un sous-groupe de rang fini $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ de sorte que $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ soit dense dans X . (Pour plus de détails, on pourra se reporter à [8, Théorème 1.7]).

Comme pour le théorème précédent, il existe une version effective de ce résultat, mais seulement dans le cas où C est une courbe irréductible dans le tore $\mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^g$ qui ne soit pas le translaté d'un sous-tore. Sous ces conditions, RÉMOND a montré que si l'on considère

$$\varepsilon \leq (2^{12g+229}(\deg C)^{33} \max(1, h(C)))^{-1},$$

alors le nombre d'éléments de $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est au plus

$$(2^{12g+229}(\deg C)^{33} \max(1, h(C)))^{r+1}$$

où $r = \text{rang } \Gamma$ (voir [32, Théorème 1.2]). En particulier, on remarque dans ce cas que la valeur de ε ne dépend pas que du degré de C , mais aussi de sa hauteur. On ne peut pas se passer de cette dépendance. Si C est une courbe dans A et que Γ contient un point qui n'est pas de torsion, alors quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut choisir un translaté de C rencontrant $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ en une infinité de points.

Pour terminer cette partie, nous allons donner un résultat de MCQUILLAN qui a largement motivé les travaux de cette thèse. On suppose que A est une variété abélienne sur un corps de nombres K et on fixe un sous-schéma fermé intègre V de $A \times_K P$ où P est un schéma projectif et intègre sur K . On choisit un faisceau ample et symétrique \mathcal{L} sur A et on note $\hat{h} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ la hauteur de NÉRON-TATE associée. De plus, on considère une hauteur $h_{\mathcal{L}} : P(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ associée à un faisceau ample \mathcal{L} de P . Avec ces notations, on a le résultat suivant (voir [21, Théorème 0.1]).

Théorème (MCQUILLAN) - *Il existe une constante $\mu \geq 0$ et une famille finie \mathfrak{B} de sous-variétés abéliennes de A ayant la propriété suivante : si L/K est une extension finie, il existe une constante $\nu > 0$ telle que pour tout $p \in P(L)$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, des points $a_1, \dots, a_n \in V_p(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant*

$$\hat{h}(a_i) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu$$

et des sous-variétés abéliennes $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$ avec $a_i + B_i \subset V_p$ tels que

$$V_p(L) = \bigcup_{i=1}^n (a_i + B_i(L)).$$

Dans un premier temps, nous étendrons ce résultat dans le cadre semi-abélien.

Résultats

On considère un sous-schéma fermé intègre V de $A \times P$ où A est une variété semi-abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et P est un schéma projectif et intègre sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, on peut écrire avec l'ancienne conjecture de MORDELL-LANG plus BOGOMOLOV pour chaque $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$ une égalité de la forme

$$V_p(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n (a_i + B_i(\bar{\mathbb{Q}})) \cap \Gamma_\varepsilon$$

pour des points $a_i \in V_p(\bar{\mathbb{Q}})$, des sous-variétés semi-abéliennes B_i de A vérifiant $a_i + B_i \subset V_p$ et un réel $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer que l'on peut contrôler la hauteur des points a_i en fonction de la hauteur du point p .

On fixe une hauteur canonique $h_{\text{can}} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ sur A et une hauteur $h_{\mathcal{L}} : P(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ associée à un faisceau ample \mathcal{L} . Nous établirons l'énoncé suivant.

Théorème A - *Il existe une constante $\mu \geq 0$, un réel $\varepsilon > 0$ et une famille finie \mathfrak{B} de sous-variétés semi-abéliennes de A ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel $\nu \geq 0$ tels que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, il existe des points $a_1, \dots, a_n \in V_p(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant l'inégalité*

$$h_{\text{can}}(a_i) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu \tag{0.0.2}$$

et des sous-variétés semi-abéliennes $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$ avec $a_i + B_i \subset V_p$ tels que

$$V_p(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n (a_i + B_i(\bar{\mathbb{Q}})) \cap \Gamma_\varepsilon.$$

En prenant $P = \text{Spec } \bar{\mathbb{Q}}$, la condition sur la hauteur des points devient élémentaire et on retrouve l'ancienne conjecture de MORDELL-LANG plus BOGOMOLOV. D'autre part, si A est une variété abélienne sur un corps de nombres K , on retrouve exactement le théorème de MCQUILLAN en prenant $\Gamma = A(L)$.

Remarquons que l'existence du réel $\varepsilon > 0$ se déduit des travaux de RÉMOND. En effet, si l'on fixe un plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\text{NA}}$, l'ensemble $\{\deg V_p \in \mathbb{N} \mid p \in P\}$ est fini et la [35, Proposition 3] montre que l'on peut choisir $\varepsilon > 0$ pour qu'il ne dépende que de X par son degré dans l'ancienne conjecture de MORDELL-LANG plus BOGOMOLOV. Il en est de même pour l'existence de \mathfrak{B} : si un translaté d'une sous-variété semi-abélienne B de A est contenu dans V_p et est maximal pour cette propriété, alors par le [29, Lemme 4.6] (qui reste valable pour une variété semi-abélienne), on a

$$\deg B \leq (\deg V_p)^{(\dim V_p + 2 - \dim B)^2/4}.$$

En notant $\xi_V > 0$ un majorant du degré de V_p pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, il suffit de poser

$$\mathfrak{B} = \left\{ B \subset A \mid B \text{ sous-variété semi-abélienne et } \deg B \leq \xi_V^{(\dim A + 2)^2/4} \right\}.$$

En effet, on peut montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-variétés semi-abéliennes de A dont le degré est borné par une constante fixée. Ainsi la partie réellement nouvelle du théorème ci-dessus est l'inégalité de hauteur 0.0.2.

Par le résultat de RÉMOND, on a aussi que pour chaque $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $(V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est fini. Comme pour le résultat précédent, on souhaite majorer la hauteur des points de cet ensemble par la hauteur du point p . En appliquant les mêmes méthodes, on obtiendra le résultat suivant.

Théorème B - *Il existe une constante $\mu \geq 0$ et un réel $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un réel $\nu \geq 0$ tel que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, on a*

$$\forall a \in (V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon), \quad h_{\text{can}}(a) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu.$$

Contrairement à l'énoncé précédent, si l'on prend $P = \text{Spec } \bar{\mathbb{Q}}$, on ne retrouve pas le résultat de RÉMOND. Il est possible que certains des ensembles $(V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ ne soient pas finis. Signalons que nous prouverons un énoncé analogue (théorème 4.2.2) où l'on peut choisir $\varepsilon \geq 0$ arbitrairement, sans influencer la valeur de μ , à condition de se restreindre à Γ_ε .

Si A est le tore $\mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^g$ muni de la hauteur standard h_{can} (définie en sommant les hauteurs des coordonnées), si l'on suppose que \mathcal{L} est associé à un plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$ et si l'on note $m = \dim V + 1$, nous montrerons que l'on peut prendre dans le théorème B

$$\mu = \left(2^g(N_P + 1) \deg V\right)^{m^{3m^2}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \mu^{-1} = \left(2^g(N_P + 1) \deg V\right)^{-m^{3m^2}}$$

où le degré de V est pris relativement au plongement de SEGRE

$$\mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^g \times P \hookrightarrow (\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^1)^g \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^N \quad \text{avec} \quad N = 2^g(N_P + 1) - 1.$$

Si A est une variété abélienne, on fixe un plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}$ associé à un faisceau \mathcal{L}_0 symétrique de sorte que l'application

$$\Gamma \left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}, \mathcal{O}(n) \right) \rightarrow \Gamma \left(A, \mathcal{L}_0^{\otimes n} \right)$$

soit surjective pour tout $n \geq 1$. On suppose également que \mathcal{L} est associé à un plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$ et que h_{can} est la hauteur de NÉRON-TATE associée à \mathcal{L}_0 . Dans ce cas, en notant $m = \dim V + 1$, nous montrerons que l'on peut considérer dans le théorème B

$$\mu = \left((N_A + 1)(N_P + 1) \deg V\right)^{m^{3m^2}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \mu^{-1} = \left((N_A + 1)(N_P + 1) \deg V\right)^{-m^{3m^2}}$$

où le degré de V est pris relativement au plongement de SEGRE

$$A \times P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^N \quad \text{avec} \quad N = (N_A + 1)(N_P + 1) - 1.$$

Pour terminer cette partie, nous allons donner un corollaire des résultats précédents sur une équation aux unités de la forme

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 1 \quad \text{avec} \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \quad (0.0.3)$$

où $a_1, \dots, a_n \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$. Rappelons qu'une solution de cette équation est non dégénérée si

$$\sum_{i \in I} a_i x_i \neq 0 \quad \text{pour tout sous-ensemble non-vide } I \subset \{1, \dots, n\}.$$

En notant h_ℓ la hauteur standard sur $\mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^g$, nous montrerons le résultat suivant.

Corollaire C - *Il existe des constantes $\mu > 0$ et $\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété suivante : si $\Gamma \subset (\bar{\mathbb{Q}}^\times)^n$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un réel $\nu \geq 0$ tel que pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\bar{\mathbb{Q}}^\times)^n$, les solutions non dégénérées de 0.0.3 vérifient*

$$h_\ell(x_1, \dots, x_n) \leq \mu \cdot h_\ell(a_1, \dots, a_n) + \nu.$$

De plus, on peut prendre

$$\mu = (4^n \cdot (2n)!)^{(2n)^{12n^2}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \mu^{-1} = (4^n \cdot (2n)!)^{-(2n)^{12n^2}}.$$

Les remarques générales du théorème précédent s'appliquent à ce cas particulier. On peut aussi comparer à [2, Théorème 2.5] qui étudie le cas $n = 2$. Les auteurs donnent une majoration entièrement effective de la hauteur des solutions de 0.0.3 de la même forme que dans le théorème, mais leur constante μ dépend de Γ . Signalons également que si on considère l'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 1 \quad \text{avec} \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_\varepsilon,$$

alors [2, Théorème 2.3] implique que si $\varepsilon < 0,0225$, l'équation n'admet qu'un nombre fini de solutions et on a

$$[K(x_1, x_2) : K] \leq 2 \quad \text{avec} \quad K = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \Gamma_0)$$

où Γ_0 est un sous-groupe de type fini de $(\bar{\mathbb{Q}}^\times)^2$ vérifiant

$$\Gamma \subset \left\{ x \in (\bar{\mathbb{Q}}^\times)^2 \mid \exists k \in \mathbb{N}^*, \quad x^k \in \Gamma_0 \right\}.$$

Le théorème d'approximation de FALTINGS

Contexte

Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K . On note M_K l'ensemble des places de K . En fixant un plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}_K^N$, on obtient une hauteur $h : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ et une distance d_v sur $A(\mathbb{C}_v)$ pour chaque élément $v \in M_K$. Si X est un sous-schéma fermé de A , la distance d'un point $a \in A(\mathbb{C}_v)$ à X est par définition

$$d_v(a, X) = \inf_{b \in X(\mathbb{C}_v)} d_v(a, b).$$

Avec ces notations, FALTINGS a démontré le théorème suivant (voir [10, Théorème 2]).

Théorème (FALTINGS) - Si $\tau > 0$ est un réel et $v \in M_K$ est une place de K , alors il n'existe qu'un nombre fini de points $a \in A(K)$ vérifiant

$$0 < d_v(a, X) \leq \exp(-\tau \cdot h(a)).$$

De plus, ce résultat permet de démontrer facilement une ancienne conjecture de LANG sur les points entiers d'une variété abélienne (voir [10, Corollaire 6.2]).

Corollaire (FALTINGS) - Si E est un hyperplan de \mathbb{P}_K^N , alors $A \setminus E$ n'admet qu'un nombre fini de points entiers.

En effet, la hauteur d'un point entier a de $A \setminus E$ se majore par le produit de l'inverse des distances v -adiques de a à E quand $v \in M_K$ parcourt les places infinies de K . Ainsi, les points entiers de $A \setminus E$ vérifient l'inégalité du théorème précédent pour un réel $\tau > 0$, d'où le résultat.

Résultats

On fixe une variété abélienne A sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et un faisceau très ample et symétrique \mathcal{L} sur A associé à un plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}$. De plus, on suppose que l'application

$$\Gamma\left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}, \mathcal{O}(n)\right) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{L}^{\otimes n}) \quad (0.0.4)$$

est surjective pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\hat{h} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ la hauteur de NÉRON-TATE associée à \mathcal{L} . On fixe également un schéma projectif et intègre P sur $\bar{\mathbb{Q}}$, un faisceau \mathcal{L} très ample sur P , un plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$ associé à \mathcal{L} et une hauteur $h_{\mathcal{L}} : P(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ associée à \mathcal{L} . On considère un sous-schéma fermé intègre V de $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$ dont on considèrera le degré relativement au plongement de SEGRE. On note finalement $m = \dim(A \times P) + 1$.

Avant de pouvoir énoncer le théorème, nous devons donner un sens à la condition d'approximation sur $\bar{\mathbb{Q}}$. On fixe un corps de nombres K sur lequel sont définis A , P , V ainsi que le plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}$, ce qui fournit pour chaque place $v \in M_K$ une distance d_v sur $A(\mathbb{C}_v)$. On fixe une partie finie $\mathcal{S} \subset M_K$ et on définit pour $(a, p) \in (A \times P)(\bar{\mathbb{Q}})$ le nombre

$$d_{\mathcal{S}}(a, V_p) = \prod_{v \in \mathcal{S}} \prod_{\substack{w \in M_L \\ w|v}} d_w(a, V_p)^{\Delta_w} \quad \text{où} \quad \Delta_w = \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]}$$

et L est une extension finie de K contenant des coordonnées projectives de a et p . Par la formule du degré, le résultat obtenu ne dépend pas du corps de nombres choisi. Si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un groupe de type fini, on a par le théorème de FALTINGS que pour chaque $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, l'ensemble des points $a \in \Gamma$ vérifiant

$$0 < d_{\mathcal{S}}(a, V_p) \leq \exp\left(-\tau \cdot \hat{h}(a)\right)$$

est fini. Comme avant, on souhaite majorer la hauteur de ces points par la hauteur du point p . Nous démontrerons le résultat suivant.

Théorème D - Si $\tau > 0$ et $\xi > 0$ sont des réels, alors il existe une constante $\mu \geq 0$ ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe une constante $\nu \geq 0$ telle que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, les points $a \in \Gamma$ tels que

$$0 < d_{\mathcal{S}}(a, V_p) \leq \xi \cdot \exp(-\tau \cdot \hat{h}(a))$$

vérifient l'inégalité

$$\hat{h}(a) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu.$$

De plus, on peut prendre

$$\mu = \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{2^{N_A} \cdot 6^m \cdot m^2 \cdot (\deg V)^{N_A+1}}{\min(\tau, 1)} \right)^m.$$

Dans le cas particulier où V est donné par les zéros d'un polynôme bihomogène de bidegré (r, s) avec $r, s \geq 1$, nous verrons que l'on peut utiliser la valeur plus fine

$$\mu = \binom{N_A + r}{N_A}^m \cdot \frac{r^{m+1} \cdot 6^{m^2} \cdot m^{2m}}{s \cdot \min(\tau, 1)^m \cdot m!}.$$

Finalement, comme FALTINGS, on obtient un résultat sur les points entiers de A privée d'un hyperplan. On fixe un ensemble fini $\mathcal{S} \subset M_K$ contenant toutes les places infinies de M_K . Si $E = Z(F)$ est un hyperplan de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}$, les points S -entiers de $(A \setminus E)(L)$ sont

$$(A \setminus E)(\mathcal{O}_{L, \mathcal{S}}) = \left\{ a \in A(L) \mid \forall v \notin \mathcal{S}, \forall w \in M_{L(F)} \text{ avec } w \mid v, \text{ on a } \left| \frac{a}{F(a)} \right|_w \leq 1 \right\}$$

où $L(F)$ est le corps de nombres engendré par L et les coefficients de F . Avec ces notations, nous prouverons le corollaire suivant.

Corollaire E - Il existe une constante $\mu \geq 0$ ayant la propriété suivante : si L/K est une extension finie, alors il existe une constante $\nu \geq 0$ telle que pour tout hyperplan $E = Z(F)$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}$, les points entiers $a \in (A \setminus E)(\mathcal{O}_{L, \mathcal{S}})$ vérifient l'inégalité

$$\hat{h}(a) \leq \mu \cdot h(F) + \nu.$$

De plus, on peut prendre

$$\mu = \frac{1}{m!} \left((N_A + 1) \cdot 6^m \cdot m^2 \right)^m \quad \text{où} \quad m = \dim A + N_A + 1.$$

La méthode de VOJTA

La démonstration des résultats précédents est basée sur la méthode utilisée par VOJTA pour donner une nouvelle preuve de l'ancienne conjecture de MORDELL démontrée par FALTINGS dans [9] :

Théorème (FALTINGS) - *Si C est une courbe projective et lisse de genre $g \geq 2$ sur un corps de nombres K , alors $C(K)$ est fini.*

En utilisant les simplifications effectuées par BOMBIERI dans [4], la méthode consiste à établir l'impossibilité pour deux points rationnels de C de vérifier un système d'inégalités de hauteurs. Plus précisément, on plonge C dans sa jacobienne A et on note \mathcal{L} le faisceau très ample et symétrique associé au diviseur $3(\Theta + [-1]^*\Theta)$ où Θ est le diviseur theta sur A . On note $\hat{h} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ la hauteur de NÉRON-TATE associée à \mathcal{L} qui s'étend à $A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ en une forme quadratique définie positive. BOMBIERI a montré le résultat suivant.

Théorème (Inégalité de VOJTA) - *Il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que aucun point $(a_1, a_2) \in C(\bar{\mathbb{Q}})^2$ ne vérifie simultanément les inégalités*

$$\hat{h} \left(\frac{a_1}{\sqrt{\hat{h}(a_1)}} - \frac{a_2}{\sqrt{\hat{h}(a_2)}} \right) \leq \frac{1}{2}, \quad \hat{h}(a_2) \geq c_2^2 \cdot \hat{h}(a_1), \quad \hat{h}(a_1) \geq c_1.$$

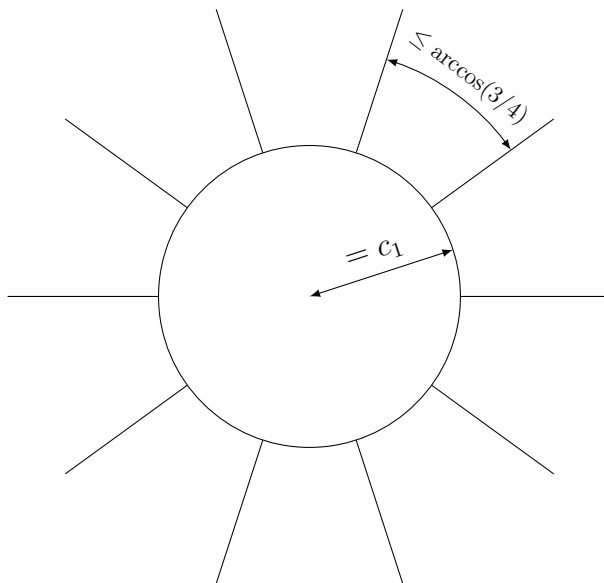
On déduit facilement de ce résultat le théorème de FALTINGS. Par le théorème de MORDELL-WEIL, l'espace vectoriel $A(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est de dimension finie, donc on peut le recouvrir par un nombre fini de cônes dans chacun desquels deux points quelconques vérifient la première condition du théorème précédent (voir la figure 1). On en déduit que la hauteur des points de $C(K)$ est majorée, sinon on pourrait construire deux points dans un des cônes tronqués contredisant l'inégalité de VOJTA. Ainsi les points de $C(K)$ sont de hauteurs bornées ce qui permet de conclure avec le théorème de NORTHCOTT. Signalons que l'on voit déjà dans ce cas la raison de la complète ineffectivité de la constante ν dans les différents résultats de la thèse. En effet, on n'a aucune information sur la localisation des points de $C(K)$ dans chacun des cônes tronqués.

Plus généralement, si Γ est un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$, on a aussi que l'ensemble $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est fini pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit où $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est défini au point 0.0.1 en prenant $h_{\text{can}} = \hat{h}$. On peut montrer que cet ensemble de points se recouvre comme précédemment par un nombre fini de cônes (voir [32, Lemme 2.1]), ce qui permet de montrer que les points sont de hauteurs bornées. Cependant, pour conclure, il nous faut un résultat supplémentaire, car le théorème de NORTHCOTT ne s'applique plus. On utilise à la place une propriété de BOGOMOLOV démontrée dans [7] : il existe une constante q ne dépendant que du degré de C telle que l'ensemble

$$\{a \in C(\bar{\mathbb{Q}}) \mid \hat{h}(a) \leq q\}$$

soit fini. On peut alors montrer que les points $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ se répartissent dans un nombre fini de boules de rayons q (voir [32, Lemme 2.1]). Chacune de ces boules ne pouvant contenir qu'un nombre fini d'éléments de $C(\bar{\mathbb{Q}})$ par définition de q , on obtient le résultat.

La démonstration de l'inégalité de VOJTA est basée sur la théorie de l'approximation diophantienne classique. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un couple de

FIGURE 1 – Recouvrement de $A(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

points $(a_1, a_2) \in C(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant les inégalités du théorème. On introduit sur A^2 le faisceau

$$\mathcal{L}(\varepsilon, s, d) = \left((p_1^* \mathcal{L}^{\otimes s_1^2} \otimes p_2^* \mathcal{L}^{\otimes s_2^2})^{\otimes -\varepsilon} \otimes (s_1 p_1 - s_2 p_2)^* \mathcal{L} \right)^{\otimes d}$$

où $p_1, p_2 : A^2 \rightarrow A$ sont les deux projections, s_1 et s_2 sont des rationnels respectivement proches de $\hat{h}(a_1)$ et $\hat{h}(a_2)$, $\varepsilon > 0$ est un rationnel et $d > 0$ est un entier suffisamment divisible. On commence par montrer que $\mathcal{L}(\varepsilon, s, d)$ a beaucoup de sections globales sur C^2 : cela résulte essentiellement de la théorie de l'intersection et du fait que le morphisme

$$C^2 \rightarrow A, \quad (a_1, a_2) \mapsto a_1 - a_2$$

est génériquement fini. On construit ensuite une suite exacte de faisceaux sur C^2 dont $\mathcal{L}(\varepsilon, s, d)$ est le noyau, souvent appelée complexe de FALTINGS dans ce contexte. Ainsi, en appliquant un lemme de SIEGEL, on obtient que si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit et si l'entier d est suffisamment grand et divisible, le faisceau $\mathcal{L}(\varepsilon, s, d)$ admet une section globale non nulle sur $C \times C$ de hauteur contrôlée. Finalement, on montre que l'indice d'annulation de cette section relativement à (ds_1, ds_2) au point (a_1, a_2) est élevé, ce qui permet d'aboutir à une contradiction.

Pour appliquer la méthode à un schéma de dimension supérieure, il faut ajouter un ingrédient supplémentaire, car on n'arrive plus directement à une contradiction quand on calcule l'indice de la section. Par exemple, FALTINGS a montré dans [10] la généralisation suivante de l'inégalité de VOJTA pour une courbe.

Théorème - Soit X un sous-schéma fermé intègre de A ne contenant aucun translaté de sous-variété abélienne de A non triviale. On note $m = \dim X + 1$. Il existe trois constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$ telles qu'aucun point $(a_1, \dots, a_m) \in X(\bar{\mathbb{Q}})^m$ ne vérifie simultanément les

inégalités

$$\hat{h} \left(\frac{a_i}{\sqrt{\hat{h}(a_i)}} - \frac{a_{i+1}}{\sqrt{\hat{h}(a_{i+1})}} \right) \leq \frac{1}{c_1^2}, \quad \hat{h}(a_{i+1}) \geq c_2^2 \cdot \hat{h}(a_i), \quad \hat{h}(a_1) \geq c_3$$

pour tout $1 \leq i \leq m - 1$.

On pourra se reporter à [30] où RÉMOND a établi une version effective de ce résultat (et sans l'hypothèse faite sur X). Pour appliquer la méthode de VOJTA dans ce cas, on complète la démonstration précédente en suivant FALTINGS. Avec les notations analogues au cas d'une courbe, on introduit sur A^m le faisceau

$$\mathcal{L}(\varepsilon, s, d) = \left[\left(\bigotimes_{i=1}^m P_i^* \mathcal{L}^{\otimes s_i^2} \right)^{\otimes -\varepsilon} \otimes \bigotimes_{i=1}^{m-1} (s_i P_i - s_{i+1} P_{i+1})^* \mathcal{L} \right]^{\otimes d}.$$

Comme avant, on construit une section globale de ce faisceau sur X^m qui a un indice d'annulation élevé en $a = (a_1, \dots, a_m)$. Cependant, on n'obtient pas directement une contradiction, mais on applique le théorème du produit de FALTINGS (voir [10, Théorème 3.1]) qui montre que a appartient à un sous-schéma fermé intègre strict $X_1 \times \dots \times X_m$ de X^m dont le degré et la hauteur sont bornés indépendamment du point a . On répète alors le procédé en remplaçant X^m par $X_1 \times \dots \times X_m$, ce qui permet de construire une suite strictement décroissante de sous-schémas fermés de X^m . Au bout d'un nombre fini d'étapes, un des X_i est de dimension nulle, ce qui permet, en utilisant le contrôle sur la hauteur des X_i et les conditions sur (a_1, \dots, a_m) , d'aboutir à une contradiction.

Plan de la thèse

Dans le chapitre 1, on commencera par fixer les notations de la thèse. Pour cela, on redonnera succinctement les définitions des outils arithmétiques (hauteur d'un point, hauteur d'un sous-schéma fermé de l'espace projectif, distance associée à une place,...) et on rappellera la construction des hauteurs de NÉRON-TATE ainsi que celle des hauteurs standards sur un tore. On continuera en généralisant ces constructions afin d'obtenir les hauteurs canoniques sur une variété semi-abélienne. Nous rappellerons ensuite différents résultats de RÉMOND que nous utiliserons, notamment l'inégalité de VOJTA généralisée (voir [35, Théorème 1.2]). Ce théorème nous permettra d'éviter d'appliquer complètement la méthode de VOJTA pour démontrer nos résultats relatifs à l'ancienne conjecture de MORDELL-LANG plus BOGOMOLOV, ce qui aura l'avantage de raccourcir largement les démonstrations. On terminera ce chapitre en démontrant quelques lemmes préliminaires, dont une généralisation du théorème d'existence du lieu exceptionnel d'un sous-schéma fermé dans une variété semi-abélienne.

Dans les chapitre 2, 3 et 4, nous démontrerons les théorèmes A et B respectivement dans le cas abélien, torique et général. L'intérêt de séparer ces trois cas est d'obtenir des valeurs effectives dans les théorèmes pour la constante μ . De plus, le cas abélien est lié aux courbes (comme on l'a vu dans la partie précédente), tandis que le cas torique est

lié à l'équation aux unités. Dans ces trois chapitres, on commencera par démontrer une inégalité de VOJTA généralisant celles citées ci-dessus. Pour cela, on se placera dans les conditions d'application de l'inégalité de VOJTA généralisée de RÉMOND. Une fois celle-ci établie, les théorèmes résultent essentiellement de la méthode exposée dans la partie précédente pour obtenir le théorème de FALTINGS sur les courbes. On en déduit aussi le corollaire C sur les équations aux unités.

Enfin, dans le chapitre 5, on établira le théorème D. Comme dans les chapitres précédents, on commencera par établir une inégalité de VOJTA adaptée à ce cas. Cependant, l'inégalité de VOJTA généralisée de RÉMOND n'étant pas adaptée à ce cadre, on devra complètement appliquer la méthode de VOJTA. Pour terminer la thèse, on en déduira le théorème D et le corollaire E sur les points entiers d'une variété abélienne privée d'un hyperplan.

CHAPITRE 1

NOTATIONS, RAPPELS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1.1 Les outils arithmétiques

1.1.1 Hauteurs des points et des polynômes

Si K est un corps de nombres, on note M_K l'ensemble des places de K . L'ensemble $M_{\mathbb{Q}}$ s'identifie naturellement à la réunion de l'ensemble des nombres premiers et de $\{\infty\}$. On note $|\cdot|_{\infty}$ la valeur absolue usuelle sur \mathbb{Q} , tandis que l'on désigne par $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ pour un nombre premier p , celle donnée par

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}$$

où $v_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ est la valuation p -adique. Plus généralement, si $v \in M_K$, on désigne par $|\cdot|_v$ la valeur absolue sur K associée à v prolongeant $|\cdot|_{\infty}$ ou $|\cdot|_p$ pour un nombre premier p . Si w est une place d'une extension finie L de K , on écrit $w | v$ si $|\cdot|_w$ prolonge la valeur absolue $|\cdot|_v$. On note également K_v la complétion du corps K relativement à $|\cdot|_v$. Avec ces notations, on dispose de la formule du degré (voir [14, Proposition B.1.1])

$$\sum_{w|v} [L_w : K_v] = [L, K]$$

et pour tout $x \in K \setminus \{0\}$ de la formule du produit (voir [14, Proposition B.1.2])

$$\prod_{v \in M_K} |x|_v^{\Delta_v} = 1 \quad \text{où} \quad \Delta_v = \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]}.$$

Si F est une famille finie de K et v une place de K , on note

$$|F|_v = \max_{x \in F} |x|_v.$$

On définit ainsi la hauteur de WEIL d'une partie finie $F \subset \bar{\mathbb{Q}}$ par

$$h(F) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |F|_v$$

où K est le corps de nombres $\mathbb{Q}(F)$. En particulier, on définit la hauteur $h(x)$ d'un point $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N(\bar{\mathbb{Q}})$ comme celle d'un système de coordonnées pour x (Par la formule du produit, le nombre obtenu ne dépend pas du choix des coordonnées projectives). Si l'on note $\text{Seg} : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_1} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_2} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ le plongement de SEGRE, on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_1}(\bar{\mathbb{Q}}), \quad \forall y \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_2}(\bar{\mathbb{Q}}), \quad h(\text{Seg}(x, y)) = h(x) + h(y),$$

tandis qu'avec le plongement de VERONESE $\text{Ver}_d : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'}$ de degré d , on a

$$\forall x \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N(\bar{\mathbb{Q}}), \quad h(\text{Ver}_d(x)) = d \cdot h(x).$$

On étend les notations $|P|_v$ et $h(P)$ à un polynôme ou une matrice P en l'identifiant à la famille de ces coefficients.

On dispose ainsi sur l'espace projectif d'une application hauteur

$$h : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si X est un schéma projectif plongé dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$, on obtient par composition une notion de hauteur pour les éléments de $X(\bar{\mathbb{Q}})$. Cependant, cette hauteur dépend du choix du plongement. Le théorème suivant contrôle la dépendance de la hauteur en fonction du plongement choisi. On note $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ respectivement les fonctions de X dans \mathbb{R} et celles qui sont bornées.

Théorème 1.1.1 (Machine des hauteurs) - *Soit X un schéma projectif et intègre sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Il existe un unique morphisme de groupes*

$$h_X : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X(\bar{\mathbb{Q}}), \mathbb{R}) / \mathcal{B}(X(\bar{\mathbb{Q}}), \mathbb{R})$$

vérifiant les propriétés suivantes

- (i) *Si $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ est associé à un plongement $\iota : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$, alors $h \circ \iota \in h_X(\mathcal{L})$.*
- (ii) *Si $\varphi : X \rightarrow Y$ est un morphisme entre deux schémas projectifs et intègres, et si $\mathcal{L} \in \text{Pic}(Y)$, alors $h_Y(\mathcal{L}) \circ \varphi \subset h_X(\varphi^* \mathcal{L})$.*

De plus, on a

- (iii) *Si $h_{\mathcal{L}} \in h_X(\mathcal{L})$ avec \mathcal{L} ample, pour tout réel $C > 0$, l'ensemble des points $x \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ tels que $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] \leq C$ et $h_{\mathcal{L}}(x) \leq C$ est fini (Théorème de NORTHCOTT).*
- (iv) *Si $h_{\mathcal{L}} \in h_X(\mathcal{L})$, alors $h_{\mathcal{L}}$ est minoré en dehors du lieu base de $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$.*

DÉMONSTRATION :

Si $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$, on peut écrire $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes -1}$ avec des faisceaux $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ très amples. L'unicité en découle facilement. Pour l'existence, il faut vérifier qu'en considérant des plongements différents associés à \mathcal{L} très ample, les différentes hauteurs obtenues ne diffèrent que d'une fonction bornée. Pour une démonstration complète, on pourra se reporter à [14, Théorème B.3.2] □

Les éléments de $h_X(\mathcal{L})$ sont appelés les hauteurs associées à \mathcal{L} . En général, il n'est pas possible d'associer canoniquement une fonction hauteur à chaque faisceau. Cependant, dans le cadre des variétés abéliennes ou d'un tore, la situation est meilleure. On commence par rappeler le lemme suivant.

Lemme 1.1.2 (Procédé de TATE) - *Soient X un schéma projectif et intègre sur $\bar{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ et $f : X \rightarrow X$ un morphisme. On suppose que $f^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes k}$ pour un entier $k > 1$. Alors il existe une unique hauteur $\hat{h}_{\mathcal{L},f} : X(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ associée à \mathcal{L} telle que*

$$\forall x \in X(\bar{\mathbb{Q}}), \quad \hat{h}_{\mathcal{L},f}(f(x)) = k \cdot \hat{h}_{\mathcal{L},f}(x).$$

De plus, si $h_{\mathcal{L}}$ est une hauteur quelconque associée à \mathcal{L} , alors on a

$$\forall x \in X(\bar{\mathbb{Q}}), \quad \hat{h}_{\mathcal{L},f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_{\mathcal{L}}(f^n(x))}{k^n}.$$

Finalemment, si $g : X \rightarrow X$ est un morphisme commutant avec f tel que $g^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes \ell}$ pour un entier $\ell > 1$, alors $\hat{h}_{\mathcal{L},f} = \hat{h}_{\mathcal{L},g}$.

DÉMONSTRATION :

Les hauteurs $h_{\mathcal{L}} \circ f$ et $k \cdot h_{\mathcal{L}}$ sont associées au faisceau $\mathcal{L}^{\otimes k}$, donc il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in X(\bar{\mathbb{Q}}), \quad |h_{\mathcal{L}}(f(x)) - k \cdot h_{\mathcal{L}}(x)| \leq C.$$

Ainsi, on obtient pour $n \geq m$ la majoration

$$\left| \frac{h_{\mathcal{L}}(f^n(x))}{k^n} - \frac{h_{\mathcal{L}}(f^m(x))}{k^m} \right| \leq \sum_{i=m+1}^n Ck^{-i} \leq \frac{C}{(k-1)k^m}.$$

Ainsi la suite est de CAUCHY et on peut définir $\hat{h}_{\mathcal{L},f}$ par la formule de la proposition. En prenant la limite $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédente, on trouve que $\hat{h}_{\mathcal{L},f}$ est une hauteur associée à \mathcal{L} . De même, les autres affirmations se déduisent de la formule (voir [14, Théorème B.4.1]). \square

Ce résultat s'applique directement au cadre d'une variété abélienne A sur $\bar{\mathbb{Q}}$ en utilisant la famille commutative formée des morphismes $[n] : A \rightarrow A$ de multiplication par $n \in \mathbb{Z}$. Le théorème du cube montre que si \mathcal{L} est symétrique (*i.e.* $[-1]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$), alors $[n]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n^2}$, tandis que si \mathcal{L} est antisymétrique (*i.e.* $[-1]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes -1}$), alors $[n]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n}$. Rappelons qu'une fonction $q : G \rightarrow \mathbb{R}$ où G est un groupe, est quadratique si

$$q(x+y+z) - q(x+y) - q(x+z) - q(y+z) + q(x) + q(y) + q(z) = 0$$

pour tout $x, y, z \in G$. Les considérations ci-dessus permettent d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 1.1.3 (Hauteurs de NÉRON-TATE) - *Soit A une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Il existe un unique morphisme de groupes*

$$\hat{h} : \text{Pic}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A(\bar{\mathbb{Q}}), \mathbb{R}), \quad \mathcal{L} \mapsto \hat{h}_{\mathcal{L}}$$

tel que pour tout $\mathcal{L} \in \text{Pic}(A)$, la fonction $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ est une hauteur associée à \mathcal{L} et elle est quadratique. De plus, si \mathcal{L} est symétrique et ample, alors

- (i) La fonction $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ est positive et s'annule exactement sur $A(\bar{\mathbb{Q}})_{\text{tors}}$.
- (ii) La fonction $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ s'étend à $A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ en une forme quadratique définie positive.

DÉMONSTRATION :

Pour tout $\mathcal{L} \in \text{Pic}(A)$, la décomposition

$$\mathcal{L}^{\otimes 2} = (\mathcal{L} \otimes [-1]^* \mathcal{L}) \otimes (\mathcal{L} \otimes [-1]^* \mathcal{L}^{\otimes -1})$$

permet de se ramener au cas où \mathcal{L} est symétrique ou antisymétrique. Dans ces deux cas, on peut utiliser le procédé de TATE donné par le lemme précédent. L'existence et l'unicité en découlent facilement. Pour une démonstration complète, on pourra se reporter à [14, Théorème B.5.6] et [14, Théorème B.5.3]. \square

Pour terminer, nous allons appliquer le même procédé à $A = \mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^g$. Signalons que dans le but d'alléger les notations, la loi de groupe de A sera toujours notée additivement. Par rapport au cas précédent, on rencontre une difficulté supplémentaire : si $g > 0$, le schéma A n'est que quasi-projectif. On choisit de compactifier A en le regardant comme un ouvert de $\bar{A} = (\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^1)^g$. L'avantage de ce choix (arbitraire) est que les morphismes de multiplication s'étendent en $[n] : \bar{A} \rightarrow \bar{A}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ (La multiplication par $[-1]$ ne s'étend pas à toutes les compactifications. Par exemple, on ne peut la définir entièrement sur $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^g$ si $g > 1$). De plus, pour tout $\mathcal{L} \in \text{Pic}(\bar{A})$, on a $[n]^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes |n|}$. On dit qu'une application $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ où G est un groupe, est homogène si

$$\forall x \in G, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n \cdot x) = |n| \cdot f(x).$$

Dans ce cadre, le procédé de TATE fournit le résultat suivant.

Théorème 1.1.4 - *Il existe un unique morphisme de groupes*

$$\hat{h} : \text{Pic}(\bar{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\bar{A}(\bar{\mathbb{Q}}), \mathbb{R}), \quad \mathcal{L} \mapsto \hat{h}_{\mathcal{L}}$$

tel que pour tout $\mathcal{L} \in \text{Pic}(A)$, la fonction $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ est une hauteur associée à \mathcal{L} et elle est homogène. De plus, si $\mathcal{L} = \mathcal{O}(r)$ où $r = (r_1, \dots, r_g) \in \mathbb{Z}^g$, alors

$$\forall (x_1, \dots, x_g) \in \bar{A}(\bar{\mathbb{Q}}), \quad \hat{h}_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_g) = \sum_{i=1}^g r_i \cdot h(x_i).$$

Finalemment, si \mathcal{L} est ample, alors

- (i) La fonction $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ est positive et s'annule exactement sur $A(\bar{\mathbb{Q}})_{\text{tors}}$.
- (ii) La fonction $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ s'étend à $A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ en une norme.

