

ÉCOLE DOCTORALE _____ ED269 _____

[IRMA]

THÈSE présentée par :

[Clément GUERIN]

soutenue le : 22 juin 2016

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : Mathématiques

Singularités orbifoldes de la variété des caractères

THÈSE dirigée par :

[M. GUICHARD Olivier]

Professeur, université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

[M. FALBEL Elisha]

[M. LAWTON Sean]

Professeur, université Paris 6 (Pierre et Marie Curie)

Associate Professor, George Mason University (Fairfax, USA)

AUTRES MEMBRES DU JURY :

[M. FLOCK Vladimir]

[M. HEUSENER Michael]

[M. SOUTO Juan]

Professeur, université de Strasbourg

Professeur, université Blaise-Pascal Clermont II

Professeur, université de Rennes 1.

Remerciements

À l'issue de ces trois années de thèse, je me rends compte que de nombreuses personnes m'ont aidé, directement ou indirectement, dans ce travail (ce marathon, parfois) si particulier « d'apprenti-chercheur » qu'est le doctorat.

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse Olivier Guichard, pour m'avoir soutenu dans mon parcours. D'abord pour mon mémoire de M2 et ensuite durant la thèse. Sa patience, son savoir et ses remarques m'ont toujours permis de mieux comprendre les difficultés auxquelles j'étais confronté et de les surmonter.

Je remercie chaleureusement les examinateurs Vladimir Fock, Michael Heusener, Juan Souto et les rapporteurs Sean Lawton et Elisha Falbel d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Durant cette thèse, Le soutien financier du GEAR (Geometry and analysis on the representation variety) a incontestablement été important pour moi. Ce réseau m'a permis de rencontrer de grand(e)s mathématicien(ne)s, à Ann Arbor et à Berkeley par exemple, durant d'excellentes conférences.

Le GEAR m'a aussi permis de travailler à Fairfax avec M. Sean Lawton sur les « mots spéciaux ». À cette occasion, j'ai pu travailler avec quelques étudiants : Mary, Patrick, Tim et Vishal. Leur esprit vif et leur bonne humeur ont fait de ce mois de travail à l'étranger un véritable plaisir pour moi. Je salue d'ailleurs leur résilience pour avoir supporté mon accent anglais « à la française » si douloureux pour les oreilles anglaises. Cette expérience a été très enrichissante pour moi et je remercie à nouveau Sean Lawton de m'avoir accueilli au sein de la *George Mason University*.

J'ai le sentiment de devoir remercier tous les professeurs de mathématiques dont j'ai eu le plaisir de suivre les cours et qui ont, à n'en pas douter, alimenté ma curiosité mathématique. Parmi ceux-là, je citerai M. Frédéric Sebbag, mon professeur de mathématiques de Terminale avec lequel j'ai pu commencer à apprécier la rigueur mathématique et M. Damien Millet, mon professeur de mathématiques de première année de CPGE dont le style si particulier m'a donné envie d'aller plus loin en mathématiques.

Je me sens aussi redevable vis-à-vis de l'université de Strasbourg. L'institution, tout d'abord, qui m'a fourni un cadre de travail idéal pendant trois

ans, du point de vue de la recherche mais m'a également permis de donner des cours en licence. Le personnel administratif en général dont la gentillesse et la bonne humeur m'ont rendu les tâches administratives si faciles.

Il me faut aussi citer les collègues doctorants de l'université de Strasbourg, Mohamad, Vincent, Stéphane, Amaury, Jean-Baptiste, Romain... et d'autres personnes, Arnaud, Armand... Que ce soit pour les mathématiques ou pour des discussions plus terre-à-terre, il est toujours important de pouvoir discuter librement avec des collègues et amis. Quand j'ai eu besoin de ces gens, ils ont été là pour moi et j'espère pouvoir le leur rendre un jour.

De manière générale, ce que doit un enfant à ses parents est indicible, mais j'ai le sentiment que dans notre cas c'est encore plus vrai. C'est pourquoi j'ai décidé de dédier cette thèse à mes parents, Marie-Christine et Jean-Marc.

Merci à mes frères François et Guillaume pour avoir cru en moi. Merci à leurs femmes respectives Julie et Gaëlle, à mes nièces Youna et Noëlle, à mes grand-mères Evelyne et Jacqueline, merci pour la joie de ces repas de famille qui sont des rappels de ce que la vie apporte de meilleur.

Merci, enfin, à celle que j'aime. Ces quelques notes exprimeront avec simplicité ce que je tairai par pudeur.



Opus 9 numéro 2, Chopin.

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au lieu orbifold de la variété des caractères. En effet, il a été remarqué, par exemple dans [Sik12], que si l'on restreint la variété des caractères d'un groupe fuchsien dans un groupe de Lie complexe semi-simple aux représentations irréductibles alors elle admet naturellement une structure orbifolde.

On construit cette orbifolde en quotientant l'ensemble des représentations irréductibles du groupe fuchsien vers le groupe de Lie semi-simple par l'action de conjugaison du groupe de Lie. Après avoir montré que cet ensemble des représentations irréductibles du groupe fuchsien vers un groupe de Lie semi-simple est une variété complexe, on en conclut que la partie irréductible de la variété des caractères est une orbifolde.

Les groupes d'isotropie locale de cette orbifolde s'interprètent comme des centralisateurs de représentations irréductibles modulo le centre du groupe de Lie considéré. Le lieu orbifold est alors, l'ensemble des classes de conjugaison dont le groupe d'isotropie local n'est pas trivial.

L'objet du chapitre 1 est de justifier que cette construction est cohérente. Même si le résultat a déjà été démontré, nous avons choisi, vu que c'est le sujet principal de la thèse d'en rappeler les grandes lignes. Nous en profitons pour rappeler des résultats sur la variété des représentations comme variété algébrique ainsi que les fondamentaux sur les orbifoldes.

Dans les trois chapitres suivants (ce qui fait le corps de la thèse), nous fixons un groupe de Lie G et nous cherchons à comprendre le lieu orbifold de la variété des caractères. Le principe général à l'oeuvre dans ce mémoire est que pour étudier le lieu orbifold, il nous faut comprendre les centralisateurs non-triviaux des représentations irréductibles. Dans chacun des cas, nous devons, avant même de pouvoir considérer l'aspect géométrique de description du lieu orbifold, classifier ces centralisateurs à conjugaison près.

Ce sont donc les représentations irréductibles à centralisateur non-trivial qui ont une importance particulière. On dit qu'elles sont **exceptionnelles** (traduction assez libre de *bad representations* dans [Sik12]). Par extension,

on dit qu'un sous-groupe d'un groupe de Lie complexe semi-simple est **exceptionnel** s'il est irréductible et son centralisateur n'est pas réduit au centre du groupe de Lie. Si Γ est un groupe de type fini et G un groupe de Lie complexe, le lieu singulier de la variété des caractères est défini comme l'ensemble des classes de conjugaison de représentations exceptionnelles (si Γ est fuchsien, c'est le lieu orbifold).

Il est alors naturel de donner un nom aux groupes de Lie qui n'ont pas de sous-groupes exceptionnels. On dira qu'ils sont **CI** (terminologie de [Sik12]). Une conséquence directe du lemme de Schur est que $SL(n, \mathbb{C})$ est CI. Sikora pose la question suivante « est-ce que ce sont les seuls groupes CI, parmi les groupes semi-simples ? » Dans cette thèse, nous allons aussi nous intéresser à cette question. L'intérêt, par rapport au lieu orbifold, est que si un groupe de Lie G est CI alors pour tout groupe fuchsien, la partie irréductible de la variété des caractères est non-seulement une orbifold mais est, en fait, une variété.

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons au cas où G est égal au groupe $PSL(p, \mathbb{C})$. Nous démontrons, dans ce chapitre, qu'il n'existe, à conjugaison près, que deux centralisateurs de sous-groupes exceptionnels : les groupes \mathbb{Z}/p et $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$.

Dans la suite, nous décrivons l'ensemble des classes de conjugaison de représentations exceptionnelles d'un groupe de type fini Γ vers $PSL(p, \mathbb{C})$. L'idée est la suivante, si l'on fixe un sous-groupe G de $PSL(p, \mathbb{C})$ isomorphe à \mathbb{Z}/p qui est le centralisateur d'un sous-groupe exceptionnel de $PSL(p, \mathbb{C})$ alors toute représentation exceptionnelle est conjuguée à une représentation de Γ dans $Z_{PSL(p, \mathbb{C})}(G)$.

Nous décrivons la variété des caractères de Γ dans le groupe $Z_{PSL(p, \mathbb{C})}(G)$ et nous en déduisons le lieu singulier de la variété des caractères de Γ dans $PSL(p, \mathbb{C})$.

Nous constatons en fait que le lieu orbifold est la réunion de certains sous-espaces homéomorphes à des groupes de cohomologie et que les intersections de ces sous-espaces sont donnés par des classes de conjugaison de représentations exceptionnelles dont le centralisateur est isomorphe à $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$. Cela est décrit par le théorème 2.3.

Si l'on ajoute l'hypothèse que Γ est fuchsien (libre à l générateurs ou le groupe fondamental d'une surface de Riemann fermée de genre $g \geq 2$) alors on en donne une description plus précise.

Dans le cas où Γ est libre de rang $l \geq 2$, on montre, par exemple, que le lieu orbifold est connexe de dimension $(p-1)(l-1)$. Dans le cas où Γ est le groupe fondamental d'une surface de Riemann fermée de genre $g \geq 2$, on montre que le lieu orbifold a exactement p composantes connexes et que sa dimension est $2(p-1)(l-1)$.

Dans ce chapitre, le fait que p est premier est utilisé à plusieurs reprises. Tout d'abord dans la proposition 5, où l'on montre que tout sous-groupe exceptionnel de $PSL(p, \mathbb{C})$ commute avec un élément régulier. Ensuite, dans les discussions sur les groupes de cohomologie on utilise à nouveau que p est premier. Enfin, dans la sous-section 2.4.2, où l'on introduit l'invariant d'Euler, on utilise à nouveau le fait que la dimension est première. Si la primalité de la dimension semble importante dans cette étude, nous constatons dans le chapitre 3 que l'on peut généraliser des résultats en dimension quelconque.

Dans les chapitres 3 à 4, nous nous restreignons à la détermination des centralisateurs de sous-groupes irréductibles.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons au cas où G est $PSL(n, \mathbb{C})$. On montre un théorème de caractérisation (théorème 3.3) : si $n \geq 1$ alors un groupe G est le centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$ si et seulement si G est *n-compatible* (une des manières de définir un groupe *n-compatible* est de dire que ce groupe est contenu dans $B \times B$ où B est un groupe abélien d'ordre n).

Ensuite, nous cherchons à déterminer les classes de conjugaison de centralisateurs dans $PSL(n, \mathbb{C})$. Par le théorème de caractérisation, le centralisateur est abélien. Pour caractériser sa classe de conjugaison, nous justifions qu'il suffit de rajouter une structure de *n-module alterné* sur ce centralisateur. Bien que ces résultats n'aboutissent pas encore à une classification complète des centralisateurs dans $PSL(n, \mathbb{C})$ (essentiellement car il est difficile de caractériser les structures de *n-modules alternés* « issus » de centralisateurs dans $PSL(n, \mathbb{C})$), les résultats partiels obtenus à la fin du chapitre 3 permettent d'entrevoir une généralisation de ce qui a été fait pour $PSL(p, \mathbb{C})$ au cas où la dimension n n'est plus un nombre premier, au moins quand n est sans facteur carré.

Dans le chapitre 4, on se place dans le cas où G est $Spin(n, \mathbb{C})$ ou un de ses quotients. On arrive rapidement à la conclusion que tous les centralisateurs d'irréductibles dans $SO(n, \mathbb{C})$ sont 2-abéliens élémentaires.

Dans le cas où $G = Spin(n, \mathbb{C})$ on montre d'abord que $Spin(n, \mathbb{C})$ n'est jamais un groupe CI si $n \geq 7$. Une conséquence du travail que nous avons fait ici (et d'un résultat de Florentino et Lawton dans [FL12]) est que les groupes simples qui sont CI mais pas isomorphes à $SL(n, \mathbb{C})$ sont nécessairement de type G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 . On ne sait pas si, parmi ces groupes là, certains sont CI ou pas.

Ensuite, toujours quand $G = Spin(n, \mathbb{C})$, on caractérise les groupes apparaissant comme les centralisateurs de sous-groupes irréductibles du groupe $Spin(n, \mathbb{C})$ (c'est le théorème 4.4). On remarque qu'il est assez simple de donner la liste de tous les centralisateurs à conjugaison près dans le groupe des Spin fondamentaux (corollaire 18).

Le cas $G = PSO(2n, \mathbb{C})$ est partiellement abordé. On remarquera toutefois que si Γ est un groupe fuchsien de rang > 2 alors $\chi^i(\Gamma, PSO(8, \mathbb{C}))$ est une orbifolde contenant un point dont le groupe d'isotropie locale est non-abélien (c'est le contre-exemple 7).

Par ailleurs, il semblerait que l'on puisse généraliser cette approche au cas où G est un groupe de Lie semi-simple complexe. En effet, dans le cas où $G = PSL(p, \mathbb{C})$, les sous-groupes exceptionnels sont tous contenus dans le normalisateur d'un tore maximal (le produit semi-direct entre un tore maximal et son groupe de Weyl). Ceci est lié au fait qu'un sous-groupe exceptionnel centralise un élément régulier (voir proposition 5).

Dans le cas où $G = PSL(n, \mathbb{C})$, la situation n'est pas aussi générale. La condition pour qu'un centralisateur d'irréductible ait un centralisateur inclus dans le normalisateur d'un tore maximal est que ses lagrangiens soient de taille n (par des résultats postérieurs à cette thèse).

Ces deux exemples justifient que la généralisation de cette étude devrait passer par les normalisateurs de tores maximaux. Pour une discussion sur les n -uplets d'éléments commutant dans les groupes de Lie compacts qui utilise les tores maximaux, on peut se reporter au travail de Borel, Friedman et Morgan : [BFM02].

Quelques mots sur l'organisation du papier. Nous avons fait le choix, dans ce mémoire, d'écrire des preuves les plus détaillées possibles. Ainsi que d'articuler notre raisonnement autour de nombreux lemmes, propositions, exemples... Ceci explique la longueur de ce mémoire.

La première section du chapitre 1 contient un certain nombre de définitions utiles pour lire le mémoire. Les deux autres sections du chapitre 1 sont entièrement dédiés à la preuve du corollaire 4. Si l'on admet ce corollaire, on peut passer directement à la lecture des chapitres 2, 3 et 4.

Chacun de ces trois chapitres débute par une section « résultats » qui est un résumé non exhaustif des résultats contenus dans le chapitre. Il a pour but de guider la lecture du chapitre correspondant.

Dans leur quasi-totalité, les différents chapitres sont indépendants les uns des autres. Néanmoins, l'étude géométrique effectuée sur le lieu orbifold au chapitre 2 est facilitée par la lecture du chapitre 1 et le lemme 6 du chapitre 2 est utilisé à plusieurs reprises dans les chapitres 3 et 4.

La fin du chapitre 3 contient un certain nombre de questions et de conjectures en lien avec ce que nous avons démontré. Il en va de même pour la fin des sous-sections 4.3.2 et 4.4.2. La recherche est ainsi faite qu'elle évolue tout le temps. Depuis la rédaction de cette thèse, nous avons pu établir que la réponse à la question 2 était positive et donc la réponse à la question 3 est négative. En particulier, on peut classifier les centralisateurs d'irréductibles dans $PSL(n, \mathbb{C})$ à conjugaison près. Il est donc possible d'améliorer le théorème 3.3 du chapitre 3. Ce résultat et sa preuve seront publiés prochainement.

Singularités orbifoldes de la variété des caractères

Guérin Clément

22 juin 2016

Table des matières

1	Variété des représentations/caractères	5
1.1	Définitions et propriétés	5
1.2	Espace tangent à la variété des représentations	11
1.3	Notion de structure orbifolde	23
2	$PSL(p, \mathbb{C})$: sous-groupes exceptionnels et lieu singulier de la variété des caractères	37
2.1	Résultats	37
2.2	Sous-groupes exceptionnels de $PSL(p, \mathbb{C})$	41
2.3	Lieu singulier de la variété des caractères	51
2.3.1	La géométrie de $\chi^i(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle)$	52
2.3.2	Sur le comportement de φ	60
2.3.3	Différentiabilité de φ	75
2.4	Quand Γ est un groupe fuchsien	79
2.4.1	Γ est un groupe libre	79
2.4.2	Γ est un groupe de surface	84
2.4.3	Le point de vue algébrique pour les groupes libres	100
3	Centralisateurs des irréductibles dans $PSL(n, \mathbb{C})$	103
3.1	Résultats	103
3.2	Quelques propriétés sur les centralisateurs	105
3.2.1	Commutativité et exposant	108
3.2.2	Représentation standard, cardinal des centralisateurs	115
3.3	Le théorème de caractérisation	122
3.3.1	Sur la notion de groupe n -compatible	123
3.3.2	Preuve du théorème de caractérisation	128
3.3.3	Conséquences pour les quotients arbitraires de $SL(n, \mathbb{C})$	145
3.4	Classes de conjugaison des centralisateurs	148
3.4.1	Sur les modules alternés	151

3.4.2	Classe de conjugaison des centralisateurs comme module alterné	162
3.4.3	Sur une classification possible des classes de conjugaison des centralisateurs	169
4	Centralisateurs des irréductibles dans $Spin(n, \mathbb{C})$ et ses quotients	175
4.1	Résultats	175
4.2	Centralisateurs des irréductibles dans $SO(n, \mathbb{C})$	178
4.3	Sous-groupes exceptionnels de $Spin(n, \mathbb{C})$	190
4.3.1	Rappels sur l'algèbre de Clifford	190
4.3.2	Groupe des spin fondamentaux et irréductibilité . . .	195
4.4	Les centralisateurs dans $Spin(n, \mathbb{C})$	206
4.4.1	Modules quadratiques sur les $\mathbb{Z}/2$ -espaces vectoriels .	207
4.4.2	Caractérisation des centralisateurs dans $Spin(n, \mathbb{C})$. .	224
4.5	Remarques sur le cas de $PSO(2n, \mathbb{C})$	232

Chapitre 1

Variété des représentations/caractères

1.1 Définitions et propriétés

Soit Γ un groupe de type fini et G un groupe algébrique sur \mathbb{C} (dans la plupart des applications, le groupe algébrique sera remplacé par $G := G(\mathbb{C})$ le groupe de Lie de ses points complexes). On peut définir un foncteur des \mathbb{C} -algèbres vers les ensembles en associant à chaque \mathbb{C} -algèbre A l'ensemble $Hom(\Gamma, G(A))$ i.e. l'ensemble des morphismes de groupes de Γ vers $G(A)$.

Ce foncteur noté $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ est représentable (cf. [LM85]) et définit donc une variété algébrique appelée **variété des représentations schématique** de Γ vers G .

En effet, si Γ admet une partie génératrice finie avec r éléments et $\mathbb{C}[G]$ est l'anneau de coordonnées de G alors on peut associer à $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ un idéal annulateur \mathcal{I} dans $\mathbb{C}[G]^{\otimes r}$. Dans [LM85], Lubotzky et Magid montrent alors qu'il existe une représentation universelle $\rho_U : \Gamma \rightarrow G(\mathcal{A}(\Gamma, G))$ (avec l'anneau $\mathcal{A}(\Gamma, G)$ défini comme étant $\mathbb{C}[G]^{\otimes r}/\mathcal{I}$ vérifiant que pour tout \mathbb{C} -algèbre A et toute représentation $\rho \in Hom(\Gamma, G(A))$, il existe un morphisme de \mathbb{C} -algèbres $f : \mathcal{A}(\Gamma, G) \rightarrow A$ induisant une représentation $G(f) : G(\mathcal{A}(\Gamma, G)) \rightarrow G(A)$ et vérifiant $\rho = G(f)\rho_U$. Ce que montrent Lubotzky et Magid est que $\mathcal{A}(\Gamma, G)$ et ρ_U existent et sont essentiellement uniques.

Remarquons que la variété des représentations schématique n'est pas nécessairement réduite car l'anneau $\mathcal{A}(\Gamma, G)$ peut contenir des nilpotents non-triviaux. Si l'on considère l'anneau réduit associé :

$$A(\Gamma, G) := \mathcal{A}(\Gamma, G) / \sqrt{(0)}$$

on obtient une nouvelle variété algébrique notée $R(\Gamma, G)$ et appelée **variété des représentations réduite**.

Dans la suite, nous sommes principalement conduits à étudier les \mathbb{C} -points de la variété des représentations schématique $Hom(\Gamma, G(\mathbb{C}))$. Par abus de notation, nous noterons simplement $Hom(\Gamma, G)$ cette variété. C'est cet objet qui nous intéresse dans cette thèse. Remarquons qu'étudier les \mathbb{C} -points de la variété des représentations schématique ou de sa réduction est rigoureusement la même chose. On remarque facilement que cet ensemble s'identifie à un sous-ensemble de $G(\mathbb{C})^r$ où r est le cardinal d'une partie génératrice de Γ . La topologie induite par cette inclusion sur l'ensemble ne dépend pas du système de générateurs fini choisi. Cela permet alors de définir une topologie sur $Hom(\Gamma, G)$ appelée la topologie transcendante.

On verra plus loin que dans certains cas, une certaine partie de l'ensemble $Hom(\Gamma, G)$ n'est pas seulement l'ensemble des \mathbb{C} -points d'une variété algébrique, mais aussi une variété complexe. Il y aura donc deux points de vue sur la variété des représentations. Le premier est le point de vue algébrique qui permet de calculer les espaces tangents, mais aussi d'étudier les problèmes de singularité. Le second est un point de vue complexe qui ne voit que les \mathbb{C} -points de la variété des représentations et qui est l'ensemble qui nous intéresse.

On se propose de donner quelques définitions classiques ici (on peut aussi les lire dans [Sik12]). Le but est de définir la notion de représentation irréductible.

Soit G un groupe de Lie réductif et P un sous-groupe de G . On dit que P est **parabolique** si G/P est une variété complète. Par exemple, dans le cas où $G = SL(n, \mathbb{C})$ on peut montrer que P est parabolique si et seulement si P est le stabilisateur d'un drapeau non-trivial de \mathbb{C}^n où $SL(n, \mathbb{C})$ agit de manière naturelle sur \mathbb{C}^n (c.f. [Bor91]).

Soit G un groupe de Lie réductif et H un sous-groupe de G . On dit que H est **irréductible** si aucun sous-groupe parabolique de G ne contient H . De la même façon, une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow G$ est dite **irréductible** si $\rho(\Gamma)$ l'est.

Soit G un groupe de Lie réductif et H un sous-groupe de G . On dit que H est **complètement réductible** si pour chaque sous-groupe parabolique P de G contenant H , il existe un sous-groupe de Levi L de P contenant H . De la même façon, une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow G$ est dite **complètement réductible** si $\rho(\Gamma)$ l'est.

Si H est un sous-groupe de G , le **centralisateur** $Z_G(H)$ de H dans G est l'ensemble des éléments de G commutant avec tous les éléments de H . Le **centralisateur** $Z_G(\rho)$ (ou $Z(\rho)$ si le groupe G est sous-entendu) d'une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow G$ est défini comme étant $Z_G(\rho(\Gamma))$.

Dans [Sik12] (corollaire 17), Sikora donne une caractérisation très utile des groupes irréductibles. Dans un groupe de Lie réductif G , un sous-groupe H de G est irréductible si et seulement s'il est complètement réductible et $[Z_G(H) : Z(G)]$ est fini. De plus, tout groupe fini est complètement réductible et toute extension finie d'un sous-groupe complètement réductible est complètement réductible. Finalement, si G est inclus dans $GL(n, \mathbb{C})$, alors tout sous-groupe H diagonal via cette inclusion est complètement réductible.

Soit G un groupe de Lie réductif et H un sous-groupe irréductible de G . On dit que H est **ordinaire** si son centralisateur est réduit au centre de G . De la même façon, une représentation irréductible $\rho : \Gamma \rightarrow G$ est dite **ordinaire** si $\rho(\Gamma)$ l'est. Si un sous-groupe (ou une représentation) irréductible n'est pas ordinaire alors on dira qu'il (elle) est **exceptionnel(le)**. Remarquons que dans [Sik12], ordinaire correspond à « good » et exceptionnel correspond à « bad ».

Si Γ est un groupe de type fini et G un groupe de Lie complexe, le groupe G agit algébriquement sur la variété des représentations par conjugaison. Cette action sera simplement appelée l'**action de conjugaison** de G sur $\mathcal{R}(\Gamma, G)$. Si $g \in G$ et $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, G)$, on notera $g \cdot \rho$ le conjugué de ρ par g et $G \cdot \rho$ l'orbite de ρ pour cette action.

La **partie complètement réductible** de $\text{Hom}(\Gamma, G)$ est l'ensemble des représentations complètement réductible $\rho : \Gamma \rightarrow G$. Elle sera notée $\text{Hom}^{cr}(\Gamma, G)$.

De la même façon, la **partie irréductible** de $\text{Hom}(\Gamma, G)$ est l'ensemble des représentations irréductible $\rho : \Gamma \rightarrow G$. Elle sera notée $\text{Hom}^i(\Gamma, G)$.

Les inclusions suivantes sont conséquences directes des définitions :

$$Hom^i(\Gamma, G) \subseteq Hom^{cr}(\Gamma, G) \subseteq Hom(\Gamma, G)$$

Les ensembles $Hom^i(\Gamma, G)$ et $Hom^{cr}(\Gamma, G)$ sont stables par l'action de conjugaison. Un résultat plus difficile, quand G est réductif, l'action de G sur $Hom^i(\Gamma, G)$ est propre (voir la proposition 1.1 de [JM87]).

L'ensemble quotient $Hom(\Gamma, G)/G$ est bien connu pour n'avoir aucune structure particulière. Néanmoins, quand G est un groupe de Lie réductif complexe, il existe un quotient "GIT" pour l'action de conjugaison de G sur $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ noté $\chi(\Gamma, G) := \mathcal{R}(\Gamma, G)/G$. Par définition, il s'agit à nouveau d'une variété algébrique appelée la **variété des caractères**. Remarquons que l'anneau de coordonnées de la variété des caractères est défini comme étant $\mathcal{A}(\Gamma, G)^G$. Les points complexes de cette variété sont l'ensemble des classes de conjugaisons des représentations complètement réductibles (en effet, on peut montrer, e.g. dans [Sik12], que ce sont exactement les classes de conjugaisons fermées). Il existe alors une projection naturelle :

$$pr_G : \begin{array}{ccc} Hom(\Gamma, G) & \longrightarrow & \chi(\Gamma, G) \\ \rho & \longmapsto & G \cdot \rho_{cr} \end{array}$$

où ρ_{cr} est l'unique (à conjugaison près) représentation complètement réductible dont l'orbite est contenue dans l'adhérence de $G \cdot \rho$. Nous ne chercherons pas ici à démontrer l'existence ou l'unicité d'une telle projection. En ce qui nous concerne, nous voyons que si pr_G est restreinte à la partie complètement réductible alors il y a une identification naturelle entre le quotient $Hom^{cr}(\Gamma, G)/G$ et $\chi(\Gamma, G)$. Cela permet alors de définir la **partie irréductible de la variété des caractères** comme :

$$\chi^i(\Gamma, G) := Hom^i(\Gamma, G)/G$$

L'action de G sur $Hom^i(\Gamma, G)$ étant propre, la correspondance ci-dessus est un homéomorphisme. Le **lieu singulier** de $\chi^i(\Gamma, G)$ est l'ensemble des $G \cdot \rho \in \chi^i(\Gamma, G)$ pour lesquels ρ est une représentation exceptionnelle. Le lieu singulier sera noté $\chi_{sing}^i(\Gamma, G)$.

La raison pour laquelle nous nous intéressons au lieu singulier est que, sous certaines conditions (cf section 1.3), ce lieu singulier est le lieu orbifold d'une certaine orbifold. On se propose dans cette thèse de nous intéresser au lieu singulier de la variété des caractères. Un cas important où cette approche se révélera fructueuse est le cas où le groupe représenté est fuchsien.

On dit qu'un groupe Γ est **fuchsien** s'il est un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{R})$ de co-volume fini. On peut vérifier (cf [Kat92]) qu'un groupe fuchsien Γ admet toujours une présentation de la forme :

$$\Gamma = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, e_1, \dots, e_r \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{i=1}^r e_i = 1, \text{ pour } 1 \leq i \leq r \ e_i^{o_i} = 1 \rangle$$

où o_i est un entier ≥ 2 ou ∞ (la relation $e_i^\infty = 1$ est, par définition, la relation triviale). Les générateurs $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ sont dits hyperboliques. Les éléments e_1, \dots, e_r sont dits paraboliques si $o_i = \infty$ et elliptiques si $o_i < \infty$. De plus, on sait que tout groupe de la forme ci-dessus est fuchsien pourvu qu'il vérifie :

$$2g - 2 + \sum_{i=1}^r 1 - \frac{1}{o_i} > 0$$

Parmi les groupes fuchiens, on peut donner quelques exemples :

Exemple 1

Si $l \geq 2$. On note que \mathbb{F}_l , le groupe libre sur l éléments est fuchsien puisqu'il correspond au choix $g := 0$, $r := l + 1$ et pour tout $1 \leq i \leq l + 1$ $o_i := \infty$.

Si $g \geq 2$. On remarque que le groupe défini par $g := g$ et $r := 0$ est un groupe fuchsien. Il s'agit du groupe fondamental d'une surface de Riemann fermée de genre g . On les appelle parfois simplement "groupes de surface".

Si l'on prend $g := 0$, $r := 3$ et $o_1 := a$, $o_2 := b$ et $o_3 := c$ avec a, b, c trois entiers vérifiant $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$ alors on définit ce que l'on appelle un groupe triangulaire $T_{a,b,c}$. Ce groupe apparaît naturellement comme le groupe fondamental orbifold d'une sphère à trois points coniques.

S'il y a un outil dont nous aurons souvent besoin dans ce mémoire, c'est la cohomologie des groupes. On rappelle ici quelques définitions et notations.

Soit G un groupe et A un G -module multiplicatif (i.e. groupe abélien muni d'une G -action compatible). La G -action sera notée avec un $\langle \cdot \rangle$. Pour $n \geq 0$, l'ensemble des n -**cochaines** de G dans A est :

$$C^n(G, A) := \{f : G^n \rightarrow A\}$$

Ceci est clairement un G -module par action au but. Il existe un morphisme de groupes ∂_n :

$$\partial_n : \begin{cases} C^n(G, A) & \longrightarrow & C^{n+1}(G, A) \\ f & \longmapsto & \partial_n(f) \end{cases}$$

où, pour $(g_0, \dots, g_n) \in G^{n+1}$, nous définissons :

$$\partial_n(f)(g_0, \dots, g_n) := \begin{cases} g_0 \cdot f(g_1, \dots, g_n) \\ \times \prod_{i=0}^{n-1} f(g_0, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n)^{(-1)^{i+1}} \\ \times f(g_0, \dots, g_{n-1})^{(-1)^{n+1}} \end{cases}$$

Pour $n \geq 1$, on note $Z_n(G, A) := \ker(\partial_n)$, par définition, c'est l'ensemble des n -**cocycles** et $B_n := \text{Im}(\partial_{n-1})$ l'ensemble des n -**cobords**. Par définition, $B_0(G, A) := \{1\}$ et $Z_0 := \ker(\partial_0) = A^G$ l'ensemble des points fixes de A pour l'action de G .