DÉMONSTRATION :

L'existence de \hat{h} est une conséquence du procédé de TATE. Pour obtenir l'expression donnée de $\hat{h}_{\mathcal{L}}$, il suffit de vérifier que la fonction est homogène. Si \mathcal{L} est ample, la fonction $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ est positive car h l'est et on vérifie qu'elle s'annule exactement sur les points de torsion en utilisant la propriété d'homogénéité.

Pour le point (ii), la fonction $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ est homogène et on montre qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire à partir de la formule précédente. De plus,

$$\forall x \in A(\bar{\mathbb{Q}}), \quad \forall \xi \in A(\bar{\mathbb{Q}})_{\text{tors}}, \quad \hat{h}_{\mathcal{L}}(x + \xi) = \hat{h}_{\mathcal{L}}(x).$$

Ainsi, $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ définit une norme sur le \mathbb{Q} -espace vectoriel $A(\bar{\mathbb{Q}})/A(\bar{\mathbb{Q}})_{\text{tors}}$ qui s'étend en une semi-norme au \mathbb{R} -espace vectoriel

$$(A(\bar{\mathbb{Q}})/A(\bar{\mathbb{Q}})_{\text{tors}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Supposons qu'il existe des points $x_1, \dots, x_r \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ dont les images dans $A(\bar{\mathbb{Q}})/A(\bar{\mathbb{Q}})_{\text{tors}}$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} et des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$\hat{h}_{\mathcal{L}} \left(\sum_{i=1}^r x_i \otimes \lambda_i \right) = 0.$$

On fixe un entier $N \in \mathbb{N}$ et on désigne par $N_i \in \mathbb{Z}$ l'entier le plus proche de $N\lambda_i$ pour $1 \leq i \leq r$. On obtient ainsi par inégalité triangulaire et homogénéité

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}(N_1 x_1 + \dots + N_r x_r) = \hat{h}_{\mathcal{L}} \left(\sum_{i=1}^r x_i \otimes (N_i - N\lambda_i) \right) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \hat{h}_{\mathcal{L}}(x_i).$$

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$, les nombres $N_1 x_1 + \dots + N_r x_r$ sont des points du corps de nombres $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_r)$ de hauteurs bornées indépendamment de N . Par le théorème de NORTHCOTT, l'ensemble de ces points quand N parcourt \mathbb{N} est fini, ce qui n'est possible que si $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Ainsi $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ est une norme sur $A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. \square

Dans la seconde partie, nous généraliserons les constructions précédentes dans les variétés semi-abéliennes.

1.1.2 Hauteur d'un sous-schéma fermé de l'espace projectif

Dans cette partie, nous allons rappeler comment définir la hauteur d'un sous-schéma fermé de l'espace projectif. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [26] ou [31]. Soit V un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ de dimension r . On note $(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N)^*$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$. Alors, le schéma dont les points sont

$$\{(L_0, \dots, L_r) \in (\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N)^* \times \dots \times (\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N)^* \mid V \cap Z(L_0) \cap \dots \cap Z(L_r) \neq \emptyset\}.$$

existe et est une hypersurface. Une équation F_V de cette hypersurface est appelée une forme éliminante de V .

Afin de définir la hauteur de V , nous allons définir la hauteur de F_V . On désigne par $X^{(i)}$ les coordonnées $(X_0^{(i)}, \dots, X_N^{(i)})$ du i -ème facteur $(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N)^*$ pour $0 \leq i \leq r$. On note K le corps de nombres engendré par les coefficients de F_V . Si $v \in M_K$ est une place finie, on désigne par $M_v(F_V)$ le maximum des valeurs absolues v -adiques des coefficients de F_V , tandis que si v est infinie, on pose

$$\log M_v(F_V) = \int_{S_{N+1}^{r+1}} \log |F_V|_v \sigma_{N+1}^{\wedge(r+1)} + (\deg F_V) \sum_{j=1}^N \frac{1}{2j}$$

où S_{N+1} est la sphère unité de \mathbb{C}^{N+1} et σ_{N+1} la mesure sur S_{N+1} invariante par l'action du groupe unitaire et vérifiant $\sigma_{N+1}(S_{N+1}) = 1$. La hauteur de F_V est le nombre

$$h_{\mathcal{F}}(F_V) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log M_v(F_V).$$

Finalement, on définit la hauteur de V en posant $h(V) = h_{\mathcal{F}}(F_V)$. La formule du produit montre que cette définition ne dépend pas du choix de la forme éliminante de V choisie.

Pour finir, étudions succinctement le cas où $V = \{a\}$. Si $a = [a_0 : \dots : a_N]$, alors une forme éliminante de V est donnée par

$$F_V = a_0 X_0 + \dots + a_N X_N.$$

Si $v \in M_K$ est infinie où $K = \mathbb{Q}(a_0, \dots, a_N)$, on a avec [25, Proposition 4] que

$$M_v(F_V) = \left(\sum_{j=0}^N |a_j|_v^2 \right)^{1/2}.$$

En particulier, pour tout $v \in M_K$, on a

$$\max(|a_0|_v, \dots, |a_N|_v) \leq M_v(F_V),$$

et on en déduit l'inégalité $h(a) \leq h(\{a\})$.

1.1.3 Distance sur l'espace projectif associée à une place

Soient K un corps de nombres et $v \in M_K$ une place de K . La valeur absolue $|\cdot|_v$ s'étend de manière unique à la clôture algébrique \bar{K}_v de K_v (voir [5, Proposition 1.2.7]). Par suite, $|\cdot|_v$ s'étend de manière unique à une complétion de \bar{K}_v relativement à $|\cdot|_v$ que l'on note \mathbb{C}_v . Selon que v est finie ou infinie, on définit respectivement la norme v -adique d'une famille finie $F = (x_i)_{i \in I}$ d'éléments de \mathbb{C}_v par

$$\|F\|_{2,v} = \max_{i \in I} |x_i|_v \quad \text{et} \quad \|F\|_{2,v} = \left(\sum_{i \in I} |x_i|_v^2 \right)^{1/2}.$$

En choisissant des coordonnées (x_0, \dots, x_N) et (y_0, \dots, y_N) pour $x, y \in \mathbb{P}_K^N(\mathbb{C}_v)$, on définit

$$d_v(x, y) = \frac{\|x \wedge y\|_{2,v}}{\|x\|_{2,v}\|y\|_{2,v}} \quad \text{où} \quad x \wedge y = (x_i y_j - x_j y_i)_{0 \leq i < j \leq N}.$$

Cette application est une distance sur $\mathbb{P}_K^N(\mathbb{C}_v)$ et elle est ultramétrique si v est une place finie (voir [15, Chapitre 3, Partie 1]). De plus, on a l'inégalité

$$\forall x, y \in \mathbb{P}_K^N(\mathbb{C}_v), \quad 0 \leq d_v(x, y) \leq 1.$$

On définit la distance d'un point $x \in \mathbb{P}_K^N(K)$ à un sous-schéma fermé X de \mathbb{P}_K^N en posant

$$d_v(x, X) = \inf_{y \in X(\mathbb{C}_v)} d_v(x, y).$$

Ce nombre ne dépend pas des différents choix de complétions effectués, mais uniquement de v, x et X . Dans le cas où X est une hypersurface, on dispose d'une expression simple de cette distance.

Lemme 1.1.5 - *Si X est une hypersurface de \mathbb{P}_K^N d'équation L , on a*

$$d_v(x, X) = \frac{|L(x)|_v}{\|L\|_{2,v}\|x\|_{2,v}}.$$

DÉMONSTRATION :

Voir [24, Proposition 1.6.1]. □

Dans la suite, nous devons parfois changer d'espace projectif à l'aide du plongement de VERONESE. Cependant, afin de pouvoir comparer les différentes distances, nous utiliserons le plongement de VERONESE modifié $\text{Ver}_d^m : \mathbb{P}_K^N \rightarrow \mathbb{P}_K^{N'}$ (de degré d) dont les composantes sont

$$\left(\binom{d}{\alpha}^{1/2} x^\alpha \right)_\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha_0 + \dots + \alpha_N = d \quad \text{et} \quad N' = \binom{N+d}{d} - 1.$$

Pour $v \in M_K$, on note $\delta_v = 0$ si v est finie et $\delta_v = 1$ si v est infinie. On a le résultat suivant.

Lemme 1.1.6 - *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{P}_K^N(\mathbb{C}_v) \times \mathbb{P}_K^N(\mathbb{C}_v)$, on a*

$$d_v(\text{Ver}_d^m(x), \text{Ver}_d^m(y)) \leq d^{\delta_v/2} \cdot d_v(x, y).$$

DÉMONSTRATION :

Supposons dans un premier temps que v est infinie. La formule [27, p. 89] s'écrit

$$d_v(\text{Ver}_d^m(x), \text{Ver}_d^m(y)) = \sqrt{1 - (1 - d_v(x, y)^2)^d}.$$

Finalement, avec l'inégalité $1 - (1 - t)^d \leq dt$ valable pour $t \in [0, 1]$, on obtient

$$d_v(\text{Ver}_d^m(x), \text{Ver}_d^m(y)) \leq \sqrt{d} \cdot d_v(x, y).$$

Si v est finie, les coefficients multinomiaux étant des entiers, on a

$$\|\text{Ver}_d^m(x)\|_{2,v} = \max_{\alpha} \left| \binom{d}{\alpha} x^{\alpha} \right|_v \leq \max_{\alpha} |x|_v^{\alpha} \leq \|x\|_{2,v}^d.$$

D'autre part, si on fixe $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ réalisant le maximum de $|x_i|_v$, une composante de $\text{Ver}_d^m(x)$ a pour valeur x_i^d , donc

$$\|\text{Ver}_d^m(x)\|_{2,v} = \|x\|_{2,v}^d.$$

On fixe des coordonnées projectives de x et y de sorte que $\|x\|_{2,v} = \|y\|_{2,v} = 1$, ainsi que des multi-indices α et β de longueurs d . Un élément de la forme $X^{\alpha}Y^{\beta} - X^{\beta}Y^{\alpha}$ appartient à l'idéal de $\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_N, Y_0, \dots, Y_N]$ engendré par les éléments de la forme $X_iY_j - X_jY_i$ pour $1 \leq i, j \leq N$. Ainsi, $x^{\alpha}y^{\beta} - x^{\beta}y^{\alpha}$ se décompose comme une somme de termes de la forme

$$a \cdot \mathbf{m}(x, y) \cdot (x_iy_j - x_jy_i)$$

où $a \in \mathbb{Z}$ et \mathbf{m} est un monôme en $X_0, \dots, X_N, Y_0, \dots, Y_N$. On en déduit avec l'inégalité triangulaire ultramétrique

$$\begin{aligned} \|\text{Ver}_d^m(x) \wedge \text{Ver}_d^m(y)\|_{2,v} &= \max_{\alpha < \beta} \left| \binom{d}{\alpha} \binom{d}{\beta} (x^{\alpha}y^{\beta} - x^{\beta}y^{\alpha}) \right|_v \\ &\leq \max_{\alpha < \beta} |x^{\alpha}y^{\beta} - x^{\beta}y^{\alpha}|_v \\ &\leq \|x \wedge y\|_{2,v}. \end{aligned}$$

Finalement, en reprenant les deux estimations précédentes, on obtient

$$d_v(\text{Ver}_d^m(x), \text{Ver}_d^m(y)) \leq d_v(x, y).$$

□

Pour finir, on considère un plongement de SEGRE

$$\text{Seg} : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{N_1} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{N_2} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^N.$$

On le résultat suivant.

Lemme 1.1.7 - *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^N(\mathbb{C}_v) \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^N(\mathbb{C}_v)$, on a*

$$d_v(\text{Seg}(x, p), \text{Seg}(y, p)) = d_v(x, y).$$

DÉMONSTRATION :

On fixe des coordonnées projectives pour $x, y \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{N_1}(\mathbb{C}_v)$ et $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{N_2}(\mathbb{C}_v)$. Par définition du plongement de SEGRE, on peut prendre $(x_i \cdot p_j)_{0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2}$ pour coordonnées projectives de $\text{Seg}(x, p) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^N(\mathbb{C}_v)$. Si v est une place infinie, on a d'une part

$$\|\text{Seg}(x, p)\|_{2,v} = \left(\sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} |x_i p_j|_v^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^{N_1} |x_i|_v^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^{N_2} |p_j|_v^2 \right)^{1/2} = \|x\|_{2,v} \cdot \|p\|_{2,v}.$$

D'autre part, les composantes de $\text{Seg}(x, p) \wedge \text{Seg}(y, p)$ sont données par

$$((x_i p_j)(y_k p_\ell) - (x_k p_\ell)(y_i p_j)) = p_j p_\ell (x_i y_k - x_k y_i).$$

En particulier, en utilisant l'ordre lexicographique, on a

$$\begin{aligned} \|\text{Seg}(x, p) \wedge \text{Seg}(y, p)\|_{2,v} &= \left(\sum_{(i,j) < (k,\ell)} |p_j|_v^2 |p_\ell|_v^2 |x_i y_k - x_k y_i|_v^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{0 \leq j, \ell \leq N_2} |p_j|_v^2 |p_\ell|_v^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{0 \leq i < k \leq N_1} |x_i y_k - x_k y_i|_v^2 \right)^{1/2} \\ &= \|p\|_{2,v}^2 \cdot \|x \wedge y\|_{2,v}. \end{aligned}$$

En substituant dans la définition de d_v , on obtient le résultat. Dans le cas où v est finie, on a de même

$$\|\text{Seg}(x, p)\|_{2,v} = \max_{i,j} |x_i p_j|_v = \left(\max_i |x_i|_v \right) \left(\max_j |p_j|_v \right) = \|x\|_{2,v} \cdot \|p\|_{2,v},$$

tandis que

$$\|\text{Seg}(x, p) \wedge \text{Seg}(y, p)\|_{2,v} = \max_{i,k,j,\ell} \left(|p_j|_v |p_\ell|_v |x_i y_k - x_k y_i|_v \right) = \|p\|_{2,v}^2 \cdot \|x \wedge y\|_{2,v},$$

ce qui permet de conclure comme dans le cas archimédien. \square

1.2 Les variétés semi-abéliennes

Une variété semi-abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$ est un schéma en groupes A sur $\bar{\mathbb{Q}}$ admettant une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^g \longrightarrow A \xrightarrow{f} A_0 \longrightarrow 0. \quad (1.2.1)$$

où A_0 est une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Autrement dit, une variété semi-abélienne est l'extension d'une variété abélienne par un tore. L'objectif de cette partie est principalement d'étendre les théorèmes 1.1.3 et 1.1.4 afin d'obtenir des hauteurs bien définies sur A .

1.2.1 Rappels sur les fibrés projectifs

On commence par effectuer quelques rappels sur les fibrés projectifs nécessaires pour compactifier une variété semi-abélienne. Pour plus de détails, on pourra se référer à [11, Chapitre 4] ou [12, Chapitre 2]. Si X est un schéma noethérien et \mathcal{E} un faisceau localement libre et cohérent sur X , on définit

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \text{Proj} \left(\bigoplus_{d \geq 0} S^d(\mathcal{E}) \right) \xrightarrow{\pi} X.$$

Rappelons que, par construction, pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ de X sur lequel \mathcal{E} est libre de rang $n + 1$, on a

$$\pi^{-1}(U) \cong \mathbb{P}_A^n.$$

De plus, les faisceaux naturels $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(1)$ sur chaque $\pi^{-1}(U)$ se recollent en un faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ sur $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. On obtient également par construction un morphisme surjectif

$$\pi^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1). \quad (1.2.2)$$

A partir d'un morphisme surjectif $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ où \mathcal{F} est un faisceau localement libre et cohérent sur X , on peut construire naturellement une immersion $\iota : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ avec

$$\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1).$$

On dispose également du résultat suivant.

Proposition 1.2.3 - *Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur X . Il existe un isomorphisme canonique $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L})$ de sorte que*

$$\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L})}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \otimes \pi^*\mathcal{L}.$$

DÉMONSTRATION :

Voir [11, Proposition 4.1.4] ou [12, Lemme 7.9]. □

A présent, nous allons étudier les morphismes d'un schéma Y dans $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. On fixe un morphisme $\varphi : Y \rightarrow X$. Un faisceau quotient inversible est une classe d'équivalence (\mathcal{L}, s) où \mathcal{L} est un faisceau inversible sur Y et $s : \varphi^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}$ est un morphisme surjectif, deux couples (\mathcal{L}, s) et (\mathcal{L}', s') étant équivalents s'il existe un isomorphisme de faisceaux $\tau : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ tel que $\tau \circ s = s'$.

Proposition 1.2.4 - *L'ensemble des X -morphisms $Y \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ est en bijection avec l'ensemble des quotients inversibles $\varphi^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$.*

DÉMONSTRATION :

Si $g : Y \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ est un X -morphisme, alors en tirant en arrière par g l'application surjective du point 1.2.2, on obtient

$$\varphi^*\mathcal{E} = g^*\pi^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) = \mathcal{L}.$$

Réciproquement, on se donne un faisceau quotient inversible $\varphi^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ sur Y . On veut montrer qu'il existe un unique X -morphisme $g : Y \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{L} \cong g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ et que $\varphi^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ est obtenu en appliquant g^* au point 1.2.2. Il suffit de vérifier cette affirmation localement, donc on peut supposer que $X = \text{Spec } A$ et que \mathcal{E} est libre de rang $n + 1$. Dans ce cas, l'application $\varphi^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ correspond à $n + 1$ sections globales s_0, \dots, s_n de \mathcal{L} qui l'engendrent. Or, il existe un unique morphisme $g : Y \rightarrow \mathbb{P}_A^n = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{L} \cong g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(1)$ et $s_i = g^*(x_i)$, ce qui montre le résultat. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [11, Proposition 4.2.3] ou [12, Proposition 7.12]. □

En particulier, on dispose du morphisme de VERONESE $\text{Ver} : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}(S^\ell(\mathcal{E}))$ au-dessus de X correspondant au quotient inversible $S^\ell \pi^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\ell)$. Il vérifie

$$\text{Ver}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^\ell(\mathcal{E}))}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\ell) \quad (1.2.5)$$

et on montre que c'est un plongement en se ramenant localement au morphisme de VERONESE classique. Pour terminer, nous allons établir la proposition suivante que nous utiliserons pour compactifier une variété semi-abélienne.

Proposition 1.2.6 - *On fixe deux faisceaux inversibles \mathcal{M} et \mathcal{N} sur X . Les sections D^∞ et D^0 de $\mathbb{P}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) \xrightarrow{\pi} X$ induites respectivement par les quotients inversibles*

$$\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \oplus \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$$

sont des diviseurs de CARTIER associés respectivement aux faisceaux inversibles

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})}(1) \otimes \pi^* \mathcal{N}^{\otimes -1} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})}(1) \otimes \pi^* \mathcal{M}^{\otimes -1}.$$

De plus, si $\mathbb{P}'(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})$ désigne l'ouvert de $\mathbb{P}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})$ obtenu en retirant ces deux sections, alors les X -morphisms $Y \rightarrow \mathbb{P}'(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})$ correspondent aux quotients inversibles

$$\varphi^* \mathcal{M} \oplus \varphi^* \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}$$

tels que les composées

$$\varphi^* \mathcal{M} \rightarrow \varphi^* \mathcal{M} \oplus \varphi^* \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L} \quad \text{et} \quad \varphi^* \mathcal{N} \rightarrow \varphi^* \mathcal{M} \oplus \varphi^* \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}$$

soient des isomorphismes.

DÉMONSTRATION :

En utilisant le point 1.2.2, on a une suite d'applications

$$\pi^* \mathcal{N} \rightarrow \pi^* \mathcal{M} \oplus \pi^* \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})}(1),$$

puis par produit tensoriel, on obtient

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})}(1) \otimes \pi^* \mathcal{N}^{\otimes -1}.$$

On obtient ainsi une section globale et un calcul local montre que son diviseur est D^∞ . Le résultat est analogue pour D^0 . Pour le second point, on se ramène au cas où $X = \text{Spec } A$ avec \mathcal{M} et \mathcal{N} libres de rang 1. Notons m et n des générateurs respectifs de \mathcal{M} et \mathcal{N} . Dans ce cas, les sections $D^\infty : X \rightarrow \mathbb{P}_A^1$ et $D^0 : X \rightarrow \mathbb{P}_A^1$ sont les uniques morphismes vérifiant $(D^\infty)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^1}(1) \simeq \mathcal{M}$ et $(D^0)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^1}(1) \simeq \mathcal{N}$ ainsi que

$$(D^\infty)^*(x_0) = m, \quad (D^\infty)^*(x_1) = 0, \quad (D^0)^*(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad (D^0)^*(x_1) = n$$

où x_0 et x_1 sont les coordonnées de \mathbb{P}_A^1 . Ainsi un X -morphisme $Y \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})$ associé au faisceau quotient $\varphi^* \mathcal{M} \oplus \varphi^* \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}$ induit un X -morphisme $Y \rightarrow \mathbb{P}'(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})$ si et seulement si la condition annoncée est vérifiée. \square

1.2.2 Compactification d'une variété semi-abélienne

Fixons un entier $g \in \mathbb{N}$ et une variété abélienne A_0 sur $\bar{\mathbb{Q}}$. D'après [36, Lemme 2.2] toute variété semi-abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$ vérifiant une suite exacte de la forme 1.2.1 est isomorphe à

$$A = \mathbb{P}'(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_1) \times_{A_0} \dots \times_{A_0} \mathbb{P}'(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_g) \xrightarrow{f} A_0$$

où $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_g \in \text{Pic}^0(A_0)$ sont des faisceaux inversibles algébriquement équivalents à 0 et $\mathbb{P}'(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell)$ est l'ouvert de $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell)$ obtenu en retirant les sections D_ℓ^∞ et D_ℓ^0 correspondant respectivement aux faisceaux quotients

$$\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{A_0} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell \twoheadrightarrow \mathcal{M}_\ell.$$

Dans la suite, on travaillera toujours avec une variété semi-abélienne de cette forme-là. Rappelons comment est défini sa structure de groupe en suivant [33, Partie 2]. Pour chaque $1 \leq \ell \leq g$, on a un isomorphisme canonique

$$s^* \mathcal{M}_\ell \otimes \nu^* \mathcal{M}_\ell \simeq p_1^* \mathcal{M}_\ell \otimes p_2^* \mathcal{M}_\ell$$

où $s; \nu, p_1, p_2 : A_0^2 \rightarrow A_0$ désignent respectivement l'addition, la flèche nulle et les deux projections (voir [23, p. 74]). Si $[n] : A_0 \rightarrow A_0$ désigne la multiplication par $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit par récurrence un isomorphisme canonique

$$[n]^* \mathcal{M}_\ell \otimes [0]^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes n-1} \simeq \mathcal{M}_\ell^{\otimes n}.$$

Si l'on fixe, une fois pour toutes, un isomorphisme $0^* \mathcal{M}_\ell \simeq \mathcal{O}_{\text{Spec } \bar{\mathbb{Q}}}$ où $0 : \text{Spec } \bar{\mathbb{Q}} \rightarrow A_0$ est la section neutre pour $1 \leq \ell \leq g$, on obtient des isomorphismes bien déterminés

$$s^* \mathcal{M}_\ell \simeq p_1^* \mathcal{M}_\ell \otimes p_2^* \mathcal{M}_\ell \quad \text{et} \quad [n]^* \mathcal{M}_\ell \simeq \mathcal{M}_\ell^{\otimes n}.$$

Si S est un $\bar{\mathbb{Q}}$ -schéma, alors par la proposition 1.2.6, un élément de $A(S)$ correspond à un $(g+1)$ -uplet $(\alpha, \kappa_1, \dots, \kappa_g)$ où $\alpha \in A_0(S)$ et $\kappa_\ell : \mathcal{O}_S \oplus \alpha^* \mathcal{M}_\ell \twoheadrightarrow \mathcal{N}_\ell$ est un faisceau quotient de sorte que les composées

$$\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S \oplus \alpha^* \mathcal{M}_\ell \xrightarrow{\kappa_\ell} \mathcal{N}_\ell \quad \text{et} \quad \alpha^* \mathcal{M}_\ell \rightarrow \mathcal{O}_S \oplus \alpha^* \mathcal{M}_\ell \xrightarrow{\kappa_\ell} \mathcal{N}_\ell$$

soient des isomorphismes pour $1 \leq \ell \leq g$. La donnée de κ_ℓ est équivalente à la donnée d'un isomorphisme $\varphi_\ell : \alpha^* \mathcal{M}_\ell \rightarrow \mathcal{O}_S$ pour $1 \leq \ell \leq g$. On définit alors

$$(\alpha, \varphi_1, \dots, \varphi_g) + (\beta, \psi_1, \dots, \psi_g) = (s \circ (\alpha, \beta), \chi_1, \dots, \chi_g)$$

où χ_ℓ pour $1 \leq \ell \leq g$ est la composée

$$(s \circ (\alpha, \beta))^* \mathcal{M}_\ell \simeq (\alpha, \beta)^*(p_1^* \mathcal{M}_\ell \otimes p_2^* \mathcal{M}_\ell) \simeq \alpha^* \mathcal{M}_\ell \otimes \beta^* \mathcal{M}_\ell \xrightarrow{\varphi_\ell \otimes \psi_\ell} \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_S \simeq \mathcal{O}_S.$$

On vérifie sans difficulté que cette loi définit bien une structure de groupe sur $A(S)$. Sur les points, l'application f est simplement donnée par le morphisme de groupes

$$f : A(S) \rightarrow A_0(S), \quad (\alpha, \varphi_1, \dots, \varphi_g) \mapsto \alpha$$

En particulier, on a immédiatement que

$$\text{Ker}(f_S) = (\mathcal{O}_S^\times)^g = \mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^g(S),$$

ce qui montre que A est bien une variété semi-abélienne. Finalement, on dispose d'une compactification pour A donnée par

$$\bar{A} = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_1) \times_{A_0} \dots \times_{A_0} \mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_g). \quad (1.2.7)$$

Si $A_0 = \text{Spec } \bar{\mathbb{Q}}$, on retrouve la compactification que l'on a choisie pour $\mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^g$ dans la première partie. Par construction, on obtient que le morphisme f s'étend naturellement en $f : \bar{A} \rightarrow A_0$.

1.2.3 Construction et propriétés des hauteurs canoniques

Pour chaque $1 \leq \ell \leq g$, on note \mathcal{L}_ℓ le tiré en arrière sur \bar{A} du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell)}(1)$. On commence par déterminer le groupe $\text{Pic}(\bar{A})$.

Théorème 1.2.8 - *L'application ci-dessous est un isomorphisme de groupes*

$$\text{Pic}(A_0) \times \mathbb{Z}^g \rightarrow \text{Pic}(\bar{A}), \quad (\mathcal{N}, r_1, \dots, r_g) \mapsto f^* \mathcal{N} \otimes \left(\bigotimes_{\ell=1}^g \mathcal{L}_\ell^{\otimes r_\ell} \right)$$

DÉMONSTRATION :

Soit \mathcal{L} un élément de $\text{Pic}(\bar{A})$. Les restrictions de \mathcal{L} à chaque fibre fournissent une famille de faisceaux de $(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^1)^g$ au-dessus de A_0 . Comme $\text{Pic}^0((\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^1)^g) = 0$, on obtient que cette famille est constante. Ainsi, il existe des entiers $r_1, \dots, r_g \in \mathbb{Z}$ de sorte que les restrictions de \mathcal{L} et

$$\bigotimes_{\ell=1}^g \mathcal{L}_\ell^{\otimes r_\ell}$$

à chaque fibre coïncident. La surjectivité résulte alors de [12, Exercice III.12.4]. Pour l'injectivité, si

$$f^* \mathcal{N} \otimes \left(\bigotimes_{\ell=1}^g \mathcal{L}_\ell^{\otimes r_\ell} \right) \simeq \mathcal{O}_{\bar{A}},$$

alors en restreignant à une fibre, on obtient $r_1 = \dots = r_g = 0$, puis on conclut par injectivité de $f^* : \text{Pic}(A_0) \rightarrow \text{Pic}(\bar{A})$. \square

Comme dans le cas où $A = \mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^g$, on montre ensuite le résultat suivant.

Lemme 1.2.9 - *Le morphisme $[n]$ sur A s'étend en $[n] : \bar{A} \rightarrow \bar{A}$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. De plus, pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$[n]^* D_\ell^\infty = n \cdot D_\ell^\infty \quad \text{et} \quad [n]^* D_\ell^0 = n \cdot D_\ell^0$$

tandis que si $n \leq 0$, on a

$$[n]^*D_\ell^\infty = |n| \cdot D_\ell^0 \quad \text{et} \quad [n]^*D_\ell^0 = |n| \cdot D_\ell^\infty.$$

DÉMONSTRATION :

Il suffit de faire la démonstration dans le cas $g = 1$ (on en déduit le cas général en prenant le produit). Si $n \geq 1$, on considère l'application associée au morphisme $[n] \circ f : \bar{A} \rightarrow A_0$ et au faisceau quotient

$$\mathcal{O}_{\bar{A}} \oplus f^* \mathcal{M}^{\otimes n} \rightarrow S^n(\mathcal{O}_{\bar{A}} \oplus f^* \mathcal{M}) \rightarrow S^n(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{\otimes n}.$$

On vérifie localement qu'il s'agit bien d'une extension du morphisme $[n] : A \rightarrow A$. En particulier, on a par la proposition 1.2.6

$$\mathcal{O}([n]^*D^0) = [n]^*\mathcal{O}(D^0) = [n]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n} = \mathcal{O}(n \cdot D^0).$$

On raisonne de même quand $n < 0$ en considérant cette fois-ci le faisceau quotient

$$\mathcal{O}_{\bar{A}} \oplus f^* \mathcal{M}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes -n} \otimes f^* \mathcal{M}^{\otimes n}$$

et on conclut comme précédemment. \square

Finalement, nous pouvons énoncer le théorème fournissant les hauteurs canoniques sur une variété semi-abélienne. Ce résultat généralise le théorème 1.1.3 construisant les hauteurs de NÉRON-TATE et le théorème 1.1.4 donnant les hauteurs standards sur le tore.

Théorème 1.2.10 - *Il existe un unique morphisme de groupes*

$$\hat{h} : \text{Pic}(\bar{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\bar{A}(\bar{\mathbb{Q}}), \mathbb{R}), \quad \mathcal{L} \mapsto \hat{h}_{\mathcal{L}}$$

vérifiant les propriétés suivantes

- (i) Pour tout $\mathcal{L} \in \text{Pic}(A)$, la fonction $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ est une hauteur associée à \mathcal{L} .
- (ii) Si $\mathcal{L} \in f^* \text{Pic}(A_0)$, alors la restriction de $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ à $A(\bar{\mathbb{Q}})$ est une fonction quadratique.
- (iii) Pour tout $1 \leq \ell \leq g$, si $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D_\ell^0 + D_\ell^\infty)$, alors $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ est homogène.

DÉMONSTRATION :

Comme le groupe $\mathcal{F}(\bar{A}(\bar{\mathbb{Q}}), \mathbb{R})$ est divisible et par le théorème 1.2.8, il suffit de définir l'image par \hat{h} des éléments de $f^* \text{Pic}(A_0)$ et de chaque $\mathcal{L}_\ell^{\otimes 2} \otimes f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}$. Si $\mathcal{N} \in \text{Pic}(A_0)$, il suffit de poser $\hat{h}_{f^* \mathcal{N}} = \hat{h}_{\mathcal{N}}^0 \circ f$ où $\hat{h}_{\mathcal{N}}^0$ est la hauteur de NÉRON-TATE associée à \mathcal{N} . De plus, le lemme 1.2.6 montre que $\mathcal{O}(D_\ell^0 + D_\ell^\infty) = \mathcal{L}_\ell^{\otimes 2} \otimes f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}$, donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a avec le lemme précédent

$$[n]^* (\mathcal{L}_\ell^{\otimes 2} \otimes f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}) \simeq (\mathcal{L}_\ell^{\otimes 2} \otimes f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1})^{\otimes |n|}.$$

On peut donc appliquer le procédé de TATE (Lemme 1.1.2) qui définit une hauteur associée à $\mathcal{L}_\ell^{\otimes 2} \otimes f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}$ homogène, ce qui prouve l'existence de \hat{h} .

Pour l'unicité, il suffit de vérifier que les conditions du théorème imposent de manière unique l'image des éléments de $f^* \text{Pic}(A_0)$ et de chaque $\mathcal{L}_\ell^{\otimes 2} \otimes f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}$. Or, si l'on dispose de deux hauteurs quadratiques associées à $f^* \mathcal{N}$, alors leur différence est bornée et quadratique, donc nulle. De même, si on dispose de deux hauteurs homogènes associées à $\mathcal{O}(D_\ell^0 + D_\ell^\infty)$, alors leur différence est bornée et homogène, donc nulle. \square

La fonction $\hat{h}_\mathcal{L}$ est la hauteur canonique associée à \mathcal{L} . Dans les cas extrêmes où A est une variété abélienne ou un tore, on retrouve respectivement la hauteur de NÉRON-TATE et la hauteur standard. A présent, nous allons étudier les propriétés de certaines des hauteurs que nous venons de construire. On commence par étudier la hauteur associée au diviseur

$$\bar{A} \setminus A = \sum_{\ell=1}^g (D_\ell^0 + D_\ell^\infty)$$

La proposition 1.2.6 montre que le faisceau inversible \mathcal{L}_{lin} associé à ce diviseur est

$$\mathcal{L}_{\text{lin}} = \bigotimes_{\ell=1}^g (\mathcal{L}_\ell^{\otimes 2} \otimes f^* \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}).$$

On déduit directement du lemme précédent la relation

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad [n]^* \mathcal{L}_{\text{lin}} \simeq \mathcal{L}_{\text{lin}}^{\otimes |n|}.$$

On note $h_{\text{lin}} = \hat{h}_{\mathcal{L}_{\text{lin}}}$.

Proposition 1.2.11 - *La hauteur $h_{\text{lin}} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une semi-norme.*

DÉMONSTRATION :

L'homogénéité provient de la construction des hauteurs canoniques. Le lieu base de \mathcal{L}_{lin} est contenu dans $\bar{A} \setminus A$, donc h_{lin} est minorée et homogène sur A , donc positive. Il est plus délicat de montrer que h_{lin} vérifie l'inégalité triangulaire, car l'addition ne s'étend pas en un morphisme $\bar{A} \times \bar{A} \rightarrow \bar{A}$, il faut donc travailler sur un éclatement. On note G le graphe de l'addition $A \times A \rightarrow A$ qui est isomorphe à A^2 *via* les deux premières projections. L'adhérence \bar{G} de G dans \bar{A}^3 est une compactification de A^2 qui étend l'addition *via* la troisième projection $p_3 : \bar{G} \rightarrow A$. Ensuite, on peut montrer que le faisceau

$$p_1^* \mathcal{L}_{\text{lin}} \otimes p_2^* \mathcal{L}_{\text{lin}} \otimes p_3^* \mathcal{L}_{\text{lin}}^{\otimes -1}$$

est engendré par ses sections globales sur G (voir [33]). En particulier, on en déduit l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in A(\bar{\mathbb{Q}}), \quad h_{\text{lin}}(x) + h_{\text{lin}}(y) - h_{\text{lin}}(x + y) \geq C.$$

En remplaçant x et y par $[k]x$ et $[k]y$, en divisant par k puis en prenant la limite dans l'expression précédente, on obtient finalement que h_{lin} est une semi-norme. \square

En général, le faisceau \mathcal{L}_{lin} n'est pas ample, ce qui nous amène à rajouter un faisceau ample provenant de la base A_0 . On choisit un faisceau \mathcal{L}_0 inversible symétrique et ample sur A_0 et on note $h_{\text{quad}} = \hat{h}_{f^*\mathcal{L}_0}$.

Proposition 1.2.12 - *L'application $\sqrt{h_{\text{quad}}} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une semi-norme.*

DÉMONSTRATION :

Le point (ii) du théorème 1.1.3 montre que $\sqrt{\hat{h}_{\mathcal{L}_0}}$ est une semi-norme sur $A_0(\bar{\mathbb{Q}})$, il en est donc de même de $\sqrt{h_{\text{quad}}} = \sqrt{\hat{h}_{f^*\mathcal{L}_0}} = \sqrt{\hat{h}_{\mathcal{L}_0} \circ f}$. \square

Finalement, on note $\mathcal{L}_{\text{can}} = \mathcal{L}_{\text{lin}} \otimes f^*\mathcal{L}_0^{\otimes(g+1)}$ et on considère la hauteur

$$h_{\text{can}} = \hat{h}_{\mathcal{L}_{\text{can}}} = h_{\text{lin}} + (g+1)h_{\text{quad}}.$$

Le facteur $(g+1)$ n'est pas fondamental et n'apparaît que pour simplifier la construction du plongement explicite que nous allons effectuer dans la partie suivante.

Proposition 1.2.13 - *On a les propriétés suivantes.*

- (i) *Le faisceau inversible \mathcal{L}_{can} est ample.*
- (ii) *La hauteur h_{can} s'annule exactement sur $A(\bar{\mathbb{Q}})_{\text{tors}}$.*

DÉMONSTRATION :

L'amplitude de \mathcal{L}_{can} découle du [36, Lemme 3.1]. Pour le point (ii), si $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifie $k \cdot x = 0$, alors les deux propositions précédentes montrent que $h_{\text{lin}}(x) = h_{\text{quad}}(x) = 0$, donc $h_{\text{can}}(x) = 0$. Réciproquement, si $h_{\text{can}}(x) = 0$, alors $h_{\text{lin}}(x) = h_{\text{quad}}(x) = 0$ et par suite $h_{\text{can}}(nx) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de NORTHCOTT montre alors que l'ensemble des $n \cdot x$ est fini, donc x est un point de torsion. \square

Si B est une sous-variété semi-abélienne de A , nous aurons besoin de comparer la hauteur canonique d'un point de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et de son image dans $(A/B)(\bar{\mathbb{Q}})$. On note $\pi : A \rightarrow A/B$ le morphisme de passage au quotient.

Proposition 1.2.14 - *Soit $h'_{\text{can}} : (A/B)(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ une hauteur canonique. Il existe une constante $\mu \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall a \in A(\bar{\mathbb{Q}}), \quad h'_{\text{can}}(\pi(a)) \leq \mu \cdot h_{\text{can}}(a).$$

DÉMONSTRATION :

Voir [33, Lemme 5.2]. \square

1.2.4 Plongement explicite associé à une hauteur canonique

En suivant [33, Partie 2], nous allons rappeler la construction d'un plongement associé à \mathcal{L}_{can} . On suppose que le faisceau \mathcal{L}_0 sur A_0 choisi dans la partie précédente est très

ample. L'image réciproque du faisceau inversible naturel par le morphisme de VERONESE

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \otimes \mathcal{M}_\ell) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^2(\mathcal{O}_{A_0} \otimes \mathcal{M}_\ell)) = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell \oplus \mathcal{M}_\ell^{\otimes 2}).$$

est le faisceau $\mathcal{L}_\ell^{\otimes 2}$ (voir le point 1.2.5). En composant ce plongement avec l'isomorphisme

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell \oplus \mathcal{M}_\ell^{\otimes 2}) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell \oplus \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1})$$

donné par la proposition 1.2.3, puis en prenant le produit fibré au-dessus de A_0 , on en déduit une immersion fermée

$$\bar{A} \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1^{\otimes -1}) \times_{A_0} \dots \times_{A_0} \mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_g \oplus \mathcal{M}_g^{\otimes -1}).$$

de sorte que l'image réciproque du faisceau inversible naturel soit \mathcal{L}_{lin} . Par amplitude de \mathcal{L}_0 , il existe des points $P_1, \dots, P_g \in A_0(\bar{\mathbb{Q}})$ tels que

$$\mathcal{M}_\ell \simeq \tau_{P_\ell}^* \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_0^{\otimes -1}$$

où $\tau_{P_\ell} : A_0 \rightarrow A_0$ désigne la translation par P_ℓ (voir [23, p. 77]). Ainsi $\mathcal{M}_\ell \otimes \mathcal{L}_0$ est très ample. Si on fixe un morphisme surjectif $\mathcal{O}_{A_0}^{N_{A_0}+1} \rightarrow \mathcal{L}_0$, qui correspond naturellement à un plongement $\iota_0 : A_0 \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_{A_0}}$ qui soit un isomorphisme sur les sections globales, on dispose par translation de

$$\mathcal{O}_{A_0}^{N_{A_0}+1} \rightarrow \mathcal{M}_\ell \otimes \mathcal{L}_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{A_0}^{N_{A_0}+1} \rightarrow \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1} \otimes \mathcal{L}_0. \quad (1.2.15)$$

En utilisant à nouveau l'isomorphisme de la proposition 1.2.3, on a

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell \oplus \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{L}_0 \oplus (\mathcal{M}_\ell \otimes \mathcal{L}_0) \oplus (\mathcal{M}_\ell^{\otimes -1} \otimes \mathcal{L}_0)),$$

puis avec les deux surjections du point 1.2.15, on obtient

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0} \oplus \mathcal{M}_\ell \oplus \mathcal{M}_\ell^{\otimes -1}) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_{A_0}^{3N_{A_0}+3}) \simeq \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{3N_{A_0}+2} \times A_0.$$

Finalement, en utilisant $\iota_0 : A_0 \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_{A_0}}$ et un plongement de SEGRE, on dispose donc

$$\bar{A} \hookrightarrow \left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{3N_{A_0}+2}\right)^g \times A_0 \hookrightarrow \left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{3N_{A_0}+2}\right)^g \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_{A_0}} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A} \quad (1.2.16)$$

avec $N_A = 3^g(N_{A_0} + 1)^{g+1} - 1$ de sorte que l'image réciproque du faisceau naturel soit

$$\mathcal{L}_{\text{can}} = \mathcal{L}_{\text{lin}} \otimes f^* \mathcal{L}_0^{\otimes (g+1)}.$$

1.3 Résultats de RÉMOND

L'objectif de cette partie est de rappeler des résultats connus de RÉMOND que nous utiliserons pour appliquer la méthode de VOJTA.

1.3.1 Inégalité de VOJTA généralisée

Nous allons rappeler l'énoncé de [35, Théorème 1.2] qui nous permet de raccourcir la méthode de VOJTA, tout en fournissant des valeurs explicites, dans les résultats des chapitres 2, 3 et 4.

Soient V un schéma projectif sur $\bar{\mathbb{Q}}$, intègre et de dimension non nulle et $\iota : V \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^N$ une immersion fermée et $\mathcal{L} = \iota^* \mathcal{O}(1)$. Nous utiliserons le degré de V et la hauteur de V relativement à ce plongement. On note $m = \dim(V) + 1$ et on pose

$$\psi = \prod_{j=2}^{m \dim(V)} (3j + 1).$$

On fixe des entiers $t_1, t_2, M, \theta \geq 1$ et un réel $\gamma \geq 1$, puis on pose

$$\Lambda = \theta(2t_1 m \dim(V))^{m \dim(V)} (N + 1)(\deg(V))^{3m}$$

puis

$$c_1 = 4\Lambda^\psi, \quad c_2 = \Lambda^{4\psi} \quad \text{et} \quad c_3 = (Mt_2)^{m \dim(V)} \Lambda^{8\psi} \max(h(V), \gamma). \quad (1.3.1)$$

Ainsi ces constantes ne dépendent pas des données suivantes.

On suppose que l'on dispose d'un triplet $(\delta, \mathcal{V}, \mathcal{M})$ où $\delta \in (\mathbb{N}^*)^m$, \mathcal{V} est un schéma intègre et projectif sur $\bar{\mathbb{Q}}$ avec un morphisme propre et birationnel $\pi : \mathcal{V} \rightarrow V^m$ et \mathcal{M} un faisceau inversible sur \mathcal{V} . On note U l'ouvert de V^m au-dessus duquel π est un isomorphisme et on le regarde aussi comme un ouvert de \mathcal{V} . Notons aussi

$$\mathcal{N}_\delta = \pi^* \left(\bigotimes_{i=1}^m p_i^* \mathcal{L}^{\otimes \delta_i} \right) \quad (1.3.2)$$

où $p_i : V^m \rightarrow V$ est la i -ème projection.

On suppose aussi que l'on dispose d'un quadruplet $(\iota', j_1, j_2, \Sigma)$ où $\iota' : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N'}$ est une immersion fermée et, si $\mathcal{P} = \iota'^* \mathcal{O}(1)$, j_1 et j_2 sont respectivement des injections $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}_\delta^{\otimes t_1}$ et $\mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1} \rightarrow \mathcal{N}_\delta^{\otimes t_2}$ tandis que Σ est une famille de sections globales de $\mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1}$ de cardinal M qui engendre ce faisceau sur \mathcal{V} . On suppose de plus que les images par j_1 des coordonnées de $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N'}$ (vues comme section de \mathcal{P}) s'écrivent comme des monômes sans coefficient de multidegré $t_1 \delta$ en les coordonnées de $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^N$ (vues comme des sections des différents $\pi^* p_i^* \mathcal{L}$) et d'autre part que les éléments de $j_2(\Sigma)$ s'écrivent comme des polynômes P_1, \dots, P_M de multidegré $t_2 \delta$ en ces mêmes coordonnées de sorte que $h(P_1, \dots, P_M) \leq \gamma |\delta|$.

Notons U' l'ouvert non vide de U au-dessus duquel j_1 et j_2 sont des isomorphismes. De plus, on définit des hauteurs $h_{\mathcal{L}} : V(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_{\mathcal{M}} : \mathcal{V}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ associées respectivement à \mathcal{L} et \mathcal{M} par les formules

$$h_{\mathcal{L}}(x) = h(\iota(x)) \quad \text{et} \quad h_{\mathcal{M}}(y) = h(\iota'(y)) - h(\Sigma(y)) \quad (1.3.3)$$

pour tout $x \in V(\bar{\mathbb{Q}})$ et $y \in \mathcal{V}(\bar{\mathbb{Q}})$. Avec ces notations, RÉMOND a démontré le résultat suivant.

Théorème 1.3.4 (RÉMOND, 2005) - Soit $x = (x_1, \dots, x_m) \in U'(\bar{\mathbb{Q}})$ un point tel que, pour tout produit $Z = Z_1 \times \dots \times Z_m$ de sous-schémas fermés intègres de V contenant x , nous ayons, en notant \mathcal{Z} l'adhérence de $Z \cap U$ dans \mathcal{V} , la minoration

$$[\mathcal{M}]^{\dim(Z)} \cdot \mathcal{Z} \geq \theta^{-1} \prod_{i=1}^m \delta_i^{\dim Z_i}.$$

Si $\delta_i \geq c_2 \cdot \delta_{i+1}$ pour $1 \leq i < m$ et $h_{\mathcal{L}}(x_i) \geq c_3$ pour $1 \leq i \leq m$, alors

$$\sum_{i=1}^m \delta_i \cdot h_{\mathcal{L}}(x_i) \leq c_1 h_{\mathcal{M}}(x).$$

DÉMONSTRATION :

La démonstration de ce résultat est l'objet de l'article [35]. Les différentes hypothèses permettent d'appliquer la méthode de VOJTA à ce cadre. \square

1.3.2 Plongement adapté

Nous allons rappeler succinctement la notion de plongement adapté introduite par RÉMOND dans [30, Partie 4.1] et [35, Partie 2.1]. Notons W_0, \dots, W_N les coordonnées de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$. On considère un schéma projectif et intègre X sur \mathbb{Q} et de dimension $u < N$.

Définition 1.3.5 Un plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ est adapté à X si

- (i) $X \cap Z(W_0, \dots, W_u) = \emptyset$.
- (ii) $K(X)$ est engendré par les images de $W_1/W_0, \dots, W_{u+1}/W_0$.
- (iii) L'image de W_{u+1}/W_0 dans $K(X)$ est non nulle.

Sous ces conditions, les fonctions rationnelles $W_1/W_0, \dots, W_{u+1}/W_0$ forment une base de transcendance de $K(X)$ sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et W_{u+1}/W_0 est un élément primitif de $K(X)$ sur $\bar{\mathbb{Q}}(W_1/W_0, \dots, W_{u+1}/W_0)$. De plus, la projection linéaire $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^u$ obtenue en ne gardant que les $u + 1$ premières variables est un morphisme fini.

Si l'on dispose d'un plongement donné, on peut le modifier afin d'obtenir un plongement adapté. Si $M \in \mathrm{GL}_{N+1}(\bar{\mathbb{Q}})$, on lui associe $\chi : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ l'automorphisme qu'elle définit.

Lemme 1.3.6 - Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ un sous-schéma fermé intègre de degré D , non contenu dans l'hyperplan $Z(W_0)$. Il existe un automorphisme $\chi : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ associé à une matrice $M \in \mathrm{GL}_{N+1}(\bar{\mathbb{Q}})$ à coefficients dans $\{a \in \mathbb{Z} \mid |a| \leq \max(D, 2)/2\}$ tel que

- (i) le plongement $\chi \circ \varphi : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ est adapté.
- (ii) L'automorphisme χ fixe W_0 .

DÉMONSTRATION :

En reprenant la démonstration de [35, Proposition 2.2], comme X n'est pas contenu dans $Z(W_0)$, on peut choisir $V_0 = W_0$. La suite de la démonstration est identique. \square

Pour un plongement $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$, nous fixons désormais un automorphisme $\chi : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ associé à une matrice $M \in \mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{Q})$ comme ci-dessus. Le lemme suivant permet d'exhiber des relations de dépendances intégrales entre les dernières variables et la base de transcendance dont on contrôle la hauteur.

Lemme 1.3.7 - *Pour tout entier $u + 1 \leq j \leq N$, il existe un polynôme homogène $P_j \in \mathbb{Q}[W_0, \dots, W_u, W_j]$ de degré D tel que*

- (i) *Le polynôme P_j est dans l'idéal de $\chi \circ \varphi(X)$.*
- (ii) *Le coefficient de W_{u+1}^D est 1.*
- (iii) *Si B est la famille formée des coefficients de P_{u+1}, \dots, P_N , on a*

$$h(B) \leq h(\varphi(X)) + D(u + 1) \log D(N + 1).$$

DÉMONSTRATION :

Voir [35, Lemme 2.3]. □

1.3.3 Expression polynomiale dans une variété abélienne

On fixe une variété abélienne A sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et un faisceau \mathcal{L} très ample et symétrique associé à un plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}$. On suppose de plus que l'application

$$\Gamma \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}, \mathcal{O}(n) \right) \rightarrow \Gamma \left(A, \mathcal{L}^{\otimes n} \right) \quad (1.3.8)$$

est surjective pour tout $n \geq 1$. On note X_0, \dots, X_{N_A} les coordonnées de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}$ et on désigne par $\mathrm{add}_{a,b} : A^2 \rightarrow A^2$ le morphisme donné sur les points par

$$\mathrm{add}_{a,b}(x, y) = (ax + by, ax - by).$$

L'hypothèse ci-dessus et le théorème du cube montrent qu'il existe des polynômes $P_{\ell, \ell'}^{\mathrm{add}}$ pour $0 \leq \ell, \ell' \leq N_A$ tels que

$$\mathrm{add}_{1,1}^*(p_1^* X_{\ell} \otimes p_2^* X_{\ell'}) = P_{\ell, \ell'}^{\mathrm{add}}(p_1^* X_0, \dots, p_1^* X_{N_A}, p_2^* X_0, \dots, p_2^* X_{N_A})$$

où $p_1, p_2 : A^2 \rightarrow A$ sont les deux projections. On note h_{add} la hauteur de la famille de tous les coefficients des polynômes $P_{\ell, \ell'}^{\mathrm{add}}$ pour $0 \leq \ell, \ell' \leq N_A$. On désigne également par $f(n)$ la partie entière de $(n^2 - 1)/8$.

Proposition 1.3.9 - *Pour tout $a, b \geq 1$ et $0 \leq i, j, \ell, \ell' \leq N_A$, il existe un polynôme bihomogène $P_{a,b,i,j,\ell,\ell'}$ de bidegré $(2(a^2 + f(a)), 2(b^2 + f(b)))$ en deux groupes de $N_A + 1$ indéterminées de hauteurs au plus $(a^2 + b^2)(h_{\mathrm{add}} + 6N_A)$ tel que*

$$\begin{aligned} p_1^* X_i^{\otimes 2f(a)} \otimes p_2^* X_j^{\otimes 2f(b)} \otimes \mathrm{add}_{a,b}^*(p_1^* X_{\ell} \otimes p_2^* X_{\ell'}) \\ = P_{a,b,i,j,\ell,\ell'}(p_1^* X_0, \dots, p_1^* X_{N_A}, p_2^* X_0, \dots, p_2^* X_{N_A}) \end{aligned}$$

dans $\Gamma \left(A^2, p_1^* \mathcal{L}^{\otimes 2(a^2 + f(a))} \otimes p_2^* \mathcal{L}^{\otimes 2(b^2 + f(b))} \right)$.

DÉMONSTRATION :

Voir [30, Proposition 5.2]. □

1.3.4 Le théorème du produit

On fixe un corps de nombres K , $m \geq 2$ et $u \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$. On considère l'espace multiprojectif

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_K^{u_1} \times \dots \times \mathbb{P}_K^{u_m}.$$

On désigne par $W^{(i)} = (W_0^{(i)}, \dots, W_{u_i}^{(i)})$ les coordonnées du i -ème facteur de \mathbb{P} et pour un élément $\kappa \in \mathbb{N}^{u_1+1} \times \dots \times \mathbb{N}^{u_m+1}$, on note

$$\partial^\kappa = \left(\prod_{i=1}^m \prod_{j=0}^{u_i} \left(\frac{\partial}{\partial W_i^{(j)}} \right)^{\kappa_{i,j}} \right).$$

L'indice d'annulation d'un polynôme $G \in K[W^{(1)}, \dots, W^{(m)}]$ multihomogène de multi-degré $\delta \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$ en un point $x \in \mathbb{P}(K)$ est le nombre réel

$$\text{ind}(G, x, \delta) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{u_i} \frac{\kappa_{i,j}}{\delta_i} \in \mathbb{R} \mid \kappa \in \prod_{i=1}^m \mathbb{N}^{u_i+1}, \partial^\kappa(G)(x) \neq 0 \right\}.$$

Dès que G est non nul, il s'agit d'un minimum. Nous utiliserons la version suivante du théorème du produit dans le chapitre 5.

Théorème 1.3.10 - Soient $x = (x_1, \dots, x_m)$ un point rationnel du produit $\mathbb{P}_K^{u_1} \times \dots \times \mathbb{P}_K^{u_m}$ et G un polynôme multihomogène de multi-degré $\delta \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$. On suppose que

- (i) G s'annule en x avec un indice supérieur à σ_0 par rapport à $(\delta_1, \dots, \delta_m)$,
- (ii) $\delta_i/\delta_{i+1} \geq (m/\sigma_0)^u$ pour tout $1 \leq i \leq m-1$ et
- (iii) $\sigma_0/m \leq (2u^2)^{-u}$.

Alors il existe un indice $1 \leq \ell \leq m$ et un polynôme non nul U homogène en W_0, \dots, W_{u_ℓ} tel que

- (i) $x_\ell \in Z(U)$,
- (ii) $\deg U \leq (m/\sigma_0)^u$ et
- (iii) $\delta_\ell h(U)$ est majoré par

$$u_\ell \left(\frac{m}{\sigma_0} \right)^u \left[h(G) + \sum_{i=1}^m \left(\delta_i (h(\mathbb{P}_K^{u_i}) + \log 2) + \sqrt{u_i} \right) + \frac{1}{2}(u-1) \log |\delta| \right] + \delta_\ell \left(\frac{m}{\sigma_0} \right)^u (u_\ell + 1) \log \left(\frac{m}{\sigma_0} \right)^u (u_\ell + 1) + \delta_\ell \log \binom{\deg U + u_\ell}{u_\ell}.$$

DÉMONSTRATION :

Voir [35, Théorème 5.6]. □

1.4 Résultats préliminaires

Dans cette dernière partie, nous allons démontrer des lemmes que nous utiliserons dans les chapitres 2, 3, 4 et 5.

1.4.1 Le lieu exceptionnel

On fixe un corps K de caractéristique nulle et algébriquement clos, ainsi qu'une variété semi-abélienne sur K . Si X est un sous-schéma fermé de A , les résultats de [1] montrent qu'il existe un sous-schéma fermé réduit Z_X de X tel que

$$Z_X(K) = \{a \in X(K) \mid \exists B \text{ sous-variété semi-abélienne de } A, \dim B > 0, a + B \subset X\}.$$

En nous appuyant sur [1] et [21], nous allons généraliser ce résultat. On commence par rappeler le résultat clé qui permet d'obtenir l'existence de Z_X ci-dessus.

Théorème 1.4.1 - *Soit X un sous-schéma fermé intègre de A . S'il existe un entier $\ell > 1$ tel que X soit stable par la multiplication par ℓ , alors X est le translaté d'une sous-variété semi-abélienne de A .*

DÉMONSTRATION :

Voir [13, Lemme 10]. □

A présent, on fixe un sous-schéma fermé intègre V de $A \times_K P$ où P est un schéma quasi-projectif et intègre sur K . Rappelons que l'on désigne par V_p la fibre du morphisme $V \rightarrow P$ au-dessus de $p \in P$. Nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 1.4.2 - *Il existe un sous-schéma fermé Z_V de V vérifiant pour tout $p \in P(K)$ la relation $(Z_V)_p(K) = Z_{V_p}(K)$.*

DÉMONSTRATION :

On reprend essentiellement les arguments de [21]. On note F_m le morphisme de FALTINGS donné sur les points par

$$V_m = V \times_P \dots \times_P V \rightarrow A^{m-1} \times_K P, \quad (a_1, \dots, a_m, p) \mapsto (2a_1 - a_2, \dots, 2a_{m-1} - a_m, p).$$

On définit W_m comme l'image réciproque par F_m de V plongé dans $A^{m-1} \times_K P$ via le morphisme diagonal $A \rightarrow A^{m-1}$. Si on note pr_m le morphisme donné sur les points par

$$V_m \rightarrow A, \quad (a_1, \dots, a_m, p) \mapsto a_1,$$

on obtient que le morphisme (pr_m, F_m) définit un plongement de W_m dans $A \times_K V$. D'autre part, via le morphisme donné sur les points par

$$V_{m+1} \rightarrow V_m, \quad (a_1, \dots, a_{m+1}, p) \mapsto (a_1, \dots, a_m, p),$$

on obtient une inclusion $W_{m+1} \subset W_m$. Ainsi on a une suite décroissante de sous-schémas fermés de $A \times_K V$, donc elle se stabilise en un sous-schéma fermé W de $A \times_K V$. Si on note $W_{(a,p)}$ la fibre de $W \rightarrow V$ au-dessus de $(a,p) \in V(K)$, on a par construction

$$W_{(a,p)}(K) = \{b \in V_p(K) \mid \forall m \in \mathbb{N}, 2^m \cdot (b - a) \in V_p(K) - a\}. \quad (1.4.3)$$

Il suffit alors de définir Z_V comme le sous-schéma fermé de V où les fibres du morphisme $W \rightarrow V$ sont de dimensions non nulles.

En effet, si $a \in (Z_V)_p(K)$, alors $W_{(a,p)}$ contient une composante irréductible F de dimension non nulle. Le point 1.4.3 montre que $B = (F - a)_{\text{red}}$ est stable par la multiplication d'une puissance de 2, donc le théorème 1.4.1 implique que B est une sous-variété semi-abélienne de A . Comme B est non nulle et que $a + B \subset V_p$, on obtient $a \in Z_{V_p}(K)$.

Réciproquement, si $a \in Z_{V_p}(K)$, alors il existe une sous-variété semi-abélienne non nulle B de A telle que $a + B \subset V_p$. Le point 1.4.3 implique l'inclusion $a + B \subset W_{(a,p)}$, donc $a \in (Z_V)_p(K)$. \square

Corollaire 1.4.4 - *Si $V = Z_V$, il existe une sous-variété semi-abélienne non nulle B de A telle que $V_p + B = V_p$ pour tout $p \in P$.*

DÉMONSTRATION :

Les fibres du morphisme $W \rightarrow V$ sont des translatés de sous-variétés semi-abéliennes non nulles de A . Comme V est irréductible, une telle famille est nécessairement donnée par la translation d'une même sous-variété semi-abélienne B , ce qui donne le résultat. \square

1.4.2 Comparaisons de hauteurs

Le lemme suivant justifie que le choix des compactifications, des faisceaux amples et des hauteurs n'influencent pas les résultats portant sur des comparaisons de hauteurs. Soit X un schéma quasi-projectif sur $\bar{\mathbb{Q}}$. On fixe deux compactifications \bar{X} et \tilde{X} de X , ainsi que des hauteurs $h_X : \bar{X}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tilde{h}_X : \tilde{X}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ associées respectivement à des faisceaux amples \mathcal{L} et $\tilde{\mathcal{L}}$ sur \bar{X} et \tilde{X} .

Lemme 1.4.5 - *Il existe des constantes $\mu, \nu \in \mathbb{R}_{>0}$ telles que*

$$\forall x \in X(\bar{\mathbb{Q}}), \quad h_X(x) \leq \mu \cdot \tilde{h}_X(x) + \nu.$$

DÉMONSTRATION :

Rappelons succinctement la preuve de ce résultat provenant de [37, Proposition 2.3]. On se ramène au cas où on dispose d'un morphisme birationnel $\phi : \bar{X} \rightarrow \tilde{X}$ en remplaçant \tilde{X} par l'adhérence de $X \times X$ dans $\bar{X} \times \tilde{X}$. Dans ce cas, comme $\tilde{\mathcal{L}}$ est ample, il existe un entier $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{\mathcal{L}}^{\otimes \mu} \otimes \phi_* \mathcal{L}^{\otimes -1}$ soit engendré par ses sections globales. Or les sections de ce faisceau correspondent naturellement aux sections du faisceau $\phi^* \tilde{\mathcal{L}}^{\otimes \mu} \otimes \mathcal{L}^{\otimes -1}$. Comme ψ est un isomorphisme sur X , on obtient donc que $\phi^* \tilde{\mathcal{L}}^{\otimes \mu} \otimes \mathcal{L}^{\otimes -1}$ est engendré par ses sections globales sur X , donc il existe une constante $\nu \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in X(\bar{\mathbb{Q}}), \quad \mu \cdot \tilde{h}_X(x) - h_X(x) \geq -\nu,$$

ce qui montre le résultat. \square

On considère un morphisme surjectif $\varphi : X \rightarrow Y$ entre deux schémas quasi-projectifs sur $\bar{\mathbb{Q}}$ avec Y intègre. En fixant des compactifications \bar{X} de X et \bar{Y} de Y , on peut fixer des hauteurs $h_X : \bar{X}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_Y : \bar{Y}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ associées respectivement à des faisceaux amples \mathcal{L}_X sur \bar{X} et \mathcal{L}_Y sur \bar{Y} . Nous allons montrer un énoncé général qui permet de choisir pour tout point de $Y(\bar{\mathbb{Q}})$ un antécédent de hauteur contrôlée.

Lemme 1.4.6 - *Il existe des constantes $\mu, \nu \in \mathbb{R}_{>0}$ telles que*

$$\forall y \in Y(\bar{\mathbb{Q}}), \quad \exists x \in (\varphi^{-1}(y))(\bar{\mathbb{Q}}), \quad h_X(x) \leq \mu \cdot h_Y(y) + \nu.$$

DÉMONSTRATION :

Quitte à remplacer la compactification de X choisie par l'adhérence du graphe de φ dans $\bar{X} \times \bar{Y}$, on peut supposer que φ s'étend en un morphisme dominant $\varphi : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$. De plus, le lemme précédent montre qu'il suffit de prouver le résultat dans ce cas.

On procède par récurrence sur la dimension de Y . Si $\dim Y = 0$, le résultat est évident. On suppose donc dans la suite que $\dim Y > 0$. Par [20, Exercice III.2.17], il existe un sous-schéma fermé intègre Z de \bar{X} avec $\dim Y = \dim Z$ tel que $Z \xrightarrow{\varphi} \bar{Y}$ soit dominant. Par [12, Exercice II.3.22], le morphisme $Z \xrightarrow{\varphi} \bar{Y}$ est génériquement fini, donc le faisceau $\varphi^* \mathcal{L}_Y$ est gros sur Z et il en est de même du faisceau $\varphi^* \mathcal{L}_Y^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}_X^{\otimes -1}$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand. Par le [19, Corollaire 2.2.7], il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et un diviseur de CARTIER effectif E sur Z de sorte que

$$(\varphi^* \mathcal{L}_Y^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}_X^{\otimes -1})^{\otimes m} = \mathcal{L}_X \otimes \mathcal{O}_Z(E) \quad \text{sur } Z.$$

On en déduit avec le point (iv) du théorème 1.1.1 qu'il existe $\mu, \nu \in \mathbb{R}_{>0}$ de sorte que

$$h_X(x) \leq \mu \cdot h_Y(\varphi(x)) + \nu \quad \text{pour tout } x \in (Z \setminus E)(\bar{\mathbb{Q}}).$$

On a donc montré le résultat pour tout point $y \in (Y \setminus \varphi(E))(\bar{\mathbb{Q}})$. Si on note Y_1, \dots, Y_r les composantes irréductibles de $\varphi(E)$, on peut donc conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence à chaque $\varphi^{-1}(Y_i) \xrightarrow{\varphi} Y_i$ car $\dim(Y_i) < \dim Y$ pour $1 \leq i \leq r$. \square

1.4.3 Un lemme de recouvrement

Soit E un espace vectoriel réel. On fixe deux semi-normes $N_1, N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ et on note $N = \sqrt{N_1 + N_2^2}$ qui vérifie l'inégalité triangulaire. Si F est un sous-espace vectoriel de E et $\eta \geq 0$ un réel, on note

$$F_\eta = \{y + z \in E \mid y \in F, N(z) \leq \eta\}$$

et

$$\mathcal{C}(F, \eta) = \{y + z \in E \mid y \in F, N(z) \leq \eta(1 + N(y))\}.$$

Nous appliquerons le résultat suivant dans les chapitres 2, 3, 4 et 5.

Lemme 1.4.7 - Soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $\eta \geq 0$, $c_1 \geq 1$ et $c_3 \geq 1$ des réels.

(i) Si $\eta \leq 2^{-4}c_3c_1^{-1}$, alors il existe une partition finie de $\{x \in F_\eta \mid N(x) \geq c_3\}$ par des ensembles dans chacun desquels deux points $x, y \in E$ vérifient

$$N_1 \left(\frac{x}{N(x)^2} - \frac{y}{N(y)^2} \right) \leq \frac{1}{c_1} \quad \text{et} \quad N_2 \left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)} \right) \leq \frac{1}{c_1}.$$

(ii) Si $c_3 \geq 2$ et $\eta \leq 2^{-4}c_1^{-1}$, on peut remplacer F_η par $\mathcal{C}(F, \eta)$ dans l'assertion précédente.

DÉMONSTRATION :

On généralise la démonstration de [33, Lemme 5.1]. On note

$$H_1 = \{x \in E \mid N_1(x) = 0\} \quad \text{et} \quad H_2 = \{x \in E \mid N_2(x) = 0\},$$

ainsi que $F_1 = F/(F \cap H_1)$ et $F_2 = F/(F \cap H_2)$ qui sont des espaces vectoriels réels normés de dimensions finies. Ainsi, on peut recouvrir leur boule unité respective par un nombre fini de boules de rayons $(4c_1)^{-1}$, dont on note respectivement les centres $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$. On définit

$$A_{i,j} = \left\{ x \in F_\eta \mid N(x) \geq c_3, \quad N_1 \left(\frac{x}{N(x)^2} - x_i \right) \leq \frac{1}{2c_1}, \quad N_2 \left(\frac{x}{N(x)} - y_j \right) \leq \frac{1}{2c_1} \right\}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, deux points $x, y \in A_{i,j}$ vérifient bien la condition voulue. Il reste à montrer que les $A_{i,j}$ recouvrent $\{x \in F_\eta \mid N(x) \geq c_3\}$. On fixe donc un élément $x \in F_\eta$ avec $N(x) \geq c_3$ que l'on écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $N(z) \leq \eta$. D'une part, les éléments $y/N(y)^2 \in F_1$ et $y/N(y) \in F_2$ appartiennent à l'une des boules précédentes, donc il existe $i \in I$ et $j \in J$ tels que

$$N_1 \left(\frac{y}{N(y)^2} - x_i \right) \leq \frac{1}{4c_1}, \quad N_2 \left(\frac{y}{N(y)} - y_j \right) \leq \frac{1}{4c_1}.$$

D'autre part

$$N_2 \left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)} \right) \leq \frac{|N(y) - N(x)| + N(z)}{N(x)} \leq 2 \frac{N(z)}{N(x)} \leq \frac{1}{4c_1},$$

la dernière égalité provenant des conditions sur η, c_1 et c_3 . Finalement, on remarque

$$|N(y)^2 - N(x)^2| = |N(y) - N(x)| \cdot |N(y) + N(x)| \leq N(z) (2N(x) + N(z))$$

ce qui permet de majorer comme précédemment

$$N_1 \left(\frac{x}{N(x)^2} - \frac{y}{N(y)^2} \right) \leq \frac{|N(y)^2 - N(x)^2| + N(z)^2}{N(x)^2} \leq 2 \left(\frac{N(z)^2}{N(x)^2} + \frac{N(z)}{N(x)} \right) \leq 4 \frac{N(z)}{N(x)} \leq \frac{1}{4c_1}.$$

Ainsi, en combinant les inégalités précédentes, on obtient que $x \in A_{i,j}$, d'où le résultat. Pour le point (ii), on considère à nouveau

$$A_{i,j} = \left\{ x \in \mathcal{C}(F, \eta) \mid N(x) \geq c_3, \quad N_1 \left(\frac{x}{N(x)^2} - x_i \right) \leq \frac{1}{2c_1}, \quad N_2 \left(\frac{x}{N(x)} - y_j \right) \leq \frac{1}{2c_1} \right\}.$$

En utilisant $N(z) \leq \eta(1 + N(y))$, on obtient avec l'inégalité triangulaire

$$N(z) \leq \frac{\eta}{1 - \eta}(1 + N(x)) \leq \frac{1}{4} \cdot N(x),$$

puis en reprenant le raisonnement précédent, on a

$$N_2 \left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)} \right) \leq 2 \frac{N(z)}{N(x)} \leq \frac{2\eta}{1 - \eta} \left(1 + \frac{1}{N(x)} \right) \leq \frac{2}{2^4 c_1 - 1} \cdot \frac{3}{2} \leq \frac{1}{4c_1},$$

en utilisant les conditions sur c_3 et η . De même, on a

$$N_1 \left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)} \right) \leq 2 \left(\frac{N(z)^2}{N(x)^2} + \frac{N(z)}{N(x)} \right) \leq \frac{5}{2} \cdot \frac{N(z)}{N(x)} \leq \frac{5\eta}{2(1 - \eta)} \left(1 + \frac{1}{N(x)} \right) \leq \frac{1}{4c_1},$$

ce qui termine la preuve. \square

Dans le cas où $N = N_1$ est une norme, on a recouvert la partie hachurée dans la figure ci-dessous par des cônes dont l'axe appartient à F .

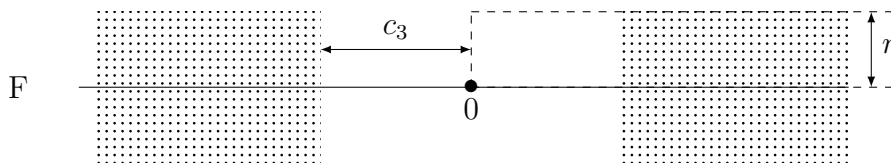


FIGURE 1.1 – Recouvrement de $\{x \in F_\eta \mid N(x) \geq c_3\}$.

Ainsi les conditions sur les constantes deviennent naturelles. On a procédé de même pour l'affirmation relative à $\mathcal{C}(F, \eta)$ en recouvrant la partie hachurée ci-dessous.

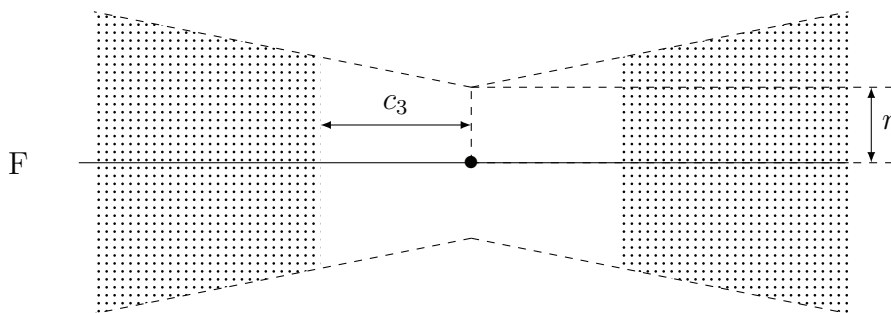


FIGURE 1.2 – Recouvrement de $\{x \in \mathcal{C}(F, \eta) \mid N(x) \geq c_3\}$.

1.4.4 Un lemme de dénombrement

Nous utiliserons le résultat suivant dans le chapitre 5.

Lemme 1.4.8 - Soient $r_1, \dots, r_m, \delta \in \mathbb{R}$ des nombres strictement positifs. Pour tout entier $d \in \mathbb{N}^*$, on a l'estimation

$$\text{Card} \left\{ j \in \mathbb{N}^m \mid \sum_{i=1}^m \frac{j_i}{r_i d} < \delta \right\} = \frac{\delta^m}{m!} \cdot d^m \left(\prod_{i=1}^m r_i \right) + o(d^m)$$

où $o(d^m)$ se réfère à la limite $d \rightarrow +\infty$.

DÉMONSTRATION :

On commence par définir une partie $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ par

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{r_i} < \delta \right\}.$$

En appliquant le [17, Chapitre 6, Théorème 2], on obtient l'égalité

$$\text{Card} \left\{ j \in \mathbb{N}^m \mid \sum_{i=1}^m \frac{j_i}{r_i d} < \delta \right\} = \text{Vol}(\Omega) \cdot d^m + o(d^m),$$

puis on conclut la démonstration en remarquant que

$$\text{Vol}(\Omega) = \frac{\delta^m}{m!} \left(\prod_{i=1}^m r_i \right).$$

□

CHAPITRE 2

LE CAS ABÉLIEN

L'objectif de ce chapitre est de démontrer les résultats annoncés dans le cas abélien. On fixe une variété abélienne A sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et un faisceau \mathcal{L}_0 très ample et symétrique associé à un plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}$. On suppose de plus que l'application

$$\Gamma\left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}, \mathcal{O}(n)\right) \rightarrow \Gamma\left(A, \mathcal{L}_0^{\otimes n}\right) \quad (2.0.1)$$

est surjective pour tout $n \geq 1$. On note $\hat{h} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ la hauteur de NÉRON-TATE associée à \mathcal{L}_0 et $\hat{h}^w : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ la hauteur obtenue en composant le plongement précédent avec la hauteur de WEIL sur $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}$.

On note X_0, \dots, X_{N_A} les coordonnées de $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}$ et on désigne par $\text{add} : A^2 \rightarrow A^2$ le morphisme donné sur les points par

$$\text{add}(a, b) = (a + b, a - b).$$

L'hypothèse 2.0.1 et le théorème du cube montrent qu'il existe des polynômes $P_{i,j}^{\text{add}}$ pour $0 \leq i, j \leq N_A$ tels que

$$\text{add}^*(p_1^* X_i \otimes p_2^* X_j) = P_{i,j}^{\text{add}}(p_1^* X_0, \dots, p_1^* X_{N_A}, p_2^* X_0, \dots, p_2^* X_{N_A})$$

où $p_1, p_2 : A^2 \rightarrow A$ sont les deux projections. On note h_{add} la hauteur de la famille de tous les coefficients des polynômes $P_{i,j}^{\text{add}}$ pour $0 \leq i, j \leq N_A$.

On fixe un schéma projectif et intègre P sur $\bar{\mathbb{Q}}$, un faisceau \mathcal{L} très ample sur P et un plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$ associé à \mathcal{L} . On considère également une hauteur $h_{\mathcal{L}} : P(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ associée à \mathcal{L} et on note $h_{\mathcal{L}}^w : P(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ la hauteur obtenue en composant le plongement précédent avec la hauteur de WEIL sur $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$.

Comme les hauteurs \hat{h} et \hat{h}^w sont associées au même faisceau, et qu'il en est de même de $h_{\mathcal{L}}$ et $h_{\mathcal{L}}^w$, on peut considérer le nombre

$$C_{\text{haut}} = \max\left(\sup_{a \in A(\bar{\mathbb{Q}})} \left| \hat{h}(a) - \hat{h}^w(a) \right|, \sup_{p \in P(\bar{\mathbb{Q}})} |h_{\mathcal{L}}(p) - h_{\mathcal{L}}^w(p)|\right) < +\infty. \quad (2.0.2)$$

D'autre part, on dispose à présent d'un plongement

$$A \times P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \quad \text{avec} \quad N = (N_A + 1)(N_P + 1) - 1$$

où la deuxième immersion est le morphisme de SEGRE. Le degré et la hauteur d'un sous-schéma fermé de $A \times P$ sont définis relativement à ce plongement.

Finalement, on considère un sous-schéma fermé intègre $V \hookrightarrow A \times P$. On note $m = \dim V + 1$ et on introduit les constantes

$$\Lambda = 2^{m^2} (8m \dim V)^{m \dim V} (N_A + 1)(N_P + 1) (\deg V)^{3m}, \quad \psi = \prod_{j=2}^{m \dim V} (3j + 1). \quad (2.0.3)$$

2.1 Inégalité de VOJTA effective dans le cas abélien

2.1.1 Énoncé

Rappelons que le théorème 1.4.2 fournit un sous-schéma fermé Z_V de V et que la hauteur \hat{h} s'étend à l'espace vectoriel $A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ (voir théorème 1.1.3). L'inégalité de VOJTA explicite que nous allons démontrer est la suivante.

Théorème 2.1.1 - *Il existe $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{N}^*$ tels que si $(a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m) \in V(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifient simultanément les inégalités*

$$\hat{h} \left(\frac{a_i}{\sqrt{\hat{h}(a_i)}} - \frac{a_{i+1}}{\sqrt{\hat{h}(a_{i+1})}} \right) \leq \frac{1}{e_1^2}, \quad \hat{h}(a_{i+1}) \geq e_2^2 \cdot \hat{h}(a_i), \quad \hat{h}(a_1) \geq e_3, \quad \hat{h}(a_j) \geq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p_j)$$

pour tout $1 \leq i \leq m - 1$ et pour tout $1 \leq j \leq m$, alors il existe $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $(a_i, p_i) \in Z_V(\bar{\mathbb{Q}})$. De plus, on peut prendre les valeurs

$$e_1 = 2^3 \Lambda^\psi, \quad e_2 = 2 \Lambda^{2\psi}, \quad \mu = 4 \Lambda^\psi \quad \text{et} \\ e_3 = (4(N_A + 1))^{2m^2 \dim V} \Lambda^{8\psi} \max(h(V), h_{\text{add}}, C_{\text{haut}}).$$

On supposera dans la suite que $\dim V > 0$, sans quoi, le résultat est évident. Pour démontrer ce résultat, nous allons supposer l'existence d'un point $x \in (V \setminus Z_V)^m(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant les inégalités ci-dessus. Nous verrons qu'un tel point vérifie une première inégalité utilisant différentes hauteurs (Lemme 2.1.8). D'autre part, en utilisant la méthode de VOJTA (à travers le théorème 1.3.4 de RÉMOND), nous obtiendrons une seconde inégalité de hauteurs. En combinant ces deux inégalités, on obtiendra une contradiction avec la valeur choisie pour e_3 et le théorème sera démontré.