Un calcul direct montre que $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$ et donc $B_n(G, A) \subseteq Z_n(G, A)$. Ainsi on peut définir $H^n(G, A) := Z_n(G, A)/B_n(G, A)$ le n -**ième groupe de cohomologie** pour G agissant sur A .

Par exemple, un 1-cocycle dans $Z^1(G, A)$ est une fonction $f : G \rightarrow A$ vérifiant pour tout $g, h \in G$:

$$f(gh) = (g \cdot f(h))f(g)$$

Un 1-cobord dans $B^1(G, A)$ est une fonction $f : G \rightarrow A$ pour laquelle on peut trouver $a \in A$ vérifiant pour tout $g \in G$:

$$f(g) = (g \cdot a)a^{-1}$$

Pour $n \geq 0$ un élément $x \in H^n(G, A)$ est une classe de n -cocycles, si x est la classe de $z \in Z^n(G, A)$, l'élément x sera noté $[z]$.

Les résultats que nous allons maintenant énoncer sont relativement classique et peuvent être retrouvés dans [Bro82] ou [AM04], par exemple.

Le premier de ces résultats est la suite inflation-restriction, si $N \triangleleft G$ et A est un G -module, cette suite spectrale relie les groupes de cohomologie de G agissant sur A , N agissant sur A et G/N agissant sur A^N (voir sous-section 2.3.1).

Nous utiliserons également un résultat sur la cohomologie cyclique, i.e. si G agit sur A avec G cyclique, alors on peut trouver une formule explicite pour $H^1(G, A)$ (voir sous-section 2.3.1).

On remarquera aussi que si A est un G -module divisible (e.g. si A est un \mathbb{Q} -espace vectoriel) alors $H^n(G, A)$ l'est aussi pour tout n . De plus si G est un groupe fini alors $H^n(G, A)$ est de $|G|$ -torsion pour $n \geq 1$.

Dans la section 1.2, nous verrons des modules notés additivement alors que dans la section 2.3 nous étudierons des modules notés multiplicativement. Les deux notations sont naturelles. Avant la définition d'un module nous nous assurerons de savoir quelle notation on utilise.

1.2 Espace tangent à la variété des représentations

Le but de cette sous-section est de justifier que quand Γ est fuchsien, la partie irréductible de la variété des représentations est non-singulière en chacun de ses \mathbb{C} -points. Le résultat a déjà été remarqué par [Sik12] (proposition 37). On se propose, ici d'en donner une démonstration différente.

Après avoir rappelé comment calculer l'espace tangent de Zariski à la variété des représentations en une représentation donnée, nous décrirons une méthode pour construire, à partir d'un vecteur tangent, une courbe formelle passant par la représentation et tangente à ce vecteur tangent. On ne peut pas toujours effectuer ce relèvement, nous verrons que l'obstruction s'exprime dans un groupe de cohomologie. Dans le cas où le groupe est fuchsien et ρ irréductible, on verra alors que ce groupe de cohomologie est trivial et qu'il n'y a pas d'obstruction. Dans [Sik12], l'auteur utilise la même annulation cohomologique.

Dans toute cette section les modules seront notés additivement. En effet si G est un groupe algébrique complexe, on note \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Si $\rho : \Gamma \rightarrow G$ est une représentation alors \mathfrak{g} est naturellement un Γ -module additif via l'action adjointe (notée Ad) de G sur \mathfrak{g} . On a pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $X \in \mathfrak{g}$, $\gamma \cdot X := Ad \circ \rho(\gamma)(X) = Ad \circ \rho(\gamma) \cdot X$. Le Γ -module \mathfrak{g} sera noté $\mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}$.

On rappelle que si une variété algébrique X a pour anneau de coordonnées A (i.e. $X = Spec(A)$), alors un point $x \in Spec(A)$ est dit **non-singulier** (ou **simple**) si x appartient à une unique composante irréductible

de X et $\dim T_x X$ coïncide avec la dimension de la composante irréductible contenant x . On dit que x est réduit si l'anneau local A_x ne contient pas d'éléments nilpotents non-trivial.

Soit Γ un groupe de type fini et G un groupe algébrique complexe. On dit que $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ est **lisse** (resp. **schématiquement lisse**) si ρ est un point non-singulier de $R(\Gamma, G)$ (resp. $\mathcal{R}(\Gamma, G)$). On remarquera que, par les définitions, si $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ alors ρ est schématiquement lisse si et seulement s'il est à la fois lisse et réduit.

Nous commençons donc par calculer l'espace tangent de Zariski à la variété des représentations (ceci est une proposition démontrée par Weil dans [Wei64], voir aussi [LM85] ou [Sik12]) :

Proposition 1

Soient Γ un groupe de type fini, G un groupe algébrique complexe et $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, G)$. Alors

$$T_\rho^{\text{Zar}} \mathcal{R}(\Gamma, G) = Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{\text{Ad} \circ \rho})$$

Démonstration : Pour montrer cette proposition, nous définissons l'algèbre des nombre duaux : la \mathbb{C} -algèbre $\mathbb{C}[\epsilon]$ où ϵ vérifie $\epsilon^2 = 0$. Cette \mathbb{C} -algèbre est définie avec une projection naturelle :

$$q_0^1 : \mathbb{C}[\epsilon] \rightarrow \mathbb{C}$$

Cette application induit une projection de l'ensemble $\text{Hom}(\Gamma, G(\mathbb{C}[\epsilon]))$ sur l'ensemble $\text{Hom}(\Gamma, G)$ également notée q_0^1 . Par un résultat bien connu de géométrie algébrique (e.g. dans [Bor91]) :

$$T_\rho^{\text{Zar}} \mathcal{R}(\Gamma, G) = (q_0^1)^{-1}(\rho) \subseteq \mathcal{R}(\Gamma, G(\mathbb{C}[\epsilon]))$$

Une fois que l'on a remarqué ceci, on utilise le fait que (Ad désignant la représentation adjointe d'un groupe de Lie sur son algèbre de Lie) :

$$G(\mathbb{C}[\epsilon]) = \mathfrak{g} \rtimes_{\text{Ad}} G(\mathbb{C})$$

Ainsi, toute représentation $\underline{\rho}$ de $\mathcal{R}(\Gamma, G(\mathbb{C}[\epsilon]))$ s'écrit $\underline{\rho} = (u, q_0^1(\bar{\rho}))$ avec u fonction de Γ dans \mathfrak{g} . On se demande maintenant, $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ étant fixé, à quelle condition sur u la fonction définie par $\underline{\rho} := (u, \rho)$ est un morphisme de groupes. C'est un morphisme de groupes si et seulement si :

$$\forall (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^2, (u(\gamma_1\gamma_2), \rho(\gamma_1\gamma_2)) = (u(\gamma_1), \rho(\gamma_1))(u(\gamma_2), \rho(\gamma_2)) \Leftrightarrow$$

$$\forall (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^2, (u(\gamma_1\gamma_2), \rho(\gamma_1\gamma_2)) = (u(\gamma_1) + Ad \circ \rho(\gamma_1) \cdot u(\gamma_2), \rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)) \Leftrightarrow$$

$$\forall (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^2, u(\gamma_1\gamma_2) = u(\gamma_1) + Ad \circ \rho(\gamma_1) \cdot u(\gamma_2) \Leftrightarrow$$

$$u \in Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$$

Ainsi si l'on fixe $\rho \in Hom(\Gamma, G)$ alors l'espace tangent de Zariski à la variété des représentations schématisées en ρ s'identifie naturellement à $Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$. ■

Via cette identification de l'espace tangent à un espace de 1-cocycles, les 1-cobords bénéficient également d'une interprétation intéressante :

Proposition 2

Soient Γ un groupe de type fini, G un groupe algébrique complexe et $\rho \in Hom(\Gamma, G)$. Alors, l'inclusion de $T_\rho^{Zar}G \cdot \rho \subseteq T_\rho^{Zar}\mathcal{R}(\Gamma, G)$ est donnée par :

$$B^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}) \subseteq Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$$

En d'autres termes, sous l'identification vu en proposition 1, de l'espace tangent de Zariski $T_\rho^{Zar}\mathcal{R}(\Gamma, G)$ avec $Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ l'espace tangent à la G -orbite de ρ en ρ est exactement l'ensemble des 1-cobords.

Démonstration : Tout d'abord, si $\rho \in Hom(\Gamma, G)$ alors $G \cdot \rho$ est une variété algébrique homogène (G agit transitivement dessus, c.f. [Bor91]), elle est non-singulière. Ainsi l'inclusion de $G \cdot \rho$ dans $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ descend en une inclusion au niveau des espaces tangents :

$$T_\rho G \cdot \rho \subseteq T_\rho^{Zar}\mathcal{R}(\Gamma, G)$$

Il suffit donc de calculer l'application tangente à l'application suivante en l'identité :

$$f : \begin{cases} G & \longrightarrow & \mathcal{R}(\Gamma, G) \\ g & \longmapsto & g\rho g^{-1} \end{cases}$$

On étudie f_ϵ l'application étendue aux nombres duaux :

$$f_\epsilon : \begin{cases} G(\mathbb{C}[\epsilon])_{Id} & \longrightarrow & \mathcal{R}(\Gamma, G(\mathbb{C}[\epsilon])) \\ (X, Id) & \longmapsto & X \cdot \rho \end{cases}$$

L'espace tangent $T_\rho G \cdot \rho$ recherché s'identifie alors à $Im(f_\epsilon)$.

Soit $X \in \mathfrak{g}$ et $\gamma \in \Gamma$ alors :

$$X \cdot \rho(\gamma) = (X, Id)(0, \rho(\gamma))(-X, Id) = (X - Ad \circ \rho(\gamma) \cdot X, \rho(\gamma))$$

On voit donc que le 1-cocycle associé à $X \cdot \rho$ est $\gamma \mapsto X - Ad \circ \rho(\gamma) \cdot X$. Clairement c'est un 1-cobord dans $B^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ de plus quand X parcourt \mathfrak{g} on obtient tous les 1-cobords par définition. Ainsi on a l'identification $T_\rho G \cdot \rho = B^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}) \subseteq Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}) = T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma, G)$. ■

Dans [Wei64], Weil utilise cette identification pour donner un critère de rigidité locale pour une représentation (une représentation est dite localement rigide s'il existe un voisinage de ρ dans $Hom(\Gamma, G)$ constitué uniquement de conjugués de ρ). Cela aboutit au corollaire suivant (c.f. [LM85]) :

Corollaire 1

Soient Γ un groupe de type fini, G un groupe algébrique complexe et $\rho \in Hom(\Gamma, G)$. Le premier groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ est trivial si et seulement si la représentation ρ est localement rigide et ρ est schématiquement lisse.

Démonstration : Supposons que $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ soit trivial. Par la proposition 2, cela implique que, en ρ l'espace tangent à $G \cdot \rho$ et celui de la variété des représentations schématique (i.e. l'espace tangent de Zariski) coïncident en ρ . Vu que $G \cdot \rho$ est non-singulière, cela implique que l'on peut trouver un voisinage de ρ inclus dans $G \cdot \rho$. Par définition, ρ est localement rigide, et ρ est schématiquement lisse puisque $G \cdot \rho$ l'est.

Réciproquement si ρ est schématiquement lisse alors pour tout $v \in T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma, G) = Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ tangent à la variété des représentations, on peut trouver une courbe $f :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow Hom(\Gamma, G)$ vérifiant $f(0) = \rho$ et $f'(\rho) = v$. Comme ρ est localement rigide, on peut supposer que f est constitué de conjugués de ρ . Le vecteur tangent $f'(\rho)$ est alors inclus dans $T_\rho G \cdot \rho$.

Avec les identifications des propositions 1 et 2, on obtient l'inclusion $Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}) \subseteq B^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$, ainsi on a bien $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ est trivial. ■

On remarquera que l'assertion "schématiquement lisse" est nécessaire, en effet, Lubotzky et Magid dans [LM85] exhibent une représentation localement rigide dont le premier groupe de cohomologie associé n'est pas trivial.

Ainsi, l'annulation du premier groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$ implique que ρ est schématiquement lisse. Ce que nous allons montrer dans la suite est que de l'annulation du second groupe de cohomologie $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$ on peut également en déduire que ρ est un point schématiquement lisse.

Le problème qui se pose ici est qu'en une représentation singulière l'espace tangent de Zariski contient trop de vecteurs. Nous allons maintenant définir un autre type d'espace tangent. Soient Γ un groupe de type fini, G un groupe algébrique complexe et $\rho \in Hom(\Gamma, G)$. On dit que $v \in T_\rho \mathcal{R}(\Gamma, G)$ est un vecteur tangent **formel** (terminologie non-standard) à la variété des représentations en ρ . D'un autre côté, on dit que $v \in T_\rho \mathcal{R}(\Gamma, G)$ est un vecteur tangent **analytique** à la variété des représentations en ρ s'il existe $\epsilon > 0$ et $f :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow Hom(\Gamma, G)$ une application analytique telle que $f(0) = \rho$ et $f'(0) = v$. On note \mathcal{C}_ρ leur ensemble appelé le **tangent de courbes**.

Par définition, tous les vecteurs tangents analytiques sont des vecteurs tangents formels, toutefois la réciproque n'est pas forcément vraie. On peut voir qu'un point $\rho \in Hom(\Gamma, G)$ est non-singulier si et seulement si son tangent de courbes est égal à son espace tangent de Zariski.

C'est un problème très difficile de construire des courbes analytiques dans $Hom(\Gamma, G)$. On utilise donc un théorème d'Artin (cf théorème 1.2 dans [Art68]) qui stipule que tout élément dans $Hom(\Gamma, G[[t]])$ i.e. toute **courbe infinitésimale** dans $Hom(\Gamma, G)$ peut-être localement approximée à tout ordre par une courbe analytique. Ou encore, l'ensemble des courbes analytiques est dense pour la topologie \mathfrak{m} -adique dans l'ensemble des courbes infinitésimales.

En résumé, pour montrer qu'un point est non-singulier, il suffit de montrer que tout vecteur tangent formel est analytique, et en vertu du théorème cité ci-dessus, il suffit de trouver une courbe infinitésimale tangente à ce vecteur tangent. Expliquons maintenant la démarche pour construire une courbe infinitésimale.

Pour $n \geq 0$, on note $A_n := \mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$. On peut remarquer que $A_0 = \mathbb{C}$ et $A_1 = \mathbb{C}[\epsilon]$ l'anneau des nombres duaux. Nous allons étudier $G(A_n)$ pour $n \geq 0$. En un certain sens, étudier $G(A_n)$, c'est étudier les déformations de $G(\mathbb{C})$ à l'ordre n . Si $j \geq i$, il est clair que l'on a une application mod t^{i+1} :

$$q_i^j : A_j \rightarrow A_i$$

Cette application induit une application de projection au niveau des représentations toujours notée $q_i^j : \text{Hom}(\Gamma, G(A_j)) \rightarrow \text{Hom}(\Gamma, G(A_i))$. On remarquera que q_0^1 correspond à l'application liée aux nombres duaux exhibée dans la démonstration de la proposition 1.

On utilise maintenant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (formule BCH) pour décrire le groupe $G(A_{n+1})$. Soit e l'exponentielle des matrices. On dispose, pour tout $n \geq 0$ d'une suite exacte scindée :

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathfrak{g}^n & \longrightarrow & G(A_{n+1}) & \xrightarrow{q_0^{n+1}} & G(\mathbb{C}) \longrightarrow 1 \\
 & & (a_1, \dots, a_n) & \longmapsto & e^{a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n} & & \text{inclusion} \\
 & & & & e^{a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n} g_0 & \longmapsto & g_0 \quad \text{projection} \\
 & & & & e^{0 \times t + 0 \times t^2 + \dots + 0 \times t^n} g_0 & \longleftarrow & g_0 \quad \text{section}
 \end{array}$$

Il faut noter que \mathfrak{g}^n n'est pas un groupe muni de la loi produit, la loi de groupe est compliquée et est donnée par la formule BCH. En ce qui nous concerne, nous noterons simplement que l'on a une décomposition simple de $G(A_{n+1})$ sous la forme d'un produit semi-direct. Cela aboutit alors à une nouvelle extension qui n'est plus scindée :

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & G(A_{n+1}) & \xrightarrow{q_n^{n+1}} & G(A_n) & \longrightarrow & 1 \\
& & X & \longmapsto & e^{Xt^n} & & & & \text{inclusion} \\
& & & & e^{a_1t+\dots+a_nt^n}g_0 & \longmapsto & e^{a_1t+\dots+a_{n-1}t^{n-1}}g_0 & & \text{projection}
\end{array}$$

On remarque alors que la loi de groupe sur \mathfrak{g} est l'addition. En effet, par la formule BCH $e^{Xt^n}e^{Yt^n} = e^{(X+Y)t^n + O(t^{n+1})}$ ainsi, modulo t^{n+1} on a bien $e^{Xt^n}e^{Yt^n} = e^{(X+Y)t^n}$.

De plus si $g = e^{a_1t+\dots+a_{n-1}t^{n-1}}g_0$ alors :

$$g \cdot e^{Xt^n} = g_0 \cdot e^{Xt^n} = e^{Ad(g_0) \cdot Xt^n} \text{ car } e^{Xt^n} \text{ et } e^{O(t)} \text{ commutent modulo } t^n$$

Ainsi, l'action de $G(A_n)$ sur \mathfrak{g} dans la suite exacte ci-dessus se factorise par q_0^n .

Si l'on considère maintenant $A_\infty := \mathbb{C}[[t]]$, on peut définir une application modulo t^n :

$$q_n^\infty : \mathbb{C}[[t]] \rightarrow A_n$$

Et on a une application induite $q_n^\infty : \mathcal{R}(\Gamma, G(\mathbb{C}[[t]])) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma, G(A_n))$.

Munis de leurs projections, les anneaux du système $(A_n)_n$ forment un système projectif dont la limite projective est A_∞ . Autrement dit, si l'on souhaite construire une courbe infinitésimale passant par $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, G)$, ayant pour vecteur tangent $v \in T_\rho \mathcal{R}(\Gamma, G)$, il suffit de trouver une suite (ρ_n) de représentations telles que pour tout $n \geq 0$ on ait $\rho_n \in \text{Hom}(\Gamma, G(A_n))$ et

$$\rho_0 = \rho, \rho_1 = (v, \rho) \text{ et pour tout } j \geq i, q_i^j(\rho_j) = \rho_i$$

Dans ce cas, la limite inductive ρ_∞ des (ρ_n) existe et définit une courbe infinitésimale passant par ρ et tangente à v . En vertu du théorème d'Artin, cela permet de construire une courbe analytique passant par ρ et tangente à v et donc v sera dans le tangent de courbe.

On peut résumer ce que l'on vient de voir en une proposition :

Proposition 3

Soient Γ un groupe de type fini, G un groupe algébrique complexe, $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ et $v \in T_\rho \mathcal{R}(\Gamma, G)$ un vecteur tangent formel.

Alors v est un vecteur tangent analytique en ρ si et seulement si il existe une suite (ρ_n) telle que pour tout $n \geq 0$, $\rho_n \in \text{Hom}(\Gamma, G(A_n))$, $\rho_0 = \rho$, $\rho_1 = (v, \rho)$ et pour tout $n \geq 0$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & G(A_{n+1}) & \xrightarrow{q_n^{n+1}} & G(A_n) & \longrightarrow & 1 \\ & & & & & \swarrow \rho_{n+1} & \uparrow \rho_n & & \\ & & & & & & \Gamma & & \end{array}$$

Démonstration : D'après, ce que l'on a vu v est tangent analytique, si et seulement si v est tangent à une courbe infinitésimale. Si v est tangent à une courbe infinitésimale $\rho_\infty = (\rho_n)$ alors il est clair que (ρ_n) va convenir.

Réciproquement si (ρ_n) est telle que pour tout $n \geq 0$ on ait $\rho_n \in \text{Hom}(\Gamma, G(A_n))$, $\rho_0 = \rho$, $\rho_1 = (v, \rho)$ et pour tout $n \geq 0$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & G(A_{n+1}) & \xrightarrow{q_n^{n+1}} & G(A_n) & \longrightarrow & 1 \\ & & & & & \swarrow \rho_{n+1} & \uparrow \rho_n & & \\ & & & & & & \Gamma & & \end{array}$$

alors par récurrence triviale sur $j - i$ on a que $q_i^j(\rho_j) = \rho_i$, ainsi la suite (ρ_n) définit un élément ρ_∞ du système inductif (A_n) .

De plus $q_0^\infty(\rho_\infty) = \rho$ et $q_1^\infty(\rho_\infty) = (v, \rho)$ donc v est bien tangent à une courbe infinitésimale. ■

Cette proposition nous montre un procédé de construction par récurrence pour déterminer si un vecteur tangent formel est analytique. En effet, étant donnée une représentation et un vecteur tangent formel, on définit ρ_1 grâce à ces deux éléments. On cherche alors à construire ρ_2 qui doit faire commuter le diagramme de la proposition. Si l'on peut en trouver un, alors on cherche à construire ρ_3, \dots et ainsi de suite. Ce que nous dit la proposition est que si l'on peut toujours "monter d'un cran" alors on construit une courbe infinitésimale (et donc analytique) tangente.

Bien sûr, il s'agit maintenant de déterminer sous quelles conditions, on peut toujours "monter d'un cran". Le lemme suivant est classique en théorie des groupes. On utilisera le lien (e.g. dans [AM04]) entre extensions de groupes et cohomologie des groupes. Rappelons que si A est un sous-groupe abélien normal de B et $C := B/A$ alors C agit naturellement sur A par conjugaison. On note alors $\phi : C \rightarrow \text{Aut}(A)$ l'action correspondante. De plus, on peut associer à cette extension de C par A un 2-cocycle $z \in Z^2(C, A)$ en choisissant une section. On sait que la classe de cohomologie de z ne dépend pas de la section choisie.

Lemme 1

Soient A, B, C et D quatre groupes avec A abélien tels que l'on ait une extension $1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 1$. On note $\phi : C \rightarrow \text{Aut}(A)$ l'action correspondante, $[z] \in H^2(C, A)$ représentant l'extension et π la projection de B sur C .

Soit $\psi : D \rightarrow C$ un morphisme de groupes, alors il existe $\Psi : D \rightarrow B$ relevant ψ (i.e. un morphisme de groupes vérifiant $\pi \circ \psi = \Psi$) si et seulement si $[\psi^*z] = 0$ dans $H^2(D, A)$ où A est considéré comme un D -module via $\phi \circ \psi$ et :

$$\psi^*z : \begin{cases} D \times D & \longrightarrow & A \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & z(\psi(g_1), \psi(g_2)) \end{cases}$$

Démonstration : Le point essentiel est le suivant (que l'on retrouve dans [AM04]) si l'on a B extension de C par A via les objets ϕ et $[z]$ alors on peut identifier ensemblistement B à $A \times C$ avec la loi de groupe donnée par :

$$(a_1, c_1)(a_2, c_2) = (a_1 + \phi(c_1)(a_2) + z(c_1, c_2), c_1 c_2)$$

Avec $\pi(a, c) = c$ et l'inclusion de A dans B donnée par $a \mapsto (a, 1_C)$.

Dans ce cadre, supposons par exemple qu'un relevé Ψ de ψ existe. Alors il existe pour tout $d \in D$ un élément $a(d) \in A$ tel que :

$$\Psi(d) = (a(d), \psi(d))$$

Si $d_1, d_2 \in D$ alors par un calcul direct :

$$\Psi(d_1 d_2) = (a(d_1 d_2), \psi(d_1 d_2))$$

$$\Psi(d_1)\Psi(d_2) = (a(d_1) + \phi(\psi(d_1))(a(d_2)) + \psi^*z(d_1, d_2), \psi(d_1d_2))$$

L'égalité $\Psi(d_1)\Psi(d_2) = \Psi(d_1d_2)$ implique alors que :

$$\psi^*z(d_1, d_2) = a(d_1d_2) - a(d_1) - \phi(\psi(d_1))(a(d_2))$$

Ce qui est exactement dire que ψ^*z est un 2-cobord et donc que sa classe de cohomologie est nulle.

Réciproquement si ψ^*z est un 2-cobord alors, par définition, il existe $(a_d)_{d \in D}$ tel que pour tout $d_1, d_2 \in D$ on ait :

$$\psi^*z(d_1, d_2) = a(d_1d_2) - a(d_1) - \phi(\psi(d_1))(a(d_2))$$

On peut alors vérifier (avec les mêmes calculs que ceux donnés plus haut) :

$$\Psi : \begin{cases} D & \longrightarrow & B \\ d & \longmapsto & (a(d), \psi(d)) \end{cases}$$

est un morphisme de groupes de D vers B relevant ψ . ■

Cela permet alors d'avoir une condition suffisante de non-singularité pour les représentations de groupe. Ce résultat a déjà été démontré dans [Gol].

Corollaire 2

Soient Γ un groupe de type fini, G un groupe algébrique complexe et $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ si $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ est trivial alors ρ est schématiquement lisse.

Démonstration : On suppose donc que $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}) = 0$. Soit $v \in T_\rho \mathcal{R}(\Gamma, G)$ un vecteur tangent formel. On souhaite montrer que v est un vecteur tangent analytique. En vertu de la proposition 3, il suffit de construire une suite (ρ_n) telle que pour tout $n \geq 0$ on ait $\rho_n \in \text{Hom}(\Gamma, G(A_n))$, $\rho_0 = \rho$, $\rho_1 = (v, \rho)$ et pour tout $n \geq 0$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & G(A_{n+1}) & \xrightarrow{q_n^{n+1}} & G(A_n) & \longrightarrow & 1 \\ & & & & & \swarrow \rho_{n+1} & \uparrow \rho_n & & \\ & & & & & & \Gamma & & \end{array}$$

Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que l'on peut construire $(\rho_k)_{0 \leq k \leq n}$ tels que pour tout $1 \leq k \leq n$, $q_{k-1}^k(\rho_k) = \rho_{k-1}$ et $\rho_1 = (v, \rho)$.

Clairement $(\rho_0, \rho_1) := (\rho, (v, \rho))$ convient pour $n = 1$.

Supposons avoir construit $(\rho_k)_{0 \leq k \leq n}$ tels que pour tout $1 \leq k \leq n$, $q_{k-1}^k(\rho_k) = \rho_{k-1}$ et $\rho_1 = (v, \rho)$.

On considère l'extension :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow G(A_{n+1}) \xrightarrow{q_n^{n+1}} G(A_n) \longrightarrow 1$$

Cette extension est donnée par l'action $\phi_n = Ad \circ q_0^n : G(A_n) \rightarrow Aut(\mathfrak{g})$ et la classe d'un 2-cocycle $[z_n] \in H^2(G(A_n), \mathfrak{g}_{\phi_n})$ représentant l'extension. On souhaite trouver ρ_{n+1} faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & G(A_{n+1}) & \xrightarrow{q_n^{n+1}} & G(A_n) \longrightarrow 1 \\ & & & & & \swarrow \rho_{n+1} & \uparrow \rho_n \\ & & & & & & \Gamma \end{array}$$

Par le lemme 1, un tel élément existe si et seulement si $[\rho_n^* z_n] = 0$ dans $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ q_0^n \circ \rho_n})$. Or $q_0^n \circ \rho_n = \rho$ donc on a :

$$H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ q_0^n \circ \rho_n}) = H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}) = 0 \text{ par hypothèse}$$

Ainsi, on peut construire ρ_{n+1} . Par récurrence, on peut construire une suite (ρ_n) compatible. La proposition 3 nous permet alors d'affirmer que v est effectivement un vecteur tangent analytique. On obtient que l'espace tangent de Zariski coïncide avec le tangent de courbes, ce qui montre que ρ est non-singulier, par définition schématiquement lisse puisque c'est un point de la variété des représentations. ■

Remarquons que ce critère est suffisant mais n'a aucune raison d'être nécessaire. On peut par exemple remarquer quelques cas où le second groupe de cohomologie s'annule clairement :

Exemple 2

Si Γ est un groupe fini ou un groupe libre et G un groupe algébrique complexe alors pour tout $\rho \in Hom(\Gamma, G)$, ρ est schématiquement lisse.

Démonstration : Si Γ est un groupe fini alors $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ est de $|\Gamma|$ -torsion. Vu que \mathfrak{g} est un \mathbb{C} -espace vectoriel, il est également uniquement divisible. Ces deux propriétés combinées impliquent en fait que $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}) = 0$. En appliquant le corollaire 2 on obtient le résultat.

Si Γ est un groupe libre, il est connu que sa dimension cohomologique est 1. Autrement dit, pour tout Γ -module A et $n \geq 2$ on a $H^n(\Gamma, A) = 0$. En particulier, $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) = 0$. En appliquant le corollaire 2 on obtient le résultat. ■

Ces exemples auraient pu être traités de manière beaucoup plus simple. En effet, si Γ est un groupe fini, on sait que toute représentation est localement rigide (c'est une conséquence de la classification des représentations de groupes finis) ou encore en utilisant le fait que $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) = 0$ pour les mêmes raisons que dans l'exemple et en utilisant le corollaire 1. De même si $\Gamma = \mathbb{F}_l$, un groupe libre de rang $l \geq 1$ alors $Hom(\Gamma, G) = G^l$, il est alors clair (vu que G est un groupe algébrique sur un corps de caractéristique 0) que G^l est non singulier. Nous allons maintenant voir un cas plus intéressant :

Théorème 1.1

Soient Γ un groupe fuchsien, G un groupe algébrique complexe semi-simple et $\rho \in Hom^i(\Gamma, G)$ une représentation irréductible, alors ρ est schématiquement lisse.

Démonstration : Les groupes fuchsien satisfont la dualité de Poincaré, en particulier $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à l'espace $H^0(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}^*)$ qui est isomorphe à \mathfrak{g}^Γ . Par définition, ce dernier espace vectoriel est l'algèbre de Lie du centralisateur de la représentation $Z_G(\rho)$. Vu que ρ est irréductible et en vertu du corollaire 17 de [Sik12], le centre de G est d'indice fini dans $Z_G(\rho)$. Comme G est un groupe semi-simple, son centre est fini. Ainsi $Z_G(\rho)$ est fini également, ce qui implique que \mathfrak{g}^Γ est trivial.

L'annulation du second groupe de cohomologie $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$ implique alors le résultat par le corollaire 2. ■

Remarquons que ce résultat est généralisable au cas G réductif (comme pour la proposition 37 de [Sik12]). En particulier, on obtient le résultat suivant, que nous allons utiliser plus tard :

Corollaire 3

Soit Γ un groupe fuchsien, G un groupe de Lie complexe semi-simple. L'espace topologique $Hom^i(\Gamma, G)$ a une structure naturelle de variété complexe.

Démonstration : Cela vient du fait que $Hom^i(\Gamma, G)$ est un ouvert de Zariski de $Hom(\Gamma, G)$ donc une sous-variété et que, d'après le théorème 1.1, la sous-

variété $\text{Hom}^i(\Gamma, G)$ est non-singulière. On peut donc construire un atlas de cartes donnant une structure de variété analytique complexe à cet ensemble qui est compatible à la structure algébrique. ■

Dans la sous-section suivante, nous donnons la définition d'une orbifolde et nous justifions que la partie irréductible de la variété des caractères de Γ , un groupe fuchsien dans G un groupe algébrique complexe admet une structure orbifolde.

1.3 Notion de structure orbifolde

Nous allons maintenant définir une structure orbifolde. Une structure orbifolde sur un espace topologique se définit à l'aide de cartes, comme pour les variétés classiques. L'intérêt de cette structure est qu'elle a beaucoup de choses en commun avec les variétés tout en étant une véritable généralisation du concept. Si un groupe discret G agit proprement discontinuement sur une variété X alors l'ensemble X/G est naturellement une orbifolde. Il s'agit de la manière la plus naturelle de construire une orbifolde.