Dans les prochaines parties, nous allons donc nous placer dans les conditions d'application du théorème 1.3.4, puis nous vérifierons que l'on dispose de son hypothèse.

2.1.2 Préliminaires

Pour $s \in (\mathbb{N}^*)^m$, on note $r_{\pm} : V^m \rightarrow A^{m-1}$ le morphisme donné sur les points par

$$((a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m)) \mapsto (s_1 a_1 \pm s_2 a_2, \dots, s_{m-1} a_{m-1} \pm s_m a_m).$$

En utilisant les plongements $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}$, les morphismes r_{-} et r_{+} composés avec un morphisme de SEGRE et le plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}$, on obtient un plongement

$$V^m \hookrightarrow \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}\right)^m \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'_A}\right) \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'_A}\right) \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}\right)^m \quad \text{avec} \quad N'_A = (N_A + 1)^{m-1} - 1.$$

Par restriction, on obtient ainsi un faisceau $\mathcal{O}(b, c, c', d)$ sur V^m pour chaque $b, d \in \mathbb{Z}^m$ et $c, c' \in \mathbb{Z}$. Par construction, on a les relations suivantes.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(b, 0, 0, 0) &\simeq p^* \left(\bigotimes_{i=1}^m p_i^* \mathcal{L}_0^{\otimes b_i} \right), & \mathcal{O}(0, 1, 0, 0) &\simeq p^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} (s_i p_i - s_{i+1} p_{i+1})^* \mathcal{L}_0 \right), \\ \mathcal{O}(0, 0, 0, d) &\simeq q^* \left(\bigotimes_{i=1}^m q_i^* \mathcal{L}^{\otimes d_i} \right), & \mathcal{O}(0, 0, 1, 0) &\simeq p^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} (s_i p_i + s_{i+1} p_{i+1})^* \mathcal{L}_0 \right), \end{aligned}$$

où $p : A^m \times P^m \rightarrow A^m$, $q : A^m \times P^m \rightarrow P^m$, $p_1, \dots, p_m : A^m \rightarrow A$ et $q_1, \dots, q_m : P^m \rightarrow P$ sont les différentes projections.

On note $X_0^{(i)}, \dots, X_{N_A}^{(i)}$ les coordonnées du i -ème facteur de $\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}\right)^m$, puis $V_0, \dots, V_{N'_A}$ et $V'_0, \dots, V'_{N'_A}$ pour les deux espaces projectifs intermédiaires et $T_0^{(i)}, \dots, T_{N_P}^{(i)}$ les coordonnées du i -ème facteur $\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}\right)^m$. En notant $\eta = (1, 2, \dots, 2, 1) \in \mathbb{N}^m$, on a le résultat suivant.

Lemme 2.1.2 - *Il existe sur $A^m \times P^m$ un isomorphisme*

$$\xi' : \mathcal{O}(2\eta s^2, 1, 1, 0) \rightarrow \mathcal{O}(4\eta s^2, 0, 0, 0)$$

ayant la propriété suivante : pour tout $k \in \llbracket 0, N_A \rrbracket^m$, il existe des polynômes $(P_{\ell, \ell'})_{0 \leq \ell, \ell' \leq N'_A}$ de multidegré $4\eta s^2$ en les $X^{(i)}$ dont la famille est de hauteur au plus $|\eta s^2|(h_{\text{add}} + 10N_A)$ tels que

$$\xi' \left(\left(\bigotimes_{i=1}^m \left(X_{k_i}^{(i)} \right)^{2\eta_i s_i^2} \right) \otimes V_{\ell} \otimes V'_{\ell'} \right) = P_{\ell, \ell'}(X^{(1)}, \dots, X^{(m)}).$$

DÉMONSTRATION :

La démonstration que nous allons rappeler est analogue à [33, Lemme 3.3]. Par le théorème du cube, on a un isomorphisme

$$\xi : \mathcal{O}(0, 1, 1, 0) \rightarrow \mathcal{O}(2\eta s^2, 0, 0, 0),$$

et avec les notations de la proposition 1.3.9, on peut écrire

$$\xi(V_{\ell} \otimes V'_{\ell'}) = \bigotimes_{i=1}^{m-1} p_{i, i+1}^* \text{add}_{s_i, s_{i+1}}^* \left(p_1^* X_{\ell_i}^{(i)} \otimes p_2^* X_{\ell'_i}^{(i+1)} \right)$$

où $p_{i,i+1} : A^m \rightarrow A^2$ est la projection sur les facteurs $(i, i+1)$ et ℓ, ℓ' sont identifiés à un élément de $\llbracket 0, N_A \rrbracket^{m-1}$ correspondant au plongement de SEGRE utilisé. Ainsi, l'isomorphisme ξ se déduit de ξ' par produit tensoriel, et l'on peut définir

$$P_{\ell, \ell'} = \left(\prod_{i=1}^m \left(X_{k_i}^{(i)} \right)^{2\eta_i(s_i^2 - f(s_i))} \right) \left(\prod_{i=1}^{m-1} P_{s_i, s_{i+1}, k_i, k_{i+1}, \ell_i, \ell_{i+1}}(X^{(i)}, X^{(i+1)}) \right).$$

En utilisant la majoration $f(n) \leq n^2$, on obtient que le degré des polynômes du produit de droite est au plus $4s_i^2$ en chacun des groupes de variables $X^{(i)}$ et $X^{(i+1)}$. Ainsi, le nombre de monômes apparaissant lorsqu'on développe le produit est majoré par

$$\prod_{i=1}^{m-1} \binom{4s_i^2 + N_A}{N_A} \binom{4s_{i+1}^2 + N_A}{N_A} \leq \prod_{i=1}^{m-1} (N_A + 1)^{4s_i^2} (N_A + 1)^{4s_{i+1}^2} = (N_A + 1)^{4|\eta s^2|}.$$

Ainsi, on a finalement que la hauteur du polynôme $P_{\ell, \ell'}$ est au plus

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-1} h(P_{s_i, s_{i+1}, k_i, k_{i+1}, \ell_i, \ell_{i+1}}) + 4|\eta s^2| \log(N_A + 1) \\ \leq \sum_{i=1}^{m-1} (s_i^2 + s_{i+1}^2) (h_{\text{add}} + 6N_A) + 4|\eta s^2| N_A \\ \leq |\eta s^2| (h_{\text{add}} + 10N_A), \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. \square

2.1.3 Mise en place

On va se placer dans les conditions d'application du théorème 1.3.4 pour démontrer notre inégalité de VOJTA. En utilisant un plongement de SEGRE, on définit $\iota : V \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ comme la composée

$$V \hookrightarrow A \times P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N.$$

Rappelons que l'on définit le faisceau \mathcal{L} par $\mathcal{L} = \iota^* \mathcal{O}(1)$. On fixe les constantes que nous allons utiliser pour appliquer le théorème 1.3.4

$$\begin{aligned} m = \dim(V) + 1, \quad t_1 = 4, \quad t_2 = 4, \\ M = (N_A + 1)^m (N'_A + 1), \quad \theta = 2^{m^2} \quad \text{et} \quad \gamma = h_{\text{add}} + 10N_A. \end{aligned}$$

A partir de ces valeurs, les trois constantes fournies par le point 1.3.1 sont

$$\begin{aligned} c_1 = 4\Lambda^\psi, \quad c_2 = \Lambda^{4\psi} \\ c_3 = (4(N_A + 1)^m (N'_A + 1))^{m \dim V} \Lambda^{8\psi} \max(h(V), h_{\text{add}} + 10N_A). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

où Λ et ψ sont données par le point 2.0.3. On fixe un m -uplet $s \in (\mathbb{N}^*)^m$ et on pose $\delta = \eta s^2$. On définit également $\mathcal{V} = V^m$ et $\pi = \text{Id}_{V^m}$. Avec les notations introduites à la partie précédente, en suivant [21], le faisceau \mathcal{M} sur V^m que nous considérons est

$$\mathcal{M} = \mathcal{O}(0, 1, 0, \eta s^2).$$

De plus, le faisceau \mathcal{N}_δ défini au point 1.3.2 s'écrit avec ces mêmes notations

$$\mathcal{N}_\delta = \mathcal{O}(\eta s^2, 0, 0, \eta s^2).$$

On introduit finalement

$$\mathcal{P} = \mathcal{O}(4\eta s^2, 0, 0, \eta s^2)$$

sur V^m qui est associé au plongement ι' donné par

$$V^m \hookrightarrow \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}\right)^m \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}\right)^m \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'} \quad \text{avec} \quad N' = (N+1)^m - 1$$

où la seconde flèche est un plongement de SEGRE-VERONESE considérant tous les monômes de bidegré $(4\eta s^2, \eta s^2)$. On définit l'injection $j_1 : \mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{N}_{\eta s^2}^{\otimes 4}$ comme la multiplication par une section globale non nulle de la forme

$$\bigotimes_{i=1}^m \left(T_{k_i}^{(i)}\right)^{3\eta_i s_i^2} \in \mathcal{O}(0, 0, 0, 3\eta s^2) \quad \text{où} \quad k \in \llbracket 0, N_P \rrbracket^m.$$

D'autre part, en utilisant l'isomorphisme ξ' du lemme 2.1.2, on a

$$\mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1} = \mathcal{O}(4\eta s^2, -1, 0, 0) \simeq \mathcal{O}(2\eta s^2, 0, 1, 0)$$

ce qui permet de définir Σ comme la famille des images réciproques par cet isomorphisme de

$$\left(\bigotimes_{i=1}^m \left(X_{k_i}^{(i)}\right)^{2\eta_i s_i^2}\right) \otimes V_{\ell'} \quad \text{où} \quad k \in \llbracket 0, N_A \rrbracket^m, \quad \ell' \in \llbracket 0, N'_A \rrbracket.$$

Cette famille est bien de cardinal M . On définit finalement l'injection $j_2 : \mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1} \hookrightarrow \mathcal{N}_{\eta s^2}^{\otimes 4}$ comme la multiplication par une section globale non nulle de la forme

$$V_\ell \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^m \left(T_{r_i}^{(i)}\right)^{4\eta_i s_i^2}\right) \in \mathcal{O}(0, 1, 0, 4\eta s^2) \quad \text{où} \quad \ell \in \llbracket 0, N'_A \rrbracket, \quad r \in \llbracket 0, N_P \rrbracket^m.$$

Finalement, l'image par j_1 de chaque coordonnée de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'}$ est clairement un monôme en les coordonnées de chaque $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$. D'autre part, le lemme 2.1.2 assure que l'image par j_2 des éléments de Σ s'exprime bien comme des polynômes de multidegré $4\eta s^2$ et de hauteurs au plus $|\eta s^2|\gamma$. (Les termes en $T^{(1)}, \dots, T^{(m)}$ n'intervenant que par des monômes, la hauteur des polynômes n'est pas modifiée).

Remarque 2.1.4 : Il est important de voir que l'on peut choisir j_1 et j_2 tels qu'ils soient des isomorphismes en un point $x \in V^m$ fixé préalablement. En effet, on peut choisir les sections définissant j_1 et j_2 pour qu'elles ne s'annulent pas en x .

Le lemme suivant permet de contrôler les hauteurs $h_{\mathcal{L}} : V(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_{\mathcal{M}} : V^m(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ définies au point 1.3.3 en fonction de \hat{h} , \hat{h}^w et $h_{\mathcal{G}}^w$.

Lemme 2.1.5 - *On a les égalités suivantes*

(i) Pour tout $(a, p) \in V(\bar{\mathbb{Q}})$, on a $h_{\mathcal{L}}(a, p) = \hat{h}^w(a) + h_{\mathcal{E}}^w(p)$.

(ii) Pour tout $x \in V^m(\bar{\mathbb{Q}})$ où l'on écrit $x_i = (a_i, p_i)$ pour $1 \leq i \leq m$, on a

$$h_{\mathcal{M}}(x) \leq \sum_{i=1}^{m-1} \hat{h}(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) + \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\mathcal{E}}^w(p_i) + 3|\eta s^2| C_{\text{haut}}.$$

DÉMONSTRATION :

Le point (i) est immédiat par définition de ι et des propriétés classiques du morphisme de SEGRE. Pour le point (ii), vu la définition de $h_{\mathcal{M}}$ et de ι' , on peut écrire

$$h_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^m 2\eta_i s_i^2 \hat{h}^w(a_i) - \sum_{i=1}^{m-1} \hat{h}^w(s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1}) + \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\mathcal{E}}^w(p_i).$$

En repassant à \hat{h} avec le point 2.0.2 et en utilisant le théorème du cube, on obtient le résultat. \square

2.1.4 L'hypothèse sur le nombre d'intersection

Nous nous sommes donc placés dans les conditions d'application du théorème 1.3.4. Il nous reste à vérifier que l'on dispose de son hypothèse sur le nombre d'intersection. On fixe donc $Z = Z_1 \times \dots \times Z_m$ un produit de sous-schémas fermés intègres de V .

Lemme 2.1.6 - *Si $Z_i \not\subset Z_V$ pour $1 \leq i \leq m$, alors on a la minoration*

$$[\mathcal{M}]^{\dim(Z)} \cdot Z \geq \prod_{i=1}^m s_i^{2 \dim Z_i}.$$

DÉMONSTRATION :

Voir [21] ou la partie 4.1.4 qui traite le cas général. \square

2.1.5 Démonstration de l'inégalité de VOJTA

On suppose que l'on dispose des points $(a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m) \in (V \setminus Z_V)(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant les inégalités dans les hypothèses du théorème 2.1.1 avec les constantes $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{N}^*$ données. Signalons que les constantes e_1, e_2, e_3, μ ont été choisies pour vérifier les inégalités élémentaires suivantes

$$e_1 = 2c_1, \quad e_2^2 \geq 2c_2, \quad e_3 \geq c_3 + C_{\text{haut}}, \quad e_3 > 2^4 c_1^2 C_{\text{haut}} \quad \text{et} \quad \mu = c_1, \quad (2.1.7)$$

où les constantes c_1, c_2, c_3 sont données par le point 2.1.3. On commence par choisir un m -uplet $s \in \mathbb{N}^*$ pour obtenir une première inégalité de hauteurs.

Lemme 2.1.8 - *Il existe $s \in (\mathbb{N}^*)^m$ tel que $s_i/s_{i+1} \geq e_2$ pour $1 \leq i \leq m-1$ et*

$$\sum_{i=1}^{m-1} \hat{h}(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) \leq \frac{3}{e_1^2} \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 \hat{h}(a_i).$$

DÉMONSTRATION :

On note dans cette démonstration $\|\cdot\| = \sqrt{\hat{h}}$ qui vérifie l'inégalité triangulaire. On pose $s_m = 1$ et on définit successivement s_{m-1}, \dots, s_1 de sorte que s_i/s_{i+1} soit l'entier le plus proche de $\|a_{i+1}\|/\|a_i\|$. Comme $e_2 \in \mathbb{N}$, on a $s_i/s_{i+1} \geq e_2$. D'autre part,

$$\left| s_i \|a_i\| - s_{i+1} \|a_{i+1}\| \right| = s_{i+1} \|a_i\| \left| \frac{s_i}{s_{i+1}} - \frac{\|a_{i+1}\|}{\|a_i\|} \right| \leq \frac{1}{2} s_{i+1} \|a_i\| \leq \frac{1}{2e_2} s_{i+1} \|a_{i+1}\|.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \|s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}\| &= \left\| \left(s_i a_i - s_{i+1} \frac{\|a_{i+1}\|}{\|a_i\|} a_i \right) + \left(s_{i+1} \frac{\|a_{i+1}\|}{\|a_i\|} a_i - s_{i+1} a_{i+1} \right) \right\| \\ &\leq \left| s_i - s_{i+1} \frac{\|a_{i+1}\|}{\|a_i\|} \right| \|a_i\| + s_{i+1} \|a_{i+1}\| \left\| \frac{a_i}{\|a_i\|} - \frac{a_{i+1}}{\|a_{i+1}\|} \right\| \\ &\leq \left| s_i \|a_i\| - s_{i+1} \|a_{i+1}\| \right| + \frac{1}{e_1} s_{i+1} \|a_{i+1}\| \\ &\leq \left(\frac{1}{2e_2} + \frac{1}{e_1} \right) s_{i+1} \|a_{i+1}\|. \end{aligned}$$

En remarquant que $e_2 \geq e_1$, en élevant au carré, puis en sommant, on obtient le résultat. \square

On applique la construction de la partie précédente avec le m -uplet s fourni par le lemme ci-dessus. Nous allons utiliser le théorème 1.3.4 avec le m -uplet $\delta = \eta s^2$. En utilisant la remarque 2.1.4, on peut choisir j_1 et j_2 de sorte qu'ils soient des isomorphismes en $x = (x_1, \dots, x_m) \in V^m(\bar{\mathbb{Q}})$ où $x_i = (a_i, p_i)$, donc que $x \in U'(\bar{\mathbb{Q}})$. L'hypothèse du théorème 1.3.4 est vérifiée. En effet, comme $x_i \in (Z_i \setminus Z_V)$, le lemme 2.1.6 s'applique et on obtient

$$[\mathcal{M}]^{\dim(Z)} \cdot Z \geq \prod_{i=1}^m s_i^{2 \dim Z_i} \geq \theta^{-1} \prod_{i=1}^m (\eta_i s_i^2)^{\dim Z_i}.$$

Par le point 2.1.7, on a

$$\begin{aligned} \eta_i s_i^2 / (\eta_{i+1} s_{i+1}^2) &\geq e_2^2 / 2 \geq c_2 \quad \text{et} \\ h_{\mathcal{L}}(x_i) &\geq \hat{h}^w(a_i) \geq \hat{h}(a_i) - C_{\text{haut}} \geq \hat{h}(a_1) - C_{\text{haut}} \geq e_3 - C_{\text{haut}} \geq c_3 \end{aligned}$$

tandis que le théorème 1.3.4 fournit l'inégalité

$$\sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\mathcal{L}}(x_i) \leq c_1 h_{\mathcal{M}}(x).$$

En utilisant le lemme 2.1.5, on en déduit

$$\sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 (\hat{h}^w(a_i) + h_{\mathfrak{L}}^w(p_i)) \leq c_1 \left(\sum_{i=1}^{m-1} \hat{h}(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) + \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\mathfrak{L}}^w(p_i) + 3|\eta s^2| C_{\text{haut}} \right),$$

puis en utilisant l'inégalité du lemme 2.1.8, on obtient

$$\sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 \hat{h}^w(a_i) + \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\mathfrak{L}}^w(p_i) \leq c_1 \left(\frac{3}{e_1^2} \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 \hat{h}(a_i) + \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\mathfrak{L}}^w(p_i) + 3|\eta s^2| C_{\text{haut}} \right).$$

De plus, avec les hypothèses du théorème 2.1.1 et le point 2.0.2, on obtient

$$\hat{h}^w(a_i) \geq \hat{h}(a_i) - C_{\text{haut}}, \quad h_{\mathfrak{L}}^w(p_i) \leq h_{\mathfrak{L}}(p_i) + C_{\text{haut}} \leq \frac{1}{\mu} \hat{h}(a_i) + C_{\text{haut}},$$

et par suite

$$\left(1 - \frac{3c_1}{e_1^2} - \frac{c_1 - 1}{\mu} \right) \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 \hat{h}(a_i) \leq 4c_1 |\eta s^2| C_{\text{haut}}.$$

Finalement, en utilisant le point 2.1.7, on obtient l'inégalité

$$\frac{1}{4c_1} \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 \hat{h}(a_i) \leq 4c_1 |\eta s^2| C_{\text{haut}},$$

puis en utilisant $\hat{h}(a_i) \geq e_3$ pour $1 \leq i \leq m$

$$e_3 \leq 2^4 c_1^2 C_{\text{haut}}.$$

Cette dernière inégalité étant contraire au point 2.1.7, cela termine la démonstration du théorème 2.1.1.

2.2 Démonstration des énoncés

Si Γ est un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et $\varepsilon > 0$ est un réel, on note

$$\Gamma_\varepsilon = \{a + b \mid a \in \Gamma, b \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } \hat{h}(b) \leq \varepsilon\}$$

En utilisant l'inégalité de VOJTA établie dans la partie précédente, nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 2.2.1 - *Il existe une constante $\mu \geq 0$ ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini et $\varepsilon \geq 0$ un réel, alors il existe une constante $\nu \geq 0$ telle que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, on a*

$$\forall a \in (V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon, \quad \hat{h}(a) \leq \mu \cdot h_{\mathfrak{L}}(p) + \nu.$$

De plus, on peut prendre

$$\mu = \left((N_A + 1)(N_P + 1) \deg V \right)^{m^{3m^2}}.$$

DÉMONSTRATION :

L'inégalité de VOJTA (théorème 2.1.1) fournit des constantes $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{R}$. On fixe un sous-groupe $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ de rang fini et un réel $\varepsilon \geq 0$. Quitte à augmenter e_3 , on suppose que $\varepsilon \leq 2^{-8}e_3e_1^{-2}$. On désigne par $(a_i, p_i)_{i \in I}$ l'ensemble des points de $(V \setminus Z_V)(\bar{\mathbb{Q}})$ tels que

$$a_i \in \Gamma_\varepsilon, \quad \hat{h}(a_i) \geq e_3 \quad \text{et} \quad \hat{h}(a_i) \geq \mu \cdot h_\Sigma(p_i).$$

Par le point (ii) du théorème 1.1.3, l'application $\sqrt{\hat{h}} : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ s'étend en une norme à l'espace vectoriel $E = A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On applique le lemme 1.4.7 en prenant

$$F = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = \sqrt{\hat{h}}, \quad c_1 = e_1, \quad c_3 = \sqrt{e_3} \quad \text{et} \quad \eta = \sqrt{\varepsilon}.$$

Ainsi, on peut recouvrir $\{a \in \Gamma_\varepsilon \mid \hat{h}(a) \geq e_3\}$ par un nombre fini d'ensembles dans chacun desquels deux points $a, b \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifient

$$\hat{h} \left(\frac{a}{\sqrt{\hat{h}(a)}} - \frac{b}{\sqrt{\hat{h}(b)}} \right) \leq \frac{1}{e_1^2}.$$

Ainsi l'inégalité de VOJTA montre que l'ensemble $(\hat{h}(a_i))_{i \in I}$ est majoré par un réel $\nu' \geq e_3$ (sinon on pourrait exhiber des points $(a_{i_1}, p_{i_1}), \dots, (a_{i_m}, p_{i_m}) \in (V \setminus Z_V)(\bar{\mathbb{Q}})$ la contredisant). On a donc bien l'inégalité de hauteurs annoncée en posant

$$\nu = \nu' - \mu \cdot \min \left(\inf_{p \in P(\bar{\mathbb{Q}})} h_\Sigma(p), 0 \right).$$

Vérifions que la valeur de μ annoncée convient. Le théorème 2.1.1 fournit la valeur $\mu = 4\Lambda^\psi$ où les constantes Λ et ψ sont données par le point 2.0.3. En utilisant $m = \dim V + 1$ et $\dim V \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\Lambda &= 2^{m^2+1}(8m \dim V)^{m \dim V} (N_A + 1)(N_P + 1)(\deg V)^{3m} \\ &\leq 16^{m^2} m^{2m^2} (N_A + 1)(N_P + 1)(\deg V)^{3m}. \end{aligned}$$

En remarquant que $N_A \geq 2$ et $N_P \geq 1$, on a

$$16^{m^2} \leq [(N_A + 1)(N_P + 1)]^{2m^2-1} \quad \text{et} \quad m \leq (N_A + 1)(N_P + 1)$$

ce qui permet d'aboutir à l'inégalité

$$2\Lambda \leq \left((N_A + 1)(N_P + 1) \deg V \right)^{4m^2}.$$

Comme $\psi \geq 2$, on a donc

$$\mu = 4\Lambda^\psi \leq (2\Lambda)^\psi \leq \left((N_A + 1)(N_P + 1) \deg V \right)^{4m^2\psi}.$$

Finalement, si $m \geq 4$, on a

$$\begin{aligned} 4m^2\psi &= 4m^2 \prod_{j=2}^{m(m-1)} (3j+1) \\ &\leq 4m^2 3^{m(m-1)-1} (m(m-1)+1)! \\ &\leq m^{m(m-1)+2} m^{2(m(m-1)+1)} \\ &\leq m^{3m^2}. \end{aligned}$$

L'inégalité restant vraie pour $m = 2$ et $m = 3$, on obtient le résultat. \square

De même, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) = \{a + b \mid a \in \Gamma, b \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } \hat{h}(b) \leq \varepsilon(1 + \hat{h}(a))\}.$$

Nous avons le résultat analogue suivant.

Théorème 2.2.2 - *Il existe une constante $\mu \geq 0$ et un réel $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un réel $\nu \geq 0$ tel que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, on a*

$$\forall a \in (V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon), \quad \hat{h}(a) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu.$$

De plus, on peut prendre

$$\mu = \left((N_A + 1)(N_P + 1) \deg V \right)^{m^{3m^2}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \mu^{-1} = \left((N_A + 1)(N_P + 1) \deg V \right)^{-m^{3m^2}}.$$

DÉMONSTRATION :

On reprend la démonstration précédente en posant cette fois-ci $\varepsilon = 2^{-8}e_1^{-2}$. On utilise le point (ii) du lemme 1.4.7 et on conclut de la même façon en remarquant que $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est contenu dans $\mathcal{C}(F, \eta)$. En effet, si $a \in \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ s'écrit $b + c$ avec $b \in \Gamma$ et $\hat{h}(c) \leq \varepsilon(1 + \hat{h}(b))$, alors

$$\|c\| = \sqrt{\hat{h}(c)} \leq \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 + \hat{h}(b)} \leq \eta \left(1 + \sqrt{\hat{h}(b)} \right) \leq \eta(1 + \|b\|).$$

Le calcul de μ est le même que dans la démonstration précédente. Le théorème 2.1.1 donne $e_1 = 2^3 \Lambda^\psi$ où les constantes Λ et ψ sont données par le point 2.0.3. Avec $m \geq 2$, on a $\psi \geq 7$, donc

$$\varepsilon^{-1} = 2^{14} \Lambda^{2\psi} \leq (2\Lambda)^{2\psi},$$

et en reprenant la démonstration précédente

$$\varepsilon^{-1} \leq \left((N_A + 1)(N_P + 1) \deg V \right)^{8m^2\psi}.$$

On conclut comme la démonstration précédente en remarquant que $8m^2\psi \leq m^{3m^2}$. \square

Finalement, on déduit l'énoncé suivant par récurrence sur $\dim A$.

Théorème 2.2.3 - *Il existe une constante $\mu \geq 0$, un réel $\varepsilon > 0$ et une famille finie \mathfrak{B} de sous-variétés abéliennes de A ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel $\nu \geq 0$ tels que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, il existe des points $a_1, \dots, a_n \in V_p(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant l'inégalité*

$$\hat{h}(a_i) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu$$

et des sous-variétés abéliennes $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$ avec $a_i + B_i \subset V_p$ tels que

$$V_p(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_{\varepsilon} = \bigcup_{i=1}^n (a_i + B_i(\bar{\mathbb{Q}})) \cap \Gamma_{\varepsilon}.$$

DÉMONSTRATION :

On démontrera ce résultat dans un cadre plus général (voir théorème 4.2.4). \square

CHAPITRE 3

LE CAS TORIQUE

L'objectif de ce chapitre est de démontrer les résultats annoncés dans le cas torique. Ces résultats permettent notamment d'obtenir des résultats sur les équations aux unités. Pour ne pas alourdir les notations, nous utiliserons la notation additive pour la loi de groupe sur $A = \mathbb{G}_{m, \mathbb{Q}}^g$. Afin de définir une hauteur sur A , on compactifie A en $\bar{A} = \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1\right)^g$. Dans la suite, on verra toujours A et \bar{A} comme plongé *via*

$$A \hookrightarrow \bar{A} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A} \quad \text{avec} \quad N_A = 2^g - 1$$

où la deuxième immersion est le morphisme de SEGRE. On note \mathcal{L}_ℓ le faisceau associé à ce plongement et on considère la hauteur qui lui est associée par le théorème 1.1.4. Il s'agit simplement de la hauteur obtenue sur A en utilisant le plongement précédent.

On fixe un schéma projectif et intègre P sur $\bar{\mathbb{Q}}$, un faisceau \mathcal{L} très ample sur P et un plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$ associé à \mathcal{L} . On considère également une hauteur $h_{\mathcal{L}} : P(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ associée à \mathcal{L} et on note $h_{\mathcal{L}}^w : P(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ la hauteur obtenue en composant le plongement précédent avec la hauteur de WEIL sur $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$. Comme les hauteurs $h_{\mathcal{L}}$ et $h_{\mathcal{L}}^w$ sont associées au même faisceau, on peut considérer

$$C_{\text{haut}} = \sup_{p \in P(\bar{\mathbb{Q}})} |h_{\mathcal{L}}(p) - h_{\mathcal{L}}^w(p)| < +\infty. \quad (3.0.1)$$

D'autre part, on dispose à présent d'un plongement

$$A \times P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^N \quad \text{avec} \quad N = (N_A + 1)(N_P + 1) - 1$$

où la deuxième immersion est le morphisme de SEGRE. Le degré et la hauteur d'un sous-schéma fermé de $A \times P$ sont définis relativement à ce plongement.

Finalement, on considère un sous-schéma fermé intègre $V \hookrightarrow A \times P$ et on note $m = \dim V + 1$. On introduit les constantes

$$\Lambda = (6m \dim V)^{m \dim V} 2^g (N_P + 1) (\deg V)^{3m}, \quad \psi = \prod_{j=2}^{m \dim V} (3j + 1). \quad (3.0.2)$$

3.1 Inégalité de VOJTA effective dans le cas torique

3.1.1 Énoncé

Rappelons que le théorème 1.4.2 fournit un sous-schéma fermé Z_V de V . Rappelons que la hauteur h_ℓ s'étend à l'espace vectoriel $A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ (voir théorème 1.1.4). L'inégalité de VOJTA explicite que nous allons démontrer est la suivante.

Théorème 3.1.1 - *Il existe $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{N}^*$ tels que si $(a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m) \in V(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifient simultanément les inégalités*

$$h_\ell \left(\frac{a_i}{h_\ell(a_i)} - \frac{a_{i+1}}{h_\ell(a_{i+1})} \right) \leq \frac{1}{e_1}, \quad h_\ell(a_{i+1}) \geq e_2 \cdot h_\ell(a_i), \quad h_\ell(a_1) \geq e_3, \quad h_\ell(a_j) \geq \mu \cdot h_\Sigma(p_j)$$

pour tout $1 \leq i \leq m-1$ et pour tout $1 \leq j \leq m$, alors il existe $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $(a_i, p_i) \in Z_V(\bar{\mathbb{Q}})$. De plus, on peut prendre les valeurs

$$e_1 = 2^6 \Lambda^{2\psi}, \quad e_2 = \Lambda^{4\psi}, \quad e_3 = 2^{gm^2 \dim V} \Lambda^{8\psi} \max(h(V), 1, C_{\text{haut}}) \quad \text{et} \quad \mu = 4\Lambda^\psi.$$

On supposera dans la suite que $\dim V > 0$, sans quoi, le résultat est évident. Nous allons procéder de manière analogue au cas abélien.

3.1.2 Préliminaires

Comme dans le cas abélien, le faisceau que l'on souhaite utiliser est défini à partir du morphisme $\beta : A^m \rightarrow A^{m-1}$ donné sur les points par

$$\beta(a_1, \dots, a_m) = (s_1 a_1 - s_2 a_2, \dots, s_{m-1} a_{m-1} - s_m a_m)$$

où $s \in (\mathbb{N}^*)^m$. On rencontre une nouvelle difficulté : on doit travailler sur un schéma projectif, mais β ne s'étend pas à la compactification \bar{A}^m de A^m . Pour contourner ce problème, on va travailler sur une compactification auxiliaire de A^m .

On note \bar{G} l'adhérence du graphe G de β dans \bar{A}^{2m-1} . D'une part, les m premières projections induisent un isomorphisme $G \rightarrow A^m$ et d'autre part, la projection $\bar{\beta} : \bar{G} \rightarrow \bar{A}^{m-1}$ sur les $m-1$ derniers facteurs étend β .

Nous allons travailler avec le plongement

$$\bar{G} \times P^m \hookrightarrow \bar{A}^m \times \bar{A}^{m-1} \times P^m \hookrightarrow (\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^1)^{gm} \times (\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^1)^{g(m-1)} \times \left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\text{NP}} \right)^m.$$

Par restriction, on obtient ainsi un faisceau $\mathcal{O}(b, c, d)$ sur $\bar{G} \times P^m$ pour chaque $b, d \in \mathbb{Z}^m$ et $c \in \mathbb{Z}$. Par construction, on a les relations suivantes.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(b, 0, 0) &\simeq p^* \left(\bigotimes_{i=1}^m p_i^* \mathcal{L}_\ell^{\otimes b_i} \right), & \mathcal{O}(0, 1, 0) &\simeq p^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} p_{m+i}^* \mathcal{L}_\ell \right), \\ \mathcal{O}(0, 0, d) &\simeq q^* \left(\bigotimes_{i=1}^m q_i^* \mathcal{L}^{\otimes d_i} \right) \end{aligned}$$

où $p : \bar{G} \times \mathbb{P}^m \rightarrow \bar{G}$, $q : \bar{G} \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^m$, $p_1, \dots, p_{2m-1} : \bar{G} \rightarrow \bar{A}$ et $q_1, \dots, q_m : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}$ sont les différentes projections.

On note $X_{j,0}^{(i)}$, $X_{j,1}^{(i)}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq g$ les coordonnées de $(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1)^{gm}$, $Y_{j,0}^{(i)}$, $Y_{j,1}^{(i)}$ pour $1 \leq i \leq m-1$ et $1 \leq j \leq g$ les coordonnées de $(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1)^{g(m-1)}$ et $T_k^{(i)}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $0 \leq k \leq r$ les coordonnées sur $(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N)^m$. Nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 3.1.2 - *Il existe une section globale $S_0 \in \Gamma(\bar{G} \times \mathbb{P}^m, \mathcal{O}(2s, -1, 0))$ qui ne s'annule pas sur $A^m \times \mathbb{P}^m$.*

DÉMONSTRATION :

Il suffit de tirer en arrière la section sur \bar{G} construite par RÉMOND dans [32, Partie 3.3], dont on rappelle la construction. Par définition, on dispose sur \bar{G} des relations

$$\left(Y_{j,0}^{(i)}\right) \left(X_{j,1}^{(i)}\right)^{s_i} \left(X_{j,0}^{(i+1)}\right)^{s_{i+1}} = \left(Y_{j,1}^{(i)}\right) \left(X_{j,0}^{(i)}\right)^{s_i} \left(X_{j,1}^{(i+1)}\right)^{s_{i+1}}$$

pour tous $1 \leq i \leq m-1$ et $1 \leq j \leq g$. On définit S_0 en imposant pour tout $\omega \in \{0, 1\}^{g(m-1)}$ que sa restriction à l'ouvert

$$\bar{G} \cap \left((\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1)^{gm} \times \prod_{j=1}^g \prod_{i=1}^{m-1} D\left(Y_{j,\omega_{i,j}}^{(i)}\right) \right)$$

où $D\left(Y_{j,\omega_{i,j}}^{(i)}\right)$ est l'ouvert de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ où $Y_{j,\omega_{i,j}}^{(i)}$ ne s'annule pas, soit

$$\prod_{j=1}^g \left(X_{j,0}^{(1)}\right)^{s_1} \left(X_{j,0}^{(m)}\right)^{s_m} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \left(X_{j,\omega_{i,j}}^{(i)}\right)^{s_i} \left(X_{j,1-\omega_{i,j}}^{(i+1)}\right)^{s_{i+1}} \left(Y_{j,\omega_{i,j}}^{(i)}\right)^{-1}\right).$$

Cette section ne s'annulant pas sur A^m , on obtient le résultat. \square

3.1.3 Mise en place

On va se placer dans les conditions d'application du théorème 1.3.4 pour démontrer notre inégalité de VOJTA. En utilisant un plongement de SEGRE, on définit $\iota : \bar{V} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ comme la composée

$$\bar{V} \hookrightarrow \bar{A} \times \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N.$$

Rappelons que l'on définit le faisceau \mathcal{L} par $\mathcal{L} = \iota^* \mathcal{O}(1)$. On fixe les constantes que nous allons utiliser pour appliquer le théorème 1.3.4

$$m = \dim(V) + 1, \quad t_1 = 3, \quad t_2 = 1, \quad M = 2^{gm}, \quad \theta = 1 \quad \text{et} \quad \gamma = 1.$$

A partir de ces valeurs, les trois constantes fournies par le point 1.3.1 sont

$$c_1 = 4\Lambda^\psi, \quad c_2 = \Lambda^{4\psi}, \quad c_3 = 2^{gm^2 \dim V} \Lambda^{8\psi} \max(h(V), 1). \quad (3.1.3)$$

où Λ et ψ sont données par le point 3.0.2. On fixe un m -uplet $\delta = s \in (\mathbb{N}^*)^m$ avec lequel on peut appliquer la construction de la partie précédente. On définit \mathcal{V} comme l'adhérence de V^m vu comme un ouvert de $\bar{G} \times P$. La projection sur les m premières coordonnées donne un morphisme propre et birationnel $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \bar{V}^m$. Avec les notations de la partie précédente, le faisceau \mathcal{M} sur \mathcal{V} que nous considérons est

$$\mathcal{M} = \mathcal{O}(0, 1, s).$$

De plus, le faisceau \mathcal{N}_s défini au point 1.3.2 s'écrit avec ces mêmes notations

$$\mathcal{N}_s = \mathcal{O}(s, 0, s).$$

On introduit de plus sur \mathcal{V} le faisceau

$$\mathcal{P} = \mathcal{O}(s, 1, s).$$

Ce faisceau est très ample sur \mathcal{V} puisqu'on peut l'écrire $\iota'^* \mathcal{O}(1)$ avec un plongement $\iota' : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'}$. On l'obtient en composant le plongement

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}\right)^m \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}\right)^{m-1} \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}\right)^m \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'}$$

où la dernière flèche est un plongement de SEGRE-VERONESE construit en considérant les monômes de multidegré $(s, 1, \dots, 1, s)$. Le diagramme suivant résume la situation.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \iota' \\
 & & & & \curvearrowright \\
 \mathcal{V} & \hookrightarrow & \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1\right)^{gm} \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1\right)^{g(m-1)} \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}\right)^m & \hookrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'} \\
 \downarrow \pi & & \downarrow & & \\
 \bar{V}^m & \hookrightarrow & \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1\right)^{gm} \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}\right)^m & & \\
 \downarrow p_i & & \downarrow & & \\
 \bar{V} & \hookrightarrow & \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1\right)^g \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P} & \hookrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \\
 & & & & \curvearrowleft \iota \\
 & & & &
 \end{array}$$

On définit $j_1 : \mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{N}_s^{\otimes 3}$ comme la multiplication par une section globale non nulle de la forme

$$S_0 \otimes \bigotimes_{i=1}^m \left(T_{k_i}^{(i)}\right)^{2s_i} \in \mathcal{O}(2s, -1, 2s) \quad \text{où} \quad k \in \llbracket 0, N_P \rrbracket^m$$

et $j_2 : \mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1} \hookrightarrow \mathcal{N}_s$ comme la multiplication par une section globale non nulle de la forme

$$\bigotimes_{i=1}^m \left(T_{k'_i}^{(i)} \right)^{s_i} \in \mathcal{O}(0, 0, s) \quad \text{où} \quad k' \in \llbracket 0, N_P \rrbracket^m.$$

On définit Σ comme la famille des sections sur \mathcal{V} donnée par

$$\bigotimes_{i=1}^m \bigotimes_{\ell=1}^g \left(X_{j_i, \omega_\ell}^{(i)} \right)^{s_i} \quad \text{où} \quad j \in \llbracket 0, g \rrbracket^m \quad \text{et} \quad \omega \in \{0, 1\}^m$$

qui est bien de cardinal M et engendre $\mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1} = \mathcal{O}(s, 0, 0)$.

Finalement, l'image par j_1 de chaque coordonnée de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'}$ est un monôme en les coordonnées de chaque $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ (le produit par S_0 élimine la variable Y). D'autre part, l'image par j_2 des éléments de Σ s'exprime bien comme des polynômes de multidegré s et de hauteurs au plus $|s|$.

Remarque 3.1.4 : Il est important de voir que l'on peut choisir j_1 et j_2 tels qu'ils soient des isomorphismes en un point $x \in V^m$ fixé préalablement. En effet, la section S_0 ne s'annule pas sur V^m et $\mathcal{O}(0, 0, 1)$ est engendré par ses sections globales.

Le lemme suivant exprime les hauteurs $h_{\mathcal{L}} : V(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_{\mathcal{M}} : \mathcal{V}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ définies au point 1.3.3 en fonction de h_ℓ et $h_{\mathcal{L}}^w$.

Lemme 3.1.5 - *On a les égalités suivantes*

(i) *Pour tout $(a, p) \in V(\bar{\mathbb{Q}})$, on a $h_{\mathcal{L}}(a, p) = h_\ell(a) + h_{\mathcal{L}}^w(p)$.*

(ii) *Pour tout $x \in V^m(\bar{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{V}(\bar{\mathbb{Q}})$ où l'on écrit $x_i = (a_i, p_i)$ pour $1 \leq i \leq m$, on a*

$$h_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^{m-1} h_\ell(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) + \sum_{i=1}^m s_i h_{\mathcal{L}}^w(p_i).$$

DÉMONSTRATION :

Le point (i) est immédiat par définition de ι et des propriétés classiques du morphisme de SEGRE. Pour le point (ii), vu la définition de $h_{\mathcal{M}}$ et de ι' , on peut écrire

$$h_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^m s_i h_\ell(a_i) + \sum_{i=1}^{m-1} h_\ell(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) + \sum_{i=1}^m s_i h_{\mathcal{L}}^w(p_i) - h(\Sigma(x)).$$

En remarquant que les éléments de Σ sont exactement les composantes du plongement $(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1)^{gm} \hookrightarrow (\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{ng})^m \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{M-1}$ où la seconde flèche est un plongement de SEGRE-VERONESE construit en considérant les monômes de multidegré s , on obtient

$$h(\Sigma(x)) = \sum_{i=1}^m s_i h_\ell(a_i),$$

ce qui termine la démonstration. □

3.1.4 L'hypothèse sur le nombre d'intersection

Nous nous sommes donc placés dans les conditions d'application du théorème 1.3.4. Il nous reste à vérifier que l'on dispose de son hypothèse sur le nombre d'intersection. On fixe donc $Z = Z_1 \times \dots \times Z_m$ un produit de sous-schémas fermés intègres de \bar{V} . On note $Y_i = Z_i \cap V$ qui est un sous-schéma fermé de $A \times P$. On a $\bar{Y}_i = Z_i$, donc l'adhérence de $Y = Y_1 \times \dots \times Y_m$ dans $\bar{G} \times P$ coïncide avec l'adhérence \mathcal{Z} de $Z \cap U$ dans \mathcal{V} .

Lemme 3.1.6 - *Si $Y_i \not\subset Z_V$ pour $1 \leq i \leq m$, on a la minoration*

$$[\mathcal{M}]^{\dim(Z)} \cdot \mathcal{Z} \geq \prod_{i=1}^m s_i^{\dim Z_i}.$$

DÉMONSTRATION :

En fait, nous donnerons la démonstration de ce résultat directement dans le chapitre suivant qui traite le cas général. A ce stade, donnons simplement les éléments de preuve. On commence par montrer que l'application $\beta_1 \times \text{Id} : Y_1 \times \dots \times Y_m \rightarrow A^{m-1} \times P^m$ est génériquement finie où $\beta_1 : A^m \rightarrow A^{m-1}$ est donnée sur les points par

$$\beta_1(a_1, \dots, a_m) = (a_1 - a_2, \dots, a_{m-1} - a_m).$$

En particulier, si $s = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^*$, la restriction de \mathcal{M} à \mathcal{Z} est le tiré en arrière d'un diviseur ample par une application qui génériquement coïncide avec $\beta_1 \times \text{Id}$. Cette application étant génériquement finie, on obtient donc le résultat dans ce cas.

Finalement, on montre que l'application

$$(\mathbb{N}^*)^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto [\mathcal{M}]^{\dim Z} \cdot \mathcal{Z}$$

est homogène en chaque s_i de degré $\dim Z_i$, ce qui permet de conclure dans le cas général. \square

3.1.5 Démonstration de l'inégalité de VOJTA

On suppose que l'on dispose de points $(a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m) \in (V \setminus Z_V)(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant les inégalités dans les hypothèses du théorème 3.1.1 avec les constantes $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{N}^*$ données. Signalons que les constantes e_1, e_2, e_3, μ ont été choisies pour vérifier les inégalités élémentaires suivantes

$$e_1 = 4c_1^2, \quad e_2 = c_2, \quad e_3 \geq c_3, \quad e_3 > 2c_1^2 C_{\text{haut}} \quad \text{et} \quad \mu = c_1,$$

où les constantes c_1, c_2, c_3 sont données par le point 3.1.3. On commence par choisir un m -uplet $s \in \mathbb{N}^*$ de sorte à obtenir une première inégalité de hauteurs.

Lemme 3.1.7 - *Il existe $s \in (\mathbb{N}^*)^m$ tel que $s_i/s_{i+1} \geq e_2$ pour $1 \leq i \leq m-1$ et*

$$\sum_{i=1}^{m-1} h_\ell(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) \leq \frac{2}{e_1} \sum_{i=1}^m s_i h_\ell(a_i).$$

DÉMONSTRATION :

On définit $s \in (\mathbb{N}^*)^m$ en posant $s_m = 1$ et en choisissant successivement les valeurs de s_{m-1}, \dots, s_1 en imposant que s_i/s_{i+1} soit l'entier le plus proche de $h_\ell(a_{i+1})/h_\ell(a_i)$. Comme $e_2 \in \mathbb{N}$, on a $s_i/s_{i+1} \geq e_2$. De plus, en remarquant que $e_2 \geq e_1$ (car $\dim V \geq 1$), on a pour $i = 1, \dots, m-1$ que

$$|s_i h_\ell(a_i) - s_{i+1} h_\ell(a_{i+1})| = s_{i+1} h_\ell(a_i) \left| \frac{s_i}{s_{i+1}} - \frac{h_\ell(a_{i+1})}{h_\ell(a_i)} \right| \leq \frac{1}{2} s_{i+1} h_\ell(a_i) \leq \frac{1}{2e_1} s_{i+1} h_\ell(a_{i+1}).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} h_\ell(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) &= h_\ell \left(\left(s_i a_i - s_{i+1} \frac{h_\ell(a_{i+1})}{h_\ell(a_i)} a_i \right) + \left(s_{i+1} \frac{h_\ell(a_{i+1})}{h_\ell(a_i)} a_i - s_{i+1} a_{i+1} \right) \right) \\ &\leq \left| s_i - s_{i+1} \frac{h_\ell(a_{i+1})}{h_\ell(a_i)} \right| h_\ell(a_i) + s_{i+1} h_\ell(a_{i+1}) h_\ell \left(\frac{a_i}{h_\ell(a_i)} - \frac{a_{i+1}}{h_\ell(a_{i+1})} \right) \\ &\leq |s_i h_\ell(a_i) - s_{i+1} h_\ell(a_{i+1})| + \frac{1}{e_1} s_{i+1} h_\ell(a_{i+1}) \\ &\leq \frac{2}{e_1} s_{i+1} h_\ell(a_{i+1}). \end{aligned}$$

On obtient l'inégalité cherchée en sommant pour $1 \leq i \leq m-1$. \square

On applique la construction de la partie précédente avec le m -uplet s fourni par le lemme ci-dessus. On souhaite utiliser le théorème 1.3.4 avec le m -uplet $\delta = s$. En utilisant la remarque 3.1.4, on peut choisir j_1 et j_2 de sorte qu'ils soient des isomorphismes en $x = (x_1, \dots, x_m) \in V^m(\mathbb{Q})$ où $x_i = (a_i, p_i)$, donc que $x \in U'(\mathbb{Q})$. L'hypothèse du théorème 1.3.4 est vérifiée. En effet, comme $x_i \in (Y_i \setminus Z_V)$, le lemme 3.1.6 s'applique et on obtient l'hypothèse souhaitée. Finalement, comme on a les inégalités

$$s_i/s_{i+1} \geq e_2 = c_2 \quad \text{et} \quad h_{\mathcal{L}}(x_i) \geq h_\ell(a_i) \geq h_\ell(a_1) \geq e_3 \geq c_3,$$

le théorème 1.3.4 fournit l'inégalité

$$\sum_{i=1}^m s_i h_{\mathcal{L}}(x_i) \leq c_1 h_{\mathcal{M}}(x).$$

En utilisant le lemme 3.1.5, on en déduit

$$\sum_{i=1}^m s_i h_\ell(a_i) + \sum_{i=1}^m s_i h_{\mathcal{G}}^w(p_i) \leq c_1 \left(\sum_{i=1}^{m-1} h_\ell(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) + \sum_{i=1}^m s_i h_{\mathcal{G}}^w(p_i) \right),$$

puis en utilisant l'inégalité du lemme 3.1.7, on obtient

$$\sum_{i=1}^m s_i h_\ell(a_i) + \sum_{i=1}^m s_i h_{\mathcal{G}}^w(p_i) \leq \frac{2c_1}{e_1} \sum_{i=1}^m s_i h_\ell(a_i) + c_1 \sum_{i=1}^m s_i h_{\mathcal{G}}^w(p_i).$$

De plus, avec les hypothèses du théorème 3.1.1 et le point 3.0.1, on obtient

$$h_{\Sigma}^w(p_i) \leq h_{\Sigma}(p_i) + C_{\text{haut}} \leq \frac{1}{\mu} h_{\ell}(a_i) + C_{\text{haut}},$$

et par suite

$$\left(1 - \frac{2c_1}{e_1} - \frac{c_1 - 1}{\mu}\right) \sum_{i=1}^m s_i h_{\ell}(a_i) \leq (c_1 - 1) C_{\text{haut}} \left(\sum_{i=1}^m s_i\right).$$

Finalement, en utilisant $e_1 = 4c_1^2$ et $\mu = c_1$, on a l'inégalité

$$\frac{1}{2c_1} \sum_{i=1}^m s_i h_{\ell}(a_i) \leq (c_1 - 1) C_{\text{haut}} \left(\sum_{i=1}^m s_i\right),$$

puis en utilisant $h_{\ell}(a_i) \geq e_3$ pour $1 \leq i \leq m$

$$e_3 \leq 2c_1^2 C_{\text{haut}},$$

ce qui fournit une contradiction et achève la démonstration de 3.1.1.

3.2 Démonstration des énoncés

Si Γ est un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$, rappelons que pour $\varepsilon > 0$, on note

$$\Gamma_{\varepsilon} = \{a + b \mid a \in \Gamma, b \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } h_{\ell}(b) \leq \varepsilon\}$$

et

$$\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) = \{a + b \mid a \in \Gamma, b \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } h_{\ell}(b) \leq \varepsilon(1 + h_{\ell}(a))\}.$$

3.2.1 Résultats généraux

En utilisant l'inégalité de VOJTA établie dans la partie précédente, nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 3.2.1 - *Il existe une constante $\mu \geq 0$ ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini et $\varepsilon \geq 0$ un réel, alors il existe une constante $\nu \geq 0$ telle que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, on a*

$$\forall a \in (V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_{\varepsilon}, \quad h_{\ell}(a) \leq \mu \cdot h_{\Sigma}(p) + \nu.$$

De plus, on peut prendre

$$\mu = \left(2^g (N_P + 1) \deg V\right)^{m^{3m^2}}.$$

DÉMONSTRATION :

L'inégalité de VOJTA (théorème 3.1.1) fournit des constantes $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{R}$. On fixe un sous-groupe $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ de rang fini et un réel $\varepsilon \geq 0$. Quitte à augmenter e_3 , on suppose que $\varepsilon \leq 2^{-4}e_3e_1^{-1}$. On désigne par $(a_i, p_i)_{i \in I}$ l'ensemble des points de $(V \setminus Z_V)(\bar{\mathbb{Q}})$ tels que

$$a_i \in \Gamma_\varepsilon, \quad h_\ell(a_i) \geq e_3 \quad \text{et} \quad h_\ell(a_i) \geq \mu \cdot h_\Sigma(p_i).$$

Par le point (ii) du théorème 1.1.4, l'application $h_\ell : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ s'étend en une norme à l'espace vectoriel $E = A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On applique le point (i) du lemme 1.4.7 en prenant

$$F = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \quad N_1 = h_\ell, \quad N_2 = 0, \quad c_1 = e_1, \quad c_3 = e_3 \quad \text{et} \quad \eta = \varepsilon.$$

Ainsi, on peut recouvrir $\{a \in \Gamma_\varepsilon \mid h_\ell(a) \geq e_3\}$ par un nombre fini d'ensembles dans chacun desquels deux points $a, b \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifient

$$h_\ell \left(\frac{a}{h_\ell(a)} - \frac{b}{h_\ell(b)} \right) \leq \frac{1}{e_1}.$$

Comme dans le cas abélien, l'inégalité de VOJTA montre que $(h_\ell(a_i))_{i \in I}$ est majoré par un réel $\nu' \geq e_3$. On a donc bien l'inégalité de hauteurs annoncée en posant

$$\nu = \nu' - \mu \cdot \min \left(\inf_{p \in P(\bar{\mathbb{Q}})} h_\Sigma(p), 0 \right).$$

Vérifions que la valeur de μ annoncée convient. Si $\dim V = 0$, toute valeur de μ convient, on suppose donc $\dim V > 0$ dans la suite. Le théorème 3.1.1 fournit la valeur $\mu = 4\Lambda^\psi$ où Λ et ψ sont données par le point 3.0.2. En utilisant $m = \dim V + 1$ et $\dim V \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\Lambda &= 2(6m \dim V)^{m \dim V} 2^g (N_P + 1) (\deg V)^{3m} \\ &\leq 6^{m^2} m^{2m^2} 2^g (N_P + 1) (\deg V)^{3m} \end{aligned}$$

En remarquant que $g \geq 1$ et $N_P \geq 1$, on a

$$6^{m^2} \leq [2^g (N_P + 1)]^{2m^2 - 1} \quad \text{et} \quad m \leq 2^g (N_P + 1)$$

ce qui permet d'aboutir à l'inégalité

$$2\Lambda \leq \left(2^g (N_P + 1) \deg V \right)^{4m^2}.$$

Comme $\psi \geq 2$, on a donc

$$\mu = 4\Lambda^\psi \leq (2\Lambda)^\psi \leq \left(2^g (N_P + 1) \deg V \right)^{4m^2\psi}.$$

On conclut comme dans la démonstration du théorème 2.2.1 avec

$$4m^2\psi \leq m^{3m^2}.$$

□

On peut à présent montrer le résultat analogue avec $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$.

Théorème 3.2.2 - *Il existe une constante $\mu \geq 0$ et un réel $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un réel $\nu \geq 0$ tel que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, on a*

$$\forall a \in (V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon), \quad h_\ell(a) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu.$$

De plus, on peut prendre

$$\mu = \left(2^g(N_P + 1) \deg V\right)^{m^{3m^2}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \mu^{-1} = \left(2^g(N_P + 1) \deg V\right)^{-m^{3m^2}}.$$

DÉMONSTRATION :

On reprend la démonstration précédente en posant cette fois-ci $\varepsilon = 2^{-4}e_1^{-1}$, puis on utilise le point (ii) du lemme 1.4.7 qui permet de conclure.

Le calcul de μ est le même que dans la démonstration précédente. Le théorème 3.1.1 donne $e_1 = 2^6\Lambda^{2\psi}$ où Λ et ψ sont données par le point 3.0.2. Avec $m \geq 2$, on a $\psi \geq 5$, donc

$$\varepsilon^{-1} = 2^{10}\Lambda^{2\psi} \leq (2\Lambda)^{2\psi},$$

et en reprenant la démonstration précédente

$$\varepsilon^{-1} \leq \left(2^g(N_P + 1) \deg V\right)^{8m^2\psi}.$$

On conclut comme la démonstration précédente en remarquant que $8m^2\psi \leq m^{3m^2}$. \square

Finalement, on déduit l'énoncé suivant par récurrence sur $g = \dim A$.

Théorème 3.2.3 - *Il existe une constante $\mu \geq 0$, un réel $\varepsilon > 0$ et une famille finie \mathfrak{B} de sous-tores de A ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel $\nu \geq 0$ tels que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, il existe des points $a_1, \dots, a_n \in V_p(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant l'inégalité*

$$h_\ell(a_i) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu$$

et des sous-tores $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$ avec $a_i + B_i \subset V_p$ tels que

$$V_p(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n (a_i + B_i(\bar{\mathbb{Q}})) \cap \Gamma_\varepsilon.$$

DÉMONSTRATION :

On démontrera ce résultat dans un cadre plus général (voir théorème 4.2.4). \square

3.2.2 Résultats sur les équations aux unités

Jusqu'à la fin de ce chapitre, on utilisera dorénavant la notation multiplicative pour la loi de \mathbb{G}_m^g . Si on fixe $a_1, \dots, a_n \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$ et un groupe $\Gamma \subset (\bar{\mathbb{Q}}^\times)^n$ de rang fini, l'équation aux unités associée est

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 1 \quad \text{avec} \quad (x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_\varepsilon. \quad (3.2.4)$$

Rappelons qu'une solution de cette équation est non dégénérée si

$$\sum_{i \in I} a_i x_i \neq 0 \quad \text{pour tout sous-ensemble non-vide } I \subset \{1, \dots, n\}.$$

En appliquant les résultats précédents, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.2.5 - *Il existe une constante $\mu > 0$ vérifiant la propriété suivante : si $\Gamma \subset (\bar{\mathbb{Q}}^\times)^n$ est un sous-groupe de rang fini et $\varepsilon \geq 0$ un réel, alors il existe une constante $\nu \geq 0$ telle que pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\bar{\mathbb{Q}}^\times)^n$, les solutions non dégénérées de 3.2.4 vérifient*

$$h_\ell(x_1, \dots, x_n) \leq \mu \cdot h_\ell(a_1, \dots, a_n) + \nu.$$

De plus, on peut prendre

$$\mu = (4^n \cdot (2n)!)^{(2n)12n^2}.$$

DÉMONSTRATION :

On applique le théorème 3.2.1 au sous-schéma fermé intègre V de $\mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^n \times \mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^n$ d'équation

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 1. \quad (3.2.6)$$

On obtient la valeur de μ annoncée en remarquant que

$$\dim V = 2n - 1, \quad N_P = 2^n - 1, \quad \deg V = \binom{2n}{1, \dots, 1} = (2n)!.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que si X désigne le sous-schéma fermé de $\mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^n$ d'équation 3.2.6 avec $a_1, \dots, a_n \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$ fixés, alors Z_X est égal à

$$D_X = \bigcup_{\substack{I \subset [1, n] \\ I \neq \emptyset}} \left\{ x \in X \mid \sum_{i \in I} a_i x_i = 0 \right\}.$$

On reprend les méthodes de [18, Partie 3]. Si $y \in D_X$, on a

$$\sum_{i \in I} a_i y_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i \notin I} a_i y_i = 1.$$

pour une partie non vide I de $[1, n]$. On définit un sous-tore non trivial de $\mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^n$ par

$$T = \left\{ x \in \mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^n \mid \forall i_1, i_2 \in I, \quad x_{i_1} = x_{i_2} \quad \text{et} \quad \forall i \notin I, \quad x_i = 1 \right\}.$$

On a $y \cdot T \subset X$, puisque pour tout $t \in T$, on a

$$\sum_{i=1}^n a_i(y_i t_i) = \left(\sum_{i \in I} a_i y_i t_i \right) + \left(\sum_{i \notin I} a_i y_i \right) = 0 + 1 = 1,$$

d'où $y \in Z_X$ et $D_X \subset Z_X$. Réciproquement, si $y \in Z_X$, considérons un sous-tore T non trivial de $\mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^n$ de sorte que $y \cdot T \subset X$. On note χ_0, \dots, χ_n les caractères de $\mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^n$ donnés par

$$\chi_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \chi_i(x) = x_i.$$

On définit une partie I de $\llbracket 1, n \rrbracket$ par

$$I = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \chi_{i|T} \neq \chi_{0|T}\}.$$

qui est non vide, car T est non trivial. Comme $y \cdot T \subset X$, on peut écrire

$$\chi_{0|T} = \sum_{i=1}^n (a_i y_i) \chi_{i|T} = \left(\sum_{i \notin I} a_i y_i \right) \chi_{0|T} + \sum_{i \in I} (a_i y_i) \chi_{i|T}.$$

Par le critère d'indépendance linéaire d'ARTIN, on obtient ainsi

$$\sum_{i \notin I} a_i y_i = 1,$$

donc $y \in D_X$ et $Z_X \subset D_X$. □

On peut aussi considérer l'équation suivante.

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 1 \quad \text{avec} \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \quad (3.2.7)$$

Dans ce cas là, on a le résultat suivant.

Corollaire 3.2.8 - *Il existe des constantes $\mu > 0$ et $\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété suivante : si $\Gamma \subset (\bar{\mathbb{Q}}^\times)^n$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un réel $\nu \geq 0$ tel que pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\bar{\mathbb{Q}}^\times)^n$, les solutions non dégénérées de 3.2.7 vérifient*

$$h_\ell(x_1, \dots, x_n) \leq \mu \cdot h_\ell(a_1, \dots, a_n) + \nu.$$

De plus, on peut prendre

$$\mu = (4^n \cdot (2n)!)^{(2n)^{12n^2}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \mu^{-1} = (4^n \cdot (2n)!)^{-(2n)^{12n^2}}.$$

DÉMONSTRATION :

On applique cette fois le théorème 3.2.1 au sous-schéma fermé intègre V de $\mathbb{G}_m^n \times \mathbb{G}_m^n$ d'équation

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 1$$

et on conclut comme dans la démonstration précédente. □

CHAPITRE 4

LE CAS GÉNÉRAL

Nous allons montrer que les résultats des chapitres 2 et 3 restent vrais sur une variété semi-abélienne. On fixe donc une variété semi-abélienne A sur $\bar{\mathbb{Q}}$ donnée par une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}}^g \longrightarrow A \xrightarrow{f} A_0 \longrightarrow 0.$$

On fixe un faisceau ample et symétrique \mathcal{L}_0 sur A_0 associé à un plongement $\iota_0 : A_0 \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_{A_0}}$. Les rappels de la partie 1.2 permettent de définir une compactification \bar{A} de A , une hauteur canonique $h_{\text{can}} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ associée à un faisceau \mathcal{L}_{can} sur A et un plongement

$$A \hookrightarrow \bar{A} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A} \quad \text{avec} \quad N_A = 3^g(N_{A_0} + 1)^{g+1} - 1$$

associé à \mathcal{L}_{can} . On fixe un schéma projectif et intègre P sur $\bar{\mathbb{Q}}$. On choisit un faisceau \mathcal{L} ample sur \bar{P} et une hauteur $h_{\mathcal{L}} : P(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ associée à \mathcal{L} . Finalement, on considère un sous-schéma fermé intègre $V \hookrightarrow A \times P$.

4.1 Inégalité de VOJTA : le cas général

4.1.1 Énoncé

Dans cette partie, on supposera que le plongement $\iota_0 : A_0 \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_{A_0}}$ est tel que

$$\Gamma\left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_{A_0}}, \mathcal{O}(n)\right) \rightarrow \Gamma\left(A_0, \mathcal{L}_0^{\otimes n}\right) \quad (4.1.1)$$

soit surjective pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons que le théorème 1.4.2 fournit un sous-schéma fermé Z_V de V et que les trois hauteurs h_{lin} , h_{quad} et h_{can} s'étendent à

$$A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq (A(\bar{\mathbb{Q}})/A(\bar{\mathbb{Q}})_{\text{tors}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

par les théorèmes 1.2.11 et 1.2.12. En notant $m = \dim V + 1$, nous allons démontrer l'inégalité de VOJTA suivante.

Théorème 4.1.2 - Il existe des réels $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{N}^*$ tels que si $(a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m) \in V(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifient

$$h_{\text{lin}} \left(\frac{a_i}{h_{\text{can}}(a_i)} - \frac{a_{i+1}}{h_{\text{can}}(a_{i+1})} \right) \leq \frac{1}{e_1}, \quad h_{\text{quad}} \left(\frac{a_i}{\sqrt{h_{\text{can}}(a_i)}} - \frac{a_{i+1}}{\sqrt{h_{\text{can}}(a_{i+1})}} \right) \leq \frac{1}{e_1^2}$$

$$h_{\text{can}}(a_{i+1}) \geq e_2^2 \cdot h_{\text{can}}(a_i), \quad h_{\text{can}}(a_1) \geq e_3, \quad h_{\text{can}}(a_j) \geq \mu \cdot h_{\mathfrak{L}}(p_j)$$

pour tout $1 \leq i \leq m-1$ et pour tout $1 \leq j \leq m$, alors il existe $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $(a_i, p_i) \in Z_V(\bar{\mathbb{Q}})$.

On supposera dans la suite que $\dim V > 0$, sans quoi, le résultat est évident. Quitte à remplacer \mathfrak{L} par un de ses multiples très amples, on peut supposer qu'il est associé à un plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\text{NP}}$. On note $h_{\mathfrak{L}}^w : P(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_{\text{can}}^w : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ les hauteurs obtenues respectivement en composant les plongements $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\text{NP}}$ et $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\text{NA}}$ avec la hauteur de WEIL. On fixe une constante $C_{\text{haut}} \geq 0$ telle que

$$\forall (a, p) \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \times P(\bar{\mathbb{Q}}), \quad |h_{\text{can}}(a) - h_{\text{can}}^w(a)| \leq C_{\text{haut}} \quad \text{et} \quad |h_{\mathfrak{L}}(p) - h_{\mathfrak{L}}^w(p)| \leq C_{\text{haut}}$$

Nous allons procéder comme dans les chapitres 2 et 3.

4.1.2 Préliminaires

On doit combiner les méthodes employées dans les deux derniers chapitres. On fixe un m -uplet $s \in (\mathbb{N}^*)^m$ et on définit $\beta : A^m \rightarrow A^{m-1}$ donnée sur les points par

$$\beta(a_1, \dots, a_m) = (s_1^2 a_1 - s_2^2 a_2, \dots, s_{m-1}^2 a_{m-1} - s_m^2 a_m).$$

On note \bar{G} l'adhérence du graphe G de β dans \bar{A}^{2m-1} . D'une part, les m premières projections induisent un isomorphisme $G \rightarrow A^m$ et d'autre part, la projection $\bar{\beta} : \bar{G} \rightarrow \bar{A}^{m-1}$ sur les $m-1$ derniers facteurs étend β .

Nous allons plonger \bar{G} dans un produit d'espaces projectifs. En utilisant le [33, Lemme 3.1] et la construction qui suit, on obtient un plongement

$$\bar{G} \hookrightarrow \bar{A}^m \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_1} \quad \text{où} \quad N_1 = (3^g(N_{A_0} + 1)^{2g})^{m-1} - 1$$

tel que l'image réciproque du faisceau $\mathcal{O}(1)$ du deuxième facteur est

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} P_{m+i}^* \mathcal{L}_{\text{lin}} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^m P_i^* f^* \mathcal{L}_0^{\otimes g \eta_i s_i^2} \right).$$

Il reste donc à choisir un plongement projectif pour \bar{A}^m . Afin de disposer de plus de liberté, nous n'utilisons pas directement le plongement $\bar{A} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\text{NA}}$ construit à la partie 1.2.4, mais l'avant dernière étape du point 1.2.16 qui fournit

$$\bar{A} \hookrightarrow \left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{3N_{A_0}+2} \right)^g \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_{A_0}} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_2} \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_{A_0}} \quad \text{où} \quad N_2 = (3N_{A_0} + 3)^g - 1.$$

On obtient ainsi un plongement

$$\bar{G} \hookrightarrow \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_2}\right)^m \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_{A_0}}\right)^m \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_1}.$$

De plus, le morphisme donné sur les points par

$$((a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m)) \mapsto (s_1 f(a_1) \pm s_2 f(a_2), \dots, s_{m-1} f(a_{m-1}) \pm s_m f(a_m)).$$

s'étend en $r_{\pm} : \bar{G} \rightarrow A_0^{m-1}$. Finalement, en utilisant le plongement précédent, les morphismes r_- et r_+ composés avec un morphisme de SEGRE et le plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}$, on obtient un plongement

$$\bar{G} \times P \hookrightarrow \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_2}\right)^m \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_{A_0}}\right)^m \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_1} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_3} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_3} \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}\right)^m$$

avec $N_3 = (N_{A_0} + 1)^{m-1} - 1$. Par restriction, on obtient ainsi un faisceau

$$\mathcal{O}(b, b', c, c', c'', d)$$

sur $\bar{G} \times P$ pour chaque $b, b', d \in \mathbb{Z}^m$ et $c, c', c'' \in \mathbb{Z}$. En particulier, on a par construction

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(0, 1, 0, 0, 0, 0) &\simeq p^* \left(\bigotimes_{i=1}^m p_i^* f^* \mathcal{L}_0 \right), & \mathcal{O}(1, -g, 0, 0, 0, 0) &\simeq p^* \left(\bigotimes_{i=1}^m p_i^* \mathcal{L}_{\text{lin}} \right), \\ \mathcal{O}(0, -g\eta s^2, 1, 0, 0, 0) &\simeq p^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} p_{m+i}^* \mathcal{L}_{\text{lin}} \right), & \mathcal{O}(0, 0, 0, 1, 0, 0) &\simeq p^* r_-^* \mathcal{L}_0, \\ \mathcal{O}(0, 0, 0, 0, 0, d) &\simeq q^* \left(\bigotimes_{i=1}^m q_i^* \mathcal{L}^{\otimes d_i} \right), & \mathcal{O}(0, 0, 0, 0, 1, 0) &\simeq p^* r_+^* \mathcal{L}_0. \end{aligned}$$

où $p : \bar{G} \times P^m \rightarrow \bar{G}$, $q : \bar{G} \times P^m \rightarrow P^m$, $p_1, \dots, p_{2m-1} : \bar{G} \rightarrow \bar{A}$ et $q_1, \dots, q_m : P^m \rightarrow P$ sont les différentes projections. En notant $\eta = (1, 2, \dots, 2, 1) \in \mathbb{N}^m$, on a le résultat suivant qui remplace le lemme 3.1.2 que l'on a utilisé dans le cas torique.

Lemme 4.1.3 - *Il existe sur $\bar{G} \times P$ un morphisme de faisceaux*

$$\xi : \mathcal{O}(0, 0, 1, 0, 0, 0) \rightarrow \mathcal{O}(\eta s^2, 0, 0, 0, 0, 0)$$

dont la restriction à $G \times P$ est un isomorphisme et par lequel l'image d'une coordonnée de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_1}$ (vue comme section globale de $\mathcal{O}(0, 0, 1, 0, 0, 0)$) est un monôme unitaire de multidegré ηs^2 en les coordonnées de $\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_2}\right)^m$.

DÉMONSTRATION :

Il suffit de tirer en arrière le morphisme construit dans [33, lemme 3.2]. \square

On note $W_0^{(i)}, \dots, W_{N_2}^{(i)}$ les coordonnées du i -ème facteur de $\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_2}\right)^m$, $X_0^{(i)}, \dots, X_{N_{A_0}}^{(i)}$ pour celles du i -ème facteur de $\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_{A_0}}\right)^m$, V_0, \dots, V_{N_3} et V'_0, \dots, V'_{N_3} celles des deux facteurs $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_3}$ et $T_0^{(i)}, \dots, T_{N_P}^{(i)}$ les coordonnées du i -ème facteur de $\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}\right)^m$. Le résultat suivant remplace le lemme 2.1.2 que l'on a utilisé dans le cas abélien.

Lemme 4.1.4 - *Il existe sur $\bar{G} \times P$ un isomorphisme*

$$\xi' : \mathcal{O}(0, 0, 0, 1, 1, 0) \rightarrow \mathcal{O}(0, 2\eta s^2, 0, 0, 0, 0)$$

et un réel h_0 ne dépendant que de (A_0, ι_0) ayant la propriété suivante : pour tout $d \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, N_{A_0} \rrbracket^m$, il existe des polynômes $(P_{\ell, \ell'})_{0 \leq \ell, \ell' \leq N_3}$ de multidegré $4d\eta s^2$ en les $X^{(i)}$, dont la famille est de hauteur au plus $d|\eta a^2|/h_0$ et de sorte que si

$$\xi'_{[d]} : \mathcal{O}(0, 2d\eta s^2, 0, d, d, 0) \rightarrow \mathcal{O}(0, 4d\eta s^2, 0, 0, 0, 0)$$

est déduit de ξ' par produit tensoriel alors

$$\xi'_{[d]} \left(\left(\bigotimes_{i=1}^m \left(X_{k_i}^{(i)} \right)^{2d\eta_i s_i^2} \right) \otimes V_{\ell}^{\otimes d} \otimes V_{\ell'}^{\otimes d} \right) = P_{\ell, \ell'}(X^{(1)}, \dots, X^{(m)}).$$

DÉMONSTRATION :

Il suffit de tirer en arrière le morphisme construit dans [33, lemme 3.3]. On peut aussi se référer à la preuve du lemme 2.1.2 qui donne les détails. Il suffit de poser avec les mêmes notations

$$P_{\ell, \ell'} = \left(\prod_{i=1}^m \left(X_{k_i}^{(i)} \right)^{2d\eta_i (s_i^2 - f(s_i))} \right) \left(\prod_{i=1}^{m-1} P_{s_i, s_{i+1}, k_i, k_{i+1}, \ell_i, \ell_{i+1}}(X^{(i)}, X^{(i+1)})^d \right).$$

Les estimations de hauteurs sont analogues et il suffit de poser $h_0 = h_{\text{add}} + 10N_{A_0}$ qui ne dépend que de (A_0, ι_0) . \square

4.1.3 Mise en place

On souhaite appliquer le théorème 1.2 de [35] à l'adhérence \bar{V} de V dans $\bar{A} \times P$ pour démontrer notre inégalité de VOJTA. En utilisant un plongement de SEGRE, on définit $\iota : \bar{V} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ comme la composée

$$\bar{V} \hookrightarrow \bar{A} \times P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \quad \text{où} \quad N = (N_A + 1)(N_P + 1) - 1.$$

Rappelons que l'on définit le faisceau $\mathcal{L} = \iota^* \mathcal{O}(1)$. On fixe les constantes que nous allons utiliser pour appliquer le théorème 1.3.4

$$\begin{aligned} m &= \dim(V) + 1, & t_1 &= g + 2, & t_2 &= 4(g + 1), \\ M &= (N_2 + 1)^m (N_3 + 1), & \theta &= 2^{m^2} & \text{et} & \gamma = (g + 1)h_0. \end{aligned}$$

A partir de ces valeurs, le point 1.3.1 fournit trois constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_{>1}$ ne dépendant que des données introduites ci-dessus.

On fixe un m -uplet $s \in (\mathbb{N}^*)^m$ avec lequel on peut appliquer la construction de la partie précédente et on note $\delta = \eta s^2$. On définit \mathcal{V} comme l'adhérence de V^m vu comme un ouvert de $\bar{G} \times P$. La projection sur les m premières coordonnées donne un morphisme

propre et birationnel $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \bar{V}^m$. Avec les notations de la partie précédente, le faisceau \mathcal{M} sur \mathcal{V} que nous considérons est

$$\mathcal{M} = \mathcal{O}(0, -g\eta s^2, 1, g+1, 0, (g+2)\eta s^2).$$

Le faisceau \mathcal{N}_s défini au point 1.3.2 s'écrit avec ces mêmes notations

$$\mathcal{N}_s = \mathcal{O}(\eta s^2, \eta s^2, 0, 0, 0, \eta s^2).$$

On introduit de plus sur \mathcal{V} le faisceau

$$\mathcal{P} = \mathcal{O}((g+1)\eta s^2, (g+2)\eta s^2, 1, 0, 0, (g+2)\eta s^2).$$

Ce faisceau est très ample sur \mathcal{V} puisqu'on peut l'écrire $\iota'^*\mathcal{O}(1)$ avec un plongement $\iota' : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'}$. On l'obtient en composant le plongement

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \bar{G} \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}\right)^m \hookrightarrow \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_2}\right)^m \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_{A_0}}\right)^m \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_1} \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}\right)^m$$

avec un plongement de SEGRE-VERONESE obtenu en considérant tous les monômes de multidegré $((g+1)\eta s^2, (g+2)\eta s^2, 1, (g+2)\eta s^2)$. Le morphisme ξ du lemme 4.1.3 induit par produit tensoriel une injection $j_1 : \mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{N}_{\eta s^2}^{\otimes t_1}$ et le lemme assure que les images des coordonnées de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'}$, vues comme des sections de \mathcal{P} , sont bien des monômes unitaires de multidegré $t_1\eta s^2$ en les coordonnées de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$.

De plus, on déduit du morphisme ξ' donné par le lemme 4.1.4 un isomorphisme

$$\mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1} = \mathcal{O}((g+1)\eta s^2, 2(g+1)\eta s^2, 0, -(g+1), 0, 0) \simeq \mathcal{O}((g+1)\eta s^2, 0, 0, 0, g+1, 0)$$

qui nous permet de définir Σ comme la famille des images réciproques par cet isomorphisme des sections

$$\left(\left(\bigotimes_{i=1}^m (W_{\kappa_i}^{(i)})^{\otimes \eta_i s_i^2} \right) \otimes V_{\ell'} \right)^{\otimes (g+1)} \quad \text{où } \kappa \in \llbracket 0, N_2 \rrbracket^m \quad \text{et } \ell' \in \llbracket 0, N_3 \rrbracket.$$

On définit $j_2 : \mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1} \rightarrow \mathcal{N}_{\eta s^2}^{\otimes t_2}$ comme la multiplication par une section globale non nulle de la forme

$$\left(\left(\bigotimes_{i=1}^m (W_{\kappa'_i}^{(i)})^{\otimes 3\eta_i s_i^2} \otimes (X_{k_i}^{(i)})^{\otimes 2\eta_i s_i^2} \otimes (T_{r_i}^{(i)})^{\otimes 4\eta_i s_i^2} \right) \otimes V_{\ell} \right)^{\otimes (g+1)}$$

du faisceau

$$\mathcal{O}(3(g+1)\eta s^2, 2(g+1)\eta s^2, 0, g+1, 0, 4(g+1)\eta s^2)$$

avec $\kappa \in \llbracket 0, N_2 \rrbracket^m$, $k \in \llbracket 0, N_{A_0} \rrbracket^m$, $r \in \llbracket 0, N_P \rrbracket^m$ et $\ell \in \llbracket 0, N_3 \rrbracket$. En appliquant le lemme 4.1.4 avec $d = g+1$, on obtient que les éléments de $j_2(\Sigma)$ sont des polynômes de multidegrés $t_2\eta s^2$ dont la hauteur est majorée par $|\eta s^2|\gamma$. (Les termes en $W^{(1)}, \dots, W^{(m)}$ et $T^{(1)}, \dots, T^{(m)}$ n'intervenant que par des monômes, la hauteur des polynômes n'est pas modifiée).