Bien que les orbifoldes soient localement de ce type, il est bien connu (cf [Thu80] par exemple) qu'il existe des orbifoldes qui ne sont pas quotient d'une variété par l'action d'un groupe discret agissant proprement discontinuement.

Notre but, ici, est de justifier que dans le cas fuchsien, la partie irréductible de la variété des caractères a une structure orbifolde. Nous allons construire cette structure. Dans la suite, nous construirons des orbifoldes lisses (sur \mathbb{R} avec des fonctions lisses, i.e. C^∞).

Avant de définir une orbifolde, nous allons définir des cartes orbifoldes. Soit U un espace topologique connexe, une **carte orbifolde** (de dimension n) est un triplet (V, S, π) avec V un ouvert connexe de \mathbb{R}^n , S un groupe fini agissant de manière lisse sur V et $\pi : V \rightarrow U$ une application continue telle que π induise un homéomorphisme entre V/S et U :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi} & U \\ \downarrow & \nearrow \pi & \\ V/S & & \end{array}$$

Le **noyau de la carte** $\ker(V, S, \pi)$ est l'ensemble des $s \in S$ agissant trivialement sur V (il sera aussi noté $\ker(U)$). Une carte est dite **effective** si son noyau est trivial. En pratique, l'hypothèse d'effectivité est importante. Notons le lemme technique suivant :

Lemme 2

Soit U un espace topologique connexe et (V, S, π) une carte effective de U . L'ensemble des points de V dont le stabilisateur n'est pas trivial est un fermé de codimension ≥ 1 .

Démonstration : Remarquons que si V a une structure riemannienne pour laquelle tous les points de V sont reliés par des géodésiques (possible car V est connexe) et que s est une isométrie non-triviale de V alors l'ensemble des points fixes de s est un fermé de co-dimension ≥ 1 . En effet, supposons que l'on ait une isométrie s de V et $v \in V$ tel que s fixe point par point un voisinage W de v . Alors s fixe non-seulement v mais aussi tout l'espace tangent de v (puisqu'elle agit comme l'identité au voisinage de v).

Il s'ensuit que s (puisque s est une isométrie) fixe toute géodésique partant de v . Si l'on se donne alors une géodésique allant de v à v' , on voit que v' est également fixe. Ainsi s fixe tout élément de V et s trivial.

Comme S est fini, on peut toujours trouver une telle structure riemannienne qui soit S -invariante (autrement dit pour laquelle S est un groupe d'isométries). Ainsi pour tout $s \in S$ (non trivial), l'ensemble des points fixes de s est un fermé de codimension ≥ 1 donc leur réunion (finie) est aussi un fermé de codimension ≥ 1 . On conclut en constatant que la réunion de ces ensembles de points fixes est exactement l'ensemble des points avec un stabilisateur non-trivial. ■

Définissons la notion d'isomorphisme et d'automorphisme de carte. Soit U un espace topologique connexe avec deux cartes (V_i, S_i, π_i) pour $i = 1, 2$. On dit que les deux cartes sont **isomorphes** s'il existe $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ un difféomorphisme et un isomorphisme de groupes $\lambda : S_1 \rightarrow S_2$ tel que ψ soit λ -équivariante, i.e. pour tout $s \in S_1$ et $v \in V_1$ on a $\psi(s.v) = \lambda(s).\psi(v)$. On demande finalement que $\pi_2 \circ \psi = \pi_1$, i.e. que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\psi} & V_2 \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & & U \end{array}$$

Dans ce cas, on dit que (ψ, λ) est un **isomorphisme** entre (V_1, S_1, π_1) et (V_2, S_2, π_2) . Un **automorphisme** pour une carte (V, S, π) de U est un isomorphisme entre (V, S, π) et (V, S, π) . Ils forment un groupe (vérification immédiate) que l'on note $Aut(V, S, \pi)$.

Proposition 4

Soit U un espace topologique connexe et (V, S, π) une carte effective sur U . Pour tout automorphisme (ψ, λ) de la carte (V, S, π) , il existe $s_0 \in S$ tel que :

$$\text{pour tout } v \in V : \psi(v) = s_0 \cdot v \text{ et pour tout } s \in S : \lambda(v) = s_0 s s_0^{-1}$$

Autrement dit, tout automorphisme est intérieur (un tel automorphisme sera noté $(\psi_{s_0}, \lambda_{s_0})$).

Démonstration : Pour tout $v \in V$, on a $\pi(\psi(v)) = \pi(v)$, par conséquent, il existe $s_v \in S$ tel que $\psi(v) = s_v \cdot v$. Notons F le fermé de codimension ≥ 1 des points à stabilisateur non-trivial (par le lemme 2). Pour tout $v \notin F$, s_v est uniquement défini. Si V' est une composante connexe de $V - F$ alors par continuité, il existe un unique $s_{V'}$ tel que pour tout $v \in V'$, $\psi(v) = s_{V'} \cdot v$.

Soit V_1 et V_2 deux composantes connexes de V telles que l'adhérence de V_1 et V_2 s'intersectent. Nous allons montrer que $s_{V_1} = s_{V_2}$. Notons L l'intersection des adhérences de V_1 et V_2 . Il s'agit d'un espace de codimension 1 (sinon V_1 et V_2 seraient dans une même composante connexe). Soit $x \in L$ tel que, localement en x , L soit une sous-variété de codimension 1. Alors si l'on voit $Stab_S(x)$ comme un sous-groupe d'isométries de V , les éléments de $Stab_S(x)$ sont des isométries dont l'ensemble de points fixes est un hyperplan. Il vient alors qu'il ne peut y avoir que deux éléments dans $Stab_S(x)$, l'identité et une symétrie hyperplane échangeant V_1 et V_2 .

D'autre part, par continuité de s_{V_1} et s_{V_2} on a $s_{V_i} \cdot x = x$ donc $s_{V_1} s_{V_2}^{-1} \in Stab_S(x)$. Supposons que $s_{V_1} s_{V_2}^{-1}$ ne soit pas l'identité alors elle envoie un élément $v_2 \in V_2$ sur $v_1 \in V_1$ puisque $Stab_S(x)$ n'a que deux éléments. Or $s_{V_1} s_{V_2}^{-1} v_2 = v_1$ implique $s_{V_2}^{-1} v_2 = s_{V_1}^{-1} v_1$ et donc $V_2 \cap V_1 \neq \emptyset$ ce qui contredit le fait que V_1 et V_2 soient deux composantes connexes différentes de $V - F$. Ainsi $s_{V_1} = s_{V_2}$.

Comme V est connexe, on en déduit que $s_{V'}$ est constant égal à s_0 pour V' composante connexe de $V - F$. Par densité de $V - F$ on en déduit que $\psi(v) = s_0 \cdot v$ pour $v \in V$.

Par définition de (ψ, λ) , pour tout $s \in S$, $v \in V$ on a $\psi(s \cdot v) = \lambda(s) \cdot \psi(v)$, en remplaçant $\psi(v)$ par $s_0 \cdot v$ on obtient $s_0 \cdot (s \cdot v) = \lambda(s) \cdot (s_0 \cdot v)$ i.e. :

$$(s_0 s) \cdot v = (\lambda(s) s_0) \cdot v$$

En appliquant cette égalité pour $v \in V - F$ on obtient $\lambda(s) = s_0 s s_0^{-1}$. ■

Cette proposition technique implique qu'il n'y a que des automorphismes triviaux pour une carte. Autrement dit, modulo un automorphisme intérieur, une carte est unique. Cette propriété d'unicité des cartes est importante pour la définition des orbifolds globales (en effet cette propriété intervient de manière essentielle dans la compatibilité des cartes). C'est pourquoi, dorénavant, toutes les cartes seront considérées comme effectives.

Définissons maintenant l'injection de carte. Soit U un espace topologique connexe de carte (V, S, π) et $i : U' \rightarrow U$ une injection continue avec U' connexe (i.e. U' est un ouvert connexe de U). Si l'on se donne une carte (V', S', π') de U' alors (ϕ, λ) est appelée **injection** de (V', S', π') dans (V, S, π) si $\phi : V' \rightarrow V$ est une immersion ouverte, $\lambda : S' \rightarrow S$ un morphisme injectif tels que ϕ soit λ -invariante et que l'on ait :

$$i \circ \pi = \pi' \circ \phi$$

Prenons (ϕ_i, λ_i) une injection de (V_i, S_i, π_i) carte au-dessus de U' dans (V, S, π) alors on dit que les deux injections sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de cartes entre V_1 et V_2 , (ψ_0, μ_0) et $s \in S$ tels que :

$$\phi_2 = s \cdot \phi_1 \psi_0^{-1} \text{ et } \lambda_2 = s \lambda_1 \mu_0^{-1} s^{-1}$$

Dans le cas où l'on a une injection on dira que la petite carte est induite par la grande.

La notion d'injection de carte est triviale dans le cas des variétés classiques. Nous allons maintenant voir, dans un nouveau lemme que toutes les inclusions de cartes sont isomorphes.

Lemme 3

Soient U un espace topologique connexe de carte (V, S, π) et U' un ouvert connexe de U alors il existe une carte (V', S', π') de U' incluse dans (V, S, π) . De plus si (V'_1, S'_1, π'_1) est une seconde injection de cartes dans (V, S, π) alors les injections de (V', S', π') dans (V, S, π) et de (V'_1, S'_1, π'_1) dans (V, S, π) sont isomorphes.

Démonstration : Montrons tout d'abord l'existence. L'ouvert $\pi^{-1}(U')$ est une réunion d'un certain nombre de translatés par S d'ouverts connexes. Soit V' une de ces composantes connexes. On pose $S' := \text{Stab}_S(V)$ et $\pi' := \pi|_{V'}$. Il est clair que (V', S', π') est une carte de U' . De plus, les injections canoniques de V' dans V et S' dans S fournissent une injection de carte.

Montrons l'unicité. Prenons (V'_1, S'_1, π'_1) une carte au-dessus de U' incluse dans (V, S, π) alors il existe $\phi : V'_1 \rightarrow V$ une immersion ouverte et $\lambda : S'_1 \rightarrow S$ définissant l'injection. Alors $\phi(V'_1)$ est inclus dans une composante connexe et $\lambda(S'_1)$ est inclus dans le stabilisateur de cette composante connexe. Par suite, quitte à composer par un automorphisme de (V, S, π) qui est nécessairement intérieur par la proposition 4 (le groupe S agit transitivement sur les composantes connexes de $\pi^{-1}(U')$) on peut supposer que $\phi(V'_1) \subseteq V'$ et $\lambda(S'_1) \subseteq S'$.

Maintenant, $\phi(V'_1)$ est ouvert dans V' car ϕ est une immersion ouverte. Montrons que c'est aussi fermé. Si $y_n = \phi(x_n)$ une suite d'éléments de $\phi(V'_1)$ telle que (y_n) tend vers $y \in V'$. On sait que $z_n := \pi(y_n) \in U'$ tend vers $z := \pi(y) \in U'$. Ainsi, il existe $x \in V'_1$ tel que $\pi'_1(x) = z$. De plus, $\pi'_1(x_n) = z_n$. Il existe alors une suite $s_n \in S'_1$ tels que $s_n.x_n$ tend vers x . Quitte à extraire, on peut supposer que s_n est constant. De telle sorte que x_n tend vers $s^{-1}.x$. Mais alors on a $\psi(s^{-1}.x) = \lim(\psi(x_n)) = y$. Ceci montre que $y \in \phi(V'_1)$ et donc $\phi(V'_1)$ est fermé. Par connexité de V' : $\phi(V'_1) = V'$.

Comme, (ϕ, λ) est une injection, $\lambda(S'_1) = \text{Stab}_S(\phi(V'_1))$ et ainsi, λ est un isomorphisme de groupes entre S'_1 et S .

Maintenant vu la compatibilité de (ϕ, λ) avec (V, S, π) et la construction de (V', S', π') , il est clair que (ϕ, λ) est compatible avec (V', S', π') ainsi les injections de cartes sont isomorphes. ■

On peut maintenant définir les germes orbifoldes et les orbifoldes.

Prenons U un espace topologique connexe et $p \in U$. On considère $\mathcal{C}(U, p)$ l'ensemble des cartes orbifoldes au-dessus de voisinages ouverts connexes de p dans U quotienté par la relation suivante : soit U_i un voisinage de p avec une carte (V_i, S_i, π_i) pour $i = 1, 2$, alors (V_1, S_1, π_1) et (V_2, S_2, π_2) sont **équivalentes** s'il existe $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ un voisinage ouvert connexe de p tels que les cartes (V_1, S_1, π_1) et (V_2, S_2, π_2) induisent une même carte sur U_3 . Les éléments de $\mathcal{C}(U, p)$ sont appelés **germes orbifoldes** en p sur U .

Soit X un espace topologique Hausdorff, localement connexe et dénombrable à l'infini. On appelle **structure orbifolde** sur X la donnée pour

tout $p \in X$ d'un voisinage U_p de p ainsi que d'une carte (V_p, S_p, π_p) sur U_p telle que pour tout $q \in U_p$, (V_p, S_p, π_p) définisse le même germe orbifold que (V_q, S_q, π_q) en q .

Deux structures orbifoldes $\{(V_p, S_p, \pi_p)|p \in X\}$ et $\{(V'_p, S'_p, \pi'_p)|p \in X\}$ sont **équivalentes** si pour tout p , (V_p, S_p, π_p) et (V'_p, S'_p, π'_p) définissent un même germe orbifolde.

Remarquons que la définition ci-dessus est équivalente à la définition de [ALR07] par les atlas maximaux (tout atlas maximal en leur sens définit une unique structure orbifolde et réciproquement).

Avant de rentrer dans le vif du sujet on va montrer que l'on peut choisir les cartes de manières optimales (quitte à réduire les cartes) :

Lemme 4

Soit X une orbifolde avec la structure $\{(V_p, S_p, \pi_p)|p \in X\}$. Alors il existe une structure équivalente sur X : $\{(V'_p, S'_p, \pi'_p)|p \in X\}$ telle que pour tout $p \in P$ et pour tout voisinage ouvert connexe N de p inclus dans $U'_p := \pi'_p(V'_p)$ la carte induite par (V'_p, S'_p, π'_p) soit (W, T, μ) avec T isomorphe à S'_p . De plus, quitte à réduire U'_p on peut supposer que V'_p est simplement connexe.

Démonstration : Prenons $p \in X$. On considère une suite de voisinages ouverts connexes N_n de p inclus dans $U_p := \pi(V_p)$ dont l'intersection est $\{p\}$. Alors chacun de ces voisinages admet une carte induite par (V_p, S_p, π_p) , on la notera (W_n, T_n, μ_n) . Ceci constitue une suite de cartes décroissante (i.e. si $n \leq m$ alors (W_m, T_m, μ_m) est inclus dans (W_n, T_n, μ_n)). Ainsi la suite d'entiers naturels $|T_n|$ est elle aussi décroissante, elle est donc constante à partir d'un certain rang n_0 . On en déduit que pour tout $n \geq n_0$, T_n et T_{n_0} sont isomorphes (le premier est inclus dans le deuxième et les cardinaux sont égaux). Posons $(V'_p, S'_p, \pi'_p) := (W_{n_0}, T_{n_0}, \mu_{n_0})$.

Par construction, les systèmes

$$\{(V_p, S_p, \pi_p)|p \in X\} \text{ et } \{(V'_p, S'_p, \pi'_p)|p \in X\}$$

sont équivalents. De plus si N est un voisinage ouvert connexe de p inclus dans $\pi'(V'_p)$ alors on peut trouver n tel que $N_n \subseteq N$ (vu que ces voisinages sont de plus en plus petits). Maintenant si (W, T, μ) est la carte induite par (V'_p, S'_p, π'_p) sur N alors on sait que T_n est inclus dans T qui est inclus dans $S'_p = T_{n_0}$ (à isomorphisme près) mais vu que $|T_{n_0}| = |T_n|$ ces inclusions sont des égalités donc T est bien isomorphe à S'_p .

La dernière assertion découle du fait simple que V'_p est localement simplement connexe (c'est un ouvert de \mathbb{R}^d pour un certain d). ■

De ce lemme, on voit qu'il apparaît pour $x \in X$ un groupe minimal S_x . Ce groupe est défini comme le groupe pour lequel toute carte (V, S, π) sur U un voisinage de x , si $v \in V$ est au-dessus de x alors $Stab_S(x)$ est isomorphe à S_x .

Ce groupe n'est bien défini qu'à automorphisme de cartes près et d'après la proposition 4, à conjugaison près. On l'appellera le **groupe d'isotropie** ou **isotropie locale** de $x \in X$.

Si X est une orbifolde, alors on note X_{reg} l'ensemble des points de $x \in X$ dont l'isotropie locale est triviale. Ce sont les points **réguliers** de l'orbifolde. L'ensemble des points non-réguliers est appelé le **lieu orbifold** de l'orbifolde X .

Il existe un moyen naturel de construire une orbifolde. C'est l'objet du prochain théorème.

Théorème 1.2

Soit M une variété classique. Si Γ est un sous-groupe de $Diff(M)$ muni de la topologie discrète. On suppose de plus que l'action de Γ sur M est propre, i.e. pour tout K compact de M l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma.K \cap K \neq \emptyset$ est fini.

Dans ce cas $X := M/\Gamma$ admet une structure naturelle d'orbifolde. En particulier si $x = \Gamma.p \in X$ alors une carte locale en x est donné par (V_x, S_x, π_x) avec $S_x = Stab_\Gamma(p)$ (à conjugaison près) et V_x un voisinage de p dans M .

L'orbifolde X ainsi construite est effective. Le fait que la structure orbifolde soit naturelle se traduit en particulier par le fait que la projection naturelle pr de M sur X est un revêtement de l'ensemble des points de M au-dessus des points réguliers de X sur l'ensemble X_{reg} .

Démonstration : Montrons d'abord que X est un espace topologique Hausdorff, connexe, localement connexe et dénombrable à l'infini.

Tout d'abord les propriétés connexe, localement connexe et dénombrable à l'infini viennent automatiquement car M vérifie ces propriétés et

que l'application pr de projection de M sur X est ouverte. Il s'agit donc seulement de montrer que X est séparé. Prenons p et q deux points de M tel que $\Gamma p \cap \Gamma q = \emptyset$, on cherche deux voisinages W_p et W_q de p et q respectivement tels que $\Gamma.W_p \cap \Gamma.W_q = \emptyset$ (dans ce cas $U_p := \Gamma.W_p$ et $U_q := \Gamma.W_q$ séparent p et q).

Supposons que ce ne soit pas le cas, alors pour tout W_p, W_q voisinages de p et q respectivement : $\Gamma.W_p \cap \Gamma.W_q \neq \emptyset$. Il existe alors une suite (p_n) tendant vers p de M et une suite (γ_n) de Γ telles que $\gamma_n p_n$ tende vers q . On considère alors le compact $K := \{(p_n), p, (\gamma_n p_n), q\}$, clairement $\gamma_n p_n \in \gamma_n K \cap K$. Vu que l'action est propre, l'ensemble $\{(\gamma_n)\}$ est fini. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $\gamma_n = \gamma$ pour tout n . Dans ce cas, on a p_n tend vers p et $\gamma.p_n$ tend vers q or $\gamma.p_n$ tend vers $\gamma.p$ puisque l'action est continue donc $\gamma.p = q$ (M est séparé) ceci contredit le fait que $\Gamma p \cap \Gamma q = \emptyset$.

Ainsi il existe bien deux voisinages W_p et W_q tels que $\Gamma.W_p \cap \Gamma.W_q = \emptyset$ et X est Hausdorff.

Il s'agit maintenant de définir un système de cartes locales sur X . Prenons donc $x = \Gamma.p \in X$. On notera $S_p := \text{Stab}_\Gamma(p)$ (on choisit un représentant particulier de x pour cela, on montrera que différents choix donnent des cartes isomorphes). Clairement, S_p est fini car si W_p est un voisinage compact de p on a :

$$S_p \subseteq \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.W_p \cap W_p \neq \emptyset\} \text{ fini car l'action est propre.}$$

D'autre part si W'_p est un ouvert (connexe) de carte de variété autour de p alors on peut restreindre W'_p de manière à ce que W'_p soit stable par S_p . En effet on choisit :

$$W_p := \text{la composante connexe de } \bigcap_{\gamma \in S_p} \gamma.W'_p \text{ contenant } p$$

L'ensemble W_p est la composante connexe d'une intersection finie d'ouverts voisins de p contenant p , il est donc un voisinage ouvert connexe de p . De plus c'est un ouvert de carte car il est inclus dans W'_p qui en est un. Posons V_p un ouvert de \mathbb{R}^n et ϕ un homéomorphisme de V_p sur W_p . Il est alors clair que (V_p, S_p, π_p) est une carte orbifolde aux voisinage de x avec $\pi_p := \phi \circ pr$. Deux choix différents d'ouverts de carte W_p ne change pas le germe construit.

Finalement, comme V_p et $V_{\gamma.p}$ sont localement difféomorphe (quitte à restreindre les voisinages, $q \mapsto \gamma.q$ est un difféomorphisme de l'un sur l'autre) et que $S_{\gamma.p} = \gamma S_p \gamma^{-1}$, les cartes de x issues de représentants p et $\gamma.p$ sont les mêmes à isomorphisme près.

La dernière chose à montrer est que ces différents germes de cartes sont compatibles les uns aux autres. Prenons $x = \Gamma.p \in X$ muni d'une carte (V_p, S_p, π_p) , $U_x := \pi_p(V_p)$, et $y = \Gamma.q \in U_x$ montrons que les germes de cartes en y issus de (V_p, S_p, π_p) et (V_q, S_q, π_q) sont les mêmes. On pose W_p un voisinage de p tel que V_p soit difféomorphe à W_p et $\Gamma.W_p = U_x$. Dans ce cas, on sait que l'on peut trouver $q \in W_p$ tel que $\Gamma.q = y$.

Dans ce cas W_p est un voisinage de carte de q , quitte à le restreindre en W_q stable par S_q on peut alors construire comme ci-dessus une carte (V_q, S_q, π_q) de y . Par construction, cette carte est compatible à (V_p, S_p, π_p) mais elle définit également le germe de cartes pour y sur X .

Il reste à justifier que les cartes sont effectives. Prenons $x = \Gamma.p \in X$ et (V_p, S_p, π_p) une carte locale en x . Soit $\gamma \in S_p \subseteq \Gamma \subseteq \text{Diff}(M)$ tel que γ agisse trivialement sur V_p alors γ est un difféomorphisme d'ordre fini (S_p est fini) qui agit trivialement sur un ouvert de M . Montrons que $\gamma = Id_M$.

Pour faire cela on considère le groupe $\Gamma_0 := \langle \gamma \rangle$ ce groupe est un groupe fini, il existe donc une métrique riemannienne g de M invariante par Γ_0 . Maintenant $\Gamma_0 \subseteq \text{Isom}(M, g_0)$, si W_p est un voisinage de p constitué de points fixes de γ alors $\gamma(p) = p$ et $D_p(\gamma) = Id$. Vu que γ est d'ordre fini γ vérifie une équation différentielle ordinaire, dont la seule solution est l'identité de M . Par unicité de la solution on a $\gamma = Id_M$. ■

Le théorème 1.2 définit un certain type d'orbifoldes. Suivant Thurston, on dit qu'une orbifold X est **bonne** s'il existe une variété M et Γ un sous-groupe discret de difféomorphismes de M agissant proprement discontinuement sur M tel que $M/\Gamma = X$ en tant qu'orbifold. Une orbifold est dite **mauvaise** si elle n'est pas bonne. Un exemple typique de bonne orbifold est alors :

Exemple 3

Soit a, b, c trois entiers ≥ 3 tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. On peut alors définir un groupe fuchsien triangulaire $T_{a,b,c}$ qui est un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{R})$ (cf exemple 1) agissant proprement discontinuement sur \mathcal{H} , le demi-plan de Poincaré.

Par conséquent, $\mathcal{H}/T_{a,b,c}$ est une orbifold par le théorème 1.2. Topologiquement, on peut montrer que $\mathcal{H}/T_{a,b,c}$ est une sphère. D'un point de vue orbifold, le lieu orbifold est constitué de trois points dont l'isotropie locale est donnée respectivement par \mathbb{Z}/a , \mathbb{Z}/b et \mathbb{Z}/c .

Alors que le théorème 1.2 fournit un grand nombre de bonnes orbifoldes, il n'est pas évident qu'il existe même une seule mauvaise orbifolde. Thurston a démontré qu'il existait de telles orbifoldes (cf [Thu80]).

Alors que ce théorème est classique, ce que nous allons montrer maintenant l'est un peu moins. On utilisera un lemme dans la prochaine démonstration :

Lemme 5

Soient M une variété et G un groupe de Lie agissant proprement, de manière lisse sur M alors M admet une métrique G -invariante.

Démonstration : On retrouvera la démonstration de ce lemme dans [Kos65]. ■

Théorème 1.3

Soient M une variété et G un groupe de Lie agissant fidèlement, proprement et de manière lisse sur M avec stabilisateurs finis. Alors le quotient M/G admet une structure orbifolde naturelle.

Démonstration : Par le lemme 5, il existe $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une métrique riemannienne G -invariante sur M .

Remarquons que, topologiquement M/G a une topologie Hausdorff car l'action de G sur M est propre. Nous devons maintenant construire une carte orbifolde en tout point $G \cdot x$ de M/G . Fixons $x \in M$ et notons G_x le stabilisateur $Stab_G(x)$.

L'espace tangent à $G \cdot x$ en x est un sous-espace de $T_x M$ qui est clairement G_x -invariant. On note H_x son orthogonal dans $T_x M$ pour la métrique G -invariante. L'espace tangent se décompose donc sous la forme :

$$T_x M = T_x G \cdot x \oplus H_x \tag{1.1}$$

Si $g \in G$ alors en différenciant l'application $x \mapsto g \cdot x$, on obtient une application $T_x R_g : T_x M \rightarrow T_{g \cdot x} M$. Il est clair que :

$$T_x R_g(T_x G \cdot x) = T_{g \cdot x} G \cdot x$$

Vu que chaque H_x est défini comme étant l'orthogonal pour un produit scalaire G -invariant, on obtient :

$$T_x R_g(H_x) = H_{g \cdot x}$$

Autrement dit, l'action de G respecte la décomposition (1.1) de chaque espace tangent. On fixe maintenant $x \in M$ et l'on définit $g \cdot H_x := H_{g \cdot x}$. On remarque qu'il y a un isomorphisme entre H et $g \cdot H$ donné par l'action de G . Nous définissons deux fibrés vectoriels :

$$\mathcal{H} := \bigcup_{g \cdot x \in G \cdot x} g \cdot H \text{ et } G \times_{G_x} H$$

Ce sont deux fibrés vectoriels de fibre H au-dessus de $G \cdot x$. Ces deux fibrés vectoriels sont isomorphes. En effet le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 [g, v] & \xrightarrow{\Phi} & g \cdot v \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G \times_{G_x} H & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{H} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G/G_x & \xrightarrow{\phi} & G \cdot x \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 gG_x & \xrightarrow{\phi} & g \cdot x
 \end{array}$$

Soit V un voisinage ouvert de 0 dans H tel que l'exponentielle (pour la métrique G -invariante) réalise un difféomorphisme de V sur son image dans M (on peut toujours le faire quitte à restreindre V). En prenant la composante connexe de 0 dans :

$$\bigcap_{g \in G_x} g \cdot V$$

On garde un voisinage ouvert de 0 (car G_x est fini) qui est en plus G_x -invariant. On peut donc supposer (quitte à remplacer V par ce voisinage) que V est G_x -invariant. Soit

$$\tilde{V} := \bigcup_{g \cdot x \in G \cdot x} g \cdot V$$

Alors l'exponentielle \exp réalise un difféomorphisme de \tilde{V} sur son image dans M en envoyant $g \cdot v$ sur $\exp_{g \cdot x}(g \cdot v) = g \cdot \exp_x(v)$ (cette égalité vient du fait que G agit par isométries).

On note alors $T := \exp(\tilde{V})$. L'ouvert T est un voisinage ouvert tubulaire de $G \cdot x$. Nous allons construire une carte orbifold pour T/G voisinage de $G \cdot x$ dans M/G .

Clairement, $\exp \circ \Phi$ induit un difféomorphisme G -invariant de $G \times_{G_x} V$ sur T . En passant au quotient par l'action de G , $\exp \circ \Phi$ induit un homéomorphisme de $(G \times_{G_x} V)/G$ sur T/G .

Précisément, si l'on note ι l'inclusion de V dans $G \times_{G_x} V$ envoyant v sur $[1_G, v]$ alors $(V, G_x, p_G \circ \exp \circ \Phi \circ \iota)$ est une carte pour T/G . Notons $\pi_x := p_G \circ \exp \circ \Phi \circ \iota$. Supposons que v, w soient deux éléments de V tels que $\pi_x(v) = \pi_x(w)$ alors il existe $g \in G$ tel que $g \cdot [e, v] = [e, w]$ et donc $[g, w] = [e, v]$ ainsi $g \in G_x$. On en déduit qu'il existe une application $f_x : V/G_x \rightarrow T/G$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi_x} & T/G \\ & \searrow & \nearrow f_x \\ & V/G_x & \end{array}$$

De plus, on peut voir que f_x est injective. Vu que f_x est continue et ouverte, on en déduit que f_x est un homéomorphisme. Ceci montre que (V, G_x, π_x) est une carte pour T/G .

Pour pouvoir définir la structure orbifold sur M/G , il suffit alors de montrer que deux cartes différentes définissent le même germe orbifold. Soit $G \cdot x_1, G \cdot x_2 \in M/G$ ayant pour carte respective (V_i, G_i, π_i) ($i = 1, 2$) telle que $\pi_1(V_1) \cap \pi_2(V_2) \neq \emptyset$. On prend alors $x \in M$ tel que $G \cdot x \in \pi_1(V_1) \cap \pi_2(V_2)$ et $v_i \in V_i$ vérifiant $\pi_i(v_i) = G \cdot x$ pour $i = 1, 2$.

Par définition, il existe $g_1, g_2 \in G$ et $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ tels que

$$\exp_{g_1 \cdot x_1}(g_1 \cdot v_1) = x = \exp_{g_2 \cdot x_2}(g_2 \cdot v_2)$$

Quitte à considérer $x := g_1^{-1} \cdot x_1$ on peut supposer $g_1 = 1_G$. Soit N un voisinage de x dans M inclus dans l'image de $G \times_{G_i} V_i$ via $\exp \circ \Phi_i$. Alors il existe des difféomorphismes Ψ_1 d'un voisinage N_1 de $[e, v_1]$ (dans $G \times_{G_1} V_1$) sur N et Ψ_2 d'un voisinage N_2 de $[g_2, v_2]$ (dans $G \times_{G_2} V_2$) sur N induits respectivement par $\exp \circ \Phi_1$ et $\exp \circ \Phi_2$.

Ces difféomorphismes sont clairement G -équivariants, ainsi l'application $\Psi := \Psi_2^{-1} \circ \Psi_1$ est un difféomorphisme G -équivariant d'un voisinage de $[e, v_1]$ sur $[g_2, v_2]$. Pour $i = 1, 2$, notons $\pi'_i := \pi_i|_{N_i}$ et $G'_i := \text{Stab}_G(\Psi_i[1_G, v_i])$.