Remarque 4.1.5 : Il est important de voir que l'on peut choisir j_1 et j_2 tels qu'ils soient des isomorphismes en un point $x \in V^m$ fixé préalablement. En effet, le morphisme ξ définissant j_1 est un isomorphisme sur G et on peut choisir la section définissant j_2 de sorte à ce qu'elle ne s'annule pas au point x .

Le lemme suivant exprime les hauteurs $h_{\mathcal{L}} : V(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_{\mathcal{M}} : \mathcal{V}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ définies au point 1.3.3 en fonction des hauteurs déjà introduites.

Lemme 4.1.6 - *On a les égalités suivantes*

(i) *Pour tout $(a, p) \in V(\bar{\mathbb{Q}})$, on a $h_{\mathcal{L}}(a, p) = h_{\text{can}}^w(a) + h_{\xi}^w(p)$.*

(ii) *Il existe une constante $C' \in \mathbb{R}$ indépendante de $s \in (\mathbb{N}^*)^m$ telle que pour tout $x \in V^m(\bar{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{V}(\bar{\mathbb{Q}})$ où l'on écrit $x_i = (a_i, p_i)$ pour $1 \leq i \leq m$, on ait*

$$h_{\mathcal{M}}(x) \leq \sum_{i=1}^{m-1} h_{\text{lin}}(s_i^2 a_i - s_{i+1}^2 a_{i+1}) + h_{\text{quad}}(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) + \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\xi}^w(p_i) + |\eta s^2| C'.$$

DÉMONSTRATION :

Il suffit de traiter le cas $V = A \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\text{NP}}$, c'est-à-dire quand $\mathcal{V} = \bar{G} \times (\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\text{NP}})^m$, le cas général s'en déduisant par restriction. On a alors que

$$h(\iota'(x)) = h(\iota''(a)) + \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\xi}^w(p) \quad \text{où} \quad \iota'' : \bar{G} \hookrightarrow (\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\text{N}_2})^m \times (\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\text{N}_{A_0}})^m \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\text{N}_1}$$

est le plongement construit précédemment. Or le [33, Lemme 4.2] donne l'existence de C' de sorte que

$$h(\iota''(a)) - h(\Sigma(x)) \leq \sum_{i=1}^{m-1} h_{\text{lin}}(s_i^2 a_i - s_{i+1}^2 a_{i+1}) + h_{\text{quad}}(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) + |\eta s^2| C',$$

d'où le résultat. □

Dans la suite, quitte à augmenter C_{haut} , on supposera que $C_{\text{haut}} \geq C'$.

4.1.4 L'hypothèse sur le nombre d'intersection

Nous nous sommes donc placés dans les conditions d'application du théorème 1.3.4. Il nous reste à vérifier que l'on dispose de son hypothèse sur le nombre d'intersection. On fixe donc $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_m$ un produit de sous-schémas fermés intègres de \bar{V} . On note $Y_i = Z_i \cap V$ qui est un sous-schéma fermé de $A \times P$. On a $\bar{Y}_i = Z_i$, donc l'adhérence de $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$ dans $\bar{G} \times P$ coïncide avec l'adhérence \mathcal{Z} de $Z \cap U$ dans \mathcal{V} .

Lemme 4.1.7 - *Si $Y_i \not\subset Z_V$ pour $1 \leq i \leq m$, alors le morphisme $\alpha_1 \times \text{Id} : Y_1 \times \cdots \times Y_m \rightarrow A^{m-1} \times P^m$ où $\alpha_1 : A^m \rightarrow A^{m-1}$ est donné sur les points par*

$$\alpha_1(a_1, \dots, a_m) = (a_1 - a_2, \dots, a_{m-1} - a_m)$$

est génériquement fini.

DÉMONSTRATION :

Nous allons adapter la démonstration du [32, Lemme 2.1] à notre cas. Il est immédiat que la fibre contenant un point donné $((a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m))$ est formée des points de la forme $((a_1 + a, p_1), \dots, (a_m + a, p_m))$ où a est un point de A tel que le m -uplet précédent soit un point dans $(Y_1)_{p_1} \times \dots \times (Y_m)_{p_m}$. Par suite, cette fibre est isomorphe au sous-schéma fermé

$$((Y_1)_{p_1} - a_1) \cap \dots \cap ((Y_m)_{p_m} - a_m).$$

Montrons que l'on peut choisir $(a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m)$ successivement de sorte que

$$\dim((Y_1)_{p_1} - a_1) \cap \dots \cap ((Y_i)_{p_i} - a_i) \leq \max(0, \dim Y_1 - i + 1).$$

N'importe quel point convient pour $i = 1$, supposons donc ceci acquis pour $i - 1 \geq 1$. On écrit C_1, \dots, C_k les composantes irréductibles de dimension maximale de

$$((Y_1)_{p_1} - a_1) \cap \dots \cap ((Y_{i-1})_{p_{i-1}} - a_{i-1}).$$

Si cette dimension est 0, n'importe quel $(a_i, p_i) \in Y_i$ convient. Dans le cas contraire, il suffit de trouver $(a_i, p_i) \in Y_i$ tel que $C_j \not\subset (Y_i)_{p_i} - a_i$ pour tout $1 \leq j \leq k$. Or, l'ensemble des points $a \in (Y_i)_{p_i}$ tels que $a + C_j \subset (Y_i)_{p_i}$ est un fermé F_j de $(Y_i)_{p_i}$. S'il n'est pas propre, on a $C_j \subset \text{Stab}((Y_i)_{p_i})$ et par le théorème 1.4.2, on obtient

$$(Y_i)_{p_i} = Z_{((Y_i)_{p_i})} = (Z_{Y_i})_{p_i} \subset (Z_V)_{p_i}.$$

Par hypothèse, ceci n'est pas possible pour chaque fibre, donc on peut choisir p_i tel que C_j soit propre et il suffit de choisir a_i dans $(Y_i)_{p_i} \setminus \bigcup_{j=1}^k F_j$ pour conclure.

Comme $m = \dim(V) + 1$, on a exhibé un point $((a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m))$ dont la fibre est de dimension 0. En utilisant [12, Exercice II.3.22], on obtient que $\alpha_1 \times \text{Id}$ est génériquement fini. \square

Lemme 4.1.8 - *L'application $(\mathbb{N}^*)^m \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto [\mathcal{M}]^{\dim Z} \cdot \mathcal{Z}$ est homogène de degré $2 \dim Z_i$ en chaque s_i .*

DÉMONSTRATION :

Rappelons que \mathcal{L}_{lin} est le faisceau inversible associé au diviseur

$$L_{\text{lin}} = \bar{A} \setminus A = \sum_{\ell=1}^g (D_{\ell}^0 + D_{\ell}^{\infty}).$$

On note également L_0 un diviseur sur A_0 associé à \mathcal{L}_0 , puis

$$P_{i,j} = (p_i + p_j)^* L_0 - p_i^* L_0 - p_j^* L_0.$$

qui est un diviseur sur A_0^m . Avec ces notations, \mathcal{M} est associé sur $(A \times P)^m$ au diviseur

$$\begin{aligned} M = p^* \left(\sum_{i=1}^{m-1} (s_i^2 p_i - s_{i+1}^2 p_{i+1})^* L_{\text{lin}} + \sum_{i=1}^{m-1} (f^m)^* (s_i p_i - s_{i+1} p_{i+1})^* L_0 \right) \\ + q^* \left((g+2) \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 q_i^* \mathcal{L} \right) \end{aligned}$$

où $p : A^m \times P^m \rightarrow \bar{A}^m$, $q : \bar{A}^m \times P^m \rightarrow P^m$, $p_1, \dots, p_m : A^m \rightarrow \bar{A}$ (ou $A^m \rightarrow \bar{A}$ selon le contexte) et $q_1, \dots, q_m : P^m \rightarrow P$ sont les différentes projections. En utilisant le lemme du déplacement de CHOW, on se ramène à calculer le nombre d'intersection sur $Y = Y_1 \times \dots \times Y_m$ qui est un sous-schéma fermé de $(A \times P)^m$. Ainsi le nombre qui nous intéresse se décompose par multilinéarité en produit d'intersection de termes

$$(f^m)^* P_{i,i+1}, \quad p_i^* f^* L_0, \quad (s_i^2 p_i - s_{i+1}^2 p_{i+1})^* (D_\ell^0 + D_\ell^\infty), \quad q_i^* \mathcal{L}.$$

On a volontairement omis les tirés en arrière par p et q pour plus de clarté. A partir de ce point, la démonstration est entièrement analogue à celle de [36, Théorème 5.5]. (On choisit des formes de CHERN comme VOJTA pour chacun des termes ci-dessus, puis on se ramène à calculer des intégrales de formes différentielles sur des ouverts bornés de \mathbb{C}^N). \square

Lemme 4.1.9 - Si $Y_i \not\subset Z_X$ pour $1 \leq i \leq m$, on a la minoration

$$[\mathcal{M}]^{\dim(Z)} \cdot \mathcal{Z} \geq \prod_{i=1}^m s_i^{2 \dim Z_i}.$$

DÉMONSTRATION :

Si $s_i = 1$ pour $1 \leq i \leq m$, alors la restriction de \mathcal{M} à \mathcal{Z} est le tiré en arrière d'un diviseur ample par une application qui génériquement coïncide avec $\alpha_1 \times \text{Id}$. Cette application étant génériquement finie par le lemme 4.1.7, on obtient le résultat. On en déduit directement le cas général avec le résultat d'homogénéité donné par le lemme 4.1.8. \square

4.1.5 Démonstration de l'inégalité de VOJTA

Avec les notations précédentes, on pose

$$e_1 = 4c_1^2, \quad e_2 = c_2, \quad e_3 = \max(c_3 + C_{\text{haut}}, 4c_1^2 \cdot C_{\text{haut}} + 1) \quad \text{et} \quad \mu = c_1.$$

On suppose que l'on dispose de points $(a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m) \in (V \setminus Z_V)(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant les inégalités dans les hypothèses du théorème 4.1.2 avec les constantes $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{N}^*$ ci-dessus. Le lemme suivant permet de choisir un m -uplet $s \in \mathbb{N}^*$ de sorte à obtenir une première inégalité de hauteurs.

Lemme 4.1.10 - Il existe $s \in (\mathbb{N}^*)^m$ tel que $s_i/s_{i+1} \geq e_2$ pour $1 \leq i \leq m-1$ et

$$\sum_{i=1}^{m-1} h_{\text{lin}}(s_i^2 a_i - s_{i+1}^2 a_{i+1}) + h_{\text{quad}}(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) \leq \frac{2}{e_1} \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\text{can}}(a_i).$$

DÉMONSTRATION :

On pose $s_m = 1$ et on définit successivement s_{m-1}, \dots, s_1 en imposant que s_i/s_{i+1} soit l'entier le plus proche de $\sqrt{h_{\text{can}}(a_{i+1})/h_{\text{can}}(a_i)}$. Comme $e_2 \in \mathbb{N}$, on a bien $s_i/s_{i+1} \geq e_2$. L'inégalité découle du fait que h_{lin} et $\sqrt{h_{\text{quad}}}$ vérifie l'inégalité triangulaire et que $e_2 \geq e_1 \geq 2$. Pour plus de détails, voir [33, Lemme 4.1]. \square

On applique la construction de la partie précédente avec le m -uplet $s \in (\mathbb{N}^*)^m$. Comme expliqué à la remarque 4.1.5, on peut imposer que j_1 et j_2 soient des isomorphismes en $x = (x_1, \dots, x_m) \in V^m(\bar{\mathbb{Q}})$ où $x_i = (a_i, p_i)$, donc $x \in U'(\bar{\mathbb{Q}})$. Avec les notations de la partie précédente, comme $x_i \in Y_i \setminus Z_V$, le lemme 4.1.9 donne

$$[\mathcal{M}]^{\dim(Y)} \cdot \mathcal{Y} \geq \prod_{i=1}^m s_i^{2 \dim Y_i} \geq \theta^{-1} \prod_{i=1}^m \delta_i^{\dim Y_i}$$

vu la valeur de θ . De plus, comme

$$\delta_i / \delta_{i+1} \geq s_i^2 / 2s_{i+1}^2 \geq e_2^2 / 2 \geq c_2 \quad \text{et} \quad h_{\mathcal{L}}(x_i) \geq h_{\text{can}}^w(a_i) \geq h_{\text{can}}(a_i) - C_{\text{haut}} \geq e_3 - C_{\text{haut}} \geq c_3,$$

le théorème 1.3.4 fournit une seconde inégalité de hauteurs

$$\sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\mathcal{L}}(x_i) \leq c_1 h_{\mathcal{M}}(x).$$

En utilisant les lemmes 4.1.6 et 4.1.10, on obtient

$$\sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\text{can}}^w(a_i) + \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\mathcal{E}}^w(p_i) \leq \frac{2c_1}{e_1} \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\text{can}}(a_i) + c_1 \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\mathcal{E}}^w(p_i) + c_1 C_{\text{haut}} |\eta s^2|.$$

Ainsi, en utilisant les majorations

$$h_{\mathcal{E}}^w(p_i) \leq h_{\mathcal{E}}(p_i) + C_{\text{haut}} \leq h_{\text{can}}(a_i) / \mu + C_{\text{haut}} \quad \text{et} \quad h_{\text{can}}(a_i) - C_{\text{haut}} \leq h_{\text{can}}^w(a_i),$$

on obtient

$$\left(1 - \frac{2c_1}{e_1} - \frac{c_1 - 1}{\mu}\right) \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\text{can}}(a_i) \leq 2c_1 C_{\text{haut}} |\eta s^2|,$$

puis en substituant les valeurs de e_1 et de μ , on trouve

$$\frac{1}{2c_1} \sum_{i=1}^m \eta_i s_i^2 h_{\text{can}}(a_i) \leq 2c_1 C_{\text{haut}} |\eta s^2|,$$

ce qui fournit une contradiction avec $h_{\text{can}}(a_i) \geq e_3$.

4.2 Démonstration des énoncés

Rappelons que si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini et $\varepsilon \geq 0$ un réel, on note

$$\Gamma_{\varepsilon} = \{a + b \mid a \in \Gamma, b \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } h_{\text{can}}(b) \leq \varepsilon\}.$$

En utilisant l'inégalité de VOJTA établie dans la partie précédente, nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 4.2.1 - *Il existe une constante $\mu \geq 0$ ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini et $\varepsilon \geq 0$ un réel, alors il existe une constante $\nu \geq 0$ telle que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, on a*

$$\forall a \in (V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon, \quad h_{\text{can}}(a) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu.$$

DÉMONSTRATION :

Quitte à remplacer \mathcal{L}_0 par $\mathcal{L}_0^{\otimes 3}$, on peut supposer que l'hypothèse 4.1.1 est vérifiée (les hauteurs canoniques selon que l'on considère \mathcal{L}_0 ou $\mathcal{L}_0^{\otimes 3}$ sont comparables). Ainsi, l'inégalité de VOJTA (théorème 2.1.1) fournit des constantes $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{R}$. On fixe un sous-groupe $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ de rang fini et un réel $\varepsilon \geq 0$. Quitte à augmenter e_3 , on suppose que $\varepsilon \leq 2^{-8}e_3e_1^{-2}$. On désigne par $(a_i, p_i)_{i \in I}$ l'ensemble des points de $(V \setminus Z_V)(\bar{\mathbb{Q}})$ tels que

$$a_i \in \Gamma_\varepsilon, \quad h_{\text{can}}(a_i) \geq e_3 \quad \text{et} \quad h_{\text{can}}(a_i) \geq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p_i).$$

En utilisant les propositions 1.2.11 et 1.2.12, on obtient que h_{lin} et h_{quad} s'étendent en deux semi-normes à l'espace vectoriel $E = A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Quitte à augmenter e_3 , on peut appliquer le point (i) du lemme 1.4.7 en prenant

$$F = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \quad N_1 = h_{\text{lin}}, \quad N_2 = \sqrt{(g+1)h_{\text{quad}}}, \quad c_1 = e_1, \quad c_3 = \sqrt{e_3} \quad \text{et} \quad \eta = \sqrt{\varepsilon}.$$

Ainsi, on peut recouvrir $\{a \in \Gamma_\varepsilon \mid h_{\text{can}}(a) \geq e_3\}$ par un nombre fini d'ensembles dans chacun desquels deux points $a, b \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifient

$$h_{\text{lin}} \left(\frac{a}{h_{\text{can}}(a)} - \frac{b}{h_{\text{can}}(b)} \right) \leq \frac{1}{e_1} \quad \text{et} \quad h_{\text{quad}} \left(\frac{a}{\sqrt{h_{\text{can}}(a)}} - \frac{b}{\sqrt{h_{\text{can}}(b)}} \right) \leq \frac{1}{e_1^2}.$$

Comme dans les cas abélien et torique, l'inégalité de VOJTA (Théorème 4.1.2) montre que $(h_{\text{can}}(a_i))_{i \in I}$ est majoré par un réel $\nu' > 0$ et on conclut en posant

$$\nu = \nu' - \mu \cdot \min \left(\inf_{p \in P(\bar{\mathbb{Q}})} h_{\mathcal{L}}(p), 0 \right).$$

□

De même, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) = \{a + b \mid a \in \Gamma, b \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } h_{\text{can}}(b) \leq \varepsilon(1 + h_{\text{can}}(a))\}.$$

Nous avons le résultat analogue suivant.

Théorème 4.2.2 - *Il existe une constante $\mu \geq 0$ et un réel $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un réel $\nu \geq 0$ tel que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, on a*

$$\forall a \in (V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon), \quad h_{\text{can}}(a) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu.$$

DÉMONSTRATION :

On reprend la démonstration précédente en posant cette fois-ci $\varepsilon = 2^{-8}e_1^{-2}$. On utilise le point (ii) du lemme 1.4.7 et on conclut de la même façon en remarquant que $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est contenu dans $\mathcal{C}(F, \eta)$. En effet, si $a \in \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ s'écrit $b + c$ avec $b \in \Gamma$ et $h_{\text{can}}(c) \leq \varepsilon(1 + h_{\text{can}}(b))$, alors

$$\|c\| = \sqrt{h_{\text{can}}(c)} \leq \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 + h_{\text{can}}(b)} \leq \eta \left(1 + \sqrt{h_{\text{can}}(b)}\right) \leq \eta(1 + \|b\|),$$

ce qui montre le résultat. \square

Pour finir, nous allons montrer le résultat A de l'introduction. Nous aurons besoin du résultat suivant de RÉMOND.

Lemme 4.2.3 - *Étant donné un entier $D \geq 1$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout sous-groupe $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ de rang fini, il existe un entier $S \in \mathbb{N}$ ayant la propriété suivante. Pour tout sous-schéma fermé X de A de degré au plus D , l'ensemble $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ contient au plus S points.*

DÉMONSTRATION :

Voir [34, Proposition 3]. \square

On peut à présent démontrer le résultat suivant par récurrence.

Théorème 4.2.4 - *Il existe une constante $\mu \geq 0$, un réel $\varepsilon > 0$ et une famille finie \mathfrak{B} de sous-variétés semi-abéliennes de A ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel $\nu \geq 0$ tels que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, il existe des points $a_1, \dots, a_n \in V_p(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant l'inégalité*

$$h_{\text{can}}(a_i) \leq \mu \cdot h_{\mathfrak{L}}(p) + \nu$$

et des sous-variétés semi-abéliennes $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$ avec $a_i + B_i \subset V_p$ tels que

$$V_p(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n (a_i + B_i(\bar{\mathbb{Q}})) \cap \Gamma_\varepsilon.$$

DÉMONSTRATION :

On montre le théorème par récurrence sur $\dim A$. Si $\dim A = 0$, le résultat est évident, on suppose donc dans la suite que $\dim A > 0$. En notant $W^{(1)}, \dots, W^{(r)}$ les composantes irréductibles de Z_V , on peut écrire

$$V = (V \setminus Z_V) \cup W^{(1)} \cup \dots \cup W^{(r)}.$$

En particulier si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, on a pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$ et tout réel $\varepsilon > 0$

$$V_p(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \left((V_p \setminus Z_{V_p})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^r W_p^{(k)}(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \right). \quad (4.2.5)$$

Comme l'ensemble $\{\deg V_p \in \mathbb{N} \mid p \in P\}$ est fini, le lemme 4.2.3 et le théorème 4.2.1 montrent le résultat sur le premier membre de cette réunion. Il reste donc à traiter les autres facteurs de cette réunion, c'est-à-dire le cas où $V = Z_V$. Dans ce cas, par le lemme 1.4.4, il existe une sous-variété semi-abélienne B non nulle de A telle que $V_p + B = V_p$ pour tout $p \in P$. En notant V' l'image de V par l'application $A \times P \rightarrow A/B \times P$ et en fixant une hauteur canonique $h'_{\text{can}} : (A/B)(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$, on obtient par hypothèse de récurrence l'existence d'une constante $\mu' > 0$, d'un réel $\varepsilon' > 0$ et d'une famille finie \mathfrak{B}' de sous-variétés semi-abéliennes de A/B vérifiant le théorème. En notant $\pi : A \rightarrow A/B$, on pose

$$\mathfrak{B} = \{\pi^{-1}(B') \subset A \mid B' \in \mathfrak{B}'\}.$$

D'autre part, en appliquant le lemme 1.4.6, on obtient des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\forall a' \in (A/B)(\bar{\mathbb{Q}}), \quad \exists a \in (\pi^{-1}(a'))(\bar{\mathbb{Q}}), \quad h_{\text{can}}(a) \leq \alpha \cdot h'_{\text{can}}(a') + \beta, \quad (4.2.6)$$

puis la proposition 1.2.14 montre l'existence d'une constante $\tau > 0$ telle que

$$\forall a \in A(\bar{\mathbb{Q}}), \quad h'_{\text{can}}(\pi(a)) \leq \tau \cdot h_{\text{can}}(a). \quad (4.2.7)$$

Vérifions que la constante $\mu = \mu' \cdot \alpha$, le réel $\varepsilon = \varepsilon' \cdot \tau^{-1}$ et la famille \mathfrak{B} conviennent. On fixe un sous-groupe de rang fini $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ et on note Γ' l'image de Γ par π . Par hypothèse de récurrence, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une constante $\nu' \geq 0$ tels que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, il existe des points $a'_1, \dots, a'_n \in V'_p(\bar{\mathbb{Q}})$ avec

$$h'_{\text{can}}(a'_i) \leq \mu' \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu' \quad (4.2.8)$$

et des sous-variétés semi-abéliennes $B'_1, \dots, B'_n \in \mathfrak{B}'$ avec $a'_i + B'_i \subset V'_p$ tels que

$$V'_p(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma'_{\varepsilon'} = \bigcup_{i=1}^n (a'_i + B'_i(\bar{\mathbb{Q}})) \cap \Gamma'_{\varepsilon'}. \quad (4.2.9)$$

Les points 4.2.6 et 4.2.8 fournissent des points $a_1, \dots, a_n \in V_p(\bar{\mathbb{Q}})$ avec

$$\pi(a_i) = a'_i \quad \text{et} \quad h_{\text{can}}(a_i) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + (\alpha\nu' + \beta).$$

De plus, avec le point 4.2.7 on a $\pi(\Gamma_{\varepsilon}) \subset \Gamma'_{\varepsilon'}$, donc il suffit de prendre l'image réciproque du point 4.2.9 par l'application π pour conclure. \square

CHAPITRE 5

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE FALTINGS

L'objectif de ce chapitre est de démontrer le théorème D et le corollaire E de l'introduction. On fixe une variété abélienne A sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et un faisceau très ample et symétrique \mathcal{L} sur A associé à un plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}$. De plus, on suppose que l'application

$$\Gamma\left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}, \mathcal{O}(n)\right) \rightarrow \Gamma\left(A, \mathcal{L}^{\otimes n}\right) \quad (5.0.1)$$

est surjective pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\hat{h} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ la hauteur de NÉRON-TATE associée à \mathcal{L} .

On fixe un schéma projectif et intègre P sur $\bar{\mathbb{Q}}$, un faisceau \mathcal{L} très ample sur P et un plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$ associé à \mathcal{L} . On considère également une hauteur $h_{\mathcal{L}} : P(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ associée à \mathcal{L} .

Dans la suite, on verra toujours $A \times P$ comme un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$. On note $m = \dim(A \times P) + 1$.

5.1 Inégalité de VOJTA

5.1.1 Enoncé et réduction

On considère le plongement de SEGRE

$$\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^N \quad \text{avec} \quad N = (N_A + 1)(N_P + 1) - 1$$

et on fixe un hyperplan E de $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^N$. On fixe un corps de nombres sur lequel sont définis A , P , E ainsi que les plongements $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}$ et $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$. On obtient ainsi pour chaque place $v \in M_K$ une distance d_v sur $\mathbb{P}_K^{N_A}(\mathbb{C}_v)$ et sur $(\mathbb{P}_K^{N_A} \times \mathbb{P}_K^{N_P})(\mathbb{C}_v)$. On fixe une partie finie $\mathcal{S} \subset M_K$ et on définit pour $x \in (A \times P)(\bar{\mathbb{Q}})$ le nombre

$$d_{\mathcal{S}}(x, E) = \prod_{v \in \mathcal{S}} \prod_{\substack{w \in M_L \\ w|v}} d_w(x, E)^{\Delta_w} \quad \text{où} \quad \Delta_w = \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]}$$

et L est un corps de nombres contenant des coordonnées projectives de x . Par la formule du degré, le résultat obtenu ne dépend pas du corps de nombres choisi.

Rappelons que la hauteur \hat{h} s'étend à l'espace vectoriel $A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ (voir théorème 1.1.3). Nous allons démontrer l'énoncé suivant.

Théorème 5.1.1 - *Pour tout réel $\tau > 0$ et tout réel $\xi > 0$, il existe des constantes $e_1, e_2, e_3, \mu > 0$ ayant la propriété suivante : il n'existe pas de points $x_1, \dots, x_m \in (A \times P)^m(\bar{\mathbb{Q}})$ où $x_i = (a_i, p_i)$ vérifiant simultanément les inégalités*

$$\hat{h} \left(\frac{a_i}{\sqrt{\hat{h}(a_i)}} - \frac{a_{i+1}}{\sqrt{\hat{h}(a_{i+1})}} \right) \leq \frac{1}{e_1^2}, \quad \hat{h}(a_{i+1}) \geq e_2^2 \cdot \hat{h}(a_i), \quad \hat{h}(a_1) \geq e_3, \quad (5.1.2)$$

$$\hat{h}(a_j) \geq \mu \cdot h_{\mathcal{E}}(p_j), \quad 0 < d_{\mathcal{S}}(x_j, E) \leq \xi \cdot \exp(-\tau \cdot \hat{h}(a_j))$$

pour tout $1 \leq i \leq m-1$ et $1 \leq j \leq m$. De plus, on peut prendre

$$e_1 = \mu = \frac{(N_A + 1)^m \cdot 6^{m^2} \cdot m^{2m}}{\min(\tau, 1)^m \cdot m!}.$$

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, nous allons prouver le corollaire suivant que nous utiliserons dans la seconde partie. Pour ce corollaire, on suppose que V est une hypersurface de $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$ donnée par un polynôme bihomogène de bidegré (r, s) avec $r, s \geq 1$. Comme précédemment, on définit pour $(a, p) \in (A \times P)(\bar{\mathbb{Q}})$ le nombre

$$d_{\mathcal{S}}(a, V_p) = \prod_{v \in \mathcal{S}} \prod_{\substack{w \in M_L \\ w|v}} d_w(a, V_p)^{\Delta_w} \quad \text{où} \quad \Delta_w = \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]}$$

et L est un corps de nombres contenant des coordonnées projectives de a et p . Comme précédemment, le choix de L n'influence pas le résultat.

Corollaire 5.1.3 - *Pour tout réel $\tau > 0$ et tout réel $\xi > 0$, il existe des constantes $e_1, e_2, e_3, \mu > 0$ ayant la propriété suivante : il n'existe pas de points $(a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m) \in (A \times P)^m(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant simultanément les inégalités*

$$\hat{h} \left(\frac{a_i}{\sqrt{\hat{h}(a_i)}} - \frac{a_{i+1}}{\sqrt{\hat{h}(a_{i+1})}} \right) \leq \frac{1}{e_1^2}, \quad \hat{h}(a_{i+1}) \geq e_2^2 \cdot \hat{h}(a_i), \quad \hat{h}(a_1) \geq e_3$$

$$\hat{h}(a_j) \geq \mu \cdot h_{\mathcal{E}}(p_j), \quad 0 < d_{\mathcal{S}}(a_j, V_{p_j}) \leq \xi \cdot \exp(-\tau \cdot \hat{h}(a_j))$$

pour tout $1 \leq i \leq m-1$ et $1 \leq j \leq m$. De plus, on peut prendre

$$e_1 = \binom{N_A + r}{N_A}^m \cdot \frac{r^m \cdot 6^{m^2} \cdot m^{2m}}{\min(\tau, 1)^m \cdot m!} \quad \text{et} \quad \mu = \binom{N_A + r}{N_A}^m \cdot \frac{r^{m+1} \cdot 6^{m^2} \cdot m^{2m}}{s \cdot \min(\tau, 1)^m \cdot m!}.$$

DÉMONSTRATION :

On introduit le plongement de VERONESE modifié de degré r

$$\varphi_A : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'_A} \quad \text{où} \quad N'_A = \binom{N_A + r}{r} - 1.$$

Le plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'_A}$ est associé à $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^{\otimes r}$ et il vérifie encore l'hypothèse 5.0.1. De plus, la hauteur de NÉRON-TATE associée à \mathcal{L}' est $\hat{h}' = r \cdot \hat{h}$. De même, on introduit le plongement de VERONESE modifié de degré s

$$\varphi_P : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'_P} \quad \text{où} \quad N'_P = \binom{N_P + s}{s} - 1.$$

Le plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'_P}$ est associé à $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^{\otimes s}$. On fixe également une hauteur associée à \mathcal{L}' en posant $\hat{h}_{\mathcal{L}'} = s \cdot \hat{h}_{\mathcal{L}}$. Ainsi, l'image de V par

$$\varphi = \varphi_A \times \varphi_P : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'_A} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'_P}$$

est contenue dans une hypersurface V' de bidegré $(1, 1)$. Si on utilise le morphisme de SEGRE

$$\text{Seg} : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'_A} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'_P} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'} \quad \text{où} \quad N' = (N'_A + 1)(N'_P + 1) - 1,$$

alors $\text{Seg}(V')$ est contenu dans un hyperplan E de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'}$. On peut donc appliquer le théorème précédent avec ces nouveaux plongements, l'hyperplan E et les constantes

$$\tau' = \frac{\tau}{r} \quad \text{et} \quad \xi' = r^{(\text{Card } \mathcal{S})/2} \cdot \xi.$$

On obtient ainsi des réels $e'_1, e'_2, e'_3, \mu' > 0$ et on pose

$$e_1 = e'_1, \quad e_2 = e'_2, \quad e_3 = r \cdot e'_3, \quad \mu = \frac{r}{s} \cdot \mu'.$$

Supposons qu'il existe des points $x_1, \dots, x_m \in (A \times P)(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant les hypothèses du corollaire avec les constantes $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{R}$. En notant $a'_j = \varphi_A(a_j)$, $p'_j = \varphi_P(p_j)$ et $x'_j = \text{Seg}(\varphi(x_j))$, on a avec le lemme 1.1.7 l'inégalité

$$d_v(x'_j, E) \leq d_v(x'_j, \text{Seg}(V')) \leq d_v(a'_j, V'_{p'_j}).$$

De plus, en utilisant le lemme 1.1.6, on obtient

$$d_v(a'_j, V'_{p'_j}) \leq d_v(a'_j, \varphi_A(V_{p_j})) \leq \sqrt{r} \cdot d_v(a_j, V_{p_j}).$$

Ainsi, en prenant le produit sur les différentes places, on obtient l'inégalité

$$0 < d_{\mathcal{S}}(x'_j, E) \leq r^{(\text{Card } \mathcal{S})/2} \cdot d_{\mathcal{S}}(a_j, V_{p_j}),$$

puis

$$0 < d_{\mathcal{S}}(x'_j, E) \leq \xi' \cdot \exp\left(-\tau' \cdot \hat{h}(a_j)\right),$$

donc les points (x_1, \dots, x_m) vérifient les inégalités du théorème 5.1.1, d'où la contradiction. Ainsi les constantes ci-dessus conviennent. De plus, en utilisant les valeurs effectives pour e_1 et μ du théorème précédent, on obtient les valeurs annoncées. \square

Le reste de cette partie est consacré à la démonstration du théorème ci-dessus.

5.1.2 Généralités sur la démonstration

Notations

Dans la suite, on supposera toujours que $0 < \tau \leq 1$, ce qui est suffisant pour établir le résultat (Plus $\tau > 0$ est petit, plus la condition sur les points est faible). On commence par construire un automorphisme χ de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ afin de se ramener au cas où E a une équation simple. On note W_0, \dots, W_N les coordonnées de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$. Quitte à permuter les coordonnées (ce qui ne modifie pas la distance et la hauteur) de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$, on peut choisir une équation de l'hyperplan E dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ sous la forme

$$F = W_0 + f_1 W_1 + \dots + f_N W_N.$$

On note alors $\chi : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ l'automorphisme associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & f_1 & f_2 & \cdots & f_N \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi(E) = Z(W_0)$ et le lemme suivant permet de comparer les distances que nous utiliserons.

Lemme 5.1.4 - *Pour tout $v \in M_K$ et tout $x \in \mathbb{P}_K^N(\mathbb{C}_v)$, on a*

$$d_v(\chi(x), Z(W_0)) \leq (N+1)^{\delta_v} \cdot |F|_v^2 \cdot d_v(x, E).$$

DÉMONSTRATION :

D'une part, si $x \in \mathbb{P}_K^N(\mathbb{C}_v)$, le lemme 1.1.5 permet d'écrire

$$d_v(\chi(x), Z(W_0)) = \frac{|F(x)|_v}{\|\chi(x)\|_{2,v}} = d_v(x, Z(F)) \cdot \left(\frac{\|x\|_{2,v}}{\|\chi(x)\|_{2,v}} \cdot \|F\|_{2,v} \right).$$

D'autre part, en écrivant $x = \chi^{-1}(\chi(x))$, on obtient

$$\|x\|_{2,v} \leq (N+1)^{\delta_v/2} \cdot |F|_v \cdot \|\chi(x)\|_{2,v},$$

puis en utilisant l'inégalité élémentaire

$$\|F\|_{2,v} \leq (N+1)^{\delta_v/2} \cdot |F|_v,$$

on obtient le résultat. □

On note $\varphi : A \times P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ la composée de χ avec le plongement

$$A \times P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \quad \text{avec} \quad N = (N_A + 1)(N_P + 1) - 1$$

où la seconde flèche est le morphisme de SEGRE. La hauteur et le degré d'un sous-schéma fermé de $A \times P$ seront pris relativement à ce plongement φ . On note $\hat{h}^w : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_{\mathcal{L}}^w : P(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ les hauteurs de WEIL induites respectivement par les plongements $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A}$ et $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$ et on fixe une constante $C_{\text{haut}} \geq 0$ telle que

$$\forall (a, p) \in (A \times P)(\bar{\mathbb{Q}}), \quad |\hat{h}(a) - \hat{h}^w(a)| \leq C_{\text{haut}} \quad \text{et} \quad |h_{\mathcal{L}}(p) - h_{\mathcal{L}}^w(p)| \leq C_{\text{haut}}. \quad (5.1.5)$$

On considère également les hauteurs sur $A \times P$ données par

$$h(a, p) = \hat{h}(a) + h_{\mathcal{L}}(p) \quad \text{et} \quad h^w(a, p) = \hat{h}^w(a) + h_{\mathcal{L}}^w(p).$$

On fixe également deux nombres réels qui permettront d'appliquer la méthode de VOJTA. On définit le réel $0 < \varepsilon < 1$ par

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{m!}{(N_A + 1)^{m-1} + 1} \cdot \left(\frac{\tau}{m \cdot \dim(A \times P) \cdot 6^m} \right)^m$$

ce qui permet de choisir un nombre rationnel $0 < \delta < 1$ vérifiant

$$m \cdot \varepsilon < \frac{\tau \cdot \delta}{6} \quad \text{et} \quad \frac{\delta^m}{m!} < \frac{\varepsilon^{\dim(A \times P)}}{((N_A + 1)^{m-1} + 1) \cdot (6^{\dim(A \times P)} \cdot \dim(A \times P))^m}. \quad (5.1.6)$$

Remarquons que les valeurs effectives des constantes e_1 et μ dans le théorème 5.1.1 ont été choisies pour vérifier les inégalités

$$e_1 > \frac{3}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \mu > \frac{3}{\varepsilon}. \quad (5.1.7)$$

Cela se déduit directement en remarquant que l'on a toujours l'inégalité

$$(N_A + 1)^m > 6 \left((N_A + 1)^{m-1} + 1 \right) \left(1 - \frac{1}{m} \right)^m,$$

car $N_A \geq 2$ et $m \geq 2$.

Stratégie

Nous allons démontrer l'inégalité de VOJTA en raisonnant par l'absurde. On dit qu'un point $x = (x_1, \dots, x_m) \in (A \times P)^m(\bar{\mathbb{Q}})$ où $x_i = (a_i, p_i)$ vérifie $\text{Cond}(e_1, e_2, e_3, \mu)$ s'il vérifie les inégalités du point 5.1.2. On commence par associer à un tel point x , un m -uplet d'entiers s . Dans la suite, on supposera toujours que $e_2 \geq e_1$ et que $e_2 \in \mathbb{N}$.

Lemme 5.1.8 - *Si $x \in (A \times P)^m(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifie $\text{Cond}(e_1, e_2, e_3, \mu)$, alors il existe $s \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$ vérifiant $s_i/s_{i+1} \geq e_2$, les inégalités*

$$\left(1 + \frac{1}{2e_2} \right)^{2-2i} s_1^2 \cdot \hat{h}(a_1) \leq s_i^2 \cdot \hat{h}(a_i) \leq \left(1 + \frac{1}{2e_2} \right)^{2i-2} s_1^2 \cdot \hat{h}(a_1)$$

pour tout $1 \leq i \leq m-1$ et

$$\sum_{i=1}^{m-1} \hat{h}(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) \leq \frac{3}{e_1^2} \sum_{i=1}^m s_i^2 \hat{h}(a_i).$$

DÉMONSTRATION :

On note dans cette démonstration $\|\cdot\| = \sqrt{\widehat{h}}$ qui vérifie l'inégalité triangulaire. On pose $s_m = 1$ et on définit successivement s_{m-1}, \dots, s_1 de sorte que s_i/s_{i+1} soit l'entier le plus proche de $\|a_{i+1}\|/\|a_i\|$. D'une part, comme e_2 est un entier, on a $s_i \geq e_2 \cdot s_{i+1}$ et d'autre part, l'inégalité

$$\left| s_{i+1}\|a_{i+1}\| - s_i\|a_i\| \right| \leq \frac{1}{2}s_{i+1}\|a_i\| \leq \frac{1}{2e_2} \min(s_i\|a_i\|, s_{i+1}\|a_{i+1}\|).$$

donne la seconde affirmation. La fin est identique à la démonstration du lemme 2.1.8. \square

Ainsi, à chaque point $x \in (A \times P)^m(\overline{\mathbb{Q}})$ vérifiant les conditions de 5.1.1, on a associé un m -uplet $s \in \mathbb{N}^m$. On dit qu'un sous-schéma fermé $X = X_1 \times \dots \times X_m$ de $(A \times P)^m$ vérifie $\text{Cond}(c_1, c_2, x)$ si

- (i) Pour tout $1 \leq i \leq m$, le schéma X_i est intègre et $x_i \in X_i(\overline{\mathbb{Q}})$.
- (ii) On a les inégalités

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \deg X_i \leq c_1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m s_i^2 \cdot h(X_i) \leq c_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^m s_i^2 \right). \quad (5.1.9)$$

La méthode de VOJTA est alors la suivante. On fixe un point $x \in (A \times P)^m(\overline{\mathbb{Q}})$ vérifiant $\text{Cond}(e_1, e_2, e_3, \mu)$. En partant de $(A \times P)^m$ qui vérifie $\text{Cond}(c_1, c_2, x)$ avec

$$c_1 = \deg(A \times P) \quad \text{et} \quad c_2 = h(A \times P),$$

on va construire une suite strictement décroissante de sous-schémas fermés $X = X_1 \times \dots \times X_m$ de $(A \times P)^m$ vérifiant $\text{Cond}(c_1, c_2, x)$. Le point important est que les constantes e_2, e_3, c_1 et c_2 ne dépendent que de la liste

$$A, P, E, A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^{\text{NA}}, P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^{\text{NP}}, C_{\text{haut}}, \tau, \xi, \dim X_1, \dots, \dim X_m \quad (5.1.10)$$

mais pas de x_i, s_i et X_i pour $1 \leq i \leq m$. Plus précisément, on va montrer que pour tous réels $c_1 > 0, c_2 > 0$ et tout m -uplet $u \in \mathbb{N}^m$, il existe des constantes $e_1, e_2, e_3, \mu, c'_1, c'_2 > 0$ de sorte que si $x \in (A \times P)^m(\overline{\mathbb{Q}})$ est un point vérifiant $\text{Cond}(e_1, e_2, e_3, \mu)$ et si $X = X_1 \times \dots \times X_m$ est un sous-schéma fermé de $(A \times P)^m$ vérifiant $\text{Cond}(c_1, c_2, x)$ et $u_i = \dim X_i$ pour $1 \leq i \leq m$, alors on peut construire un sous-schéma fermé strict $X' = X'_1 \times \dots \times X'_m$ de X vérifiant $\text{Cond}(c'_1, c'_2, x)$.

Finalement, on itère le procédé jusqu'à ce que l'un des X_j soit réduit à $\{x_j\}$. On obtient alors par le point 5.1.5

$$s_j^2 \cdot \widehat{h}(a_j) \leq s_j^2 \cdot h(x_j) \leq s_j^2 (h^w(x_j) + 2C_{\text{haut}}) \leq s_j^2 \cdot (h(X_j) + 2C_{\text{haut}}),$$

puis en utilisant le point 5.1.9 et le lemme 5.1.8, on obtient

$$\left(1 + \frac{1}{2e_2} \right)^{2-2j} s_1^2 \cdot \widehat{h}(a_1) \leq (mc_2 + 2C_{\text{haut}})s_1^2.$$

Finalement, on a

$$e_3 \leq \widehat{h}(a_1) \leq (mc_2 + 2C_{\text{haut}})2^{2m-2}$$

ce qui fournit une contradiction. (En augmentant e_3 , le membre de droite reste inchangé car c_2 ne dépend que de la liste 5.1.10).

Application de la stratégie et réduction

Pour appliquer la stratégie décrite ci-dessus, nous suivons essentiellement RÉMOND dans [30] et [35]. On fixe un point $x \in (A \times P)^m(\mathbb{Q})$ vérifiant $\text{Cond}(e_1, e_2, e_3, \mu)$ et on suppose que l'on a construit un sous-schéma fermé $X = X_1 \times \dots \times X_m$ de $(A \times P)^m$ vérifiant $\text{Cond}(c_1, c_2)$ où c_1 et c_2 ne dépendent que de la liste 5.1.10. On note $u_i = \dim X_i$, $D_i = \deg X_i$ et $u = u_1 + \dots + u_m$.

Remarque 5.1.11 : Notre objectif est de montrer que : quitte à augmenter e_2 et e_3 , il existe des constantes $c'_1, c'_2 \in \mathbb{R}$ ne dépendant que de la liste 5.1.10 et un sous-schéma fermé strict $X' = X'_1 \times \dots \times X'_m$ de X vérifiant $\text{Cond}(c'_1, c'_2)$. Dans la suite, la constante $c' \in \mathbb{R}$ dépendra toujours uniquement de la liste 5.1.10, même si ce n'est pas précisé. De plus, la constante c' pourra changer d'une ligne à l'autre dans les inégalités, tant qu'elle ne dépend que de la liste 5.1.10.

Par hypothèse sur la distance de x_i à E , on a $\varphi(x_i) \in \varphi(X_i) \setminus Z(W_0)$, donc $\varphi(X_i) \not\subset Z(W_0)$. On peut donc appliquer le lemme 1.3.6 à chaque $\varphi_i : X_i \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ qui donne une matrice $M_i \in \text{GL}_{N+1}(\mathbb{Z})$ dont les coefficients sont bornés par $\max(D_i/2, 1)$ de sorte que le morphisme associé $\chi_i : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ fait de $\chi_i \circ \varphi_i$ un plongement adapté à X_i et fixe la coordonnée W_0 .

De plus, par le lemme 1.3.7, on obtient des polynômes $P_j^{(i)}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $u_i + 1 \leq j \leq N$. On note B_i la famille de leurs coefficients à i fixé et on désigne par Q_i la dérivée de $P_{u_i+1}^{(i)}$ par rapport à la dernière variable.

On note $W_0^{(i)}, \dots, W_N^{(i)}$ les coordonnées de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ et on fixe des coordonnées projectives $(x_0^{(i)}, \dots, x_N^{(i)})$ de $\chi_i \circ \varphi(x_i)$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$. On choisit également un corps de nombres L contenant K , les $x_j^{(i)}$ et les B_i . On note $\pi_i : X_i \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{u_i}$ le morphisme fini défini par $W_0^{(i)}, \dots, W_{u_i}^{(i)}$. L'hypothèse sur la distance se traduit en une inégalité simple sur les coordonnées fixées de $\chi_i \circ \varphi(x_i)$.

Lemme 5.1.12 - *Il existe une constante $c' > 0$ telle que pour tout $1 \leq i \leq m$, on a l'inégalité*

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \prod_{\substack{w \in M_L \\ w|v}} \left(\frac{|x_0^{(i)}|_w}{\max_j |x_j^{(i)}|_w} \right)^{\Delta_w} \leq c' \cdot \exp(-\tau \cdot \hat{h}(a_i)).$$

DÉMONSTRATION :

Par le lemme 1.1.5, on a

$$\frac{|x_0^{(i)}|_w}{\|x_i\|_{2,w}} = d_w(\chi_i \circ \varphi(x_i), Z(W_0^{(i)})) = d_w(\varphi(x_i), Z(W_0^{(i)})) \cdot \left(\frac{\|\varphi(x)\|_{2,w}}{\|\chi \circ \varphi(x)\|_{2,w}} \right).$$

D'autre part, on a par un calcul direct

$$\|\varphi(x)\|_{2,w} \leq (N+1)^{\delta_w/2} \cdot |M_i^{-1}|_w \cdot \|\chi \circ \varphi(x)\|_{2,w}.$$

En utilisant le lemme 5.1.4 et en passant de la norme 2 à la norme infinie, on obtient ainsi la majoration

$$\frac{|x_0^{(i)}|_w}{\max_j |x_j^{(i)}|_w} \leq (N+1)^{2\delta_w} \cdot |F|_w^2 \cdot |M_i^{-1}|_w \cdot d_w(x_i, E).$$

En prenant le produit sur les places, en majorant, et en utilisant les conditions sur x , on obtient le résultat. (Comme M_i est à coefficients entiers et bornés par $\max(D_i/2, 1)$, on peut borner les numérateurs et dénominateurs des coefficients de M_i^{-1} avec la formule de la comatrice, donc on peut majorer le terme correspondant par une constante c'). \square

En suivant RÉMOND, on se ramène à la construction d'un polynôme avec le lemme suivant.

Proposition 5.1.13 - *Il existe une constante $c' > 0$ et un couple (ℓ, U) où $1 \leq \ell \leq m$ et U un polynôme homogène de $\bar{\mathbb{Q}}[W_0^{(\ell)}, \dots, W_{u_\ell}^{(\ell)}]$ vérifiant*

- (i) $\chi_\ell(x_\ell) \in Z(U)$,
- (ii) $\chi_\ell(X_\ell) \notin Z(U)$,
- (iii) $\deg U \leq c'_1$,
- (iv) $s_\ell^2 \cdot h(U) \leq c'_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^m s_i^2 \right)$,

En effet, si l'on suppose que la proposition précédente est vérifiée, il suffit de poser $X'_i = X_i$ pour $i \neq \ell$ et de définir X'_ℓ comme une composante irréductible de $X_\ell \cap \chi_\ell(Z(U))$. On contrôle alors le degré et la hauteur de X'_1, \dots, X'_m en utilisant le théorème de BÉZOUT géométrique et arithmétique. (Pour une démonstration détaillée, voir [35, proposition 3.1]). On en déduit que l'on peut écarter quelques cas particuliers pour lesquels les méthodes utilisées dans la suite ne s'applique pas.

Corollaire 5.1.14 - *Pour chaque $1 \leq i \leq m$, on peut supposer que*

- (i) *Le morphisme $\pi_i : X_i \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{u_i}$ est étale en x_i ,*
- (ii) *$x_j^{(i)} \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et $0 \leq j \leq u_i$,*
- (iii) *pour tout $1 \leq i \leq m$,*

$$Q_i \left(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_{u_i}^{(i)}, x_{u_i+1}^{(i)} \right) \neq 0.$$

DÉMONSTRATION :

La démonstration est identique à celle du [35, Corollaire 3.2]. Si le premier point n'est pas vérifié, on peut appliquer la proposition précédente en prenant pour U le discriminant du polynôme irréductible en Z donné par

$$P_{u_i+1}^{(i)} \left(W_0^{(i)}, \dots, W_{u_i}^{(i)}, Z \right).$$

Pour le point (ii), il suffit de considérer $W_j^{(i)}$, tandis que le dernier point est une conséquence du point (i). \square

On suppose donc dans la suite que les assertions du corollaire sont vérifiées.

5.1.3 Construction d'une section globale

Pour démontrer la proposition 5.1.13, nous allons construire une section globale de petite hauteur d'un faisceau sur X . On commence par introduire quelques notations.

On note $r_{\pm} : X^m \rightarrow A^{m-1}$ le morphisme donné sur les points par

$$((a_1, p_1), \dots, (a_m, p_m)) \mapsto (s_1 a_1 \pm s_2 a_2, \dots, s_{m-1} a_{m-1} \pm s_m a_m).$$

En utilisant les plongements $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}$, les morphismes r_{-} et r_{+} composés avec un morphisme de SEGRE et le plongement $P \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}$, on obtient un plongement

$$X \hookrightarrow \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}\right)^m \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'_A}\right) \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'_A}\right) \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}\right)^m \quad \text{avec} \quad N'_A = (N_A + 1)^{m-1} - 1.$$

Par restriction, on obtient ainsi un faisceau $\mathcal{O}(b, c, c', d)$ sur X pour chaque $b, d \in \mathbb{Z}^m$ et $c, c' \in \mathbb{Z}$. Par construction, on a les relations suivantes.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(b, 0, 0, 0) &\simeq p^* \left(\bigotimes_{i=1}^m p_i^* \mathcal{L}^{\otimes b_i} \right), & \mathcal{O}(0, 1, 0, 0) &\simeq p^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} (s_i p_i - s_{i+1} p_{i+1})^* \mathcal{L} \right), \\ \mathcal{O}(0, 0, 0, d) &\simeq q^* \left(\bigotimes_{i=1}^m q_i^* \mathcal{L}^{\otimes d_i} \right), & \mathcal{O}(0, 0, 1, 0) &\simeq p^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} (s_i p_i + s_{i+1} p_{i+1})^* \mathcal{L} \right), \end{aligned}$$

où $p : A^m \times P^m \rightarrow A^m$, $q : A^m \times P^m \rightarrow P^m$, $p_1, \dots, p_m : A^m \rightarrow A$ et $q_1, \dots, q_m : P^m \rightarrow P$ sont les différentes projections. Avec ces notations, le faisceau que nous allons étudier est défini pour $d \in \mathbb{N}$ vérifiant $d\varepsilon \in \mathbb{Z}$ par

$$\mathcal{L}(\varepsilon, s, d) = \mathcal{O}(\varepsilon \eta s^2, 1, 0, (2 + \varepsilon) \eta s^2)^{\otimes d}. \quad (5.1.15)$$

On note $X_0^{(i)}, \dots, X_{N_A}^{(i)}$ les coordonnées du i -ème facteur de $\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}\right)^m$, puis $V_0, \dots, V_{N'_A}$ et $V'_0, \dots, V'_{N'_A}$ pour les deux espaces projectifs intermédiaires et $T_0^{(i)}, \dots, T_{N_P}^{(i)}$ les coordonnées du i -ème facteur $\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}\right)^m$.

Complexe de FALTINGS

Pour construire une section globale du faisceau $\mathcal{L}(\varepsilon, s, d)$, on va appliquer un lemme de SIEGEL. Pour cela, nous allons construire une suite exacte de faisceaux dont le noyau est $\mathcal{L}(\varepsilon, s, d)$. Cette suite exacte est communément appelé complexe de FALTINGS. On commence par définir

$$\mathcal{L}(\varepsilon, s, d) \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_k \mathcal{M}(\varepsilon, s, d) \quad \text{où} \quad \mathcal{M}(\varepsilon, s, d) = \mathcal{O}((2 + \varepsilon) d \eta s^2, 0, 0, (2 + \varepsilon) d \eta s^2)$$

et la composante $k \in \llbracket 0, N'_A \rrbracket$ de Φ est $\xi \mapsto \xi \otimes V'_k{}^{\otimes d}$ (On arrive bien dans $\mathcal{M}(\varepsilon, s, d)$ par le théorème du cube). On définit ensuite

$$\bigoplus_k \mathcal{M}(\varepsilon, s, d) \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_{k_1, k_2, k_3} \mathcal{N}(\varepsilon, s, d) \quad \text{où} \quad \mathcal{N}(\varepsilon, s, d) = \mathcal{O}((4 + \varepsilon)d\eta s^2, 0, 0, (2 + \varepsilon)d\eta s^2)$$

et la composante $(k_1, k_2, k_3) \in \llbracket 0, N'_A \rrbracket^3$ est donnée par

$$(\xi_k)_k \mapsto \xi_{k_1} \otimes V_{k_2}{}^{\otimes d} \otimes V'_{k_3}{}^{\otimes d} - \xi_{k_2} \otimes V_{k_1}{}^{\otimes d} \otimes V'_{k_3}{}^{\otimes d}.$$

Par construction, on a ainsi une suite exacte de faisceaux sur X

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(\varepsilon, s, d) \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_k \mathcal{M}(\varepsilon, s, d) \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_{k_1, k_2, k_3} \mathcal{N}(\varepsilon, s, d).$$

Nous aurons besoin d'imposer une condition supplémentaire sur la section globale que l'on cherche. On dira qu'une section globale d'un faisceau sur X a un indice d'annulation supérieur à δ le long de E^m (relativement à ds^2), si elle est dans le faisceau d'idéaux engendré par les sections induites sur X par les polynômes

$$\left(W_0^{(1)} \right)^{j_1} \cdots \left(W_0^{(m)} \right)^{j_m} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^m \frac{j_i}{ds_i^2} \geq \delta. \quad (5.1.16)$$

On notera $\Gamma_\delta(X, \cdot)$ le sous-espace vectoriel de $\Gamma(X, \cdot)$ correspondant. En particulier, on obtient par restriction, une nouvelle suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_\delta(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d)) \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_k \Gamma_\delta(X, \mathcal{M}(\varepsilon, s, d)) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{k_1, k_2, k_3} \Gamma(X, \mathcal{N}(\varepsilon, s, d)).$$

Nous allons chercher la section souhaitée sous une forme polynomiale. Pour cela, on introduit l'application

$$\Theta : \bar{\mathbb{Q}}[W] \simeq \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \Gamma\left(\left(\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N'}\right)^m, \mathcal{O}(\alpha)\right) \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \Gamma(X, \mathcal{O}(\alpha)). \quad (5.1.17)$$

On note \mathcal{E} le sous-espace vectoriel de $\bar{\mathbb{Q}}[W]$ formé des polynômes P multihomogènes de multidegré $(2 + \varepsilon)d\eta s^2$. et vérifiant pour tout $1 \leq i \leq m$ les relations

$$\left(\forall j \in \llbracket u_i + 2, N \rrbracket, \quad \deg_{W_j^{(i)}} P = 0 \right) \quad \text{et} \quad \deg_{W_{u_i+1}^{(i)}} P \leq D_i.$$

On dit également qu'un polynôme de $\bar{\mathbb{Q}}[W^{(1)}, \dots, W^{(m)}]$ a un indice d'annulation supérieur à δ le long de E^m s'il est contenu dans l'idéal engendré par les monômes vérifiant le point 5.1.16. On note \mathcal{E}_δ le sous-espace vectoriel de \mathcal{E} correspondant. Les plongements étant adaptés, les restrictions de Θ induisent des applications injectives

$$\mathcal{E} \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}(\varepsilon, s, d)) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_\delta \rightarrow \Gamma_\delta(X, \mathcal{M}(\varepsilon, s, d))$$

On dit qu'une section $f \in \Gamma_\delta(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d))$ est représentée par une famille de polynômes $(F_k)_k \subset \mathcal{E}_\delta$ si

$$\Phi(f) = (\Theta(F_k))_k$$

dans $\Gamma_\delta(X, \mathcal{M}(\varepsilon, s, d))$. Avec ces notations, nous allons montrer le résultat suivant.

Proposition 5.1.18 - *Il existe une constante $c' > 0$ telle que pour tout d suffisamment grand et divisible, il existe une section $f \in \Gamma_\delta(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d))$ non nulle représentée par une famille de polynôme $(F_k)_k \subset \mathcal{E}_\delta$ vérifiant*

$$h((F_k)_k) \leq c'd \left(\sum_{i=1}^m s_i^2 \right) + o(d).$$

Pour cela, on introduit le morphisme donné par la composée

$$\Psi' : \bigoplus_k \mathcal{E}_\delta \xrightarrow{\Theta} \bigoplus_k \Gamma_\delta(X, \mathcal{M}(\varepsilon, s, d)) \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_{k_1, k_2, k_3} \Gamma(X, \mathcal{N}(\varepsilon, s, d))$$

où Θ est appliqué sur chaque facteur de la somme directe. Nous allons appliquer le lemme de SIEGEL suivant à ce morphisme pour obtenir le résultat.

Lemme 5.1.19 - *Pour tout corps de nombres K , il existe une constante $C_S(K)$ telle que pour toute matrice $A \in M_{m,n}(K)$ avec $m < n$, il existe $X \in K^n \setminus \{0\}$ vérifiant $AX = 0$ et*

$$h(X) \leq \frac{m}{n-m} \left(\max_{1 \leq i \leq m} h(A_i) + \log n \right) + \frac{n}{n-m} C_S(K).$$

DÉMONSTRATION :

Voir [3, Lemme de SIEGEL]. □

Ainsi, nous devons majorer l'exposant de DIRICHLET (c'est à dire $m/(n-m)$) du système induit par Ψ' , puis nous devons exhiber des équations décrivant $\text{Ker } \Psi'$ de hauteurs contrôlées et dont les coefficients sont dans un corps de nombres indépendant de d .

Majoration de l'exposant de DIRICHLET

Nous allons estimer la dimension du noyau de Ψ' . On commence donc par minorer la dimension de $\Gamma(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d))$.

Lemme 5.1.20 - *Si d est suffisamment divisible, on a*

$$\dim \Gamma(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d)) \geq \varepsilon^{u_1} \prod_{i=1}^m (ds_i^2)^{u_i} \cdot \frac{D_i}{u_i!} + o(d^u).$$

DÉMONSTRATION :

On adapte la démonstration de FALTINGS dans [10, Partie 6]. Comme le faisceau $\mathcal{L}(\varepsilon, s, 1)$ est ample (car $\mathcal{O}(1, 0, 0, 1)$ est ample et $\mathcal{O}(0, 1, 0, 2\eta s^2)$ est numériquement effectif), on a par le théorème de RIEMANN-ROCH asymptotique pour d suffisamment divisible

$$\dim \Gamma(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d)) = \frac{\mathcal{L}(\varepsilon, s, 1)^u \cdot X}{u!} d^u + o(d^u).$$

En notant $\mathcal{L}_i = p^* p_i^* \mathcal{L}_0$ et $\mathfrak{L}_i = p^* p_i^* \mathfrak{L}$, on remarque que

$$\begin{aligned}
& \left((\mathcal{L}_1 \otimes \mathfrak{L}_1)^{\otimes \eta_1 s_1^2} \right)^{u_1} \cdot \prod_{i=2}^m \left(q^*(s_{i-1} p_{i-1} - s_i p_i)^* \mathcal{L} \otimes \mathfrak{L}_i^{\otimes 2\eta_i s_i^2} \right)^{u_i} \\
& \geq s_1^{2u_1} D_1 \left((\mathcal{L}_2^{\otimes s_2^2} \otimes \mathfrak{L}_2^{\otimes 2\eta_2 s_2^2} \right)^{u_2} \cdot \prod_{i=3}^m \left(q^*(s_{i-1} p_{i-1} - s_i p_i)^* \mathcal{L} \otimes \mathfrak{L}_i^{\otimes 2\eta_i s_i^2} \right)^{u_i} \\
& \geq \left(\prod_{i=1}^2 s_i^{2u_i} D_i \right) \cdot \prod_{i=3}^m \left(q^*(s_{i-1} p_{i-1} - s_i p_i)^* \mathcal{L} \otimes \mathfrak{L}_i^{\otimes 2\eta_i s_i^2} \right)^{u_i} \\
& \geq \dots \geq \prod_{i=1}^m s_i^{2u_i} D_i.
\end{aligned}$$

Or les faisceaux définissant $\mathcal{L}(\varepsilon, s, d)$ sont tous numériquement effectifs, donc avec la formule du multinôme et la minoration ci-dessus, on obtient

$$\mathcal{L}(\varepsilon, s, 1)^u \geq \binom{u}{u_1, \dots, u_m} \varepsilon^{u_1} \prod_{i=1}^m s_i^{2u_i} D_i.$$

En combinant les deux inégalités précédentes, on obtient le résultat. \square

Nous allons à présent minorer la dimension de $\Gamma_\delta(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d))$.

Lemme 5.1.21 - *On a la minoration*

$$\dim \Gamma_\delta(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d)) \geq \dim \Gamma(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d)) - \frac{\delta^m}{m!} \cdot 6^{m \dim(A \times P)} \cdot \prod_{i=1}^m (ds_i^2)^{u_i} \frac{D_i}{(u_i - 1)!} + o(d^u).$$

DÉMONSTRATION :

On adapte la démonstration de FALTINGS dans [10, Partie 6]. On note $Y = Y_1 \times \dots \times Y_m$ où $Y_i = Z(W_0^{(i)}) \cap X_i$, ainsi que ℓ_i la section induite sur X par le polynôme $W_0^{(i)}$. L'idéal \mathcal{I}_δ de \mathcal{O}_X définissant la condition d'avoir un indice d'au moins δ est engendré par les sections

$$\ell_1^{j_1} \otimes \dots \otimes \ell_m^{j_m} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^m \frac{j_i}{ds_i^2} \geq \delta.$$

Comme les ℓ_i forment une suite régulière et que la somme ci-dessus ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs entre 0 et δ , on obtient une filtration de la forme

$$\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_\delta \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_{\delta_r} \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_{\delta_{r-1}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_{\delta_1} \rightarrow 0$$

où les noyaux successifs sont isomorphes à des faisceaux de la forme

$$\left(\bigotimes_{i=1}^m \mathcal{L}_i^{-j_i} \right) \Big|_Y \quad \text{où} \quad \sum_{i=1}^m \frac{j_i}{ds_i^2} < \delta.$$

D'après le lemme 1.4.8, le nombre de tel m -uplet est au plus

$$\frac{\delta^m}{m!} \prod_{i=1}^m ds_i^2 + o(d^m).$$

D'autre part, en injectant le faisceau $\mathcal{L}(\varepsilon, s, d)$ dans $\mathcal{M}(\varepsilon, s, d)$ sur Y comme dans la construction du complexe de FALTINGS, on peut majorer la dimension des noyaux successifs par

$$\dim \Gamma(Y, \mathcal{M}(\varepsilon, s, d)) = \prod_{i=1}^m ((2 + \varepsilon)d\eta_i s_i^2)^{\dim Y_i} \frac{\deg Y_i}{(\dim Y_i - 1)!} + o(d^{m+\dim Y}).$$

Ainsi, on obtient que le nombre de conditions sur $f \in \Gamma(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d))$ pour avoir un indice d'annulation supérieur à δ est majoré par

$$\frac{\delta^m}{m!} \left(\prod_{i=1}^m ds_i^2 \right) \prod_{i=1}^m ((2 + \varepsilon)d\eta_i s_i^2)^{\dim Y_i} \frac{\deg Y_i}{(\dim Y_i - 1)!} + o(d^{m+\dim Y}).$$

En utilisant $\dim Y_i = u_i - 1$ (car $x_i \in X_i \setminus E$), $\deg Y_i = D_i$ et $(2 + \varepsilon)\eta_i \leq 6$, on obtient que ce nombre est majoré par

$$\frac{\delta^m}{m!} \cdot 6^{m \dim(A \times P)} \cdot \prod_{i=1}^m (ds_i^2)^{u_i} \frac{D_i}{(u_i - 1)!} + o(d^u),$$

ce qui donne le résultat. □

Nous aurons aussi besoin de connaître la dimension de \mathcal{E}_δ .

Lemme 5.1.22 - *On a la minoration*

$$\dim \mathcal{E}_\delta \geq \dim \mathcal{E} - \frac{\delta^m}{m!} \cdot 6^{m \dim(A \times P)} \cdot \prod_{i=1}^m (ds_i^2)^{u_i} \frac{D_i}{(u_i - 1)!} + o(d^u).$$

DÉMONSTRATION :

On doit dénombrer le cardinal de l'ensemble des

$$(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}) \in \prod_{i=1}^m (\mathbb{N}^{u_i+1} \times \llbracket 0, D_i - 1 \rrbracket \times \{0\}^{N-u_i-1})$$

vérifiant

$$\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_0^{(i)}}{ds_i^2} < \delta \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad |\lambda^{(i)}| = (2 + \varepsilon)d\eta_i s_i^2.$$

On commence par choisir $\lambda_{u_i+1}^{(i)}$ pour chaque i , ce qui donne

$$\prod_{i=1}^m D_i$$

possibilités. On choisit ensuite les $\lambda_0^{(i)}$ vérifiant la condition souhaitée. Par le lemme 1.4.8, on a

$$\frac{\delta^m}{m!} \prod_{i=1}^m ds_i^2 + o(d^m)$$

choix possibles. Finalement, il reste à choisir pour tout i un m -uplet

$$(\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_m^{(i)}) \in \mathbb{N}^{u_i} \quad \text{tel que} \quad \sum_{j=1}^{u_i} \lambda_j^{(i)} = (2 + \varepsilon)d\eta_i s_i^2 - \lambda_0^{(i)} - \lambda_{u_i+1}^{(i)}.$$

Le nombre de choix possibles est

$$\prod_{i=1}^m \binom{u_i + (2 + \varepsilon)d\eta_i s_i^2 - \lambda_0^{(i)} - \lambda_{u_i+1}^{(i)} - 1}{u_i - 1} = \prod_{i=1}^m \frac{((2 + \varepsilon)d\eta_i s_i^2)^{u_i-1}}{(u_i - 1)!} + o(d^{u-m}).$$

Ainsi, en multipliant les trois possibilités, puis en majorant comme dans le lemme précédent, on trouve le résultat. \square

Lemme 5.1.23 - *Il existe une constante $0 < c' < 1$ telle que*

$$\dim \text{Ker } \Psi' \geq c' \cdot \left(\prod_{i=1}^m (ds_i^2)^{u_i} \frac{D_i}{u_i!} \right) + o(d^u).$$

DÉMONSTRATION :

Le noyau de Ψ' est isomorphe à

$$\left(\bigoplus_k \Theta(\mathcal{E}_\delta) \right) \cap \Phi(\Gamma_\delta(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d))) \subset \bigoplus_k \Gamma(X, \mathcal{M}(\varepsilon, s, d))$$

et comme les applications Φ et $\Theta|_{\mathcal{E}_\delta}$ sont injectives, on obtient par la formule de GRASSMANN, la minoration

$$\dim \text{Ker } \Psi' \geq \dim \Gamma_\delta(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d)) + (N_A + 1)^{m-1} [\dim \mathcal{E}_\delta - \dim \Gamma(X, \mathcal{M}(\varepsilon, s, d))].$$

D'une part, par le théorème de RIEMANN-ROCH asymptotique, on a pour d suffisamment divisible

$$\begin{aligned} \dim \Gamma(X, \mathcal{M}(\varepsilon, s, d)) &= \frac{\mathcal{M}(\varepsilon, s, d)^{\dim X} \cdot X}{(\dim X)!} + o(d^u) \\ &= \prod_{i=1}^m ((2 + \varepsilon)d\eta_i s_i^2)^{u_i} \frac{D_i}{u_i!} + o(d^u). \end{aligned}$$

et en raisonnant comme dans la démonstration du lemme précédent, on obtient la même formule pour $\dim \mathcal{E}$. Ainsi en utilisant le lemme 5.1.22, la dimension de $\text{Ker } \Psi'$ est au moins

$$\dim \Gamma_\delta(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d)) - \frac{\delta^m}{m!} \cdot (N_A + 1)^{m-1} \cdot 6^{m \dim(A \times P)} \cdot \prod_{i=1}^m (ds_i^2)^{u_i} \frac{D_i}{(u_i - 1)!} + o(d^u),$$

puis avec le lemme 5.1.21, on obtient la minoration

$$\dim \Gamma(X, \mathcal{L}(\varepsilon, s, d)) - \frac{\delta^m}{m!} \cdot [(N_A + 1)^{m-1} + 1] \cdot 6^{m \dim(A \times P)} \cdot \prod_{i=1}^m (ds_i^2)^{u_i} \frac{D_i}{(u_i - 1)!} + o(d^u),$$

Finalement avec le lemme 5.1.20 et en minorant, on obtient

$$\left(\varepsilon^{\dim(A \times P)} - \frac{\delta^m}{m!} \cdot [(N_A + 1)^{m-1} + 1] \cdot (6^{\dim(A \times P)} \dim(A \times P))^m \right) \left(\prod_{i=1}^m (ds_i^2)^{u_i} \frac{D_i}{u_i!} \right) + o(d^u),$$

puis en utilisant le point 5.1.6, on obtient le résultat. \square

Finalement, on peut majorer l'exposant de DIRICHLET. On a

$$\frac{m}{n - m} = \frac{(N_A + 1)^{m-1} \dim \mathcal{E}_\delta - \dim \text{Ker } \Psi'}{\dim \text{Ker } \Psi'} \leq \frac{(N_A + 1)^{m-1} \dim \mathcal{E}}{\dim \text{Ker } \Psi'} - 1,$$

que l'on peut majorer avec les résultats ci-dessus par

$$\frac{(N_A + 1)^{m-1} \cdot 6^{m \dim(A \times P)}}{c'} - 1 + o(1). \quad (5.1.24)$$

Construction des équations

Dans cette partie, on montre que l'on se trouve dans la même situation que la démonstration du [35, Proposition 4.2], ce qui permet de construire des équations décrivant $\text{Ker } \Psi'$. Rappelons que l'on a défini l'application Θ au point 5.1.17.

Lemme 5.1.25 - *Il existe une constante $c' > 0$ et une famille de polynômes $(P_{\ell, \ell'})_{0 \leq \ell, \ell' \leq N'_A}$ de multidegré $4\eta s^2$ en les $W^{(i)}$ et de hauteur au plus $c'|s^2|$ telle que le noyau de Ψ' est décrit par les équations*

$$\forall k_1, k_2, k_3 \in \llbracket 0, N'_A \rrbracket, \quad \Theta(F_{k_1} \cdot P_{k_2, k_3}^d - F_{k_2} \cdot P_{k_1, k_3}^d) = 0.$$

DÉMONSTRATION :

Par définition de Ψ' , les équations sont

$$k_1, k_2, k_3 \in \llbracket 0, N'_A \rrbracket, \quad \Theta(F_{k_1}) \otimes V_{k_2}^{\otimes d} \otimes V_{k_3}'^{\otimes d} - \Theta(F_{k_2}) \otimes V_{k_1}^{\otimes d} \otimes V_{k_3}'^{\otimes d} = 0.$$

On choisit une section globale non nulle sur X de la forme

$$r \in \llbracket 0, N'_A \rrbracket, \quad \bigotimes_{i=1}^m (X_{r_i}^{(i)})^{2\eta_i s_i^2}.$$

Le lemme 2.1.2 fournit des polynômes $(Q_{\ell, \ell'})_{0 \leq \ell, \ell' \leq N'_A}$ de multidegré $4d\eta s^2$ en les $X^{(i)}$ et de hauteur au plus $c'd \cdot |s^2|$ de sorte que si on multiplie chaque équation par la section ci-dessus, on obtient

$$\Theta(F_{k_1}) \otimes Q_{k_2, k_3}^d(X^{(1)}, \dots, X^{(m)}) - \Theta(F_{k_2}) \otimes Q_{k_1, k_3}^d(X^{(1)}, \dots, X^{(m)}) = 0.$$

En multipliant chacun des $Q_{\ell, \ell'}(X^{(1)}, \dots, X^{(m)})$ par une section globale non nulle sur X de la forme

$$\kappa \in \llbracket 0, N'_A \rrbracket, \quad \bigotimes_{i=1}^m (T_{\kappa_i}^{(i)})^{4\eta_i s_i^2},$$

on obtient des polynômes $R_{\ell, \ell'}$ en les variables $X^{(i)} \cdot T^{(i)}$. Ces polynômes sont homogènes de multidegré $4\eta s^2$ et les estimations de hauteurs restent inchangées. Finalement, il suffit de poser

$$P_{\ell, \ell'}(W^{(1)}, \dots, W^{(m)}) = R_{\ell, \ell'}(M_i^{-1} \cdot M^{-1} \cdot W^{(1)}, \dots, M_i^{-1} \cdot M^{-1} \cdot W^{(m)}).$$

Le multidegré de $P_{\ell, \ell'}$ est bien $4\eta s^2$ et comme M est fixé au départ et que les coefficients de M_i sont des entiers bornés par D_i , on obtient l'estimation de hauteur souhaitée. \square

Si F est une forme linéaire sur \mathcal{E}_δ , on l'identifie à ces coefficients dans la base fixée de \mathcal{E}_δ . En particulier, cela permet de définir la hauteur de F et le corps de nombres engendré par F . Le lemme précédent permet d'appliquer la méthode de RÉMOND pour obtenir des équations de hauteurs contrôlées.

Lemme 5.1.26 - *Il existe une constante $c' > 0$ ne dépendant que de la liste 5.1.10 ayant la propriété suivante : pour tout $d \in \mathbb{N}$ suffisamment divisible, il existe des formes linéaires F_1, \dots, F_b sur \mathcal{E}_δ décrivant $\text{Ker}(\Psi')$ telles que $\mathbb{Q}(F_1, \dots, F_b)$ soit indépendant de d et dont la hauteur vérifie*

$$h(F_1, \dots, F_b) \leq c'd \left(\sum_{i=1}^m s_i^2 \right) + o(d).$$

DÉMONSTRATION :

En utilisant le lemme précédent, la démonstration est analogue à celle [30, Partie 5.5] ou à la seconde partie de la preuve de la proposition [35, Proposition 4.2]. \square

Conclusion

On peut à présent démontrer la proposition 5.1.18 en appliquant le lemme de SIEGEL (Lemme 5.1.19). Le point 5.1.24 majore l'exposant de DIRICHLET par une constante ne dépendant que de la liste 5.1.10, tandis que le lemme précédent majore la hauteur du système et montre que $C_S(\mathbb{Q}(F_1, \dots, F_b)) = o(d)$.

5.1.4 Minoration de l'indice

Dans cette partie, nous allons prouver que la section f construite dans la partie précédente s'annule avec un indice élevé en x . On suit essentiellement [35, Partie 5], mais on doit modifier quelques estimations. Comme le morphisme

$$\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{u_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{u_m}$$

est étale au point x , on peut trouver un voisinage ouvert de x dans X au-dessus duquel $\Omega_{X/\bar{\mathbb{Q}}}$ ait pour base la famille $(dv_j^{(i)})_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq u_i$. On note $\partial_{v_j^{(i)}}$ les dérivations correspondantes qui sont données par

$$\partial_{v_j^{(i)}}(v_{j'}^{(i')}) = \delta_{i,i'} \delta_{j,j'}.$$

On pose pour tout élément $\kappa \in \mathbb{N}^{u_1} \times \dots \times \mathbb{N}^{u_m}$

$$\partial^\kappa = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{u_i} \frac{1}{\kappa_{i,j}!} \left(\partial_{v_j^{(i)}} \right)^{\kappa_{i,j}}.$$

Avec ces notations, rappelons comment on définit l'indice de f au point x relativement à $(2 + \varepsilon)d\eta s^2$. On écrit $f = \alpha \cdot g$ au voisinage de x où α est une section de \mathcal{O}_X et g est une section de $\mathcal{L}(\varepsilon, s, d)$ qui ne s'annule pas en x . On définit alors

$$\text{ind}(f, x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{u_i} \frac{\kappa_{i,j}}{(2 + \varepsilon)d\eta_i s_i^2} \in \mathbb{R} \mid \kappa \in \prod_{i=1}^m \mathbb{N}^{u_i}, \partial^\kappa(\alpha)(x) \neq 0 \right\}.$$

Remarquons que cette borne inférieure est un minimum car $f \neq 0$ par construction. Avec ces notations, nous allons montrer le résultat suivant.