Par les définitions on a $\Psi_2(v_2) = g_2 \cdot \Psi_1(v_1)$ ainsi $g_2 G'_1 g_2^{-1} = G'_2$. Posons $\lambda : G'_1 \rightarrow G'_2$ l'application envoyant $g \in G_1$ sur $g_2 g g_2^{-1} \in G_2$. On peut vérifier que (Ψ, λ) est un isomorphisme d'injections de cartes entre (N_1, G'_1, π'_1) et (N_2, G'_2, π'_2) . Il est clair que $\pi'_2 \circ \Psi = \pi'_1$ par la définition de Ψ de plus via ces définitions l'injection de G'_1 dans G et G'_2 dans G sont données respectivement par l'inclusion de $G'_i := \text{Stab}_G(\Psi_i[1_G, v_i])$ dans G . On en déduit donc que (Ψ, λ) est bien un isomorphisme d'injections de carte. Par conséquent M/G a bien une structure orbifolde. ■

Il convient de faire quelques remarques sur cette construction. Tout d'abord, la structure orbifolde ne dépend pas du choix de la métrique du lemme 5. C'est une vérification un peu fastidieuse. L'argument étant que la métrique sert uniquement à choisir en chaque point un sous-espace vectoriel horizontal dans l'espace tangent de manière lisse. Chacun de ces sous-espaces horizontaux permettant alors d'obtenir une tranche (« slice ») pour l'action de G sur M . Insistons sur le fait que cette tranche est loin d'être unique.

Une autre remarque, dans [Buc99], l'auteur démontre que toute orbifolde X peut s'écrire comme M/G avec M une variété et G un groupe de Lie compact même si l'orbifolde n'est pas bonne (i.e. quotient d'une variété par l'action d'un groupe discret agissant proprement discontinuement par difféomorphismes).

Finalement, on a le corollaire souhaité sur la partie irréductible de la variété des caractères :

Corollaire 4

Soit Γ un groupe fuchsien et G un groupe de Lie semi-simple alors $\chi^i(\Gamma, G)$ admet une structure orbifolde. En particulier l'isotropie locale d'une classe de conjugaison de représentation $G \cdot \rho$ est défini (à conjugaison près) comme étant le centralisateur de ρ quotienté par le centre de G .

Démonstration : Par le corollaire 3, l'ensemble $\text{Hom}^i(\Gamma, G)$ admet naturellement une structure de variété complexe.

Par définition, on a $\chi^i(\Gamma, G) = \text{Hom}^i(\Gamma, G)/G$. Quitte à agir via le groupe quotient $G/Z(G)$ plutôt que G (cela ne change rien car G agit par conjugaison), on a :

$$\chi^i(\Gamma, G) = \text{Hom}^i(\Gamma, G)/(G/Z(G))$$

Le groupe $G/Z(G)$ est alors un groupe de Lie agissant fidèlement et proprement (proposition 1.1 de [JM87]). En vertu du corollaire 17 de [Sik12], les centralisateurs des représentations irréductibles sont finis, on peut donc appliquer le théorème 1.3 pour avoir une structure orbifold sur $\chi^i(\Gamma, G)$. Par définition, l'isotropie de $G \cdot \rho \in \chi^i(\Gamma, G)$ est donnée (à conjugaison près) par le stabilisateur de ρ dans $G/Z(G)$, ainsi l'isotropie de $G \cdot \rho$ est, à conjugaison près, $Z_G(\rho)/Z(G)$. ■

Ceci est le résultat auquel nous voulions aboutir dans ce premier chapitre. Dans la suite, nous cherchons à décrire le lieu orbifold de l'orbifold $\chi^i(\Gamma, G)$. D'après ce corollaire, un point $G \cdot \rho$ de $\chi^i(\Gamma, G)$ est dans le lieu orbifold si et seulement si ρ est une représentation exceptionnelle (i.e. irréductible avec un centralisateur non-trivial). Si $G = SL(n, \mathbb{C})$ alors le lemme de Schur implique que toute représentation irréductible a pour centralisateur le centre de $SL(n, \mathbb{C})$. Autrement dit, le lieu orbifold est vide dans ce cas.

Pour décrire le lieu orbifold de $\chi^i(\Gamma, G)$ en général, nous adoptons la méthode suivante. On commence par identifier quels sont les centralisateurs de sous-groupes irréductibles de G . Ensuite, on cherche à les classifier à conjugaison près.

Le lieu orbifold est alors constitué de la réunion pour toutes les classes de conjugaisons de centralisateurs possibles, des classes de conjugaison de représentations commutant avec un centralisateur donné. Cela aboutit à une sorte de stratification du lieu orbifold.

Dans le cas où $G := PSL(p, \mathbb{C})$ (chapitre 2), nous avons réalisé ce travail.

Dans le cas où $G := PSL(n, \mathbb{C})$ (chapitre 3), ou $Spin(n, \mathbb{C})$, $SO(n, \mathbb{C})$ (chapitre 4) nous avons seulement commencé à donner la classification des centralisateurs (essentiellement à isomorphisme près et quelques pistes pour la classification à conjugaison près).

Chapitre 2

$PSL(p, \mathbb{C})$: sous-groupes exceptionnels et lieu singulier de la variété des caractères

2.1 Résultats

Dans cette partie, on se propose d'étudier les sous-groupes exceptionnels de $PSL(p, \mathbb{C})$ ainsi que le lieu singulier de la variété des caractères $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ quand Γ est un groupe de type fini, et en particulier, quand Γ est un groupe fuchsien. Dans la section 2.2, nous prouvons le théorème 2.1, qui peut se résumer ainsi :

Résultat 1 (*Centralisateurs des sous-groupes exceptionnels*)

Soit \bar{H} un sous-groupe irréductible exceptionnel de $PSL(p, \mathbb{C})$. Il y a deux cas possibles :

- Cas 1 : $Z_{PSL(p, \mathbb{C})}(\bar{H})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$. Dans ce cas, le groupe \bar{H} est son propre centralisateur, il est donc, en particulier, abélien.
- Cas 2 : $Z_{PSL(p, \mathbb{C})}(\bar{H})$ est isomorphe à \mathbb{Z}/p . Dans ce cas, \bar{H} est conjugué à la projection dans $PSL(p, \mathbb{C})$ d'un sous-groupe contenu dans $SL(p, \mathbb{C})$ qui est engendré par des matrices diagonales et la matrice d'une permutation cyclique d'ordre p .

Si \bar{H}_1 et \bar{H}_2 sont deux sous-groupes irréductibles de $PSL(p, \mathbb{C})$ dont les centralisateurs sont isomorphes (de manière abstraite) alors les centralisateurs sont conjugués dans $PSL(p, \mathbb{C})$.

Le théorème 2.1 est démontré en utilisant de l'algèbre linéaire. Ce théorème ne donne pas seulement la liste des centralisateurs possibles, mais décrit aussi les sous-groupes exceptionnels associés. Finalement, il classe les classes de conjugaison des centralisateurs des sous-groupes exceptionnels dans le groupe $PSL(p, \mathbb{C})$. Les sous-groupes irréductibles dont le centralisateur est isomorphe à $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ (il y en a une unique classe à conjugaison près) auront un rôle important à jouer dans la suite, c'est pourquoi nous les qualifierons de **très exceptionnels**. De la même façon toute représentation dont l'image est un sous-groupe très exceptionnel sera dite **très exceptionnelle**. À cette étude préliminaire, succède l'étude des représentations.

Dans la section 2.3, nous utilisons le théorème 2.1 pour décrire le lieu singulier de la partie irréductible de la variété des caractères $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$. La sous-section 2.3.1 décrit une autre variété des caractères qui se projette naturellement sur $\chi_{sing}^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$. En effet, si \bar{D} désigne le sous-groupe des matrices diagonales modulo $Z(SL(p, \mathbb{C}))$ dans $PSL(p, \mathbb{C})$, alors le théorème 2.1 implique que tout sous-groupe exceptionnel de $PSL(p, \mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $\bar{D} \rtimes \langle \bar{M}_c \rangle$ où \bar{M}_c désigne l'image dans $PSL(p, \mathbb{C})$ de la matrice de permutation associée à un p -cycle. En particulier :

$$\varphi : \begin{cases} \chi^i(\Gamma, \bar{D} \rtimes \langle \bar{M}_c \rangle) & \longrightarrow & \chi_{sing}^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C})) \\ \bar{D} \rtimes \langle \bar{M}_c \rangle \cdot \rho & \longmapsto & G \cdot \rho \end{cases}$$

est bien définie et surjective. Si l'on définit la projection naturelle :

$$q : \begin{cases} \bar{D} \rtimes \langle \bar{M}_c \rangle & \longrightarrow & \langle \bar{M}_c \rangle \\ (x, s) & \longmapsto & s \end{cases}$$

alors pour $\bar{\rho} \in Hom(\Gamma, \langle \bar{M}_c \rangle)$ on définit :

$$\bar{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i := \{PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho \in \chi^i(\Gamma, \bar{D} \rtimes \langle \bar{M}_c \rangle) \mid q \circ \rho = \bar{\rho}\}$$

Dans la proposition 11 de la section 2.3.1, nous décrivons chaque $\bar{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$ en utilisant des groupes de cohomologie de Γ agissant sur \bar{D} via $\bar{\rho}$. Remarquons que l'union de tous les $\bar{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$ est exactement la variété $\chi^i(\Gamma, \bar{D} \rtimes \langle \bar{M}_c \rangle)$. Les ensembles $\varphi(\bar{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i)$ seront appelés **composantes**. Nous démontrons alors, dans la sous-section 2.3.2, le théorème 2.2 :

Résultat 2 (Géométrie d'une composante)

Soit $\bar{\rho}$ un morphisme de groupes non-trivial dans $Hom(\Gamma, \langle \bar{M}_c \rangle)$ alors φ restreinte à $\bar{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$ est un homéomorphisme sur son image.

Par ce qui a été dit plus haut, le lieu singulier est une union finie de composantes, chacune étant homéomorphe à $\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$ dont la géométrie est décrite dans la sous-section 2.3.1. Ce qui vient ensuite est l'intersection des différentes composantes, permettant alors de comprendre globalement le lieu singulier. C'est l'objet du théorème 2.3 :

Résultat 3 (Combinatoire du lieu singulier)

Soit Γ un groupe de type fini de p -rang r (i.e. la dimension sur \mathbb{Z}/p de $\Gamma^{Ab}/p\Gamma^{Ab}$).

Le lieu singulier $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ est la réunion de $\frac{p^r-1}{p-1}$ composantes différentes $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i)$ où $\bar{\rho}$ est un morphisme de groupes non-trivial dans $Hom(\Gamma, \langle M_c \rangle)$.

Deux composantes différentes s'intersectent en $p-1$ classes de conjugaison de représentations, chacune étant la classe de conjugaison d'une représentation très exceptionnelle.

Réciproquement, chaque classe de conjugaison de représentations très exceptionnelles appartient à exactement $p+1$ composantes.

Le nombre de classes de conjugaison de représentations très exceptionnelles dans $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ est :

$$\frac{(p^r - 1)(p^{r-1} - 1)}{p^2 - 1}$$

En particulier, si $r = 0$, le lieu singulier est vide et si $r = 1$, le lieu singulier est une seule composante sans la moindre représentation très exceptionnelle.

Dans la sous-section 2.3.3, nous décrivons la correspondance φ en terme de géométrie différentielle quand $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ est une orbifolde. (e.g. quand Γ est un groupe fuchsien). En particulier, le théorème 2.4 implique que la correspondance entre $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i)$ et $\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$ est un difféomorphisme en dehors des classes de conjugaison très exceptionnelles.

Dans la section 2.4, nous utilisons la description en terme de cohomologie des groupes pour expliciter le lieu orbifold quand $\Gamma = \mathbb{F}_l$ est un groupe libre de rang $l \geq 2$ (c.f. théorème 2.5). En particulier, nous avons le corollaire 6 :

Résultat 4 (lieu orbifold pour les groupes libres (1))

Soit $l \geq 2$. Le lieu orbifold de $\chi^i(\mathbb{F}_l, PSL(p, \mathbb{C}))$ est connexe de dimension $(p-1)(l-1)$.

Quand Γ est le groupe fondamental d'une surface de Riemann fermée de genre $g \geq 2$, nous définissons l'**invariant d'Euler** $e(\rho)$ dans $Z(SL(p, \mathbb{C}))$ d'une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow PSL(p, \mathbb{C})$. En effet, si Γ est engendré par $2g$ éléments $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ vérifiant l'unique relation $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1$, l'invariant d'Euler peut être calculé en prenant n'importe quel relevé $\hat{\rho}(\gamma) \in SL(p, \mathbb{C})$ pour chaque $\rho(\gamma)$ et en prenant :

$$e(\rho) := [\hat{\rho}(a_1), \hat{\rho}(b_1)] \dots [\hat{\rho}(a_g), \hat{\rho}(b_g)] \in Z(SL(p, \mathbb{C}))$$

L'invariant d'Euler est bien défini (il ne dépend pas du relevé) et est dans le centre de $SL(p, \mathbb{C})$. On peut remarquer que l'invariant d'Euler est en fait, l'obstruction au relèvement de ρ à un morphisme de groupes vers $SL(p, \mathbb{C})$. Le corollaire 8 stipule alors :

Résultat 5 (lieu orbifold pour les groupes de surfaces)

Soient $g \geq 2$ et Σ_g une surface de Riemann fermée de genre g . Pour tout $e \in Z(SL(p, \mathbb{C}))$ l'ensemble des éléments $\chi^i_{Sing}(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$ dont l'invariant d'Euler est e est connexe. Ainsi le lieu singulier de $\chi^i_{Sing}(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$ a p composantes connexes, leur dimension est $2(g-1)(p-1)$.

Dans [Li93], l'auteur démontre que la partie irréductible de la variété des caractères d'un groupe de surface Γ vers un groupe de Lie simple G a exactement $|\pi_1(G)|$ composantes connexes (également données par l'invariant d'Euler). En vertu de ce résultat, chacune des composantes connexes de $\chi^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$ contient une unique composante connexe du lieu orbifold. Nous terminons avec une considération algébrique (dans le cas du groupe libre) avec la proposition 26 :

Résultat 6 (lieu orbifold pour les groupes libres (2))

Soit Γ un groupe libre de rang $l \geq 2$, alors les composantes $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i)$ (pour $\bar{\rho} \in Hom(\Gamma, \overline{M}_c)$ non-trivial) sont les composantes irréductibles du lieu orbifold $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ pour la topologie de Zariski.

Si l'on sait que $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ est une orbifolde quand Γ est fuchsien, il n'est pas évident que ses composantes connexes soient de bonnes orbifolde (i.e. quotient d'une variété par un groupe discret agissant proprement

discontinuellement). La réponse à cette question n'est toujours pas connue. Dans le corollaire 2.8 de [FL12], les auteurs décrivent une telle variété dans le cas où Γ est un groupe libre. En effet on peut voir, dans ce cas, que $\chi^i(\Gamma, SL(n, \mathbb{C})) \rightarrow \chi^i(\Gamma, PSL(n, \mathbb{C}))$ envoyant une représentation dans $SL(n, \mathbb{C})$ sur son projeté dans $PSL(n, \mathbb{C})$ est surjective. Étant donné que $\chi^i(\Gamma, SL(n, \mathbb{C}))$ est une variété complexe, nous obtenons un recouvrement par une variété complexe et le groupe qui agit proprement discontinuellement est alors $(\mathbb{Z}/n)^l$ où l est le rang du groupe libre.

Une conséquence du travail effectué dans la section 2.4 est que la partie irréductible de la variété des caractères pour Γ un groupe de surface de Riemann fermée de genre $g \geq 2$ a p composantes (classifiées par l'invariant d'Euler). La variété $\chi^i(\Gamma, SL(p, \mathbb{C}))$ est une variété qui est un revêtement sur la composante dont l'invariant d'Euler est trivial. Dans le cas où l'invariant d'Euler est non-trivial, il reste encore à trouver le revêtement correspondant.

Dès la section 2.2, la condition que p soit premier apparaît nécessaire. L'étude correspondante des sous-groupes exceptionnels de $PSL(n, \mathbb{C})$ et de leur centralisateur est un travail qui sera abordé dans le chapitre 3. Pour ce qui est de $SO(n, \mathbb{C})$ et $Spin(n, \mathbb{C})$, on abordera cela dans le chapitre 4.

2.2 Sous-groupes exceptionnels de $PSL(p, \mathbb{C})$

Ici p désignera un nombre premier. On note la projection :

$$\pi : SL(p, \mathbb{C}) \rightarrow PSL(p, \mathbb{C})$$

Pour simplifier, pour tout $g \in SL(p, \mathbb{C})$, on note $\bar{g} := \pi(g)$. Il nous sera également utile dans certains calculs de considérer les matrices de $SL(p, \mathbb{C})$ comme des applications linéaires de l'espace vectoriel $V := \mathbb{C}^{\mathbb{Z}/p}$ dont la base canonique (fixée une fois pour toute) est notée (e_0, \dots, e_{p-1}) et indexée par \mathbb{Z}/p . On peut alors construire des matrices de permutations :

$$M : \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}/p} & \longrightarrow GL(p, \mathbb{C}) \\ \sigma & \longmapsto (M_\sigma : e_i \mapsto e_{\sigma(i)}) \end{array} \right.$$

À chaque permutation de \mathbb{Z}/p , nous associons la transformation linéaire de V qui permute les vecteurs de base conformément à cette permutation.

L'ensemble D désignera le sous-groupe des matrices diagonales dans $SL(p, \mathbb{C})$. Si ξ est une racine primitive p -ème de l'unité, nous noterons $D(\xi)$ la matrice diagonale définie par :

$$D(\xi) := \begin{pmatrix} \xi^0 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $D(\xi)$ est l'application linéaire envoyant e_i sur $\xi^i e_i$.

Si c est la permutation $(0, \dots, p-1)$ de \mathbb{Z}/p (envoyant i sur $i+1$) alors on voit que $\det(M_c) = 1$ sauf si $p = 2$. De la même façon, $\det(D(\xi)) = 1$ sauf si $p = 2$. Si $p = 2$ on définit M_c et $D(\xi)$ comme avant mais en multipliant par $\sqrt{-1}$ pour obtenir des matrices de déterminant 1 :

$$D(\xi) := \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \text{ et } M_c := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Avec cette convention, nous pourrions énoncer d'une manière uniforme le théorème pour $p = 2$ et $p > 2$.

Les matrices M_c et $D(\xi)$ que nous venons de définir (ou plutôt leurs images dans le groupe quotient $PSL(p, \mathbb{C})$) seront importantes pour nous. Nous verrons dans la proposition 5 que tout sous-groupe exceptionnel de $PSL(p, \mathbb{C})$ commute (à conjugaison près) avec $\overline{D(\xi)} := \pi(D(\xi))$. De plus, nous verrons également que tout sous-groupe exceptionnel contient (à conjugaison près) $\overline{M_c} := \pi(M_c)$.

Notons que dans la suite, une barre au-dessus d'une matrice désigne toujours sa projection dans $PSL(p, \mathbb{C})$ et pas la conjugaison complexe. Nous démontrerons, dans cette section le théorème suivant :

Théorème 2.1 (Sous-groupes exceptionnels de $PSL(p, \mathbb{C})$)

Soit \overline{H} un sous-groupe exceptionnel de $PSL(p, \mathbb{C})$, alors le groupe \overline{H} est conjugué à un groupe de la forme $\overline{H} = \overline{H_0} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle$ où $\overline{H_0} \leq \overline{D}$ est non-trivial et globalement fixe par l'action naturelle de $\overline{M_c}$ sur \overline{D} (rappelons que D est l'ensemble des matrices diagonales de $SL(p, \mathbb{C})$ et \overline{D} son projeté dans $PSL(p, \mathbb{C})$).

De plus, si $\overline{H_0} = \langle \overline{D(\xi)} \rangle$ alors $Z_{PSL(p, \mathbb{C})}(\overline{H})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ engendré par $\overline{D(\xi)}$ et $\overline{M_c}$.

Sinon $Z_{PSL(p, \mathbb{C})}(\overline{H})$ est isomorphe à \mathbb{Z}/p engendré par $\overline{D(\xi)}$.

L'idée est de travailler dans $SL(p, \mathbb{C})$ plutôt que dans $PSL(p, \mathbb{C})$. Ainsi on définira $H := \pi^{-1}(\overline{H})$ et $U := \pi^{-1}(Z_{PSL(p, \mathbb{C})}(\overline{H}))$. On étudiera alors H et U . En effet, de par leur définition, pour tout $u \in U$ et $h \in H$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $[u, h] := uhu^{-1}h^{-1} = \lambda I_p$. Le prochain lemme utilisera cette relation. Pour le lemme on donne quelques notations, si $n \geq 1$, $A \in GL(n, \mathbb{C})$ et $\mu \in \mathbb{C}$:

$$E_\mu(A) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid A.x = \mu x\} \text{ et } Sp(A) := \{\mu \in \mathbb{C}^* \mid E_\mu(A) \neq 0\}$$

qui sont respectivement le sous-espace propre pour A associé à μ et le spectre de A .

Lemme 6

Soient $n \geq 1$, A, B deux matrices dans $GL(n, \mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $[A, B] = \lambda I_n$. Alors pour tout $\mu \in \mathbb{C}^*$, $A(E_\mu(B)) = E_{\lambda^{-1}\mu}(B)$ and $B(E_\mu(A)) = E_{\lambda\mu}(A)$.

En particulier B agit sur $Sp(A)$ en multipliant par λ et A agit sur $Sp(B)$ en multipliant par λ^{-1} .

Démonstration : La preuve est élémentaire, si $AB = \lambda BA$, alors pour $x \in E_\mu(B)$, on a $ABx = \mu Ax$ et $\lambda BA.x = \lambda B(Ax)$ et donc $B(Ax) = \lambda^{-1}\mu A$.

Ainsi, $Ax \in E_{\lambda^{-1}\mu}(B)$ et donc :

$$A(E_\mu(B)) \subseteq E_{\lambda^{-1}\mu}(B)$$

De plus, si $x \in E_\mu(A)$ alors $A(Bx) = \lambda\mu Bx$ et donc :

$$B(E_\mu(A)) \subseteq E_{\lambda\mu}(A)$$

Nous avons également $BA^{-1}B^{-1}A = \lambda I_n$. En appliquant ce que l'on vient de faire avec μ remplacé par $\lambda^{-1}\mu$ et (A, B) par (B, A^{-1}) dans le premier cas on a :

$$A(E_\mu(B)) \supseteq E_{\lambda^{-1}\mu}(B)$$

Nous avons également $B^{-1}ABA^{-1} = \lambda I_n$. En appliquant ce que l'on vient de faire à μ remplacé par $\lambda\mu$ et (A, B) par (B^{-1}, A) dans le premier cas on a :

$$B(E_\mu(A)) \supseteq E_{\lambda\mu}(A) \quad \blacksquare$$

Dans le contexte des centralisateurs de groupes exceptionnels cela implique :

Proposition 5

Soit \overline{H} un sous-groupe exceptionnel de $PSL(p, \mathbb{C})$. Si l'on définit $U := \pi^{-1}(Z_{PSL(p, \mathbb{C})}(\overline{H}))$, le groupe U contient un élément conjugué à $D(\xi)$.

Démonstration : Soit H le groupe $\pi^{-1}(\overline{H})$, puisque \overline{H} est irréductible, H l'est également (c.f. [Sik12]).

Le groupe $Z_{SL(p, \mathbb{C})}(H)$ est exactement $Z(SL(p, \mathbb{C}))$ par le lemme de Schur. Soit $z \in U \notin Z(SL(p, \mathbb{C}))$ (ceci est possible car $\pi(U)$ n'est pas trivial puisque \overline{H} est exceptionnel) alors z ne commute pas avec H . On peut donc trouver $h_z \in H$ tel que $zh_z z^{-1} h_z^{-1} \neq I_p$.

De plus, puisque $z \in U$, $zh_z z^{-1} h_z^{-1} \in Z(SL(p, \mathbb{C}))$. Ainsi, il existe $0 < k < p$ tel que :

$$zh_z z^{-1} h_z^{-1} = \xi^k I_p$$

En prenant μ une valeur propre de z , le lemme 6 implique que $\xi^{-k}\mu$ est une valeur propre. En appliquant le lemme p fois, $\xi^{-kl}\mu$ est une valeur propre pour l allant de 0 à $p-1$. Ces valeurs propres sont deux à deux différentes (car ξ^k est primitif, vu que p est premier). Nous obtenons alors au moins p valeurs propres pour z , et nous les avons donc toutes. En choisissant une base de diagonalisation pour z nous obtenons que z est conjugué à :

$$\begin{pmatrix} \xi^0 \mu & & & \\ & \xi^{-k} \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{-k(p-1)} \mu \end{pmatrix}$$

Or z est de déterminant 1 donc $\xi^{-k \frac{p(p-1)}{2}} \mu^p$ doit être égal à 1.

Soit $p > 2$, auquel cas $\xi^{-k \frac{p(p-1)}{2}} = 1$ (comme $p-1$ est pair) et alors $\mu^p = 1$ impliquant que μ est une racine p -ème de l'unité et z est alors conjuguée à $D(\xi)$.

Soit $p = 2$, auquel cas $\xi = -1$ et $\xi^{-k \frac{p(p-1)}{2}} = -1$, cela implique que μ est égal à $\pm\sqrt{-1}$, et l'on voit que z est également conjuguée à $D(\xi)$. ■

Au vu de cette proposition (et puisque l'on travaille essentiellement à conjugaison près), nous pourrions toujours supposer que U contient $D(\xi)$. Une conséquence intéressante :

Proposition 6

Soit F un sous-groupe de $SL(p, \mathbb{C})$ tel que pour tout $f \in F$, $[f, D(\xi)]$ appartient à $Z(SL(p, \mathbb{C}))$, alors F est un sous-groupe de $\langle D, M_c \rangle$.

Démonstration : Vu que $D(\xi)$ est toujours (que p soit impair ou non) diagonale à valeurs propres distinctes, il vient que son centralisateur est exactement D . Si $p = 2$, alors :

$$M_{c,0}D(\xi)_0 \cdot e_0 = \sqrt{-1}M_{c,0} \cdot e_0 = -e_1, \quad M_{c,0}D(\xi)_0 \cdot e_1 = -\sqrt{-1}M_{c,0} \cdot e_1 = e_0 \\ D(\xi)_0M_{c,0} \cdot e_0 = \sqrt{-1}D(\xi)_0 \cdot e_1 = e_1, \quad D(\xi)_0M_{c,0} \cdot e_1 = \sqrt{-1}D(\xi)_0 \cdot e_0 = -e_0$$

Ainsi $M_{c,0}D(\xi)_0M_{c,0}^{-1}D(\xi)_0^{-1} = -I_2$ et donc

$$M_c^k D(\xi) M_c^{-k} D(\xi)^{-1} = (-1)^k I_2 \text{ pour } k = 0, 1$$

Si $p > 2$, $0 < k < p$ et $i \in \{0, \dots, p-1\}$:

$$M_c^k D(\xi) \cdot e_i = \xi^i e_{i+k} \text{ and } D(\xi) M_c^k \cdot e_i = \xi^{i+k} e_{i+k}$$

Ainsi

$$M_c^k D(\xi) M_c^{-k} D(\xi)^{-1} = \xi^k I_p$$

Cette relation est donc vraie quelque soit p premier. Autrement dit :

$$D(\xi) M_c^k D(\xi)^{-1} M_c^{-k} = \xi^{-k} I_p$$

et en conjugant par $M_c^{-k} D(\xi)$:

$$D(\xi)^{-1} M_c^{-k} D(\xi) M_c^k = \xi^{-k} I_p$$

Soit f dans $SL(p, \mathbb{C})$ tel que $fD(\xi)f^{-1}D(\xi)^{-1} = \xi^k I_p$ alors :

$$\begin{aligned}
I_p &= fD(\xi)\xi^{-k}f^{-1}D(\xi)^{-1} \\
&= fD(\xi)(D(\xi)^{-1}M_c^{-k}D(\xi)M_c^k)f^{-1}D(\xi)^{-1} \\
&= (fM_c^{-k})D(\xi)(fM_c^{-k})^{-1}D(\xi)^{-1} \\
&= [fM_c^{-k}, D(\xi)]
\end{aligned}$$

Ainsi fM_c^{-k} commute avec $D(\xi)$ et donc fM_c^{-k} est diagonale. Par conséquent $f \in \langle D, M_c \rangle$. ■

On aimerait en conclure que H est de la forme $H_0 \rtimes \langle M_c \rangle$ avec H_0 diagonal. En général, tout sous-groupe de $X_1 \rtimes X_2$ se projetant sur X_2 n'est pas nécessairement de la forme $Y \rtimes X_2$ (on peut penser aux groupes diédraux). Par contre, dans notre cas, c'est vrai (à conjugaison près) :

Proposition 7

Soit $H := \pi^{-1}(\overline{H})$ avec \overline{H} un sous-groupe exceptionnel de $PSL(p, \mathbb{C})$, alors H est conjugué à $\langle H_0, M_c \rangle$ où H_0 est un sous-groupe de D globalement fixe par l'action de M_c .

Démonstration : Les propositions 5 et 6 impliquent que H est conjugué à un sous-groupe de $\langle D, M_c \rangle$. Pour simplifier, on identifie H au sous-groupe de $\langle D, M_c \rangle$ auquel il est conjugué.

Si q désigne la projection (bien définie car $M_c^k \in D$ implique que M_c^k est une matrice scalaire) :

$$q : \begin{cases} \langle D, M_c \rangle & \longrightarrow \langle \overline{M_c} \rangle \\ dM_c^k & \longmapsto \overline{M_c^k} \end{cases}$$

alors on notera $H_0 := \ker(q) \cap H$, i.e. les matrices de H qui sont diagonales.

Le groupe irréductible H n'est pas inclus dans D (il ne serait pas irréductible). Ainsi, on peut trouver $x \in H$ tel que :

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{p-1} \end{pmatrix} M_c^k \text{ avec } 0 < k < p$$

Puisque $0 < k < p$, quitte à considérer x^l où $lk = 1 \pmod p$, on peut supposer $k = 1$. Si $p = 2$, alors :

$$x = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}\lambda_0 \\ \sqrt{-1}\lambda_0^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

En conjugant x par $\begin{pmatrix} \lambda_0^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \lambda_0^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, il vient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_0^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \lambda_0^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \lambda_0^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \lambda_0^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \lambda_0^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \lambda_0^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}\lambda_0 \\ \sqrt{-1}\lambda_0^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \lambda_0^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\ &= M_c \end{aligned}$$

Puisque la conjugaison de H_0 par $\begin{pmatrix} \lambda_0^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \lambda_0^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ ne change pas H_0 , on

voit que $\begin{pmatrix} \lambda_0^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \lambda_0^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ transforme H par conjugaison en le groupe :

$$\langle H_0, M_c \rangle$$

Si $p > 2$, on définit s la matrice diagonale envoyant e_i sur $\lambda_0^{-1} \dots \lambda_i^{-1} e_i$. Un calcul direct montre que :

$$sxs^{-1} = M_c$$

Si $s_0 := \det(s)^{-\frac{1}{p}} s$ alors $s_0 \in SL(p, \mathbb{C})$ et $s_0xs_0^{-1} = M_c$ également, (s_0 et s diffèrent d'une matrice scalaire). Finalement, s_0 fixe H_0 (il commute avec) donc :

$$s_0Hs_0^{-1} = \langle H_0, M_c \rangle$$

Une fois de plus, H est conjugué avec $\langle H_0, M_c \rangle$. ■

De cette dernière proposition, on déduit que tout sous-groupe H de $SL(p, \mathbb{C})$ se projetant sur un sous-groupe exceptionnel de $PSL(p, \mathbb{C})$ via π est conjugué à $H := \langle H_0, M_c \rangle$ où H_0 est un groupe diagonal globalement invariant par l'action de M_c . Réciproquement, on cherche maintenant à savoir, quels groupes parmi ceux de cette forme sont irréductibles.

Puisque H_0 est un groupe diagonal, il est complètement réductible, et donc H extension finie de H_0 l'est aussi. Ainsi $\pi(H)$ est complètement réductible. Il est alors facile de caractériser l'irréductibilité : $\pi(H)$ est irréductible si et seulement si son centralisateur $Z_{PSL(p, \mathbb{C})}(\pi(H))$ est fini. On démontre un lemme pour calculer ce centralisateur :

Lemme 7

Soit $f \in GL(p, \mathbb{C})$ vérifiant $[f, M_c] = \xi^k I_p$ alors :

$$f = D(\xi)^{-k} V(a_0, \dots, a_{p-1})$$

où $(V(a_0, \dots, a_{p-1}))_{i,j} = a_{j-i \bmod p}$ est une matrice circulante. Autrement dit chaque diagonal torique est constante :

$$V(a_0, \dots, a_{p-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{p-2} \\ a_{p-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & \dots & a_{p-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Où encore, si f vérifie $[f, M_c] = \xi^k I_p$ alors $f = D(\xi)^{-k} P(M_c)$ où P est un polynôme quelconque à coefficients complexes.

Démonstration : Si $f M_c f^{-1} M_c^{-1} = \xi^k I_p$, alors $f M_c = \xi^k M_c f$. Dans le cas où $p = 2$:

$$\text{pour } 0 \leq i, j \leq 1 : (f M_c)_{i,j} = \sqrt{-1} f_{i,j-1} \text{ et } (\xi^k M_c f)_{i,j} = \sqrt{-1} \xi^k f_{i+1,j}$$

Dans le cas où $p > 2$:

$$\text{pour } 0 \leq i, j \leq p-1 : (f M_c)_{i,j} = f_{i,j-1} \text{ et } (\xi^k M_c f)_{i,j} = \xi^k f_{i+1,j}$$

Dans les deux cas $f_{i,j-1} = \xi^k f_{i+1,j}$. Cela implique :

$$f = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{p-1} \\ \xi^{-k} a_{p-1} & \xi^{-k} a_0 & \xi^{-k} a_1 & \dots & \xi^{-k} a_{p-2} \\ \xi^{-2k} a_{p-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \xi^{-(p-2)k} a_1 \\ \xi^{-(p-1)k} a_1 & \dots & \dots & \xi^{-(p-1)k} a_{p-1} & \xi^{-(p-1)k} a_0 \end{pmatrix}$$

En posant $a_i := f_{0,i}$. Ainsi :

$$f = D(\xi)^{-k} V(a_0, \dots, a_{p-1}) \quad \blacksquare$$

Un corollaire maintenant évident est que $\langle H_0, M_c \rangle$ est irréductible sauf si H_0 est central.

Proposition 8

Soit H un groupe de la forme $\langle H_0, M_c \rangle$ (avec $H_0 \leq D$) alors H est irréductible si et seulement si H_0 n'est pas contenu dans $Z(SL(p, \mathbb{C}))$.

Démonstration : Clairement, si H_0 est contenu dans $Z(SL(p, \mathbb{C}))$ alors H ne peut être irréductible.

D'autre part, H étant complètement réductible, l'irréductibilité de H équivaut à la finitude de son centralisateur. Supposons que h_0 dans H_0 n'est pas central et f commute avec H , alors le lemme 7 implique que (f commute avec M_c i.e. $k = 0$ dans le lemme) $f = V(a_0, \dots, a_{p-1})$. Soit h_0 :

$$h_0 := \begin{pmatrix} x_0 & & \\ & \ddots & \\ & & x_{p-1} \end{pmatrix}$$

Pour $0 \leq i, j \leq p-1$ on a $(h_0 V(a_0, \dots, a_{p-1}) h_0^{-1})_{i,j} = x_i x_j^{-1} a_{j-i \bmod p}$. Si h_0 commute avec $V(a_0, \dots, a_{p-1})$ alors pour tout i, j :

$$(x_i x_j^{-1} - 1) a_{j-i \bmod p} = 0$$

Si $a_k \neq 0$ avec $k > 0$ alors $x_0 = x_k, x_1 = x_{k+1}, \dots, x_{p-1} = x_{p+k-1}$. Le nombre p étant premier, cela aboutit à $x_0 = x_1 = \dots = x_{p-1}$ et donc h_0 est central. Puisque h_0 ne l'était pas par hypothèse, il vient que $a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ et donc $f = V(a_0, 0, \dots, 0) \in Z(SL(p, \mathbb{C}))$.

Si H_0 n'est pas central, alors tout élément commutant à la fois avec H_0 et M_c est central, ceci implique que le centralisateur de H est réduit au centre $SL(p, \mathbb{C})$ et donc H est irréductible. ■

Nous avons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe $H := \langle H_0, M_c \rangle$ soit irréductible. Il ne nous reste plus qu'à calculer le centralisateur de $\pi(H)$ dans $PSL(p, \mathbb{C})$.

Proposition 9

Supposons que $H_0 \leq D$ ne soit pas inclus dans $Z(SL(p, \mathbb{C}))$. Nous notons $H := \langle H_0, M_c \rangle$ et $U := \pi^{-1}(Z_{PSL(p, \mathbb{C})}(\pi(H)))$.

Si H_0 est inclus dans $\langle \xi I_p, D(\xi) \rangle$ alors $U = \langle \xi I_p, D(\xi), M_c \rangle$ et sinon : $U = \langle \xi I_p, D(\xi) \rangle$.

Démonstration : Soit $u \in U$, alors le lemme 7 implique que u est de la forme $D(\xi^k)V(a_0, \dots, a_{p-1})$. Si $h_0 = \text{Diag}(x_0, \dots, x_{p-1})$ n'est pas central alors :

$$\text{pour } 0 \leq i, j \leq p-1 : (h_0V(a_0, \dots, a_{p-1})h_0^{-1})_{i,j} = x_i x_j^{-1} a_{j-i \bmod p}$$

De plus, la relation $h_0 u = \xi^l u h_0$ implique :

$$h_0 V(a_0, \dots, a_{p-1}) h_0^{-1} = \xi^l V(a_0, \dots, a_{p-1})$$

Si $l = 0$ cela donne :

$$\text{pour } 0 \leq i, j \leq p-1 : x_i x_j^{-1} a_{j-i \bmod p} = a_{j-i \bmod p}$$

S'il existe $r \neq 0$, alors $a_r \neq 0$ impliquerait $x_i = x_j$ pour tout i, j et h_0 serait une matrice scalaire. Comme h_0 ne l'est pas, $a_r = 0$ pour $r \neq 0$ et $V(a_0, \dots, a_{p-1})$ est diagonale et donc une matrice scalaire.

Si $l \neq 0$.

$$x_i x_j^{-1} a_{j-i \bmod p} = \xi^l a_{j-i \bmod p}$$

En particulier $a_0 = 0$ (car $\xi^l \neq 1$). Supposons qu'il existe deux indices s et t avec $a_s \neq 0$ and $a_t \neq 0$, on va montrer que $s = t$.

Il vient $x_s = \xi^l x_0, \dots, x_{(p-1)s} = \xi^l x_{(p-2)s}$ et donc :

$$x_{vs} = \xi^{vl} x_0 \text{ pour } v = 0, \dots, p-1$$

De la même façon $x_{vt} = \xi^{vt} x_0$ pour $v = 0, \dots, p-1$. Ainsi :

$$x_{vs} = \xi^{vl} x_0 = x_{vt} \text{ pour tout } v = 0, \dots, p-1$$

En appliquant cette égalité à s et $v = 1$: $x_s = \xi^l x_0$. De plus, on peut trouver v' vérifiant $v't = s \bmod p$, donc $x_s = x_{v't} = \xi^{v'l} x_0$ et alors $x_0 \xi^l = x_0 \xi^{v'l}$. Comme p est premier et l non-nul, $v' = 1$. Ainsi $t = s \bmod p$ et donc $s = t$.

Si $a_s \neq 0$ alors $h_0 = x_0 \text{Diag}(\xi^l)$ et $u = \text{Diag}(\xi^k) a_s M_c^s$, en regardant les déterminants, h_0 doit alors être dans $\langle \xi I_p, D(\xi), M_c \rangle$ et $u \in \langle \xi I_p, D(\xi), M_c \rangle$.

Nous avons montré que si U contient un élément non-diagonal alors H_0 est inclus dans $\langle \xi I_p, D(\xi) \rangle$ et U contenu dans $\langle \xi I_p, D(\xi), M_c \rangle$. Réciproquement, si H_0 n'est pas central et contenu dans $\langle \xi I_p, D(\xi) \rangle$, puisque :

$$M_c D(\xi) M_c^{-1} D(\xi)^{-1} = \xi I_p$$

il est clair que $M_c \in U$.

D'autre part, U contient $\langle \xi I_p, D(\xi) \rangle$ (ils conjuguent M_c en un multiple de M_c et commutent avec D). Si H_0 contient un élément qui n'est pas contenu dans $\langle \xi I_p, D(\xi) \rangle$, ces calculs montrent que u est nécessairement diagonal, contenu dans $\langle \xi I_p, D(\xi) \rangle$. ■

Le théorème 2.1 est maintenant une conséquence directe.

Démonstration du théorème 2.1 : Si \overline{H} est un sous-groupe exceptionnel de $PSL(p, \mathbb{C})$ alors $H := \pi^{-1}(\overline{H})$ est conjugué à (par la proposition 7) $\langle H_0, M_c \rangle$ avec H_0 sous-groupe diagonal globalement fixe par l'action de M_c . Le groupe H_0 contient strictement le centre de $SL(p, \mathbb{C})$ (en vertu de la proposition 8).

Si $H_0 = \langle \xi I_p, D(\xi) \rangle$ alors $\overline{H} = \pi(H)$ est abélien et est son propre centralisateur (proposition 9).

Sinon \overline{H} commute avec $\langle \overline{D(\xi)} \rangle$ (proposition 6) et seulement avec ces éléments (proposition 9).

Comme M_c^k est diagonal si et seulement si c'est une matrice scalaire, on en déduit que $\overline{H} = \overline{H_0} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle$. ■

La principale raison de notre étude des sous-groupes exceptionnels de $PSL(p, \mathbb{C})$ est l'étude du lieu singulier de la variété des caractères pour des groupes de type fini Γ dans $PSL(p, \mathbb{C})$. Si la représentation ρ est irréductible, alors elle est exceptionnelle si et seulement si $Im(\rho)$ l'est, si et seulement si (en vertu du théorème 2.1) $Im(\rho)$ est conjugué à $\overline{H_0} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle$ où $\overline{H_0}$ est un sous-groupe non-trivial de $\overline{D} (= \pi(D))$, on peut alors trouver $g \in PSL(p, \mathbb{C})$ vérifiant :

2.3 Lieu singulier de la variété des caractères

Il nous faut dorénavant étudier les représentations exceptionnelles d'un groupe de type fini Γ dans $PSL(p, \mathbb{C})$. Si la représentation ρ est irréductible, alors elle est exceptionnelle si et seulement si $Im(\rho)$ l'est, si et seulement si (en vertu du théorème 2.1) $Im(\rho)$ est conjugué à $\overline{H_0} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle$ où $\overline{H_0}$ est un sous-groupe non-trivial de $\overline{D} (= \pi(D))$, on peut alors trouver $g \in PSL(p, \mathbb{C})$ vérifiant :

$$g\rho g^{-1} \in Hom(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle)$$

Notons $Hom^i(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle)$ les représentations irréductibles (en tant que représentations dans $PSL(p, \mathbb{C})$) de Γ dans $\overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle \leq PSL(p, \mathbb{C})$.

Le diagramme commutatif suivant sera central dans notre raisonnement :

$$\begin{array}{ccc}
 Hom^i(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle) & \xhookrightarrow{\iota} & Hom^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C})) \\
 \downarrow \text{mod } \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle & & \downarrow \text{mod } PSL(p, \mathbb{C}) \\
 \chi^i(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle) & \xrightarrow{\varphi} & \chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))
 \end{array}$$

Les ensembles sur la ligne du dessus désignent des ensembles de représentations irréductibles, l'inclusion ι est simplement donnée par l'inclusion de $\overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle$ dans $PSL(p, \mathbb{C})$.

Sur chaque colonne, la projection est la projection de l'action par conjugaison du groupe ambiant. Finalement, la fonction φ envoie $\overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle \cdot \rho$ sur $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \iota(\rho)$ est clairement bien définie, mais contrairement à ι , n'est pas forcément injective.

Une conséquence immédiate du théorème 2.1 est que $Im(\varphi)$ est exactement le lieu singulier de $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$. Par conséquent, pour décrire le lieu singulier dans $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$, il suffit de comprendre les propriétés de φ (non-injectivité, lissité, ...) et de décrire $\chi^i(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle)$.

Nous avons rappelé quelques notions de cohomologie des groupes dans la section 1.1. Nous allons les utiliser dans la suite.

2.3.1 La géométrie de $\chi^i(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle)$

Ce qui suit est une étude relativement classique. En vertu de la discussion en introduction de la section 2.3, il nous faut commencer par étudier les représentations de Γ dans $\overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle$. Ce groupe est une extension scindée d'un groupe cyclique par un groupe abélien. Rappelons que $\langle \overline{M}_c \rangle$ agit naturellement \overline{D} par conjugaison. À partir de maintenant, \overline{D} est considéré comme un $\langle \overline{M}_c \rangle$ -module multiplicatif pour cette action. La projection naturelle de $\overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle$ sur $\langle \overline{M}_c \rangle$ sera notée q .

L'élément le plus général du groupe $\overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle$ est un couple $(\overline{d}, \overline{M}_c^k)$. Si X est un ensemble quelconque et f une fonction de X vers $\overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle$ se décompose alors comme un couple de fonctions (f_1, f_2) :

$$f_1 : X \rightarrow \overline{D} \text{ and } f_2 : X \rightarrow \langle \overline{M}_c \rangle$$

avec $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ pour $x \in X$. Cette décomposition va nous permettre de paramétrer $Hom(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle)$ puis $\chi(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle)$.

Si $\bar{\rho}$ est un élément de $Hom(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$, on voit que cela donne naturellement à \overline{D} une structure de Γ -module définie par $\gamma \in \Gamma$ et $\bar{d} \in \overline{D}$:

$$\gamma \cdot \bar{d} := \bar{\rho}(\gamma) \cdot \bar{d}$$

L'action dans le membre de droite est l'action naturelle de $\langle \overline{M}_c \rangle$ sur \overline{D} .

Les deux propositions suivantes décrivent respectivement la variété des représentations et la variété des caractères.

Proposition 10

Soit $\bar{\rho}$ dans $Hom(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$, on définit :

$$\mathcal{H}_{\bar{\rho}} := \{\rho \in Hom(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle) \mid q \circ \rho = \bar{\rho}\}$$

La réunion suivante est disjointe :

$$Hom(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle) = \bigcup_{\bar{\rho} \in Hom(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)} \mathcal{H}_{\bar{\rho}}$$

De plus, chaque ensemble $\mathcal{H}_{\bar{\rho}}$ s'identifie naturellement à $Z^1(\Gamma, \overline{D}_{\bar{\rho}})$ via $\mathcal{H}_{\bar{\rho}} = \{(u, \bar{\rho}) \mid u \in Z^1(\Gamma, \overline{D}_{\bar{\rho}})\}$.

Démonstration : Pour tout ρ dans $Hom(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle)$ on définit $(u, \bar{\rho})$ par :

$$\text{pour } \gamma \in \Gamma : \rho(\gamma) := (u(\gamma), \bar{\rho}(\gamma))$$

où $\bar{\rho} := q \circ \rho$ est un morphisme de groupes de Γ dans $\langle \overline{M}_c \rangle$ et u est, à priori, une fonction de Γ dans \overline{D} . Il est alors clair que l'on a une réunion disjointe :

$$Hom(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle) = \bigcup_{\bar{\rho} \in Hom(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)} \mathcal{H}_{\bar{\rho}}$$

De plus, si $\bar{\rho}$ est dans $Hom(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$, $\rho = (u, \bar{\rho}) \in \mathcal{H}_{\bar{\rho}}$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, alors :

$$\begin{aligned} \rho(\gamma_1 \gamma_2) &= \rho(\gamma_1) \rho(\gamma_2) \\ (u(\gamma_1 \gamma_2), \bar{\rho}(\gamma_1 \gamma_2)) &= (u(\gamma_1), \bar{\rho}(\gamma_1))(u(\gamma_2), \bar{\rho}(\gamma_2)) \\ (u(\gamma_1 \gamma_2), \bar{\rho}(\gamma_1 \gamma_2)) &= (u(\gamma_1) \bar{\rho}(\gamma_1) \cdot u(\gamma_2), \bar{\rho}(\gamma_1) \bar{\rho}(\gamma_2)) \end{aligned}$$

Ainsi $u(\gamma_1\gamma_2) = u(\gamma_1)\bar{\rho}(\gamma_1) \cdot u(\gamma_2)$ et $\bar{\rho}(\gamma_1\gamma_2) = \bar{\rho}(\gamma_1)\bar{\rho}(\gamma_2)$ pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Ceci montre que $u \in Z^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}})$ où l'action de Γ sur \overline{D} est induite par $\bar{\rho}$ (c.f. sous-section 1.1). Réciproquement, si $\bar{\rho}$ est un morphisme de Γ vers $\langle \overline{M_c} \rangle$ et $u \in Z^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}})$ alors la fonction suivante $\rho := (u, \bar{\rho})$ est dans $Hom(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle)$ (par les mêmes égalités que ci-dessus). Ainsi

$$\mathcal{H}_{\bar{\rho}} = \{(u, \bar{\rho}) \mid u \in Z^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}})\}$$

On remarque également que l'identification de $\mathcal{H}_{\bar{\rho}}$ à $Z^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}})$ est un homéomorphisme. ■

On fait un travail similaire pour la variété des caractères :

Proposition 11

Soit $\bar{\rho}$ dans $Hom(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle)$ alors si :

$$\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}} := \{\overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle \cdot \rho \in \chi(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle) \mid q \circ \rho = \bar{\rho}\}$$

Cet ensemble est bien défini ($\bar{\rho}$ ne dépend que de la classe de conjugaison de ρ). De plus on a une réunion disjointe :

$$\chi(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle) = \bigcup_{\bar{\rho} \in Hom(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle)} \overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}}$$

Chaque $\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}}$ est naturellement identifié à $H^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}})/\langle \overline{M_c} \rangle$ (l'action est définie à la fin de la section 1.1). L'identification se fait de la manière suivante :

$$H^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}})/\langle \overline{M_c} \rangle \rightarrow \overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}}$$

$$\langle \overline{M_c} \rangle \cdot [u] \mapsto \text{la classe de conjugaison de } \gamma \mapsto (u(\gamma), \bar{\rho}(\gamma))$$

Démonstration : Soit $g = (a, s) \in \overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle$ et $\rho = (u, \bar{\rho})$ dans $\mathcal{H}_{\bar{\rho}}$ avec $u \in Z^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}})$ (en utilisant la proposition 10), alors :

$$\begin{aligned} g\rho(\gamma)g^{-1} &= (a, s) (u(\gamma), \bar{\rho}(\gamma)) (s^{-1} \cdot (a^{-1}), s^{-1}) \\ &= (a s \cdot u(\gamma), s\bar{\rho}(\gamma)) (s^{-1} \cdot (a^{-1}), s^{-1}) \\ &= (a s \cdot u(\gamma) (s\bar{\rho}(\gamma)s^{-1}) \cdot a^{-1}, s\bar{\rho}(\gamma)s^{-1}) \\ &= (s \cdot u(\gamma) \bar{\rho}(\gamma) \cdot (a^{-1})a, \bar{\rho}(\gamma)) \end{aligned}$$

Ainsi $(u, \bar{\rho})$ et $(u', \bar{\rho}')$ sont conjugués si et seulement si :

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}' \text{ et } u = s \cdot u' \text{ mod } B^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}}) \text{ pour un certain } s \in \langle \overline{M_c} \rangle$$

La première condition assure que $\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}}$ est bien défini (le morphisme induit dans $\langle \overline{M_c} \rangle$ ne dépend pas du conjugué choisi).

Puisque $\langle \overline{M_c} \rangle$ stabilise $B^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}})$, il existe une action de groupe de $\langle \overline{M_c} \rangle$ sur $H^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}})$ donnée par $s \in \langle \overline{M_c} \rangle$ agissant sur $[u] \in H^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}})$ par $s \cdot [u] := [s \cdot u]$ où $(s \cdot u)(\gamma) := s \cdot (u(\gamma))$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Ainsi $(u, \bar{\rho})$ et $(u', \bar{\rho}')$ sont conjugués si et seulement si :

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}' \text{ et } u = u' \text{ dans } H^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}}) / \langle \overline{M_c} \rangle$$

On peut donc bien identifier $H^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}}) / \langle \overline{M_c} \rangle$ à $\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}}$. ■

La variété des caractères $\chi(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle)$ a donc été exprimée comme la réunion finie disjointe d'ensembles (clairement) fermés, ils sont donc ouverts. Toutefois, ils ne sont pas forcément connexes (voir le cas où Γ est un groupe de surface dans la sous-section 2.4.2, par exemple).

Maintenant nous allons restreindre la description aux représentations irréductibles. Par le théorème 2.1, $(u, \bar{\rho})$ est irréductible si et seulement si $\bar{\rho}$ est surjectif (i.e. non-trivial, puisque le groupe d'arrivée est de cardinal premier) et il existe $\gamma \in \ker(\bar{\rho})$ tel que $u(\gamma) \neq \overline{I_p}$. Cette dernière condition est équivalente au fait que u n'appartienne pas à $B^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}})$. Ainsi :

$$\chi^i(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle) = \bigcup_{\substack{\bar{\rho} \in \text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle) \\ \bar{\rho} \text{ non-trivial}}} \overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}} - \{([1], \bar{\rho})\}$$

Pour tout élément non-trivial $\bar{\rho} \in \text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle)$, on définit :

$$\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}}^i := \overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}} \cap \chi^i(\Gamma, \overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle) = \overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}} - \{([1], \bar{\rho})\}$$

L'action de $\langle \overline{M_c} \rangle$ sur $H^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}}) - \{[1]\}$ étant libre, la correspondance de la proposition 11 se restreint à un homéomorphisme sur les classes de conjugaison de représentations irréductibles.

Pour aller plus loin dans la description de cette variété des caractères il faut donc comprendre $\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}}^i$ et, en vertu de ce que nous venons d'écrire,

$H^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}})/\langle \overline{M_c} \rangle$ quand $\bar{\rho}$ n'est pas le morphisme trivial. Soit K le noyau de $\bar{\rho}$. De la suite exacte :

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\bar{\rho}} \langle \overline{M_c} \rangle \longrightarrow 1$$

on déduit une suite exacte longue d'inflation-restriction à coefficients dans \overline{D} :

$$H^1(\langle \overline{M_c} \rangle, \overline{D_{\bar{\rho}}}) \xrightarrow{Inf} H^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}}) \xrightarrow{Res} H^1(K, \overline{D})^{\langle \overline{M_c} \rangle} \xrightarrow{T} H^2(\langle \overline{M_c} \rangle, \overline{D_{\bar{\rho}}})$$

Puisque l'action de K sur \overline{D} est via $\bar{\rho}$, l'action est triviale. Ainsi l'on a $H^1(K, \overline{D}) = Hom(K, \overline{D})$ et la suite exacte devient :

$$H^1(\langle \overline{M_c} \rangle, \overline{D_{\bar{\rho}}}) \xrightarrow{Inf} H^1(\Gamma, \overline{D_{\bar{\rho}}}) \xrightarrow{Res} Hom(K, \overline{D})^{\langle \overline{M_c} \rangle} \xrightarrow{T} H^2(\langle \overline{M_c} \rangle, \overline{D_{\bar{\rho}}})$$

Afin d'expliciter cette suite exacte, nous fixons arbitrairement $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $\bar{\rho}(\gamma_0) = \overline{M_c}$. Les objets que nous allons définir maintenant ne dépendent pas du γ_0 choisi.

L'action de $\langle \overline{M_c} \rangle$. La suite d'inflation-restriction utilise naturellement que $Hom(K, \overline{D})$ est un $\langle \overline{M_c} \rangle$ -module. Si $f \in Hom(K, \overline{D})$ et $\overline{M_c}^k \in \langle \overline{M_c} \rangle$ alors :

$$\text{pour tout } \gamma \in K \quad (\overline{M_c}^k \cdot f)(\gamma) := \overline{M_c}^k \cdot (f(\gamma_0^{-k} \gamma \gamma_0^k))$$

Bien que $\langle \overline{M_c} \rangle$ n'agisse pas par conjugaison sur K , cela aboutit à une action de $\langle \overline{M_c} \rangle$ sur $Hom(K, \overline{D})$. De plus si γ_1 est aussi envoyé sur $\overline{M_c}$, remplacer γ_0 par γ_1 dans la formule ci-dessus ne change pas l'action.

Le noyau du morphisme de transgression T . Une fois que γ_0 est choisi, on peut écrire explicitement le morphisme de transgression (voir [DHW12] paragraphe 9). En appliquant leur formule, nous avons que pour tout $f \in Hom(K, \overline{D})^{\langle \overline{M_c} \rangle}$, $T(f)$ est la classe de cohomologie de $tr(f)$, un élément de $Z^2(\langle \overline{M_c} \rangle, \overline{D_{\bar{\rho}}})$ défini par :

$$tr(f)(\overline{M_c}^k, \overline{M_c}^l) = \begin{cases} \overline{M_c}^{k+l} \cdot f(1_\Gamma) = \overline{I_n} & \text{si } 0 \leq k, l \leq p-1 \text{ et } k+l < p \\ \overline{M_c}^{k+l-p} \cdot (f(\gamma_0^p)) & \text{si } 0 \leq k, l \leq p-1 \text{ et } k+l \geq p \end{cases}$$

Nous aurons besoin d'une caractérisation simple du noyau de la transgression.

Proposition 12

Sous les conditions ci-dessus, si $f \in \text{Hom}(K, \overline{D})^{\langle \overline{M}_c \rangle}$ alors $f \in \text{Ker}(T)$ si et seulement si $f(\gamma_0^p)$ est trivial.

Démonstration : Clairement, si $f(\gamma_0^p)$ est trivial alors $\text{tr}(f)$ est constante donc dans $B^2(\langle \overline{M}_c \rangle, \overline{D}_{\overline{\rho}})$.

Réciproquement, si $\text{tr}(f)$ est dans $B^2(\langle \overline{M}_c \rangle, \overline{D}_{\overline{\rho}})$ alors on peut trouver $g : \langle \overline{M}_c \rangle \rightarrow \overline{D}$ tel que pour tout k, l dans $\{0, \dots, p-1\}$:

$$\text{tr}(f)(\overline{M}_c^k, \overline{M}_c^l) = g(\overline{M}^k) \overline{M}^k \cdot g(\overline{M}^l) g(\overline{M}^{l+k})^{-1}$$

Ainsi, pour $k = 1$ et $l < p-1$:

$$g(\overline{M}^{l+1}) = g(\overline{M}) \overline{M} \cdot g(\overline{M}^l)$$

Par récurrence triviale, $g(\overline{M}^l) = g(\overline{M}) \overline{M} \cdot g(\overline{M}) \dots \overline{M}^{l-1} \cdot g(\overline{M})$. Pour $k = 1$ et $l = p-1$:

$$\begin{aligned} f(\gamma_0^p) &= g(\overline{M}) \overline{M} \cdot g(\overline{M}^{p-1}) \\ &= g(\overline{M}) \overline{M} \cdot g(\overline{M}) \dots \overline{M}^{p-1} \cdot g(\overline{M}) \end{aligned}$$

si $x \in D$ tel que $g(\overline{M}) = \overline{x}$ alors

$$f(\gamma_0^p) = \overline{xM \cdot x \dots M^{p-1} \cdot x}$$

or les coefficients diagonaux de $xM \cdot x \dots M^{p-1} \cdot x$ sont tous égaux au produit des éléments diagonaux de x , donc :

$$\begin{aligned} f(\gamma_0^p) &= \overline{\det(x) I_p} \\ &= \overline{I_p} \end{aligned}$$

Ainsi $f(\gamma_0^p)$ est trivial. ■

Cette caractérisation relativement simple sera utilisée dans la section 2.4.

Une autre description pour $H^1(\Gamma, \overline{D}_{\overline{\rho}})$. Le lemme suivant nous permet d'identifier $H^1(\Gamma, \overline{D}_{\overline{\rho}})$ au noyau de la transgression.

Lemme 8

Si $\overline{\rho} \in \text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$ n'est pas trivial alors $H^1(\langle \overline{M}_c \rangle, \overline{D}_{\overline{\rho}}) = 1$.

Démonstration : On rappelle un résultat de [Bro82] sur la cohomologie cyclique. Soit G un groupe cyclique de cardinal n , g un générateur de G et A un G -module multiplicatif. Nous définissons la norme :

$$No : \begin{cases} A & \longrightarrow A^G \\ a & \longmapsto \prod_{i=0}^{n-1} g^i \cdot a \end{cases}$$

Et la trace :

$$Tr : \begin{cases} A & \longrightarrow A \\ a & \longmapsto g \cdot a \cdot a^{-1} \end{cases}$$

Alors $Im(No) \leq \ker(Tr) = A^G$ et $Im(Tr) \subseteq \ker(No)$. De plus :

$$H^1(G, A) = \frac{\ker(No)}{Im(Tr)}$$

On applique ce résultat à $G := \langle \overline{M}_c \rangle$, $A = \overline{D}$ et $g \in G$ tel que $\bar{\rho}(g) = \overline{M}_c$. Un élément quelconque dans $Im(Tr)$ s'écrit :

$$\overline{\begin{pmatrix} b_{c^{-1}(0)} b_0^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & b_{c^{-1}(p-1)} b_{p-1}^{-1} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_{p-2} b_{p-1}^{-1} \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} b_{p-1} b_0^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{p-2} b_{p-1}^{-1} \end{pmatrix}}$$

C'est un calcul direct de voir que quand b parcourt les matrices diagonales de déterminant 1, cela donne toutes les matrices de déterminant 1, ainsi $Im(Tr) = \overline{D}$, et en particulier $Im(Tr) = \ker(No)$. Finalement $H^1(\langle \overline{M}_c \rangle, \overline{D}_{\bar{\rho}}) = 1$ est bien trivial. ■

L'exactitude de la suite d'inflation-restriction implique que :

$$Res(H^1(\Gamma, \overline{D}_{\bar{\rho}})) = \ker(T).$$

De plus $\ker(Res) = Inf(H^1(\langle \overline{M}_c \rangle, \overline{D}_{\bar{\rho}}))$. Par le lemme ci-dessus, le noyau de la restriction est trivial, ainsi $H^1(\Gamma, \overline{D}_{\bar{\rho}})$ s'identifie à son image via la restriction et donc $H^1(\Gamma, \overline{D}_{\bar{\rho}}) = \ker(T)$.