Proposition 5.1.27 - *Il existe une constante $c' > 0$ telle que si d est suffisamment grand et divisible, alors $\text{ind}(f, x) \geq c'$.*

On considère le nombre

$$\Phi = (2 + \varepsilon) \sum_{i=1}^m d\eta_i s_i^2 h^w(\varphi \circ \chi_i(x_i)) - \sum_{i=1}^{m-1} \hat{d}h^w(s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1}) - \sum_{i=1}^m d\eta_i s_i^2 h_{\mathfrak{L}}^w(p_i)$$

qui est une hauteur de x par rapport au faisceau $\mathcal{L}(\varepsilon, s, d)$. Nous allons encadrer ce nombre afin d'obtenir le résultat que l'on souhaite. Par un calcul direct, remarquons que l'on a

$$h^w(\chi_i \circ \varphi(x_i)) \leq h(x_i) + h(F) + \log \left((N + 1) \frac{\max(D_i, 2)}{2} \right). \quad (5.1.28)$$

Majoration de Φ

La majoration ne pose pas de difficulté : on repasse à la hauteur de NÉRON-TATE et on utilise les inégalités de hauteurs données par les hypothèses du théorème 5.1.1 et celles définissant le m -uplet s dans le lemme 5.1.8.

Lemme 5.1.29 - *Il existe une constante $c' > 0$ telle que*

$$\Phi \leq ds_1^2(3m\varepsilon\hat{h}(a_1) + c').$$

DÉMONSTRATION :

On introduit le nombre

$$\hat{\Phi} = (2 + \varepsilon) \sum_{i=1}^m d\eta_i s_i^2 h(x_i) - \sum_{i=1}^{m-1} d\hat{h}(s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1}) - \sum_{i=1}^m d\eta_i s_i^2 h_{\mathcal{L}}(p_i).$$

En utilisant les points 5.1.28 et 5.1.5 avec $D_i \leq c_1$, on obtient une majoration de la forme

$$\Phi \leq \hat{\Phi} + c' d s_1^2.$$

Il suffit donc de majorer $\hat{\Phi}$. En utilisant la relation

$$\hat{h}(s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1}) + \hat{h}(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) = 2s_i^2 \hat{h}(a_i) + 2s_{i+1}^2 \hat{h}(a_{i+1}),$$

on obtient

$$\hat{\Phi} = \varepsilon \sum_{i=1}^m d\eta_i s_i^2 h(x_i) + \sum_{i=1}^{m-1} d\hat{h}(s_i a_i - s_{i+1} a_{i+1}) + \sum_{i=1}^m d\eta_i s_i^2 h_{\mathcal{L}}(p_i).$$

En utilisant le lemme 5.1.8 et l'inégalité $\hat{h}(a_i) \geq e \cdot h_{\mathcal{L}}(p_i)$, on obtient

$$\hat{\Phi} \leq \left[2\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{3}{e_1^2} + \frac{2}{\mu} \right] d \left(\sum_{i=1}^m s_i^2 \hat{h}(a_i) \right).$$

D'autre part, avec le point 5.1.7 et l'inégalité $\varepsilon < 1/3$, on obtient

$$2\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{3}{e_1^2} + \frac{2}{\mu} < 3\varepsilon,$$

tandis que le lemme 5.1.8 implique

$$\sum_{i=1}^m s_i^2 \hat{h}(a_i) \leq \left(1 + \frac{1}{2e_2} \right)^m m s_1^2 \hat{h}(a_1).$$

Ainsi, quitte à augmenter e_2 , on obtient le résultat. □

Minoration de Φ

Minorer Φ est plus délicat. Il faut utiliser que f est de petite hauteur et qu'elle s'annule le long de E . Rappelons que L est un corps de nombres contenant K , les coordonnées $x_j^{(i)}$ et les familles B_i . On commence par établir deux lemmes préliminaires en suivant [35].

Lemme 5.1.30 - *Pour tout $v \in M_L$ et tout $1 \leq i \leq m$, on a*

$$\max_{0 \leq j \leq N} \left| x_j^{(i)} \right|_v \leq D_i \cdot |B_i|_v \cdot \max_{0 \leq j \leq u_i} \left| x_j^{(i)} \right|_v.$$

DÉMONSTRATION :

On adapte la démonstration de [24, Lemme 2.4.10]. On note $0 \leq j_v \leq u_i$ un indice vérifiant

$$\left| x_{j_v}^{(i)} \right|_v = \max_{0 \leq j \leq u_i} \left| x_j^{(i)} \right|_v$$

et on fixe un indice $0 \leq j \leq N$. Si $\left| x_j^{(i)} \right|_v \leq \left| x_{j_v}^{(i)} \right|_v$, l'inégalité est élémentaire, on suppose donc que $\left| x_j^{(i)} \right|_v > \left| x_{j_v}^{(i)} \right|_v$. Par définition de $P_j^{(i)}$, on peut écrire

$$P_j^{(i)} = \left(W_j^{(i)} \right)^{D_i} - \sum_{k=1}^{D_i} \left(W_j^{(i)} \right)^{D_i-k} P_{j,k}^{(i)} \quad \text{avec} \quad \deg P_{j,k}^{(i)} = k.$$

Ce polynôme étant dans l'idéal de $\chi_i \circ \varphi(X_i)$, on obtient en spécialisant, puis en prenant la valeur absolue v -adique

$$\left| \frac{x_j^{(i)}}{x_{j_v}^{(i)}} \right|_v^{D_i} = \sum_{k=1}^{D_i} \left| \frac{x_j^{(i)}}{x_{j_v}^{(i)}} \right|_v^{D_i-k} \left| P_{j,k}^{(i)} \left(\frac{x_0^{(i)}}{x_{j_v}^{(i)}}, \dots, \frac{x_{u_i}^{(i)}}{x_{j_v}^{(i)}} \right) \right|_v.$$

Ainsi en divisant, on arrive à

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_j^{(i)}}{x_{j_v}^{(i)}} \right|_v &= \sum_{k=1}^{D_i} \left| \frac{x_j^{(i)}}{x_{j_v}^{(i)}} \right|_v^{1-k} \left| P_{j,k}^{(i)} \left(\frac{x_0^{(i)}}{x_{j_v}^{(i)}}, \dots, \frac{x_{u_i}^{(i)}}{x_{j_v}^{(i)}} \right) \right|_v \\ &\leq \sum_{k=1}^{D_i} \left| P_{j,k}^{(i)} \left(\frac{x_0^{(i)}}{x_{j_v}^{(i)}}, \dots, \frac{x_{u_i}^{(i)}}{x_{j_v}^{(i)}} \right) \right|_v \\ &\leq D_i \cdot |B_i|_v, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. □

Nous utiliserons le lemme suivant qui permet de contrôler les dérivées des polynômes F_k construit dans la partie précédente.

Lemme 5.1.31 - *On fixe des indices $k \in \llbracket 0, N'_A \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, u_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 0, u_m \rrbracket$. Pour tout élément $\kappa \in \mathbb{N}^{u_1} \times \dots \times \mathbb{N}^{u_m}$, il existe un polynôme $R \in K[(W_0^{(i)}, \dots, W_{u_i+1}^{(i)})_i]$ tel que*

(i) *Dans $K(X)$, on a la relation*

$$\partial^\kappa \left(\frac{F_k}{\prod_{i=1}^m \left(W_{j_i}^{(i)} \right)^{(2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2}} \right) = \frac{R}{\prod_{i=1}^m Q_i^{2|\kappa_i|} \left(W_{j_i}^{(i)} \right)^{2|\kappa_i|(D_i+1)+(2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2}}.$$

(ii) *Le multidegré de R est donné par $\deg_{W^{(i)}} R = (2 + \varepsilon)d\eta_i s_i^2 + 4D_i|\kappa_i|$,*

(iii) Il existe une constante $c' > 0$, tel que pour toute place $v \in M_L$, on a

$$h(\mathbf{R}) \leq h(\mathbf{F}_k) + c'd|s^2| + c' \sum_{i=1}^m |\kappa_i| (1 + h(\mathbf{B}_i)).$$

(iv) L'indice d'annulation de \mathbf{R} le long de E^m est au moins δ .

DÉMONSTRATION :

Il suffit d'appliquer [24, Lemme 2.4.6] aux polynômes \mathbf{F}_k . On obtient directement les points (i), (ii) et (iv). Pour le point (iii), en utilisant les notations de [24], on remarque que si l'on note

$$A_i = \max \left(\left\| \mathbf{P}_{u_i+1}^{(i)} \right\|_{1,v}, \dots, \left\| \mathbf{P}_N^{(i)} \right\|_{1,v} \right),$$

alors on a la majoration

$$|\mathbf{R}|_v \leq \|\mathbf{R}\|_{1,v} \leq \|\mathbf{F}_k\|_{1,v} \cdot \prod_{i=1}^m A_i^{2|\kappa_i|} \cdot \left((16u_i D_i^3)^{|\kappa_i|} \cdot 2^{u_i(2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2} \right)^{\delta_v}.$$

En effet, on peut utiliser la majoration $\|\mathbf{P}_j^{(i)}\|_{1,v} \leq A_i$ à la place de $\|\mathbf{P}_j^{(i)}\|_{1,v} \leq \|\tilde{f}_{Z_i}\|_{1,v}$ dans la démonstration de [24, Lemme 2.4.6]. En utilisant l'inégalité

$$\|\mathbf{F}_k\|_{1,v} \leq |\mathbf{F}_k|_v \cdot \prod_{i=1}^m \binom{N + (2 + \varepsilon)d\eta_i s_i^2}{N} \leq (N + 1)^{(2+\varepsilon)d|\eta s^2|} \cdot |\mathbf{F}_k|_v$$

et la majoration

$$A_i \leq \binom{D_i + u_i + 1}{D_i} \cdot |\mathbf{B}_i|_v \leq (N + 1)^{D_i} \cdot |\mathbf{B}_i|_v,$$

on obtient ainsi

$$|\mathbf{R}|_v \leq |\mathbf{F}_k|_v \cdot (N + 1)^{(2+\varepsilon)d|\eta s^2|} \cdot \prod_{i=1}^m \left[(N + 1)^{D_i} \cdot |\mathbf{B}_i|_v \right]^{2|\kappa_i|} \cdot \left((16u_i D_i^3)^{|\kappa_i|} \cdot 2^{u_i(2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2} \right)^{\delta_v}.$$

En multipliant par les degrés locaux, en sommant sur toutes les places $v \in M_L$ et en utilisant les majorations 5.1.9, on obtient le résultat. \square

Lemme 5.1.32 - Il existe une constante $c' > 0$ telle qu'on ait la minoration

$$\Phi \geq \frac{\tau\delta}{2} ds_1^2 \hat{h}(a_1) - c' \sigma ds_1^2 \hat{h}(a_1) + o(d),$$

où $\sigma = \text{ind}(f, x)$.

DÉMONSTRATION :

En fixant des coordonnées $(y_0^{(i)}, \dots, y_{N_A}^{(i)})$ pour $s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1}$, $(p_0^{(i)}, \dots, p_{N_P}^{(i)})$ pour p_i et en supposant qu'elles sont contenues dans L , on peut minorer Φ par

$$\sum_{v \in M_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log \left(\prod_{i=1}^m \max_{0 \leq j \leq u_i} |x_j^{(i)}|_v^{(2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} \min_{0 \leq j \leq N_A} |y_j^{(i)}|_v^{-d} \cdot \prod_{i=1}^m \min_{0 \leq j \leq N_P} |p_j^{(i)}|_v^{-d\eta_i s_i^2} \right).$$

Pour chaque $v \in M_L$, on désigne par j_v, k_v et ℓ_v des éléments réalisant les maximums et minimums ci-dessus, ce qui permet d'écrire

$$\Phi \geq \sum_{v \in M_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log \left| \prod_{i=1}^m \left(x_{j_v, i}^{(i)} \right)^{(2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} \left(y_{k_v, i}^{(i)} \right)^{-d} \cdot \prod_{i=1}^m \left(p_{\ell_v, i}^{(i)} \right)^{-d\eta_i s_i^2} \right|_v.$$

Ainsi, en introduisant la section

$$f_v = \bigotimes_{i=1}^m \left(W_{j_v, i}^{(i)} \right)^{\otimes (2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2} \otimes V'_{k_v}{}^{\otimes -d} \otimes \bigotimes_{i=1}^m \left(T_{\ell_v, i}^{(i)} \right)^{\otimes -d\eta_i s_i^2}$$

où V'_{k_v} correspond au plongement de SEGRE, on peut donc écrire

$$\Phi \geq \sum_{v \in M_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log |f_v(x)|_v. \quad (5.1.33)$$

D'autre part, par définition de \mathcal{F} , on peut écrire

$$f = F_{k_v} \otimes V'_{k_v}{}^{\otimes -d} \otimes \bigotimes_{i=1}^m \left(T_{\ell_v, i}^{(i)} \right)^{-d\eta_i s_i^2} \quad \text{et} \quad f = f_v \cdot \frac{F_k}{\prod_{i=1}^m \left(W_{j_v, i}^{(i)} \right)^{(2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2}}.$$

Si on note $\kappa \in \mathbb{N}^{u_1} \times \dots \times \mathbb{N}^{u_m}$ l'élément définissant l'indice de f , on en déduit par la formule de LEIBNIZ

$$(\partial^\kappa f)(x) = f_v(x) \cdot \partial^\kappa \left[\frac{F_k}{\prod_{i=1}^m \left(W_{j_v, i}^{(i)} \right)^{(2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2}} \right] (x).$$

Comme $(\partial^\kappa f)(x) \neq 0$, la formule du produit et le point 5.1.33 donnent

$$-\Phi \leq \sum_{v \in M_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log \left| \partial^\kappa \left[\frac{F_k}{\prod_{i=1}^m \left(W_{j_v, i}^{(i)} \right)^{(2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2}} \right] (x) \right|_v.$$

Par le lemme 5.1.31, la dérivée ci-dessus s'écrit

$$\frac{R_v}{\prod_{i=1}^m Q_i^{2|\kappa_i|} \left(W_{j_{v,i}}^{(i)} \right)^{2|\kappa_i|(D_i+1)+(2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2}}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{R_v}{\underbrace{\prod_{i=1}^m \left(W_{j_{v,i}}^{(i)} \right)^{\deg_{W^{(i)}} R_v}}_{\alpha_v}} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^m \frac{\left(W_{j_{v,i}}^{(i)} \right)^{2|\kappa_i| \cdot \deg Q_i}}{Q_i^{2|\kappa_i|}}}_{\beta_v}.$$

Ainsi, avec ces notations, on obtient la majoration

$$-\Phi \leq \sum_{v \in M_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log |\alpha_v(x)|_v + \sum_{v \in M_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log |\beta_v(x)|_v.$$

On note respectivement A et B les deux sommes ci-dessus. Par le point (iii) du corollaire 5.1.14, les termes en Q_i dans la seconde somme se simplifient par la formule du produit. Ainsi, avec $\deg Q_i = D_i - 1$, on obtient

$$B \leq \sum_{i=1}^m 2|\kappa_i|(D_i - 1)h^w(\chi_i \circ \varphi(x_i)).$$

Puis en utilisant le point 5.1.28 et la majoration

$$h^w(x_i) \leq h(x_i) + C_{\text{haut}} \leq 2\hat{h}(a_i) + C_{\text{haut}},$$

on obtient

$$B \leq c' \cdot \sum_{i=1}^m |\kappa_i| \hat{h}(a_i). \quad (5.1.34)$$

Il reste à majorer A. On note \mathcal{F}_δ le sous-espace vectoriel de $K[(W_0^{(i)}, \dots, W_{u_i+1}^{(i)})_i]$ des polynômes multihomogènes de multidegré celui de R_v s'annulant le long de E^m avec un indice au moins δ . On a la majoration

$$\dim \mathcal{F}_\delta \leq \prod_{i=1}^m \binom{(2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2 + 4D_i|\kappa_i| + u_i + 1}{u_i + 1},$$

et par définition de κ , on a aussi

$$|\kappa_i| \leq (2+\varepsilon)d\eta_i s_i^2 \sigma \leq c' d s_i^2 \sigma. \quad (5.1.35)$$

Quitte à supposer que $\sigma \leq 1$ (si ce n'est pas le cas, la proposition 5.1.27 est immédiate), on obtient que $\dim \mathcal{F}_\delta$ est majorée par un polynôme en d , donc $\log \dim \mathcal{F}_\delta = o(d)$. Ainsi, si l'on désigne par \mathcal{B} la base de \mathcal{F}_δ formée des monômes contenus dans cet espace, on obtient la majoration

$$A \leq h(R_v) + \sum_{v \in M_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log \max_{\mathfrak{m} \in \mathcal{B}} \left| \mathfrak{m} \left[\left(\frac{x_0^{(i)}}{x_{j_{v,i}}^{(i)}}, \dots, \frac{x_{u_i+1}^{(i)}}{x_{j_{v,i}}^{(i)}} \right)_i \right] \right|_v + o(d).$$

D'autre part, si l'on note $0 \leq r_{v,i} \leq N$ un indice tel que

$$\left| x_{r_{v,i}}^{(i)} \right|_v = \max_{0 \leq r \leq N} \left| x_r^{(i)} \right|_v,$$

et en utilisant le lemme 5.1.30, on obtient

$$\left| \mathfrak{m} \left[\left(\frac{x_0^{(i)}}{x_{j_{v,i}}^{(i)}}, \dots, \frac{x_{u_i+1}^{(i)}}{x_{j_{v,i}}^{(i)}} \right)_i \right] \right|_v \leq \left| \mathfrak{m} \left[\left(\frac{x_0^{(i)}}{x_{r_{v,i}}^{(i)}}, \dots, \frac{x_{u_i+1}^{(i)}}{x_{r_{v,i}}^{(i)}} \right)_i \right] \right|_v \cdot \prod_{i=1}^m (D_i \cdot |B_i|_v)^{\deg_{\mathbb{W}^{(i)}} R_v}.$$

Si $w \in M_L$ est une place ne se trouvant pas au-dessus d'une place de \mathcal{S} , on majore le premier facteur ci-dessus par 1. Si $w \in M_L$ est au-dessus d'une place $v \in \mathcal{S}$, on va obtenir une majoration plus fine. Par hypothèse sur l'indice de \mathfrak{m} le long de E^m , on peut majorer le premier facteur du produit ci-dessus par

$$\prod_{i=1}^m \left(\frac{|x_0^{(i)}|_v}{|x_{r_{v,i}}^{(i)}|_v} \right)^{j_i} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^m \frac{j_i}{ds_i^2} \geq \delta.$$

D'une part, le lemme 5.1.12 donne

$$\prod_{v \in \mathcal{S}} \prod_{\substack{w \in M_L \\ w|v}} \left(\frac{|x_0^{(i)}|_w}{|x_{r_{w,i}}^{(i)}|_w} \right)^{\Delta_w} \leq c' \cdot \exp \left(-\tau \cdot \hat{h}(a_i) \right),$$

tandis que avec le lemme 5.1.8, on obtient

$$\sum_{i=1}^m j_i \cdot \hat{h}(a_i) \geq \sum_{i=1}^m \frac{j_i}{ds_i^2} ds_i^2 \hat{h}(a_i) \geq d\delta \left(1 + \frac{1}{2e_2} \right)^{2-2m} s_1^2 \hat{h}(a_1).$$

et en utilisant le point 5.1.35, on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^m j_i \leq c'd|s^2|.$$

Ainsi en combinant ces inégalités, on obtient une majoration de la forme

$$A \leq h(R_v) + \sum_{i=1}^m 2|\kappa_i|(D_i + 1)h(B_i) + c'd|s^2| - \tau\delta ds_1^2 \hat{h}(a_1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2e_2} \right)^{2-2m} + o(d).$$

Quitte à augmenter e_2 , puis en utilisant le point (iii) du lemme 5.1.31 et la proposition 5.1.18, on obtient

$$A \leq c'd|s^2| + c' \sum_{i=1}^m |\kappa_i| h(B_i) - \frac{\tau\delta}{2} ds_1^2 \hat{h}(a_1) + o(d),$$

puis en utilisant la majoration 5.1.34, on a ainsi

$$-\Phi \leq c'd|s^2| + c' \sum_{i=1}^m |\kappa_i| (h(B_i) + \hat{h}(a_i)) - \frac{\tau\delta}{2} ds_1^2 \hat{h}(a_1) + o(d).$$

En utilisant le point 5.1.35, on obtient

$$-\Phi \leq c'd|s^2| + c'\sigma d \sum_{i=1}^m s_i^2 (h(B_i) + \hat{h}(a_i)) - \frac{\tau\delta}{2} ds_1^2 \hat{h}(a_1) + o(d).$$

Finalement avec le lemme 1.3.7, les inégalités du point 5.1.9 et le lemme 5.1.8, on arrive finalement à

$$-\Phi \leq c'\sigma ds_1^2 \hat{h}(a_1) - \frac{\tau\delta}{2} ds_1^2 \hat{h}(a_1) + o(d),$$

ce qui donne le résultat. \square

Conclusion

On en déduit finalement la proposition 5.1.27. En utilisant les lemmes 5.1.29 et 5.1.4, puis en simplifiant par ds_1^2 , on obtient

$$\frac{\tau\delta}{2} \hat{h}(a_1) - c'\sigma \hat{h}(a_1) + o(1) \leq 3m\varepsilon \hat{h}(a_1) + c'.$$

Ainsi, on obtient la minoration

$$\sigma \geq \frac{1}{c'} \left(\frac{\tau\delta}{2} - 3m\varepsilon \right) - \frac{2c'}{e_3} + o(1).$$

Quitte à augmenter e_3 et si d est suffisamment grand, on obtient

$$\sigma \geq \frac{1}{2c'} \left(\frac{\tau\delta}{2} - 3m\varepsilon \right),$$

ce qui donne le résultat par le choix de δ et ε (voir le point 5.1.6).

5.1.5 Application du théorème du produit

On suppose dans la suite que les constantes e_1, e_2, e_3 et μ sont suffisamment grandes pour que la proposition 5.1.27 s'applique. On commence par montrer l'existence d'une section sur $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{u_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{u_m}$ d'indice élevé.

Lemme 5.1.36 - *Si d est suffisamment grand et divisible, il existe une section globale*

$$G \in \Gamma \left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{u_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{u_m}, \mathcal{O} \left(\left(\prod_{i=1}^m D_i \right) (2 + \varepsilon) d \eta s^2 \right) \right)$$

d'indice en $\pi(x)$ relativement à ds^2 au moins $\text{ind}(f, x)$ et vérifiant la majoration

$$h(G) \leq cd \left(\sum_{i=1}^m s_i^2 \right) + o(d),$$

où la constante c ne dépend que de la liste 5.1.10.

DÉMONSTRATION :

La démonstration est identique à celle du [35, Lemme 5.5]. □

On peut à présent terminer la démonstration de la proposition 5.1.13. Pour cela, il suffit d'appliquer le théorème du produit (voir théorème 1.3.10) ci-dessus au polynôme G fourni par le lemme 5.1.36. On commence par vérifier que l'on dispose de ces hypothèses. D'une part, le lemme 5.1.27 permet de minorer $\text{ind}(f, x)$ par un réel c' et en posant $\sigma_0 = \min(c', (2u^2)^{-u})$, on peut supposer que le point (iii) est vérifié. D'autre part, le lemme précédent nous assure que G s'annule avec un indice suffisant en x relativement à ds^2 et on a

$$\frac{ds_i^2}{ds_{i+1}^2} = \frac{s_i^2}{s_{i+1}^2} \geq e_2^2.$$

Ainsi, quitte à augmenter e_2 , le théorème du produit s'applique et on obtient un polynôme homogène $U \in \mathbb{Q}[W_0^{(\ell)}, \dots, W_{u_\ell}^{(\ell)}]$ pour un indice $1 \leq \ell \leq m$ vérifiant les inégalités ci-dessus. On a directement les trois premiers points de la proposition 5.1.13, il suffit donc pour terminer de vérifier le quatrième. Or en majorant les différents termes, on en déduit

$$ds_i^2 h(U) \leq cd \left(\sum_{i=1}^m s_i^2 \right) + o(d).$$

Ainsi en simplifiant par d , on obtient le résultat pour d suffisamment grand.

5.2 Démonstration des résultats

On considère un sous-schéma fermé intègre V de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P}$. On considèrera le degré de V relativement au plongement de SEGRE

$$V \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_P} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \quad \text{avec} \quad N = (N_A + 1)(N_P + 1) - 1$$

On fixe un corps de nombres sur lequel sont définis A , P , V ainsi que le plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}$. On fixe une partie finie $\mathcal{S} \subset M_K$ et on considère, comme dans la partie précédente, le nombre $d_{\mathcal{S}}(a, V_p)$ pour $(a, p) \in (A \times P)(\bar{\mathbb{Q}})$. En utilisant l'inégalité de VOJTA de la partie précédente, nous allons montrer le théorème D de l'introduction.

Théorème 5.2.1 - Si $\tau > 0$ et $\xi > 0$ sont des réels, alors il existe une constante $\mu \geq 0$ ayant la propriété suivante : si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un sous-groupe de rang fini, alors il existe une constante $\nu \geq 0$ telle que pour tout $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, les points $a \in \Gamma$ tels que

$$0 < d_S(a, V_p) \leq \xi \cdot \exp(-\tau \cdot \hat{h}(a))$$

vérifient l'inégalité

$$\hat{h}(a) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu.$$

De plus, on peut prendre

$$\mu = \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{2^{N_A} \cdot 6^m \cdot m^2 \cdot (\deg V)^{N_A+1}}{\min(\tau, 1)} \right)^m.$$

Dans le cas particulier où V est donné par les zéros d'un polynôme bihomogène de bidegré (r, s) avec $r, s \geq 1$, on peut utiliser

$$\mu = \binom{N_A + r}{N_A}^m \cdot \frac{r^{m+1} \cdot 6^{m^2} \cdot m^{2m}}{s \cdot \min(\tau, 1)^m \cdot m!}.$$

DÉMONSTRATION :

On introduit l'ensemble $\Omega_V(\tau)$ donné par

$$\left\{ (a, p) \in (A \times P)(\bar{\mathbb{Q}}) \mid a \in \Gamma \text{ et } 0 < d_S(a, V_p) \leq \xi \cdot \exp(-\tau \cdot \hat{h}(a)) \right\}.$$

On se ramène au cas où V est une hypersurface de $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_A} \times \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{N_P}$. En appliquant [29, Proposition 6.1], on obtient des polynômes homogènes P_1, \dots, P_s de degré $\deg(V)$ de sorte que l'image de $V \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^N$ soit

$$Z(P_1) \cap \dots \cap Z(P_s).$$

En composant ces polynômes avec le plongement de SEGRE, on obtient des polynômes bihomogènes $F_1, \dots, F_r \in \bar{\mathbb{Q}}[X, Y]$ de bidegré $(\deg V, \deg V)$ de sorte que

$$V = Z(F_1) \cap \dots \cap Z(F_r).$$

En particulier, on obtient l'inclusion

$$\Omega_V(\tau) \subset \Omega_{Z(F_1)}(\tau) \cup \dots \cup \Omega_{Z(F_r)}(\tau).$$

Il suffit donc de montrer le résultat quand $V = Z(F)$ où F est un polynôme bihomogène de bidegré $(\deg V, \deg V)$.

On s'est donc ramené dans les conditions d'application de l'inégalité de VOJTA établie dans la partie précédente (corollaire 5.1.3) qui fournit des constantes $e_1, e_2, e_3, \mu \in \mathbb{N}^*$. On fixe un sous-groupe $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ de rang fini et un réel $\varepsilon \geq 0$. On désigne par $(a_i, p_i)_{i \in I}$ l'ensemble des points de $(A \times P)(\bar{\mathbb{Q}})$ tels que

$$a_i \in \Gamma, \quad \hat{h}(a_i) \geq e_3, \quad \hat{h}(a_i) \geq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p_i) \quad \text{et} \quad 0 < d_S(a_i, V_{p_i}) \leq \exp(-\tau \cdot \hat{h}(a_i)).$$

Par le point (ii) du théorème 1.1.3, l'application $\sqrt{\hat{h}} : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ s'étend en une norme à l'espace vectoriel $E = A(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On applique le lemme 1.4.7 en prenant

$$F = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = \sqrt{\hat{h}}, \quad c_1 = e_1, \quad c_3 = \sqrt{e_3} \quad \text{et} \quad \eta = \sqrt{\varepsilon}.$$

Ainsi, on peut recouvrir $\{a \in \Gamma \mid \hat{h}(a) \geq e_3\}$ par un nombre fini d'ensembles dans chacun desquels deux points $a, b \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifient

$$\hat{h} \left(\frac{a}{\sqrt{\hat{h}(a)}} - \frac{b}{\sqrt{\hat{h}(b)}} \right) \leq \frac{1}{e_1^2}.$$

Ainsi l'inégalité de VOJTA montre que l'ensemble $(\hat{h}(a_i))_{i \in I}$ est majoré par un réel $\nu' \geq e_3$ (sinon on pourrait exhiber des points $(a_{i_1}, p_{i_1}), \dots, (a_{i_m}, p_{i_m}) \in (A \times P)(\bar{\mathbb{Q}})$ la contredisant). On a donc bien l'inégalité de hauteurs annoncée en posant

$$\nu = \nu' - \mu \cdot \min \left(\inf_{p \in P(\bar{\mathbb{Q}})} h_{\mathcal{L}}(p), 0 \right).$$

De plus, on obtient la valeur de μ annoncée en considérant celle donnée par l'inégalité de VOJTA (corollaire 5.1.3) pour $(r, s) = (\deg V, \deg V)$, puis en utilisant la majoration

$$\binom{N_A + \deg V}{N_A} \leq (\deg(V) + 1)^{N_A} \leq 2^{N_A} (\deg V)^{N_A}.$$

Dans le cas où V est une hypersurface au départ, on peut utiliser son bidegré dans la formule pour μ , ce qui donne le résultat. \square

Pour finir, on fixe un ensemble fini $\mathcal{S} \subset M_K$ contenant toutes les places infinies de K . Si L/K est une extension finie et si $E = Z(F)$ est un hyperplan de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}$, les points \mathcal{S} -entiers de $(A \setminus E)(L)$ sont

$$(A \setminus E)(\mathcal{O}_{L, \mathcal{S}}) = \left\{ a \in A(L) \mid \forall v \notin \mathcal{S}, \forall w \in M_{L(F)} \text{ avec } w \mid v, \text{ on a } \left| \frac{a}{F(a)} \right|_w \leq 1 \right\}$$

où $L(F)$ est le corps de nombres engendré par L et les coefficients de F . En appliquant le résultat précédent, on obtient le corollaire suivant sur les points entiers d'une variété abélienne.

Corollaire 5.2.2 - *Il existe une constante $\mu \geq 0$ ayant la propriété suivante : si L/K est une extension finie, alors il existe une constante $\nu \geq 0$ telle que pour tout hyperplan $E = Z(F)$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_A}$, les points entiers $a \in (A \setminus E)(\mathcal{O}_{L, \mathcal{S}})$ vérifient l'inégalité*

$$\hat{h}(a) \leq \mu \cdot h(F) + \nu.$$

De plus, on peut prendre

$$\mu = \frac{1}{m!} \left((N_A + 1) \cdot 6^m \cdot m^2 \right)^m \quad \text{où} \quad m = \dim A + N_A + 1.$$

DÉMONSTRATION :

On note $\hat{h}^w : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ la hauteur de WEIL induite par le plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{N}_A}$ et on fixe une constante $C_{\text{haut}} \geq 0$ telle que

$$\forall a \in A(\bar{\mathbb{Q}}), \quad |\hat{h}(a) - \hat{h}^w(a)| \leq C_{\text{haut}}.$$

Si $a \in (A \setminus E)(\mathcal{O}_{L,S})$ où $E = Z(F)$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} \hat{h}^w(a) &\leq \sum_{v \in \mathcal{S}} \sum_{\substack{w \in M_L \\ w|v}} \Delta_w \log \max \left(\left| \frac{a_0}{F(a)} \right|_v, \dots, \left| \frac{a_N}{F(a)} \right|_v \right) \\ &\leq \sum_{v \in \mathcal{S}} \sum_{\substack{w \in M_L \\ w|v}} \Delta_w \log \frac{\|a\|_{2,v}}{|F(a)|_v}. \end{aligned}$$

Quitte à supposer qu'un coefficient de F vaut 1 et en utilisant le lemme 1.1.5, on obtient

$$\hat{h}^w(a) \leq \sum_{v \in \mathcal{S}} \sum_{\substack{w \in M_L \\ w|v}} \Delta_w \log \frac{1}{d_w(a, E)},$$

puis en passant à l'exponentielle

$$0 < d_S(a, V_p) \leq \exp \left(-\hat{h}^w(a) \right) \leq \exp(C_{\text{haut}}) \cdot \exp \left(-\hat{h}(a) \right).$$

Ainsi, on obtient le résultat en appliquant le théorème précédent au sous-schéma fermé V de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{N}_A} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{N}_A}$ d'équations

$$a_0 p_0 + \dots + a_N p_N = 0$$

avec les constantes $\tau = 1$ et $\xi = \exp(C_{\text{haut}})$ et le groupe de type fini $\Gamma = A(L)$. □

- [1] D. ABRAMOVICH – « Subvarieties of semiabelian varieties », *Compositio Math.* **90** (1994), no. 1, p. 37–52.
- [2] A. BÉRCZES, J.-H. EVERTSE & N. GYÖRY – « Effective results for linear equations in two unknowns from a multiplicative division group », *Acta Arith.* **136** (2009), no. 4, p. 331–349.
- [3] E. BOMBIERI – « On G -functions », in *Recent progress in analytic number theory, Vol. 2 (Durham, 1979)*, Academic Press, London, 1981, p. 1–67.
- [4] E. BOMBIERI – « Errata-corrige : “The Mordell conjecture revisited” [Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **17** (1990), no. 4, 615–640; MR1093712 (92a :11072)] », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **18** (1991), no. 3, p. 473.
- [5] E. BOMBIERI & W. GUBLER – *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs, vol. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [6] A. CHAMBERT-LOIR – « Points de petite hauteur sur les variétés semi-abéliennes », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33** (2000), no. 6, p. 789–821.
- [7] S. DAVID & P. PHILIPPON – « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes. II », *Comment. Math. Helv.* **77** (2002), no. 4, p. 639–700.
- [8] J.-H. EVERTSE – « Points on subvarieties of tori », in *A panorama of number theory or the view from Baker’s garden (Zürich, 1999)*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, p. 214–230.
- [9] G. FALTINGS – « Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern », *Invent. Math.* **73** (1983), no. 3, p. 349–366.
- [10] G. FALTINGS – « Diophantine approximation on abelian varieties », *Ann. of Math. (2)* **133** (1991), no. 3, p. 549–576.
- [11] A. GROTHENDIECK – « Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1961), no. 8, p. 222.
- [12] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

- [13] M. HINDRY – « Autour d’une conjecture de Serge Lang », *Invent. Math.* **94** (1988), no. 3, p. 575–603.
- [14] M. HINDRY & J. H. SILVERMAN – *Diophantine geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000, An introduction.
- [15] C. JADOT – « Critères pour l’indépendance algébrique et linéaire », Thèse, Université Paris VI, 1996.
- [16] S. LANG – *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [17] — , *Algebraic number theory*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 110, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [18] M. LAURENT – « Équations diophantiennes exponentielles », *Invent. Math.* **78** (1984), no. 2, p. 299–327.
- [19] R. LAZARSFELD – *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Classical setting : line bundles and linear series.
- [20] Q. LIU – *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002, Translated from the French by Reinie Ern e, Oxford Science Publications.
- [21] M. MCQUILLAN – « Quelques compléments à une démonstration de Faltings », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **319** (1994), no. 7, p. 649–652.
- [22] — , « Division points on semi-abelian varieties », *Invent. Math.* **120** (1995), no. 1, p. 143–159.
- [23] D. MUMFORD – *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, vol. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 2008, With appendices by C. P. Ramanujam and Yuri Manin, Corrected reprint of the second (1974) edition.
- [24] M. PÉGOURIÉ-GONNARD – « Approximation diophantienne dans les variétés abéliennes », Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2012.
- [25] P. PHILIPPON – « Sur des hauteurs alternatives. I », *Math. Ann.* **289** (1991), no. 2, p. 255–283.
- [26] — , « Sur des hauteurs alternatives. III », *J. Math. Pures Appl. (9)* **74** (1995), no. 4, p. 345–365.
- [27] — , « Diophantine geometry », in *Introduction to algebraic independence theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1752, Springer, Berlin, 2001, p. 83–94.
- [28] B. POONEN – « Mordell-Lang plus Bogomolov », *Invent. Math.* **137** (1999), no. 2, p. 413–425.
- [29] G. RÉMOND – « Décompte dans une conjecture de Lang », *Invent. Math.* **142** (2000), no. 3, p. 513–545.
- [30] — , « Inégalité de Vojta en dimension supérieure », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **29** (2000), no. 1, p. 101–151.

-
- [31] — , « Géométrie diophantienne multiprojective », in *Introduction to algebraic independence theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1752, Springer, Berlin, 2001, p. 95–131.
- [32] — , « Sur les sous-variétés des tores », *Compositio Math.* **134** (2002), no. 3, p. 337–366.
- [33] — , « Approximation diophantienne sur les variétés semi-abéliennes », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **36** (2003), no. 2, p. 191–212.
- [34] — , « Borne générique pour le problème de Mordell-Lang », *Manuscripta Math.* **118** (2005), no. 1, p. 85–97.
- [35] — , « Inégalité de Vojta généralisée », *Bull. Soc. Math. France* **133** (2005), no. 4, p. 459–495.
- [36] P. VOJTA – « Integral points on subvarieties of semiabelian varieties. I », *Invent. Math.* **126** (1996), no. 1, p. 133–181.
- [37] — , « Integral points on subvarieties of semiabelian varieties. II », *Amer. J. Math.* **121** (1999), no. 2, p. 283–313.

On fixe un sous-schéma fermé V de $A \times P$ où A est une variété semi-abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et P est un schéma projectif sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ est un groupe de rang fini, on sait par l'ancienne conjecture de MORDELL-LANG que pour chaque $p \in P(\bar{\mathbb{Q}})$, il existe des points $a_i \in V_p(\bar{\mathbb{Q}})$ et des sous-variétés semi-abéliennes B_i de A vérifiant $a_i + B_i \subset V_p$ de sorte que l'on puisse écrire une égalité de la forme


$$V_p(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma = \bigcup_{i=1}^n (a_i + B_i(\bar{\mathbb{Q}})) \cap \Gamma$$

Dans cette thèse, nous montrerons qu'il existe deux constantes $\mu > 0$ et $\nu > 0$ de sorte que l'on puisse imposer la condition supplémentaire

$$h_{\mathcal{L}}(a_i) \leq \mu \cdot h_{\mathcal{L}}(p) + \nu$$


où $h_{\mathcal{L}} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_{\mathcal{L}} : P(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont des hauteurs associées respectivement à des faisceaux inversibles amples sur A et P . La constante μ sera indépendante de Γ , ce qui ne sera pas le cas de la constante ν . En particulier, en appliquant nos résultats aux cas toriques, on obtiendra une majoration de la forme ci-dessus pour les solutions d'une équation aux unités.

Dans un second temps, on établira un résultat de la même forme pour le théorème d'approximation de FALTINGS dans une variété abélienne. Nous en déduisons une majoration de la forme ci-dessus pour les points entiers d'une variété abélienne privée d'un hyperplan.



INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
 Université de Strasbourg et CNRS
 7 Rue René Descartes
 67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29
 Fax 03 68 85 03 28
www-irma.u-strasbg.fr
irma@math.unistra.fr



IRMA
 Institut de Recherche
 Mathématique Avancée

IRMA 2015/001
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01109761>

ISSN 0755-3390