Une autre action de $\langle \overline{M}_c \rangle$. Il existe une autre action de $\langle \overline{M}_c \rangle$ sur $H^1(K, \overline{D})^{\langle \overline{M}_c \rangle}$ donnée par $\langle \overline{M}_c \rangle$ agissant sur $H^1(\Gamma, \overline{D}_{\bar{\rho}})$ et le morphisme de restriction. Cette action est l'action de $\langle \overline{M}_c \rangle$ au but uniquement, i.e. si $\overline{M}_c^k \in \langle \overline{M}_c \rangle$ et $[f] \in H^1(K, \overline{D})^{\langle \overline{M}_c \rangle}$ alors :

$$\forall \gamma \in K, (\overline{M}_c^k \# f)(\gamma) := \overline{M}_c^k \# (f(\gamma)) \text{ au niveau des 1-cocycles}$$

$$\overline{M}_c^k \#[f] := [\overline{M}_c^k \# f]$$

Cette action n'est pas triviale. Au final :

$$H^1(\Gamma, \overline{D}_{\overline{\rho}})/\langle \overline{M}_c \rangle = \ker(T)/\langle \overline{M}_c \rangle_{but}$$

L'indice "but" pour $\langle \overline{M}_c \rangle_{but}$ est un rappel que cette seconde action (notée #) de $\langle \overline{M}_c \rangle$ est sur le but uniquement et ne doit pas être confondue avec la précédente (notée \cdot qui agissait simultanément au départ et au but). En résumé :

Proposition 13

Soit $\overline{\rho}$ un élément non-trivial de $\text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$. Si l'on fixe $\gamma_0 \in \Gamma$ vérifiant $\overline{\rho}(\gamma_0) = \overline{M}_c$. L'ensemble $\overline{\mathcal{H}}_{\overline{\rho}}^i$ s'identifie à

$$\ker(T)/\langle \overline{M}_c \rangle_{but} - \{[1]\}.$$

De plus, $\ker(T)$ est le sous-groupe des morphismes $f \in \text{Hom}(K, \overline{D})$, fixes par l'action de $\langle \overline{M}_c \rangle$ pour lesquels $f(\gamma_0^{\overline{\rho}})$ est trivial.

Démonstration : Nous avons déjà montré que la correspondance (voir proposition 11 et ses conséquences) entre :

$$\overline{\mathcal{H}}_{\overline{\rho}}^i := \overline{\mathcal{H}}_{\overline{\rho}} - \{([1], \overline{\rho})\} \text{ et } H^1(\Gamma, \overline{D}_{\overline{\rho}})/\langle \overline{M}_c \rangle - \{[1]\}$$

est un homéomorphisme, puisque la correspondance entre

$$H^1(\Gamma, \overline{D}_{\overline{\rho}})/\langle \overline{M}_c \rangle - \{[1]\} \text{ et } \ker(T)/\langle \overline{M}_c \rangle_{but} - \{[1]\}$$

est donnée par le morphisme de restriction, c'est également un homéomorphisme. D'après la proposition 12, un morphisme de groupes f appartenant à $\text{Hom}(K, \overline{D})^{\langle \overline{M}_c \rangle}$ est dans $\ker(T)$ si et seulement si $f(\gamma_0^{\overline{\rho}})$ est trivial. ■

Remarquons d'abord que le morphisme de transgression T ne dépend pas du γ_0 choisi.

Remarquons aussi qu'il semble difficile d'exploiter cette proposition en toute généralité (sans un bon choix γ_0 , cette proposition reste trop abstraite). Néanmoins pour certains Γ et $\overline{\rho}$ (dans la section 2.4), il apparaîtra un choix naturel pour γ_0 nous permettant d'avancer dans le calcul du noyau de la transgression.

2.3.2 Sur le comportement de φ

Nous allons faire deux choses dans cette sous-section, décrire le comportement de φ restreinte à l'ensemble $\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}$. Cela permettra de décrire ce que nous avons appelé dans l'introduction les **composantes** du lieu singulier : $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i})$. Ensuite nous décrirons les intersections entre différentes composantes.

Identification entre certaines composantes via φ . Il existe une action naturelle de $(\mathbb{Z}/p)^*$ sur $Hom(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$ donnée par :

$$\text{pour } l \in (\mathbb{Z}/p)^* \text{ et } \bar{\rho} \in Hom(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle), (l \cdot \bar{\rho})(\gamma) := \bar{\rho}(\gamma)^l$$

Proposition 14

Soient $l \in (\mathbb{Z}/p)^*$ et $\bar{\rho} \in Hom(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$ alors $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}) = \varphi(\overline{\mathcal{H}_{l \cdot \bar{\rho}}^i})$.

Démonstration : Soit c la permutation de \mathbb{Z}/p envoyant i sur $i + 1$. Si l'on définit pour $l \in \mathbb{Z}_p^*$, la permutation σ_l de \mathbb{Z}/p envoyant i sur $l \times i$. Nous avons :

$$\sigma_l \circ c(i) = l \times i + l = c^l \circ \sigma_l(i)$$

$$\sigma_l c \sigma_l^{-1} = c^l$$

Ainsi $M_{\sigma_l} M_c M_{\sigma_l}^{-1} = M_c^l$. On rappelle que M_{σ_l} désigne la matrice de permutation associée à σ_l . En vertu de l'égalité au-dessus, si l'on définit f par :

$$f : \begin{cases} \mathcal{H}_{\bar{\rho}} & \longrightarrow \mathcal{H}_{l \cdot \bar{\rho}} \\ \rho & \longmapsto M_{\sigma_l} \rho M_{\sigma_l}^{-1} \end{cases}$$

Cela identifie les composantes de la variété des représentations modulo conjugaison dans $PSL(p, \mathbb{C})$. Cela donne donc une égalité au niveau de la variété des caractères. ■

Le fait que $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ dans $Hom(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$ soient dans la même $(\mathbb{Z}/p)^*$ -orbite est facilement caractérisé par les noyaux respectifs de ces morphismes :

Lemme 9

Soient $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}' \in Hom(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$, alors $\bar{\rho} = l \cdot \bar{\rho}'$ avec $l \in (\mathbb{Z}/p)^*$ si et seulement si $\ker(\bar{\rho}) = \ker(\bar{\rho}')$.

Démonstration : Si $\bar{\rho} = l \cdot \bar{\rho}'$, on aura $\ker(\bar{\rho}) = \ker(\bar{\rho}')$. Réciproquement :

$$\text{si } \ker(\bar{\rho}) = \ker(\bar{\rho}')$$

On remarque :

$$\text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle) = \text{Hom}(\Gamma^{ab}, \langle \overline{M_c} \rangle) \simeq \text{Hom}(\Gamma^{ab}/p\Gamma^{ab}, \mathbb{Z}/p)$$

Ce dernier groupe est le dual de l'espace vectoriel $\Gamma^{ab}/p\Gamma^{ab}$, ainsi, deux éléments de cet espace vectoriel $\text{Hom}(\Gamma^{ab}/p\Gamma^{ab}, \mathbb{Z}/p)$ ayant le même noyau sont proportionnels. En particulier, $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ sont proportionnels et donc dans la même orbite modulo $(\mathbb{Z}/p)^*$. ■

Le comportement de φ sur une composante. Nous allons montrer que φ restreinte à chaque composante est un homéomorphisme sur son image. La prochaine proposition justifie que φ est injective sur chaque composante.

Proposition 15

Soient $\bar{\rho}$ un élément non-trivial de $\text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle)$ et ρ, ρ' deux représentations irréductibles appartenant à $\mathcal{H}_{\bar{\rho}}$. S'il existe $g \in PSL(p, \mathbb{C})$ tel que $g \cdot \rho = \rho'$ alors $g \in \overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle$.

En particulier $\varphi|_{\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}}$ est injective.

Démonstration : Soit $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $\bar{\rho}(\gamma_0) = \overline{M_c}$. Vu que ρ, ρ' sont dans $\mathcal{H}_{\bar{\rho}}$ on peut trouver $d_0, d'_0, \dots, d_{p-1}, d'_{p-1}$ tels que :

$$\rho(\gamma_0) = \begin{pmatrix} d_0 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{p-1} \end{pmatrix} \overline{M_c} \text{ et } \rho'(\gamma_0) = \begin{pmatrix} d'_0 & & \\ & \ddots & \\ & & d'_{p-1} \end{pmatrix} \overline{M_c}$$

En utilisant la même méthode que dans la preuve de la proposition 7, il existe $g_1, g_2 \in \overline{D}$ tels que :

$$g_1 \rho(\gamma_0) g_1^{-1} = \overline{M_c} \text{ et } g_2 \rho'(\gamma_0) g_2^{-1} = \overline{M_c}$$

Vu que $g \cdot \rho = \rho'$, on a donc :

$$\overline{M_c} = (g_1^{-1} g_2 g) \overline{M_c} (g_1^{-1} g_2 g)^{-1}$$

Soit $\bar{h} := g_1^{-1} g_2 g$. nous venons de voir que \bar{h} commute avec $\overline{M_c}$. Par le lemme 7, cela implique que h est, à une puissance près de $D(\xi)$, un polynôme en $\overline{M_c}$, écrivons donc :

$$h = D(\xi)^s \sum_{k=0}^{p-1} a_k M_c^k \text{ avec } a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{C} \text{ et } s \geq 0$$

Vu que $g_1 \cdot \rho$ est irréductible, il existe un élément $g_1 \cdot \rho(\gamma)$ dans $g_1 \cdot \rho(\Gamma)$ diagonal et non-trivial (par la proposition 8). Soit :

$$g_1 \cdot \rho(\gamma) = \overline{\begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{p-1} \end{pmatrix}} \text{ avec } \lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{C}^*$$

Comme $g_1 \cdot \rho(\gamma)$ est diagonal, on a $\gamma \in \ker(\bar{\rho})$ et donc $g_2 \cdot \rho'(\gamma)$ est aussi diagonal.

$$g_2 \cdot \rho'(\gamma) = \overline{\begin{pmatrix} \mu_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{p-1} \end{pmatrix}} \text{ avec } \mu_0, \dots, \mu_{p-1} \in \mathbb{C}^*$$

Par définition de h , il existe $l \geq 0$ vérifiant :

$$h \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{p-1} \end{pmatrix} h^{-1} = \xi^l \begin{pmatrix} \mu_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{p-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$D(\xi)^s \sum_{k=0}^{p-1} a_k M_c^k \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{p-1} \end{pmatrix} = \xi^l \sum_{k=0}^{p-1} a_k \begin{pmatrix} \mu_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{p-1} \end{pmatrix} D(\xi)^s M_c^k$$

Comme $D(\xi^s)$ commute avec $\begin{pmatrix} \mu_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{p-1} \end{pmatrix}$, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k M_c^k \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{p-1} \end{pmatrix} = \xi^l \sum_{k=0}^{p-1} a_k \begin{pmatrix} \mu_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{p-1} \end{pmatrix} M_c^k$$

Ainsi :

$$\text{pour tout } 0 \leq i, j \leq p-1 : \lambda_j a_{i+j} = \mu_i a_{i+j}$$

Et donc si $k := i + j$:

$$a_k \lambda_{k-i} = a_k \xi^l \mu_i \Rightarrow a_k (\lambda_{k-i} - \xi^l \mu_i) = 0$$

Supposons qu'il existe $0 \leq k_1 < k_2 \leq p-1$ avec $a_{k_1} \neq 0$ et $a_{k_2} \neq 0$ alors :

$$\text{pour tout } i : \lambda_{k_1-i} = \xi^l \mu_i \text{ et } \lambda_{k_2-i} = \xi^l \mu_i$$

Ainsi $\lambda_{k_1-i} = \lambda_{k_2-i}$ pour tout $0 \leq i \leq p-1$, ce qui se traduit par :

$$\lambda_{i+k_2-k_1} = \lambda_i \text{ pour tout } i$$

La fonction $i \mapsto \lambda_i$ étant simultanément $(k_2 - k_1)$ -périodique et p -périodique avec p premier, nous en déduisons que λ est 1-périodique. Cela est contradictoire avec le choix de γ (il était choisi de telle sorte que $\rho(\gamma)$ soit non-trivial). Ainsi il existe un unique k tel que $a_k \neq 0$ et :

$$h = a_k M_c^k \text{ ceci implique } \bar{h} \in \bar{D} \times \langle \overline{M_c} \rangle$$

Par définition de h , $g = g_2^{-1} g_1 \bar{h} \in \bar{D} \times \langle \overline{M_c} \rangle$, ainsi $\varphi_{|\overline{\mathcal{H}_p}^i}$ est bien injective. ■

Dans le théorème qui suit, on vérifie que $\varphi_{|\overline{\mathcal{H}_p}^i}$ respecte également la topologie :

Théorème 2.2

Soit $\bar{\rho}$ un morphisme non-trivial de $\text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle)$ alors $\varphi_{|\overline{\mathcal{H}_p}^i}$ est un homéomorphisme sur son image.

Démonstration : Rappelons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}^i(\Gamma, \bar{D} \times \langle \overline{M_c} \rangle) & \xrightarrow{\iota} & \text{Hom}^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C})) \\ \psi_1 \downarrow \text{mod } \bar{D} \times \langle \overline{M_c} \rangle & & \psi_2 \downarrow \text{mod } PSL(p, \mathbb{C}) \\ \chi^i(\Gamma, \bar{D} \times \langle \overline{M_c} \rangle) & \xrightarrow{\varphi} & \chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C})) \end{array}$$

L'application ι étant induite par l'inclusion de $\bar{D} \times \langle \overline{M_c} \rangle$ dans $PSL(p, \mathbb{C})$ qui est un homéomorphisme sur son image fermée, ι est un homéomorphisme sur son image et $\text{Im}(\iota)$ est un fermé de $\text{Hom}^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$.

Soit ψ_1 la projection de gauche et ψ_2 la projection de droite sur le diagramme. Il est clair que ψ_1 et ψ_2 sont continues et ouvertes (elles sont induites par l'action d'un groupe par homéomorphismes).

Si V est un ouvert de $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ alors $U := \varphi^{-1}(V)$ vérifie

$$\psi_1(\psi_1^{-1}(U)) = U$$

car ψ_1 est surjective. Par commutativité du diagramme, $\psi_1^{-1}(U) = \iota^{-1} \circ \psi_2^{-1}(V)$ qui est ouvert par continuité de ι et ψ_2 . Comme ψ_1 est ouverte, $U = \psi_1(\psi_1^{-1}(U))$ est un ouvert. Ainsi φ est continue et, en particulier, $\varphi|_{\overline{\mathcal{H}}_p^i}$ est continue.

Montrons que $\varphi|_{\overline{\mathcal{H}}_p^i}$ est ouverte. On restreint le diagramme à \mathcal{H}_p^i :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_p^i \subset & \xrightarrow{\iota|_{\mathcal{H}_p^i}} & Hom^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C})) \\ \psi_1|_{\mathcal{H}_p^i} \downarrow & & \downarrow \psi_2 \\ \overline{\mathcal{H}}_p^i & \xrightarrow{\varphi|_{\overline{\mathcal{H}}_p^i}} & \chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C})) \end{array}$$

Chaque \mathcal{H}_p^i est un ouvert de $Hom^i(\Gamma, \overline{D} \times \overline{M}_c)$. Cela implique que ψ_1 restreinte à \mathcal{H}_p^i est toujours continue et ouverte et ι restreinte à \mathcal{H}_p^i reste un homéomorphisme sur son image.

L'action de $PSL(p, \mathbb{C})$ sur $Hom^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ est propre, la fonction suivante est donc propre :

$$\zeta : \begin{cases} PSL(p, \mathbb{C}) \times Hom^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C})) & \longrightarrow & Hom^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))^2 \\ (g, \rho) & \longmapsto & (g \cdot \rho, \rho) \end{cases}$$

Les espaces $PSL(p, \mathbb{C})$ et $Hom^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ sont Hausdorff, localement compacts donc la fonction ζ est fermée, i.e. si F est un fermé de $Hom^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$, $\zeta(G \times F)$ est fermé. En particulier, sa projection sur le premier facteur est fermé :

$$PSL(p, \mathbb{C}) \cdot F := \bigcup_{g \in PSL(p, \mathbb{C})} g \cdot F \text{ est fermé dans } Hom^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$$

Soit U un ouvert de $\overline{\mathcal{H}}_p^i$ et $U_0 := (\psi_1|_{\mathcal{H}_p^i})^{-1}(U)$ inclus dans \mathcal{H}_p^i . C'est un ouvert par continuité de $\psi_1|_{\mathcal{H}_p^i}$. Comme $\iota|_{\mathcal{H}_p^i}$ est un homéomorphisme

sur son image, $\iota(U_0)$ est ouvert dans $\iota(\mathcal{H}_\rho^i)$, et l'on peut donc trouver un ouvert V dans $\text{Hom}^i(\Gamma, \text{PSL}(p, \mathbb{C}))$ tel que :

$$V \cap \iota(\mathcal{H}_\rho^i) = \iota(U_0)$$

Soit $F := V^c \cap \iota(\mathcal{H}_\rho^i)$ (V^c désigne le complémentaire de V). Comme V^c est fermé et $\iota(\mathcal{H}_\rho^i)$ est fermé, l'ensemble F est fermé. Par suite, $\text{PSL}(p, \mathbb{C}) \cdot F$ est fermé. Notons

$$V_0 := V - \text{PSL}(p, \mathbb{C}) \cdot F$$

qui est donc un ouvert de $\text{Hom}^i(\Gamma, \text{PSL}(p, \mathbb{C}))$. Clairement :

$$V_0 \cap \iota(\mathcal{H}_\rho^i) \subseteq V \cap \iota(\mathcal{H}_\rho^i)$$

De plus, si ρ est dans $\iota(U_0) = V \cap \iota(\mathcal{H}_\rho^i)$, nous allons montrer que ρ n'est pas conjugué à un élément de F , on le fait par l'absurde.

Supposons $\rho \in \text{PSL}(p, \mathbb{C}) \cdot F$ alors il existe $g \in \text{PSL}(p, \mathbb{C})$ tel que $g \cdot \rho \in F$. Ainsi $\rho \in \iota(U_0)$ et un conjugué de ρ est dans $\iota(U_0^c)$. Par la proposition 15, g est en fait un élément de $\overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle$ et donc U_0 n'est pas stable par l'action de $\overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle$, ce qui contredit la définition de U_0 , ainsi :

$$\iota(U_0) = V \cap \iota(\mathcal{H}_\rho^i) \subseteq (\text{PSL}(p, \mathbb{C}) \cdot F)^c \Rightarrow V_0 \cap \iota(\mathcal{H}_\rho^i) = V \cap \iota(\mathcal{H}_\rho^i)$$

Par la commutativité du diagramme :

$$\varphi(U) = \psi_2(\iota(U_0)) = \psi_2(V_0 \cap \iota(\mathcal{H}_\rho^i))$$

Nous allons maintenant montrer, grâce à la définition de V_0 que :

$$\psi_2(V_0 \cap \iota(\mathcal{H}_\rho^i)) = \psi_2(V_0) \cap \psi_2(\iota(\mathcal{H}_\rho^i))$$

Clairement, le membre de gauche est contenu dans le membre de droite. Soit $\text{PSL}(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ dans $\psi_2(V_0) \cap \psi_2(\iota(\mathcal{H}_\rho^i))$ alors ρ est conjugué à $g \cdot \rho$ un élément de $\iota(\mathcal{H}_\rho^i)$, vu que ρ est aussi conjugué à un élément de V_0 , cela implique que $g \cdot \rho$ est dans $V \cap \iota(\mathcal{H}_\rho^i) = V_0 \cap \iota(\mathcal{H}_\rho^i)$. Ainsi nous avons bien l'égalité. Au final :

$$\varphi(U) = \underbrace{\psi_2(V_0)}_{\text{ouvert}} \cap \underbrace{\psi_2(\iota(\mathcal{H}_\rho^i))}_{=\varphi(\overline{\mathcal{H}}_\rho^{-i})}$$

Ainsi $\varphi(U)$ est un ouvert relatif de $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_\rho^{-i})$. La fonction $\varphi_{\overline{\mathcal{H}}_\rho^{-i}}$ est donc continue et ouverte sur son image, puisqu'elle est également injective par la proposition 15, c'est un homéomorphisme sur son image. ■

En un certain sens, ce premier théorème montre que φ ne déforme pas les composantes. En particulier, la correspondance de la proposition 13 permet de décrire les composantes du lieu singulier de la variété des caractères. Le prochain travail pour nous est l'étude du lien entre les différentes composantes.

L'intersection des composantes. On commence avec un lemme sur l'intersection de deux noyaux de morphismes de groupes de Γ vers $\overline{M_c}$.

Lemme 10

Soit $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ deux morphismes non-triviaux de $\text{Hom}(\Gamma, \overline{M_c})$ avec la condition supplémentaire qu'ils ne soient pas proportionnels. Si K (resp. K') est le noyau de $\bar{\rho}$ (resp. $\bar{\rho}'$) alors $\frac{\Gamma}{K \cap K'}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$.

Démonstration : En utilisant le lemme 9, les groupes K et K' sont distincts. Au niveau des indices, $[\Gamma : K \cap K'] = [\Gamma : K][K : K \cap K'] = p[K : K \cap K']$, vu que $K \neq K'$ et $[\Gamma : K'] = p$, on a $[K : K \cap K'] = p$.

Ainsi $K \cap K'$ est un sous-groupe normal d'indice p^2 dans Γ . Finalement, pour $\gamma \in \Gamma$, γ^p appartient à K et K' (chacun est d'indice p), i.e. γ^p est dans $K \cap K'$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Ainsi $\frac{\Gamma}{K \cap K'}$ est bien isomorphe à $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$. ■

Nous nous intéressons maintenant à l'intersection de deux composantes différentes.

Proposition 16

Soient $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ deux éléments non-triviaux de $\text{Hom}(\Gamma, \overline{M_c})$ qui ne sont pas dans la même $(\mathbb{Z}/p)^*$ -orbite, on note $K := \ker(\bar{\rho})$ et $K' := \ker(\bar{\rho}')$.

Si ρ est irréductible dans $\text{Hom}^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ vérifiant :

$$PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho \in \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'^i})}$$

alors $\ker(\rho)$ contient $K \cap K'$.

Démonstration : À conjugaison près, on peut supposer que ρ appartient à $\mathcal{H}_{\bar{\rho}}$, de plus, par la proposition 7, quitte à conjuguer à nouveau ρ , on peut supposer que $\text{Im}(\rho)$ (sous-groupe exceptionnel de $PSL(p, \mathbb{C})$), contient $\overline{M_c}$.

On peut donc trouver $\gamma \in \Gamma$ tel que $\rho(\gamma) = \overline{M_c}$. Vu que $K \neq K'$ (en utilisant le lemme 9) on peut même supposer que $\gamma \in K'$ et $\rho(\gamma) = \overline{M_c}$ (sinon $K^c \subseteq (K')^c$ et alors $K' \subseteq K$ en contradiction avec $K \neq K'$).

Soit g tel que $\rho' := \bar{g}\rho\bar{g}^{-1}$ est dans $\mathcal{H}_{\bar{\rho}'}$, on peut trouver un tel g car $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho \in \varphi(\mathcal{H}_{\bar{\rho}}) \cap \varphi(\mathcal{H}_{\bar{\rho}'})$ par hypothèse. Nous allons montrer qu'il y a très peu de choix pour un tel g . Ensuite, on en conclura que si g envoie un élément diagonal sur un autre élément diagonal alors ces deux éléments sont triviaux.

Comme $\gamma \in K' := \ker(\bar{\rho}')$ l'élément $\bar{g}\rho(\gamma)\bar{g}^{-1}$ est diagonal. Soit U une matrice diagonale telle que $\bar{U} = \bar{g}\rho(\gamma)\bar{g}^{-1}$.

Si $p = 2$, le polynôme caractéristique de U est égal à celui de $g^{-1}M_c g$ i.e. $X^2 + 1$. Ainsi $U = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$, il existe alors une permutation $\tau \in \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}/2}$ vérifiant

$$U = M_\tau D(\xi) M_\tau^{-1}$$

Si $p > 2$, le polynôme caractéristique de U est égal à celui de $g^{-1}M_c g$ i.e. $X^p - 1$. Ainsi ses valeurs propres sont $1, \xi, \dots, \xi^{p-1}$. Vu que $D(\xi)$ est diagonale avec les mêmes p valeurs propres $1, \xi, \dots, \xi^{p-1}$, il existe une permutation $\tau \in \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}/p}$ telle que :

$$U = M_\tau D(\xi) M_\tau^{-1}$$

On définit la matrice de Vandermonde $V_0 := (\xi^{ij})_{0 \leq i, j \leq p-1}$, un calcul direct montre que :

$$V_0 M_c = D(\xi) V_0$$

Comme $g M_c g^{-1} = U = M_\tau D(\xi) M_\tau^{-1}$:

$$g V_0^{-1} D(\xi) V_0 g^{-1} = M_\tau D(\xi) M_\tau^{-1}$$

Ainsi $M_\tau^{-1} g V_0^{-1}$ commute avec $D(\xi)$ et est donc diagonale. En résumé :

$$g = M_\tau \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{p-1} \end{pmatrix} V_0$$

Soit γ_0 dans $K \cap K'$. On peut écrire $\rho(\gamma_0) = \bar{X}$. Vu que γ_0 est dans le noyau de $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$, les matrices X et $g^{-1}Xg$ sont diagonales.

Soit :

$$Y := (M_\tau \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{p-1} \end{pmatrix})^{-1} X (M_\tau \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{p-1} \end{pmatrix})$$

La matrice Y est diagonale car X l'est et $M_\tau \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{p-1} \end{pmatrix}$ fixe globalement l'ensemble des matrices diagonales. Aussi :

$$Y = V_0 g^{-1} X g V_0^{-1}$$

On explicite les coefficients diagonaux de $g^{-1} X g$ et Y :

$$g^{-1} X g =: \begin{pmatrix} x_0 & & \\ & \ddots & \\ & & x_{p-1} \end{pmatrix} \text{ et } Y =: \begin{pmatrix} y_0 & & \\ & \ddots & \\ & & y_{p-1} \end{pmatrix}$$

alors :

$$V_0 g^{-1} X g = Y V_0$$

implique que pour tout $0 \leq i, j \leq p-1$:

$$\xi^{ij} (x_i - y_j) = 0$$

Ainsi pour tout i, j $x_i = y_j$ et en particulier, X est central et donc $\rho(\gamma_0) = \overline{X}$ est trivial. C'est donc que $K \cap K'$ est contenu dans le noyau de ρ . ■

Les points dans l'intersection de deux composantes sont alors faciles à caractériser :

Corollaire 5

Soient $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ deux éléments non-triviaux de $\text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle)$ qui ne sont pas dans la même orbite modulo $(\mathbb{Z}/p)^*$. Soit ρ une représentation irréductible dont la classe de conjugaison est dans $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'}})$, alors, à conjugaison près $\text{Im}(\rho) = \langle \overline{D(\xi)} \rangle \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle = \langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle$.

En particulier ρ est très exceptionnelle.

Démonstration : En vertu de la proposition 16 ρ se factorise par $K \cap K'$ (via les définitions $K := \ker(\bar{\rho})$ et $K' := \ker(\bar{\rho}')$) :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\rho} & PSL(p, \mathbb{C}) \\ & \searrow & \nearrow \Psi \\ & \Gamma & \\ & K \cap K' & \end{array}$$

Nous avons déjà remarqué que $\frac{\Gamma}{K \cap K'}$ est isomorphe à

$$\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$$

Ainsi $Im(\rho)$ est un groupe abélien. C'est aussi un groupe irréductible. La classification du théorème 2.1 assure que $Im(\rho)$ est conjugué à $\langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle$. ■

Remarquons (on aura un résultat plus précis après) que le nombre d'éléments dans $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'}}^i)$ est fini (les points dans cette intersection s'identifient aux classes de conjugaison de représentations de $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$). Ce qui suit donne un nombre précis pour cette intersection :

Proposition 17

Soient $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ deux éléments non-triviaux de $Hom(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle)$ qui ne sont pas dans la même $(\mathbb{Z}/p)^*$ -orbite.

Soit $K := \ker(\bar{\rho})$ et $K' := \ker(\bar{\rho}')$. L'ensemble $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'}}^i)$ est fini de cardinal $p - 1$.

De plus, le normalisateur N du groupe $\langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle$ dans $PSL(p, \mathbb{C})$ se projette sur $SL(2, \mathbb{Z}/p) \leq GL(2, \mathbb{Z}/p) \simeq Aut(\langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle)$ par l'action de conjugaison.

Démonstration : À conjugaison près, toute représentation irréductible ρ telle que sa classe de conjugaison soit dans l'intersection des deux composantes $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'}}^i)$ se factorise par $\Gamma/K \cap K'$:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\rho} & \langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle \\ & \searrow & \nearrow \Psi \\ & \Gamma & \\ & K \cap K' & \end{array}$$

Notons :

$$X := \left\{ \psi : \frac{\Gamma}{K \cap K'} \rightarrow \langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle \mid \psi \text{ est un isomorphisme} \right\}$$

À chaque ψ dans X , nous pouvons associer un morphisme ρ_ψ comme dans le diagramme ci-dessus. De plus :

$$\{PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho_\psi \mid \psi \in X\} = \varphi(\overline{\mathcal{H}_p^{-i}}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{p'}^{-i}})$$

L'égalité de ces deux ensembles étant conséquence de la factorisation décrite ci-dessus.

Ainsi, pour calculer le cardinal de $\varphi(\overline{\mathcal{H}_p^{-i}}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{p'}^{-i}})$, il suffit de comprendre à quelle condition, si $\psi_1, \psi_2 \in X$, les représentations ρ_{ψ_1} et ρ_{ψ_2} sont conjuguées.

Tout d'abord si $\psi_1, \psi_2 \in X$ alors $\psi_2 \psi_1^{-1}$ est un automorphisme de $\langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle$, i.e. un élément de $GL(2, \mathbb{Z}/p)$.

On voit alors que X est une orbite $GL(2, \mathbb{Z}/p) \cdot \psi$ où $\psi \in X$. D'autre part, la condition que ψ_1 et ψ_2 soient conjuguées est alors équivalente au fait que ψ_1 et ψ_2 soient dans une même orbite sous l'action de :

$$N := N_{PSL(p, \mathbb{C})}(\langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle)$$

N est le normalisateur de $\langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle$ dans $PSL(p, \mathbb{C})$

L'application naturelle allant de N dans $Aut(\langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle)$ s'identifie (en identifiant $\langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle$ à $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$) à une application de N dans $GL(2, \mathbb{Z}/p)$. Nous allons montrer que l'image de cette application est $SL(2, \mathbb{Z}/p)$.

Soit $V_1 := \lambda V_0$ où $V_0 := (\xi^{ij})_{0 \leq i, j \leq p-1}$ est la matrice de Vandermonde et $\lambda = \det(V_0)^{-\frac{1}{p}}$. On a pour $0 \leq i, j \leq p-1$:

$$(V_0 D(\xi))_{i,j} = \xi^j \xi^{ij} = \xi^{(i+1)j} = (V_0)_{i+1,j} = (M_c V_0)_{i,j}$$

Ainsi :

$$V_0 D(\xi) = M_c V_0 \text{ et } V_1 D(\xi) V_1^{-1} = M_c \text{ et donc } \overline{V_1 D(\xi) V_1^{-1}} = \overline{M_c}$$

De la même manière, $\overline{V_1 M_c V_1^{-1}} = \overline{D_\xi}^{-1}$. Ainsi $\overline{V_1}$ normalise le groupe $\langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle$ et de plus :

$$\overline{V_1} \text{ induit l'automorphisme } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle$$

Soit p premier impair (pour $p = 2$, on fait la même chose mais il faut multiplier par un scalaire pour obtenir une matrice unimodulaire). Si S est la matrice diagonale avec le i -ème coefficient diagonal $\xi^{\frac{i(i+1)}{2}}$ pour $i = 0, \dots, p-1$ alors :

$$\det(S) = \xi^{\sum_{i=0}^{p-1} \frac{i(i+1)}{2}} = \xi^{\frac{(p-1)p(2p+2)}{12}} = \xi^{\frac{(p-1)p(p+1)}{6}}$$

Si $p \equiv 1 \pmod{3}$ alors $(p-1)(p+1)$ est divisible par 6, si $p \equiv -1 \pmod{3}$ alors $p+1$ est divisible par 6, dans tous les cas p divise $\frac{(p-1)p(p+1)}{6}$ et donc $\det(S) = 1$.

Comme S est diagonale, S commute avec $D(\xi)$, donc $\overline{S_0 D(\xi) S_0^{-1}} = \overline{D(\xi)}$. Ainsi :

$$(M_c^{-1} S M_c)_{i,i} = S_{i+1,i+1} = \xi^{\frac{(i+1)(i+2)}{2}} = \xi^i \xi^{\frac{i(i+1)}{2}} = (D(\xi) S)_{i,i}$$

Comme $M_c^{-1} S M_c$ et $D(\xi) S$ sont diagonales, cela implique :

$$M_c^{-1} S M_c = D(\xi) S \text{ et donc } S M_c S^{-1} = M_c D(\xi)$$

$$\text{ainsi } \overline{S M_c S^{-1}} = \overline{M_c D(\xi)}$$

En premier lieu, \overline{S} normalise $\langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle$ et :

$$\overline{S} \text{ induit l'automorphisme } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sur } \langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle$$

Comme les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ engendrent $SL(2, \mathbb{Z}/p)$ nous voyons que N se projette sur un groupe contenant $SL(2, \mathbb{Z}/p)$.

Si $M \in GL(2, \mathbb{Z}/p)$ est induit par conjugaison par N alors, en multipliant M par :

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(M) \end{pmatrix}$$

la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(M) \end{pmatrix}$ est induite par la conjugaison d'un certain élément $M_0 \in N$. Vu que $\overline{M_0}$ induit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(M) \end{pmatrix}$, M_0 commute avec $\overline{D(\xi)}$, c'est donc dans $\overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle$ par la proposition 6. On obtient :

$$\overline{M_0} = \overline{dM_c^k} \text{ où } d \in D \text{ et } 0 \leq k \leq p-1$$

Ainsi :

$$\overline{M_0 D(\xi) M_0^{-1}} = \overline{D(\xi)} \text{ et } \overline{M_0 M_c M_0^{-1}} = \overline{dM_c d^{-1}}$$

Il vient donc en particulier que :

$$\overline{M_0} \text{ induit l'automorphisme } \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sur } \langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle$$

Cela implique $s = 0$ et $\det(M) = 1$. En particulier, $X = GL(2, \mathbb{Z}/p) \cdot \psi$ est divisé en :

$$\frac{|GL(2, \mathbb{Z}/p)|}{|SL(2, \mathbb{Z}/p)|} = p-1 \text{ } N\text{-orbites}$$

Par ce qui a été dit au début de cette preuve, on obtient exactement $p-1$ représentations irréductibles dans $\varphi(\overline{\mathcal{H}_p^i}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{p'}^i})$. ■

Le corollaire 5, implique que les classes de conjugaison de représentations de Γ dans $PSL(p, \mathbb{C})$ dans l'intersection de composantes sont des représentations très exceptionnelles (i.e. leur centralisateur est isomorphe à $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$).

Afin de comprendre entièrement ce problème combinatoire des intersections entre les composantes, il ne nous reste plus qu'à comprendre le nombre de composantes contenant une unique représentation très exceptionnelle.

Proposition 18

Soit $\rho : \Gamma \rightarrow \langle \overline{D(\xi)} \rangle \times \langle \overline{M_c} \rangle$ une représentation très exceptionnelle. Alors le nombre de composantes $\varphi(\overline{\mathcal{H}_p^i})$ (modulo l'identification contenue dans le lemme 9) contenant la classe de conjugaison de cette représentation est $p+1$.

Démonstration : En vertu du lemme 9, les composantes sont données par $K_{\overline{p}}$ le noyau de \overline{p} .

Soit K_0 le noyau de ρ . On montre d'abord que $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho \in \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}})$ si et seulement si $K_0 \subseteq K_{\bar{\rho}}$. Le fait que ce soit nécessaire est clair. Supposons que $K_0 \subseteq K_{\bar{\rho}}$.

Soit $K' := \ker(q \circ \rho)$ (rappelons que q est la projection de $\langle \overline{D} \rangle \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle$ sur $\langle \overline{M}_c \rangle$).

Alors K' et $K_{\bar{\rho}}$ sont deux sous-groupes d'indice p contenant K_0 , on a donc K'/K_0 et $K_{\bar{\rho}}/K_0$ deux sous-groupes de cardinal p de Γ/K_0 .

Par la proposition 17, le normalisateur de $\langle \overline{D}(\xi) \rangle \times \langle \overline{M}_c \rangle$ dans $PSL(p, \mathbb{C})$ agit via $SL(2, \mathbb{Z}/p)$ qui agit transitivement sur les sous-groupes de cardinal p de $\Gamma/K_0 = \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$, quitte à conjuguer par $\bar{g} \in PSL(p, \mathbb{C})$ on peut envoyer K'/K_0 sur $K_{\bar{\rho}}/K_0$.

Ainsi $K_{\bar{\rho}} = \ker(q \circ \bar{g} \cdot \rho)$, donc $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho = PSL(p, \mathbb{C}) \cdot (\bar{g} \cdot \rho)$ est dans $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}})$.

Il s'ensuit que le nombre de composantes $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i})$ contenant $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ est donné par le nombre de sous-groupes d'indice p dans Γ contenant K_0 , i.e. le nombre de sous-groupes de cardinal p dans $\frac{\Gamma}{K_0} = (\mathbb{Z}/p)^2$ qui est $p+1$. ■

Les différents résultats obtenus ici peuvent être résumés en un théorème. Rappelons que le p -rang d'un groupe Γ est la dimension sur \mathbb{Z}/p de $\Gamma^{ab}/p\Gamma^{ab}$.

Théorème 2.3 (Combinatoire du lieu singulier)

Soit Γ un groupe de type fini de p -rang r .

Le lieu singulier $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ est la réunion de $\frac{p^r-1}{p-1}$ composantes différentes $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i})$ où $\bar{\rho}$ est un morphisme de groupes non-trivial dans $Hom(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$.

Deux composantes différentes s'intersectent en $p-1$ classes de conjugaison de représentations, chacune étant la classe de conjugaison d'une représentation très exceptionnelle.

Réciproquement, chaque classe de conjugaison de représentations très exceptionnelles appartient à exactement $p+1$ composantes.

Le nombre de classes de conjugaison de représentations très exceptionnelles dans $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ est $\frac{(p^r-1)(p^{r-1}-1)}{p^2-1}$.

Démonstration : Pour le premier fait, nous avons déjà vu qu'il y a autant de composantes que d'éléments dans $Hom(\Gamma, \overline{M_c})/(\mathbb{Z}/p)^*$ privé du morphisme trivial.

Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des sous-groupes normaux d'indice p dans Γ (en envoyant chaque morphisme de groupes sur son noyau) qui s'identifie à l'ensemble des sous groupes d'indice p dans $\Gamma^{ab}/p\Gamma^{ab}$. Ce groupe étant isomorphe à $(\mathbb{Z}/p)^r$ où r est le p -rang de Γ . On a donc $\frac{p^r-1}{p-1}$ éléments dans cet ensemble.

Les deuxième et troisième faits sont respectivement conséquences des propositions 17 et 18.

Dans Γ , il y a $\frac{p^r-1}{p-1}$ sous-groupes normaux d'indice p , il y a donc :

$\binom{\frac{p^r-1}{p-1}}{2}$ ensembles de deux sous-groupes normaux différents d'indice p

Ainsi (en utilisant le deuxième fait) :

$$\{(\{K, K'\}, PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho) \mid \rho \text{ se factorise via } K \cap K'\}$$

est de cardinal $\binom{\frac{p^r-1}{p-1}}{2} (p-1)$. D'autre part, en utilisant le troisième fait, ce cardinal est également :

$$|\{PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho \mid \rho \text{ est très exceptionnelle}\}| \frac{(p+1)p}{2}$$

$$\text{Soit } N_p := |\{PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho \mid \rho \text{ est très exceptionnelle}\}|$$

le nombre recherché, alors :

$$\begin{aligned} N_p &= \frac{2}{p(p+1)} \binom{\frac{p^r-1}{p-1}}{2} (p-1) \\ &= \frac{2}{p(p+1)} \frac{1}{2} \frac{p^r-1}{p-1} \left(\frac{p^r-1}{p-1} - 1 \right) (p-1) \\ &= \frac{p^r-1}{p(p+1)} \frac{p^r-p}{p-1} \end{aligned}$$

Ainsi, il y a exactement $N_p = \frac{(p^r-1)(p^{r-1}-1)}{p^2-1}$ classes de conjugaison de représentations très exceptionnelles. ■

Nous avons étudié en détail le défaut d'injectivité de φ . On voit en particulier, que le comportement combinatoire de φ ne dépend que de l'abélianisé de Γ (ou plus exactement de son p -rang).

2.3.3 Différentiabilité de φ

Le théorème 2.2 montre que φ restreinte à chaque composante est un homéomorphisme sur son image. On souhaite étudier la différentiabilité de φ en un point $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho \in \overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$. Par la proposition 18, les classes de conjugaison de représentations très exceptionnelles seront des valeurs singulières pour φ car elles sont des points d'intersection de différentes composantes. Nous allons montrer que hors de ces classes très exceptionnelles, la fonction φ est une immersion. Rappelons que pour étudier la différentiabilité de φ , nous avons besoin d'une structure d'orbifolde sur la variété des caractères (c'est le cas pour les groupes fuchsien pour le corollaire 4). Nous commençons par décrire les espaces tangents.

Proposition 19

Soit $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho \in \overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$ alors $T_{PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho} \overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$ s'identifie naturellement au groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, (\mathbb{C}_0^p)_{\bar{\rho}})$ où $(\mathbb{C}_0^p)_{\bar{\rho}}$ est le Γ -module des matrices de trace nulle, de taille p dont l'action est donnée par $\bar{\rho}$.

Démonstration : Nous avons déjà vu que $\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i = H^1(\Gamma, \overline{D}_{\bar{\rho}}) / \langle \overline{M}_c \rangle - \{[1]\}$, en utilisant l'exponentielle de matrice, il est alors clair qu'en tout point, l'espace tangent de $H^1(\Gamma, \overline{D}_{\bar{\rho}})$ est $H^1(\Gamma, (\mathbb{C}_0^p)_{\bar{\rho}})$ car l'action du groupe fini $\langle \overline{M}_c \rangle$ est libre sur $H^1(\Gamma, \overline{D}_{\bar{\rho}}) - \{[1]\}$, on en déduit le résultat. ■

L'espace tangent du côté de $\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}$ est donc bien compris. Pour ce qui est de l'espace tangent dans la variété des caractères de $PSL(p, \mathbb{C})$, il faut avoir une hypothèse supplémentaire pour le définir (il ne suffit pas d'avoir une bonne topologie). Pourvue que cette hypothèse supplémentaire soit vérifiée la correspondance sera lisse (cf théorème 2.4).

Proposition 20

Si Γ est fuchsien alors la variété des caractères $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ admet une structure d'orbifolde (l'isotropie est donnée par les centralisateurs). De plus, si ρ est une représentation irréductible de Γ dans $PSL(p, \mathbb{C})$ alors :

$$T_{PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho}^{Orb} \chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C})) = H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{\rho}) / Z(\rho)$$

Démonstration : Nous avons vu, par le théorème 1.3, la variété des caractères $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C})) = Hom^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C})) / PSL(p, \mathbb{C})$ est une orbifolde. De

plus l'isotropie locale de $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ est alors donnée par $Z(\rho)$ vu que le centre de $PSL(p, \mathbb{C})$ est trivial.

En vertu de la proposition 1, l'espace tangent à $Hom^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ en $\rho \in Hom^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ s'identifie à $Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{Ad\rho})$.

Dans la construction de l'orbifold du théorème 1.3, nous avons décomposé l'espace tangent à $M := Hom^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ en ρ , en un espace tangent vertical correspondant à $T_\rho PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et un espace tangent horizontal complémentaire à l'espace tangent vertical.

Ici, on sait par la proposition 2 que $T_\rho PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ s'identifie à l'espace $B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{Ad\rho})$. Ainsi, on a décomposé :

$$Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{Ad\rho}) = B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{Ad\rho}) \oplus H_\rho$$

Il est alors clair que H_ρ s'identifie (en tant qu'espace vectoriel) au groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{Ad\rho})$.

De plus la définition de l'espace tangent orbifold permet d'identifier $T_{PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho}^{Orb} \chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ au complémentaire du sous-espace tangent vertical quotienté par l'action du groupe d'isotropie locale : $H_\rho/Z(\rho)$. Autrement dit :

$$T_{PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho}^{Orb} \chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C})) = H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{Ad\rho})/Z(\rho) \quad \blacksquare$$

Sous les mêmes hypothèses, nous pouvons calculer la différentielle de φ en un point $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ où ρ est une représentation exceptionnelle mais pas très exceptionnelle (i.e. son centralisateur est isomorphe à \mathbb{Z}/p).

Lemme 11

Soit ρ dans $Hom^i(\Gamma, \overline{D} \times \langle \overline{M}_c \rangle)$ une représentation exceptionnelle dans $PSL(p, \mathbb{C})$ dont le centralisateur est isomorphe à \mathbb{Z}/p . Alors :

$$D_{PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho} \varphi : H^1(\Gamma, (\mathbb{C}_0^n)_{\overline{\rho}}) \rightarrow H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{\rho})/Z(\rho) \text{ est injective}$$

En particulier φ restreinte à l'ensemble des représentations exceptionnelles mais pas très exceptionnelles est un difféomorphisme sur son image.

Démonstration : Avec la définition de φ , il est clair que sa différentielle est donnée par l'application naturelle suivante :

$$H^1(\Gamma, (\mathbb{C}_0^n)_{\bar{\rho}}) \rightarrow H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{\rho})/Z(\rho)$$

induite par l'inclusion de \mathbb{C}_0^n dans $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{\rho}$. Nous allons montrer que cette application a un noyau trivial. Par hypothèse, ρ est dans $\mathcal{H}_{\bar{\rho}}$. En particulier, son centralisateur $Z(\rho)$ est le groupe $\langle \overline{D(\xi)} \rangle$.

Soient z_1, z_2 deux fonctions $Z^1(\Gamma, (\mathbb{C}_0^n)_{\bar{\rho}})$ telles que

$$z_1 = z_2 \text{ dans } H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{\rho})/Z(\rho)$$

Il existe alors $k \geq 0$ et $u \in B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{\rho})$ (i.e. $a \in D$) tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on ait $u(\gamma) = \gamma \cdot a - a$ avec :

$$z_1 - \overline{D(\xi)^k} \cdot z_2 = u$$

On a utilisé ici que $Z(\rho) = \langle \overline{D(\xi)} \rangle$. Comme $z_2 \in Z^1(\Gamma, (\mathbb{C}_0^n)_{\bar{\rho}})$, cela implique que $D(\xi)^k \cdot z_2 = z_2$. Ainsi $z_1 - z_2 = u$. Nous devons donc montrer que $z_1 - z_2 \in B^1(\Gamma, (\mathbb{C}_0^n)_{\bar{\rho}})$.

Définissons $b \in D$ avec $b_{i,i} = a_{i,i}$ pour $i = 0, \dots, p-1$. On a $Tr(a) = 0$ donc $Tr(b) = 0$, on peut donc considérer :

$$\delta_0(b) : \gamma \mapsto \gamma \cdot b - b \in B^1(\Gamma, (\mathbb{C}_0^n)_{\bar{\rho}})$$

Pour $0 \leq i \leq p-1$ et $\gamma \in \Gamma$:

$$(\delta_0(a)(\gamma))_{i,i} = (\gamma \cdot a)_{i,i} - a_{i,i} = (\gamma \cdot a)_{i,i} - b_{i,i}$$

Écrivons :

$$\rho(\gamma) = \overline{Diag(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1})M_c^j}$$

Alors :

$$(\gamma \cdot a)_{i,i} = a_{i-j, i-j} = b_{i-j, i-j} = (\gamma \cdot b)_{i,i}$$

Nous avons donc pour $0 \leq i \leq p-1$:

$$(\delta_0(a)(\gamma))_{i,i} = (\delta_0(b)(\gamma))_{i,i}$$

De plus, puisque z_1 et z_2 ont leur image dans les matrices diagonales, $\delta_0(a) = z_1 - z_2$ a également son image dans les matrices diagonales. Il est alors évident que les matrices $\delta_0(a)(\gamma)$ et $\delta_0(b)(\gamma)$ sont égales (toutes deux étant diagonales et avec les mêmes coefficients diagonaux).

$$z_1 - z_2 = \delta(a) = \delta(b) \in B^1(\Gamma, (\mathbb{C}_0^n)_{\bar{\rho}})$$

Ainsi l'application :

$$H^1(\Gamma, (\mathbb{C}_0^n)_{\bar{\rho}}) \rightarrow H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})_{\rho})/Z(\rho)$$

est une inclusion. Par définition φ est une immersion en dehors des représentations très exceptionnelles.

Puisque les points d'intersections de $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i)$ sont seulement donnés par les représentations très exceptionnelles (proposition 17) et φ restreinte à chaque composante est un homéomorphisme (théorème 2.2), si l'on restreint φ à l'ensemble des représentations qui ne sont pas très exceptionnelles, on garde un homéomorphisme. Puisque cet homéomorphisme est également une immersion nous en déduisons que la fonction φ est un difféomorphisme sur son image par le théorème des fonctions implicites. ■

Théorème 2.4

Soit Γ un groupe fuchsien, alors la fonction φ induit un difféomorphisme de :

$$\bigcup_{\substack{\bar{\rho} \in \text{Hom}(\Gamma, \overline{M_C}) \\ \bar{\rho} \text{ non-trivial}}} \overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i - \{PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho \text{ avec } |Z(\rho)| = p^2\}$$

sur le lieu singulier des représentations de $PSL(p, \mathbb{C})$ dont le centralisateur est isomorphe à \mathbb{Z}/p .

Démonstration : Par le lemme 11, φ est bien un difféomorphisme sur son image, en dehors des classes de conjugaison de représentations très exceptionnelles. Il est alors clair que cela va se surjecter sur le lieu singulier des représentations de $PSL(p, \mathbb{C})$ dont le centralisateur est isomorphe à \mathbb{Z}/p . ■

En résumé, la correspondance φ se comporte très bien du point de vue topologique mais aussi du point de vue de la géométrie différentielle, pourvu que l'on ait une telle structure. Dans la prochaine section, nous allons déterminer complètement ce lieu orbifold quand Γ est fuchsien.

2.4 Quand Γ est un groupe fuchsien

Dans la section 1.3, nous avons montré que $\chi^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ a une structure orbifold quand Γ est fuchsien. Le lieu orbifold est exactement l'ensemble des représentations exceptionnelles. Nous nous intéresserons à deux cas. Le premier, quand Γ est un groupe libre de rang $l \geq 2$ sera relativement simple. Le second, quand Γ est le groupe fondamental d'une surface de Riemann de genre $g \geq 2$ sera un peu plus complexe. Rappelons que la seule chose qui nous manque pour décrire complètement le lieu orbifold est la géométrie des composantes $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i})$. On verra rapidement que dans ces cas particuliers, toutes les composantes sont isomorphes deux à deux. Dans le cas du groupe libre, les composantes $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i})$ seront les composantes irréductibles du lieu singulier.

Par le théorème 2.2, $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i})$ et $\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}$ sont homéomorphes. Par la proposition 13, ce dernier espace est homéomorphe à $\ker(T)/\langle \overline{M_c} \rangle_{but} - \{[1]\}$ où T est le morphisme de transgression et K le noyau de $\bar{\rho}$. Les différentes actions de $\langle \overline{M_c} \rangle$ ont été décrites à la fin de la sous-section 2.3.1. De plus, par le théorème 2.4, ces correspondances respectent la structure différentielle.

2.4.1 Γ est un groupe libre

Soit $\Gamma := \mathbb{F}_l$ un groupe libre de rang l . Rappelons que nous étudions (cf sous-section 2.3.1) :

$$\ker(T)/\langle \overline{M_c} \rangle_{but} - \{[1]\}$$

Nous justifions qu'il suffit de décrire l'espace ci-dessus pour un unique K d'indice p dans \mathbb{F}_l .

Proposition 21

Le groupe $Aut(\mathbb{F}_l)$ agit transitivement sur les sous-groupes normaux d'indice p dans \mathbb{F}_l .

En particulier, pour tous $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ morphismes de groupes non-triviaux de $Hom(\mathbb{F}_l, \langle \overline{M_c} \rangle)$, les composantes $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i})$ et $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'}^i})$ sont difféomorphes les unes aux autres.

Démonstration : L'ensemble des sous-groupes normaux K d'indice p dans Γ est en bijection avec l'ensemble des sous-groupes d'indice p dans $(\mathbb{F}_l)^{Ab} = \mathbb{Z}^l$. Clairement $Aut((\mathbb{F}_l)^{Ab}) = GL(l, \mathbb{Z})$ agit transitivement sur ces ensembles, puisque l'application canonique de $Out(\mathbb{F}_l)$ dans $Aut((\mathbb{F}_l)^{Ab})$ est

surjective (c.f. [LS12]), nous obtenons que $Out(\mathbb{F}_l)$ agit transitivement sur les sous-groupes normaux d'indice p dans \mathbb{F}_l .

Soient deux composantes $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{p}}^i})$ et $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{p}'}^i})$, définissons les noyaux respectifs $K := \ker(\bar{\rho})$ et $K' := \ker(\bar{\rho}')$. Par ce que l'on vient de voir, on peut trouver $\phi \in Aut(\mathbb{F}_l)$ tel que $\phi(K) = K'$. Ainsi, les compositions par ϕ et ϕ^{-1} fournissent des difféomorphismes réciproques l'un de l'autre entre les composantes $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{p}}^i})$ et $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{p}'}^i})$ du lieu singulier. ■

Une conséquence immédiate est qu'il suffit de s'intéresser à une composante particulière, autrement dit, un seul sous-groupe normal d'indice p . Afin d'en construire un qui soit adapté à notre étude, nous utiliserons les revêtements d'espaces topologiques.

Soit \mathbb{D} un disque. On enlève de ce disque un plus petit disque de même centre. On enlève alors, le long d'un rayon $l - 1$ disques, puis on tourne d'un angle $\frac{2\pi}{p}$ et on enlève à nouveau $l - 1$ disques le long d'un rayon. En faisant cela p fois, nous construisons alors une surface Σ_2 avec $(l - 1)p + 1$ trous. Puisque, par construction, cette surface est invariante par une rotation r d'ordre p nous pouvons quotienter Σ_2 par l'action de $\langle r \rangle$ pour obtenir une nouvelle surface Σ_1 ayant exactement l trous. Voir la figure 2.1.

Définissons $\psi : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ la projection identifiant les points de Σ_2 modulo $\langle r \rangle$. C'est un revêtement galoisien de Σ_1 d'ordre p . Ainsi $\pi_1(\Sigma_2)$ est un sous-groupe normal d'indice p dans $\pi_1(\Sigma_1)$. Puisque X est un disque avec l trous, le groupe $\pi_1(\Sigma_1)$ est librement généré par les boucles simples autour de chacun des trous. Soit x_1 la boucle autour du trou central et x_2, \dots, x_l les boucles autour des $l - 1$ trous restants. Il est alors clair que le groupe fondamental de Σ_1 est librement généré par x_1, \dots, x_l .

D'autre part, un système libre de générateurs de $\pi_1(\Sigma_2)$ est donné par les $(l - 1)p + 1$ boucles simples autour de chacun des trous que l'on peut identifier à x_1^p et $x_1^{i-1}x_jx_1^{1-i}$ avec $1 \leq i \leq p$ et $2 \leq j \leq l$ (voir la figure 2.1). on définit :

$$K := \pi_1(\Sigma_2) = \langle x_1^p, x_2, x_1x_2x_1^{-1}, \dots, x_1^{p-1}x_2x_1^{1-p}, \dots, x_p, \dots, x_1^{p-1}x_px_1^{1-p} \rangle$$

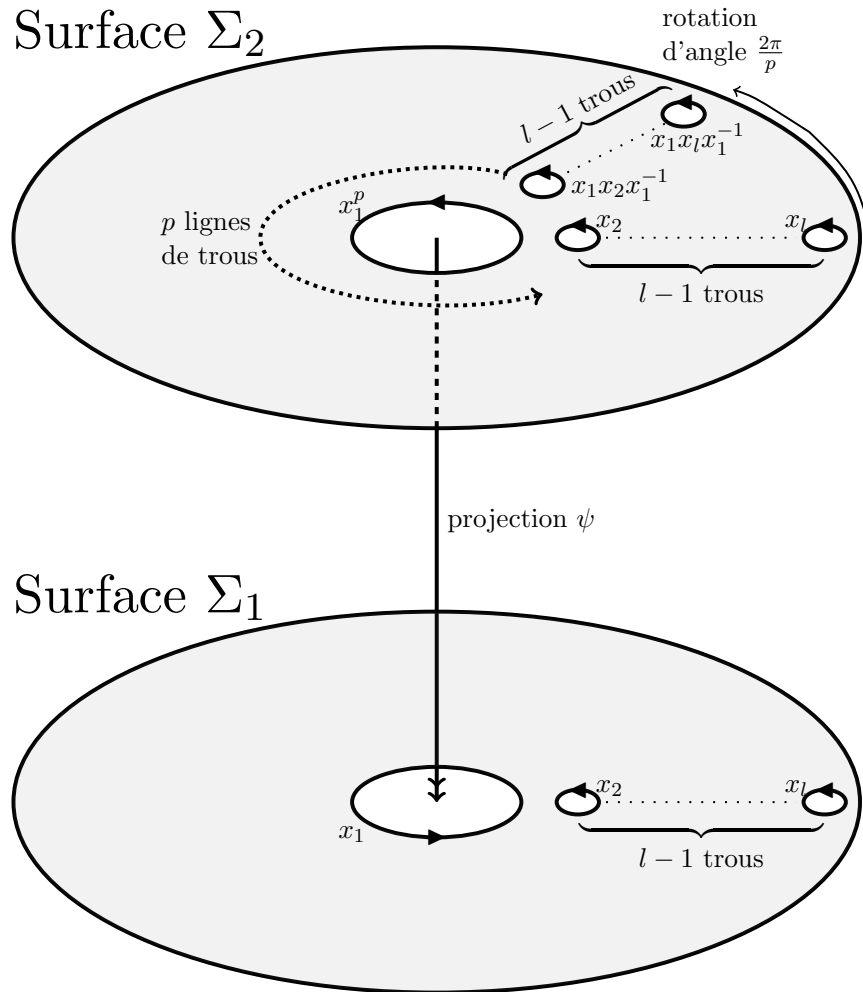


FIGURE 2.1 – Construction d'un sous-groupe normal d'indice p dans un groupe libre à l générateurs

On donne maintenant un nom aux générateurs de K . Soit $X := x_1^p$ et $Y_{i,j} := x_1^i x_j x_1^{-i}$ (l'index i parcourt $0 \leq i \leq p-1$ i.e. \mathbb{Z}/p). Les deux ensembles suivants sont clairement égaux car K est librement généré par ces éléments :

$$\text{Hom}(K, \overline{D}) = \overline{D} \times \prod_{j=2}^l \overline{D}^{\mathbb{Z}/p}$$

à $f \in \text{Hom}(K, \overline{D})$, on associe $(f(X), (f(Y_{0,j}), \dots, f(Y_{p-1,j}))_{j \leq 2 \leq l})$

Sous cette identification, nous pourrions calculer le noyau de la transgression $\ker(T)$ (rappelons que la proposition 13 donne des conditions relativement simples pour être dans le noyau de la transgression).

Proposition 22

Soit K défini comme ci-dessus. Soit $\bar{\rho} \in \text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$ de noyau K . Alors, si T désigne le morphisme de transgression associé (voir la discussion précédant la proposition 12), le noyau de la transgression $\ker(T)$ s'identifie à \overline{D}^{l-1} .

La correspondance associée à chaque élément $f \in \ker(T)$ le $(l-1)$ -uplet $(f(Y_{0,2}), \dots, f(Y_{0,l}))$.

Démonstration : D'après que nous avons vu en section 2.3.1, il nous faut choisir une section ensembliste pour la suite exacte :

$$1 \rightarrow K \rightarrow \Gamma \rightarrow \langle \overline{M}_c \rangle \rightarrow 1$$

Quitte à multiplier $\bar{\rho}$ par $l \in (\mathbb{Z}/p)^*$ (l'action de \mathbb{Z}/p^* ne change pas la composante par la proposition 14), on peut supposer que $\bar{\rho}(x_1) = \overline{M}_c$.

L'action de $\langle \overline{M}_c \rangle$ sur $\text{Hom}(K, \overline{D})$ est alors décrite par :

$$\text{Si } \overline{M}_c^l \in \langle \overline{M}_c \rangle \text{ et } f \in \text{Hom}(K, \overline{D}) \text{ alors } (\overline{M}_c^l \cdot f)(k) = \overline{M}_c^l \cdot f(x_1^{-l} k x_1^l)$$

Sous l'identification vue plus haut :

$$(M_c^k \cdot f) = (M_c^k \cdot f(X), (M_c^k \cdot f(Y_{-k,j}), \dots, M_c^k \cdot f(Y_{p-1-k,j}))_{j \leq 2 \leq l})$$

Si $f \in \ker(T)$ alors, par la proposition 13, $f(x_1^p)$ est trivial, donc $f(X) = \overline{I}_p$. De plus, $M_c \cdot f = f$, ainsi pour tout j :

$$f(Y_{0,j}) = M_c \cdot f(Y_{p-1,j}), \dots, f(Y_{p-2,j}) = M_c \cdot f(Y_{p-1,j})$$

Ceci implique que $f(Y_{k,j}) = M_c^k \cdot f(Y_{0,j})$ et donc f est uniquement déterminé par les valeurs $f(Y_{0,j})$ pour $2 \leq j \leq l$. On alors :

$$\ker(T) \text{ s'injecte dans } \overline{D}^{l-1} \text{ en envoyant } f \text{ sur } (f(Y_{0,2}) \dots f(Y_{0,l}))$$

Cette inclusion est également surjective car si (Z_2, \dots, Z_l) est dans \overline{D}^{l-1} , le morphisme de groupes f de K vers \overline{D} défini par :

$$f(X) := \overline{I}_n, f(Y_{k,j}) := M_c^k \cdot f(Y_{0,j}) \text{ pour } 2 \leq j \leq l \text{ et } 0 \leq k \leq p-1$$

est clairement fixe par l'action de $\langle \overline{M}_c \rangle$. D'où la surjectivité puisque $f \in \ker(T)$ (car $f(\gamma_0^p) = f(X)$ est trivial). ■

Au final :

Théorème 2.5

Pour chaque élément non-trivial $\overline{\rho} \in \text{Hom}(\mathbb{F}_l, \langle \overline{M}_c \rangle)$, la composante $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\overline{\rho}}^i)$ est homéomorphe à :

$$\left(\overline{D}^{l-1} - \{(1, \dots, 1)\} \right) / \langle \overline{M}_c \rangle$$

où l'action de $\langle \overline{M}_c \rangle$ est donnée par équiconjugaison, i.e. si $s \in \langle \overline{M}_c \rangle$ et $(x_1, \dots, x_{l-1}) \in \overline{D}^{l-1}$ alors :

$$s \cdot (x_1, \dots, x_{l-1}) := (s \cdot x_1, \dots, s \cdot x_{l-1})$$

Démonstration : Par la proposition 21, toute composante $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\overline{\rho}}^i)$ sera difféomorphe à celle, particulière, que nous avons déterminée à partir de ce groupe normal K d'indice p . Nous avons vu que la transgression associée T vérifiait alors :

$$\ker(T) = \overline{D}^{l-1}$$

L'action de $\langle \overline{M}_c \rangle_{but}$ sur le membre de gauche, se transforme clairement en l'action d'équiconjugaison sur le membre de droite via la correspondance de la proposition 22. Ainsi :

$\varphi(\overline{\mathcal{H}_p^i})$ est homéomorphe à $\ker(T)/\langle \overline{M_c} \rangle_{but} - \{[1]\}$

qui est homéomorphe à $(\overline{D}^{l-1} - \{(1, \dots, 1)\})/\langle \overline{M_c} \rangle$ ■

En particulier :

Corollaire 6

Soit $l \geq 2$, le lieu orbifold de $\chi^i(\mathbb{F}_l, PSL(p, \mathbb{C}))$ est connexe de dimension $(p-1)(l-1)$.

Démonstration : En utilisant le théorème 2.1 et la proposition 11, le lieu orbifold est la réunion des composantes $\varphi(\overline{\mathcal{H}_p^i})$. Vu que chacune de ces composantes est connexe par le théorème 2.5 et que chaque paire de composantes a une intersection non-vide par la proposition 17, leur réunion, i.e. le lieu orbifold, est connexe.

De plus, la correspondance φ étant un difféomorphisme en les classes de conjugaison de représentations qui ne sont pas très exceptionnelles et toutes les composantes étant difféomorphes les unes aux autres par la proposition 21, on obtient finalement que la dimension d'une composante est :

$$\dim(\overline{D})(l-1) = (p-1)(l-1)$$

le théorème 2.3 nous indique qu'il y a un nombre fini de classes de conjugaison de représentations très exceptionnelles. Par ce qui est écrit au-dessus, le lieu singulier a pour dimension $(p-1)(l-1)$ en chaque point qui n'est pas très exceptionnel, ainsi, le lieu singulier a pour dimension $(p-1)(l-1)$ en faisant un léger abus de notation. ■

Le p -rang de \mathbb{F}_l est l , en combinant ce corollaire aux résultats contenus dans le théorème 2.3, nous obtenons une paramétrisation précise du lieu orbifold pour la variété des caractères $\chi^i(\mathbb{F}_l, PSL(p, \mathbb{C}))$.

2.4.2 Γ est un groupe de surface

Soit Γ le groupe fondamental de Σ_g une surface de Riemann fermée de genre $g \geq 2$. Nous allons effectuer une étude similaire à celle que nous avons faite pour les groupes libres. Par le théorème de Dehn-Nielsen-Baer (voir [FM11] théorème 8.1), nous savons que le mapping class group s'identifie à un sous-groupe d'indice 2 dans $Out(\Gamma)$. Nous notons $Out^+(\Gamma)$ ce sous-groupe d'indice 2 dans Γ et $Aut^+(\Gamma)$ les automorphismes correspondants.

Proposition 23

Soit Γ le groupe fondamental de Σ_g une surface de Riemann fermée de genre $g \geq 2$. Le groupe $Aut^+(\Gamma)$ agit transitivement sur les sous-groupes normaux d'indice p de Γ .

Pour tous $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ des morphismes non-triviaux de $Hom(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle)$, les composantes $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i)$ et $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}'}^i)$ sont difféomorphes l'une à l'autre.

Démonstration : L'ensemble des sous-groupes normaux K d'indice p dans Γ est en correspondance bijective avec l'ensemble des sous-groupes d'indice p dans $\Gamma^{Ab} = \mathbb{Z}^{2g}$. De plus, on sait que $Aut^+(\Gamma^{Ab}) = Sp(2g, \mathbb{Z})$ agit transitivement sur ces ensembles, puisque l'application canonique de $Out^+(\Gamma)$ sur $Sp(2g, \mathbb{Z})$ est surjective (c.f. [FM11], théorème 6.4). Le groupe $Aut^+(\Gamma^{Ab})$ agit donc transitivement sur les sous-groupes normaux d'indice p dans Γ . Le reste est identique à la preuve de la proposition 21. ■

Tout comme dans le cas du groupe libre, le moyen le plus simple de construire un sous-groupe normal d'indice p dans Γ est la topologie. Soit T un tore. Sur ce tore, nous creusons $g - 1$ trous le long d'une ligne, on effectue une rotation r d'angle $\frac{2\pi}{p}$, puis on creuse à nouveau $g - 1$ trous le long d'une ligne, ainsi de suite jusqu'à avoir creusé $p(g - 1)$ trous. Notons Σ_2 la surface obtenue à partir de cette construction. On définit alors Σ_1 l'espace Σ_2 quotienté par l'action du groupe $\langle r \rangle$. La construction est similaire au cas du groupe libre (voir la figure 2.2).

La surface Σ_1 est alors une surface de genre g et Σ_2 est une surface de genre $1 + (g - 1)p$. De plus $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2/\langle r \rangle = \Sigma_1$ un revêtement galoisien de Σ_1 de telle sorte que $\pi_1(\Sigma_2) \triangleleft \pi_1(\Sigma_1)$.

La surface Σ_1 est une surface dont le groupe fondamental est généré par $2g$ éléments a_1, b_1 autour du trou central, et $a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$ autour des autres trous. Le groupe fondamental de Σ_1 est facilement décrit par :

$$\pi_1(\Sigma_1) = \Gamma := \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle$$

Dans ce cas $\pi_1(\Sigma_2)$ s'identifie à (voir la figure 2.2) :

$$\pi_1(\Sigma_2) = \langle a_1^p, b_1, a_1^i a_j a_1^{-i}, a_1^i b_j a_1^{-i} \mid 0 \leq i \leq p - 1 \text{ et } 2 \leq j \leq g \rangle$$

De plus, ceci est un « bon » système de générateurs du groupe fondamental de la surface Y au sens où :

$$\text{si } K := \langle X, Y, X_{i,j}, Y_{i,j} \mid [X, Y] \prod_{j=2}^g \prod_{i=0}^{p-1} [X_{i,j}, Y_{i,j}] = 1 \rangle$$

alors le morphisme de groupes ψ défini par :

$$\psi : \begin{cases} K & \longrightarrow \pi_1(\Sigma_2) \\ X & \longmapsto a_1^p \\ Y & \longmapsto b_1 \\ X_{i,j} & \longmapsto a_1^i a_j a_1^{-i} \text{ pour } 2 \leq j \leq g \text{ et } 0 \leq i \leq p-1 \\ Y_{i,j} & \longmapsto a_1^i b_j a_1^{-i} \text{ pour } 2 \leq j \leq g \text{ et } 0 \leq i \leq p-1 \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

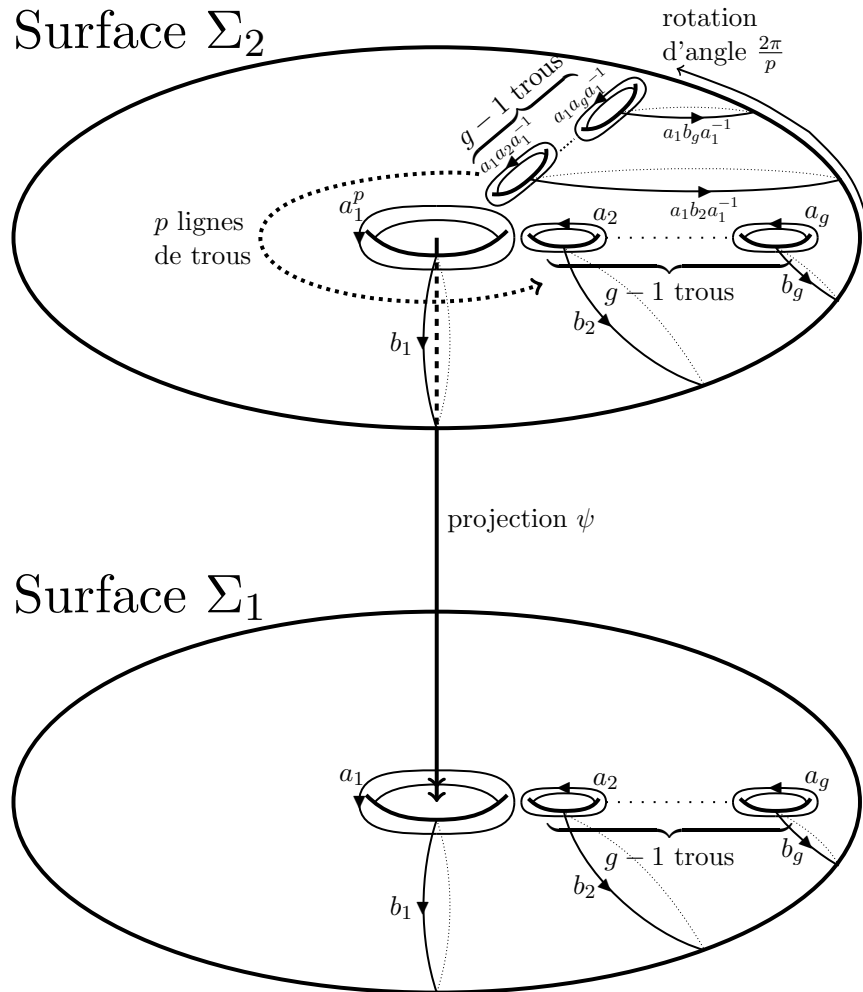


FIGURE 2.2 – Construction d'un sous-groupe normal d'indice p dans un groupe de surface de genre g

Ainsi :

$$\text{Hom}(K, \overline{D}) = \overline{D} \times \overline{D} \times \prod_{j=2}^g (\overline{D} \times \overline{D})^{\mathbb{Z}/p}$$

À f , on associe $(f(X), f(Y), (f(X_{k,j}), f(Y_{k,j}))_{\substack{0 \leq k \leq p-1 \\ 2 \leq j \leq g}})$.

Sous cette identification, nous pourrons calculer le noyau de la transgression $\ker(T)$ (rappelons que la proposition 13 donne des conditions relativement simples pour être dans le noyau de la transgression).

Proposition 24

Soit K défini comme ci-dessus. Soit $\bar{\rho}$ dans $\text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$ avec $K = \ker(\bar{\rho})$. Soit T la transgression (voir la discussion précédant la proposition 12).

$$\ker(T) = \langle \overline{D}(\xi) \rangle \times (\overline{D}^2)^{g-1}$$

La correspondance est donnée en associant à chaque morphisme de groupes $f \in \text{Hom}(K, \overline{D})^{\langle \overline{M}_c \rangle}$ le g -uplet $(f(Y), (f(X_{0,i}), f(Y_{0,i}))_{2 \leq i \leq g})$.

Démonstration : On sait que $a_1 \notin K$. Quitte à multiplier $\bar{\rho}$ par $l \in (\mathbb{Z}/p)^*$ (ce qui ne change pas la composante grâce à la proposition 14), on peut supposer que $\rho(a_1) = \overline{M}_c$.

L'action de $\langle \overline{M}_c \rangle$ sur $\text{Hom}(K, \overline{D})$ peut être décrite par :

$$\text{Si } \overline{M}_c^l \in \langle \overline{M}_c \rangle \text{ et } f \in \text{Hom}(K, \overline{D}) \text{ alors } (\overline{M}_c^l \cdot f)(k) = \overline{M}_c^l \cdot f(a_1^{-l} k a_1^l)$$

Si $f \in \ker(T)$ alors $f(a_1^p)$ doit être trivial par la proposition 13, et donc $f(X)$ est trivial.

Il nous reste à comprendre $f(a_1^{-1} Z a_1)$ quand $Z = Y, X_{i,j}$ ou $Y_{i,j}$ et $f \in \text{Hom}(K, \overline{D})$. Clairement :

$$\begin{cases} f(a_1^{-1} X_{i,j} a_1) = f(X_{i-1,j}) \text{ pour tout } 2 \leq j \leq g, 0 \leq i \leq p-1 \\ f(a_1^{-1} Y_{i,j} a_1) = f(Y_{i-1,j}) \text{ pour tout } 2 \leq j \leq g, 0 \leq i \leq p-1 \end{cases}$$

Pour ce qui est de Y :

$$a_1^{-1}Y a_1 = a_1^{-1}b_1 a_1 = b_1(a_1 b_1)^{-1}[b_1, a_1](a_1 b_1) = b_1(a_1 b_1)^{-1} \prod_{j=2}^g [a_j, b_j] a_1 b_1$$

Puisque $\prod_{j=2}^g [a_j, b_j] \in \langle [K, K] \rangle$ et $\langle [K, K] \rangle$ est caractéristique dans K :

$$(a_1 b_1)^{-1} \prod_{j=2}^g [a_j, b_j] a_1 b_1 \in \langle [K, K] \rangle$$

Ainsi, $f(a_1^{-1}Y a_1) = f(Y)$ si $f \in \text{Hom}(K, \overline{D})$. Finalement, si $f \in \text{Hom}(K, \overline{D})^{\langle \overline{M}_c \rangle}$ alors $f(Y)$ commute avec \overline{M}_c et donc $f(Y) \in \langle \overline{D}(\xi) \rangle$. L'application ψ définie par :

$$\psi : \begin{cases} \ker(T) & \longrightarrow \langle \overline{D}(\xi) \rangle \times (\overline{D} \times \overline{D})^{g-1} \\ f & \longmapsto (f(Y), f(X_{0,j}), f(Y_{0,j}))_{2 \leq j \leq g} \end{cases}$$

est une inclusion. Montrer qu'elle est surjective est (comme dans le cas du groupe libre) évident. \blacksquare

On obtient alors le théorème :

Théorème 2.6

Soit Γ le groupe fondamental d'une surface de Riemann fermée de genre g où $g \geq 2$.

Pour tout élément non-trivial dans $\overline{\rho} \in \text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$, la composante $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\overline{\rho}}^i)$ est homéomorphe à :

$$\langle \overline{D}(\xi) \rangle \times (\overline{D}^{2(g-1)}) / \langle \overline{M}_c \rangle - \{(1, \dots, 1)\}$$

L'action de $\langle \overline{M}_c \rangle$ étant donnée par l'équiconjugaison sur :

$$\overline{D}^{2(g-1)} - \{(1, \dots, 1)\}$$

Démonstration : Par la proposition 23, toute composante $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\overline{\rho}}^i)$ est difféomorphe à celle, particulière que nous avons obtenue avec K . Pour ce K , si T est le morphisme de transgression associé :

$$\ker(T) = \langle \overline{D}(\xi) \rangle \times \overline{D}^{2(g-1)}$$

La correspondance entre $\ker(T)$ et $\varphi(\overline{\mathcal{H}_p}^i)$ est un homéomorphisme par la proposition 13 et le théorème 2.2.

L'action de $\langle \overline{M}_c \rangle_{but}$ se traduit, comme dans le cas du groupe libre par l'équiconjugaison sur le membre de droite. Ainsi, on obtient :

$$\varphi(\overline{\mathcal{H}_p}^i) \text{ est homéomorphe à } \ker(T) / \langle \overline{M}_c \rangle_{but} - \{[1]\}$$

$$\text{qui est homéomorphe à } \left(\langle \overline{D}(\xi) \rangle \times \overline{D}^{2(g-1)} - \{(1, \dots, 1)\} \right) / \langle \overline{M}_c \rangle \quad \blacksquare$$

Contrairement au cas du groupe libre, les composantes ne sont pas connexes. Afin de calculer exactement le nombre de composantes connexes du lieu orbifold de la variété des caractères, nous introduisons un invariant.

Rappelons que Γ est le groupe fondamental d'une surface de Riemann fermée de genre $g \geq 2$ qui est engendré par $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ vérifiant une unique relation :

$$\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$$

Si ρ est une représentation de Γ dans $PSL(p, \mathbb{C})$, on choisit arbitrairement pour chaque $\gamma \in \Gamma$, un relevé $\hat{\rho}(\gamma) \in SL(p, \mathbb{C})$ tel que $\bar{\rho}(\gamma) = \rho(\gamma)$. Puisque ρ est une représentation dans $PSL(p, \mathbb{C})$, nous avons :

$$e(\hat{\rho}) := \prod_{i=1}^g [\hat{\rho}(a_i), \hat{\rho}(b_i)] \in Z(SL(p, \mathbb{C}))$$

De plus, si $\hat{\rho}$ et $\hat{\rho}'$ sont deux relevés différents de ρ , pour tout $\gamma \in \Gamma$, on sait que $\hat{\rho}(\gamma)(\hat{\rho}'(\gamma))^{-1} \in Z(SL(p, \mathbb{C}))$, d'où :

$$\prod_{i=1}^g [\hat{\rho}(a_i), \hat{\rho}(b_i)] = \prod_{i=1}^g [\hat{\rho}'(a_i), \hat{\rho}'(b_i)]$$

En particulier $e(\hat{\rho})$ ne dépend que de ρ et pas du relevé $\hat{\rho}$ choisi. On le note $e(\rho)$. Ce sera l'**invariant d'Euler** associé à ρ . Remarquons que si $g \in PSL(p, \mathbb{C})$ et \hat{g} est un relevé quelconque de g dans $SL(p, \mathbb{C})$ alors :

$$e(g \cdot \rho) = \hat{g} \cdot e(\rho) = e(\rho) \text{ puisque } e(\rho) \in Z(SL(p, \mathbb{C}))$$

L'invariant d'Euler est donc invariant par conjugaison. Dans le prochain lemme, on montre qu'il est également invariant par l'action de $Aut^+(\Gamma)$.

Lemme 12

Soit Γ le groupe fondamental d'une surface de Riemann fermée Σ_g de genre $g \geq 2$. Si $\phi \in \text{Aut}^+(\Gamma)$ et $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \text{PSL}(p, \mathbb{C}))$ alors $e(\rho \circ \phi) = e(\rho)$.

Démonstration : Soit ϕ un élément de $\text{Aut}^+(\Gamma)$ et $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \text{PSL}(p, \mathbb{C}))$. La suite exacte définissant $\text{PSL}(p, \mathbb{C})$ est :

$$1 \longrightarrow Z(\text{SL}(p, \mathbb{C})) \longrightarrow \text{SL}(p, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{PSL}(p, \mathbb{C}) \longrightarrow 1$$

Soit $[z] \in H^2(\text{PSL}(p, \mathbb{C}), Z(\text{SL}(p, \mathbb{C})))$ représentant cette suite exacte. L'invariant d'Euler $e(\rho)$ s'identifie alors à :

$$e(\rho) = [\rho^* z] \in H^2(\Gamma, Z(\text{SL}(p, \mathbb{C}))) = Z(\text{SL}(p, \mathbb{C}))$$

Ainsi $e(\rho \circ \phi) = \phi^* e(\rho) = e(\rho)$, l'action du mapping class group étant triviale sur $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ (les éléments de $\text{Aut}^+(\Gamma)$ laissent invariant la forme volume engendrant $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$), l'action est triviale sur le groupe de cohomologie $H^2(\Gamma, Z(\text{SL}(p, \mathbb{C}))) = H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/p)$. En particulier, $e(\rho)$ est invariant par l'action de $\text{Aut}^+(\Gamma)$. ■

Corollaire 7

Soit $\bar{\rho}$ un morphisme non-trivial de $\text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$. La composante $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i)$ contient exactement p composantes connexes, chaque composante connexe est donnée par une valeur de l'invariant d'Euler. De plus :

$$e^{-1}(I_p) \text{ est homéomorphe à } \overline{D}^{2(g-1)} / \langle \overline{M}_c \rangle - \{(1, \dots, 1)\}$$

et pour $1 \leq k \leq p-1$:

$$e^{-1}(\xi^k I_p) \text{ est homéomorphe à } \overline{D}^{2(g-1)} / \langle \overline{M}_c \rangle$$

Démonstration : Par la proposition 23 qui stipule que $\text{Aut}^+(\Gamma)$ agit transitivement sur les composantes et le lemme 12 qui stipule que l'invariant d'Euler est invariant par l'action de $\text{Aut}^+(\Gamma)$, il suffit de montrer l'assertion du corollaire pour les $K, \bar{\rho}$ que nous avons défini via la figure 2.2. Pour $0 \leq k \leq p-1$, on définit un morphisme de groupes :

$$\rho_k : \begin{cases} \Gamma & \longrightarrow \overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle \\ a_1 & \longmapsto \overline{M_c} \\ b_1 & \longmapsto \overline{D(\xi)}^k \\ a_i, b_i & \longmapsto \overline{D(\xi)} \text{ pour } 2 \leq i \leq g \end{cases}$$

Chaque ρ_k est un morphisme de groupes irréductible (parce que $\rho(a_1)$ et $\rho(a_2)$ engendrent un sous-groupe irréductible de $PSL(p, \mathbb{C})$) et appartient à $\mathcal{H}_{\overline{\rho}}$. D'une part, on remarque que $\widehat{\rho}_k(a_1) := M_c$, $\widehat{\rho}_k(b_1) := D(\xi)^k$, $\widehat{\rho}_k(a_i) := D(\xi)$ et $\widehat{\rho}_k(b_i) := D(\xi)$ pour $i \geq 2$ fournit un relevé de ρ_k . Le calcul de l'invariant d'Euler donne alors :

$$e(\rho_k) = \xi^{-k} I_p$$

Il s'ensuit que $e : \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\overline{\rho}}}^i) \rightarrow Z(SL(p, \mathbb{C}))$ est surjectif. Par conséquent $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\overline{\rho}}}^i)$ est la réunion de p ensembles fermés et ouverts (les p fibres de cette application).

Par la proposition 24, $\overline{\mathcal{H}_{\overline{\rho}}}^i$ a exactement p composantes connexes, par le théorème 2.2, il en va de même pour $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\overline{\rho}}}^i)$. Ainsi, les fibres de $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\overline{\rho}}}^i)$ au-dessus de e sont exactement les p composantes connexes de $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\overline{\rho}}}^i)$.

Via l'identification de la proposition 24, la classe de conjugaison de ρ_0 (dont l'invariant d'Euler est I_p) est dans la composante connexe de :

$$\{I_p\} \times \overline{D}^{2(g-1)} / \langle \overline{M_c} \rangle - \{(1, \dots, 1)\}$$

$$\text{qui est homéomorphe à } \overline{D}^{2(g-1)} / \langle \overline{M_c} \rangle - \{(1, \dots, 1)\}$$

Alors que ρ_k pour $1 \leq k \leq p-1$ est dans la composante connexe :

$$\{\overline{D(\xi)}^k\} \times \overline{D}^{2(g-1)} / \langle \overline{M_c} \rangle \text{ homéomorphe à } \overline{D}^{2(g-1)} / \langle \overline{M_c} \rangle$$

Comme $e(\rho_k) = \xi^{-k} I_p$, nous avons le résultat. ■

Au théorème 2.3, nous avons vu que pour $\overline{\rho}$ et $\overline{\rho}'$ deux morphismes de groupes non multiples l'un de l'autre dans $Hom(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle)$, l'intersection entre $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\overline{\rho}}}^i)$ et $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\overline{\rho}'}}^i)$ est finie de cardinal $p-1$. Nous allons voir dans la suite que, suivant la "nature" du couple $(\overline{\rho}, \overline{\rho}')$, soit ces $p-1$ points d'intersection ont un invariant d'Euler égal à I_p , soit pour chaque $1 \leq k \leq p-1$ il existe un unique point dans l'intersection d'invariant d'Euler $\xi^k I_p$ (et aucun point dans la composante pour l'invariant d'Euler trivial).

Soit ω la forme symplectique naturelle sur $\Gamma^{Ab} = \mathbb{Z}^{2g}$ (voir [FM11] chapitre 5) pour laquelle $Aut^+(\Gamma)$ agit par symplectomorphisme. Nous rappelons que l'image du $2g$ -uplet $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$ dans \mathbb{Z}^{2g} est une base symplectique pour ω .

Notons ω_p la forme symplectique correspondante sur $(\mathbb{Z}/p)^{2g}$. Sur cet espace vectoriel symplectique, il existe deux types différents de sous-espaces E de codimension 2. En effet, soit $\omega_{p|E}$ est non-dégénérée, soit $\omega_{p|E}$ est dégénérée avec un noyau de dimension 2 (clair avec des considérations de dimension). Notons ϕ le morphisme de projection de Γ sur $(\mathbb{Z}/p)^{2g}$.

Si l'on se donne deux sous-espaces E et F de codimension 2 pour lesquels ω_p est non-dégénérée alors on peut compléter les bases symplectiques respectives de E et F en des bases symplectiques de l'espace total. Il va alors exister deux bases symplectiques de l'espace total, l'une respectant E , l'autre respectant F . Il va donc exister un symplectomorphisme de l'espace total envoyant E sur F . Ainsi, le groupe $Sp(2g, \mathbb{Z}/p)$ va agir transitivement sur l'ensemble de ces sous-espaces de codimension 2.

Si l'on se donne deux sous-espaces E et F de codimension 2 pour lesquels ω_p a un noyau non-trivial. En décomposant :

$$E = \ker(\omega_{p|E}) \oplus E_1 \text{ et } F = \ker(\omega_{p|F}) \oplus F_1$$

avec E_1 et F_1 non-dégénérés. Si l'on se donne une base (e_1, e_2) (resp. (f_1, f_2)) de $\ker(\omega_{p|E})$ (resp. de $\ker(\omega_{p|F})$), alors (vu que l'espace total est symplectique) on peut trouver (e'_1, e'_2) (resp. (f'_1, f'_2)) tels que (e_1, e_2, e'_1, e'_2) et (f_1, f_2, f'_1, f'_2) forment une famille symplectique.

En particulier, si l'on complète ces familles symplectiques avec une base symplectique de E_1 (resp. F_1), il existe à nouveau une base symplectique de l'espace total adaptée à E (resp. à F). On peut donc trouver un symplectomorphisme de l'espace total envoyant E sur F . Pareillement, le groupe $Sp(2g, \mathbb{Z}/p)$ va agir transitivement sur l'ensemble de ces sous-espaces de codimension 2.

Ainsi, nous obtenons exactement deux classes de sous-espaces de codimension 2 modulo $Sp(2g, \mathbb{Z})$ dans $(\mathbb{Z}/p)^{2g}$, les **non-dégénérés** (ceux pour lesquels ω_p est non-dégénérée) et les **dégénérés** (ceux pour lesquels ω_p est non-dégénérée).

Proposition 25

Soient $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ deux morphismes de $\text{Hom}(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle)$ non-proportionnels l'un à l'autre. Soient $K := \ker(\bar{\rho})$ et $K' := \ker(\bar{\rho}')$. On rappelle que ϕ désigne la projection de Γ sur $(\mathbb{Z}/p)^{2g}$.

Si $\phi(K \cap K')$ est non-dégénéré, alors pour tout $1 \leq k \leq p-1$, il existe une unique classe de conjugaison de représentation ρ_k dans l'intersection $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'^i})}$ telle que $e(\rho_k) = \xi^{-k} I_p$.

Si $\phi(K \cap K')$ est dégénéré, alors l'intersection $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'^i})}$ est contenue dans $e^{-1}(I_p)$.

Démonstration : En vertu de la discussion précédente où nous avons montré que $\text{Aut}^+(\Gamma)$ a deux orbites pour son action sur les sous-espaces de codimension 2 de $(\mathbb{Z}/p)^{2g}$ et le lemme 12 stipulant que l'invariant d'Euler est invariant par son action, pour montrer la proposition, il suffit de faire un exemple dans chaque cas.

Le cas non-dégénéré

On peut choisir ces sous-groupes d'indice p dans Γ :

$$K := \langle \langle a_1^p, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \rangle \rangle$$

$$K' := \langle \langle a_1, b_1^p, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \rangle \rangle$$

Clairement $\phi(K \cap K') = \text{Vect}(\phi(a_2), \phi(b_2), \dots, \phi(a_g), \phi(b_g))$, ainsi dans l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/p)^{2g}$, le sous-espace $\phi(K \cap K')$ est engendré par les vecteurs $\phi(a_2), \phi(b_2), \dots, \phi(a_g), \phi(b_g)$ qui forment une base symplectique pour $\omega_{p|\phi(K \cap K')}$, nous sommes donc dans le cas non-dégénéré.

Pour $1 \leq k \leq p-1$, on définit :

$$\rho_k : \begin{cases} \Gamma & \longrightarrow \overline{D} \rtimes \langle \overline{M_c} \rangle \\ a_1 & \longmapsto \overline{M_c} \\ b_1 & \longmapsto \overline{D(\xi)^k} \\ a_i, b_i & \longmapsto \overline{I_p} \text{ pour } 2 \leq i \leq g \end{cases}$$

Le noyau de $\ker(\rho_k)$ est $K \cap K'$. De plus, l'invariant d'Euler de ρ_k est $\xi^{-k} I_p$. Ainsi les ρ_k définissent $p-1$ classes de conjugaison différentes, chacune ayant un invariant d'Euler différent. L'intersection $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'^i})}$ contient exactement $p-1$ éléments, nous avons donc construit tous les points dans l'intersection.

Le cas dégénéré

On peut choisir ces sous-groupes normaux d'indice p dans Γ :

$$L := \langle \langle a_1^p, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \rangle \rangle$$

$$L' := \langle \langle a_1, b_1, a_2^p, b_2, a_3, b_3, \dots, a_g, b_g \rangle \rangle$$

On a $\phi(L \cap L') = Vect(\phi(b_1), \phi(b_2), \dots, \phi(a_g), \phi(b_g))$, il s'ensuit que dans l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/p)^{2g}$, le sous-espace $\phi(L \cap L')$, est engendré par les vecteurs $\phi(b_1), \phi(b_2), \dots, \phi(a_g), \phi(b_g)$, ainsi $\phi(b_1)$ est dans le noyau de $\omega_{p|\phi(L \cap L')}$, et nous nous trouvons en présence d'un cas dégénéré.

Soit $1 \leq k \leq p-1$, on définit :

$$\rho'_k : \begin{cases} \Gamma & \longrightarrow \overline{D} \rtimes \langle \overline{M}_c \rangle \\ a_1 & \longmapsto \overline{D}(\xi) \\ a_2 & \longmapsto \overline{M}_c^k \\ b_i & \longmapsto \overline{I}_p \text{ pour } 1 \leq i \leq g \\ a_i & \longmapsto \overline{I}_p \text{ pour } 3 \leq i \leq g \end{cases}$$

Le noyau $\ker(\rho_k)$ est $L \cap L'$. De plus, l'invariant d'Euler de ρ'_k est I_p pour $1 \leq k \leq p-1$.

S'il y avait un $g \in PSL(p, \mathbb{C})$ conjuguant ρ'_k et $\rho'_{k'}$ avec $k \neq k'$ alors cette application induirait nécessairement sur $\langle \overline{D}(\xi) \rangle \times \langle \overline{M}_c \rangle$ un automorphisme de $\langle \overline{D}(\xi) \rangle \times \langle \overline{M}_c \rangle$ dont le déterminant n'est pas 1, ceci est impossible (par la proposition 17, le normalisateur de $\langle \overline{D}(\xi) \rangle \times \langle \overline{M}_c \rangle$ induit des automorphismes de déterminant 1). On a donc construit $p-1$ éléments différents d'invariant d'Euler trivial dans l'intersection $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_p^i) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}}_{p'}^i)$ qui est de cardinal $p-1$. ■

Avant d'obtenir notre résultat final, on démontre un lemme.

Lemme 13

Soient K et K' deux hyperplans différents de $V := (\mathbb{Z}/p)^{2g}$ avec $g \geq 2$. Soit ω une forme symplectique sur V . Il y a deux cas :

- Si $K \cap K'$ est non-dégénéré, alors il existe K_0 tel que $K \cap K_0$ et $K' \cap K_0$ soient dégénérés.
- Si $K \cap K'$ est dégénéré, alors il existe K_0 tel que $K \cap K_0$ et $K' \cap K_0$ soient non-dégénérés.

Démonstration :

Si $K \cap K'$ est non-dégénéré

Soit $F := K \cap K'$. Comme F est non-dégénéré de dimension $2g - 2$, on peut prendre $u \in F^\perp \cap K$ et $u' \in F^\perp \cap K'$, tels que ni u , ni u' ne sont dans F , ainsi :

$$K = \text{Vect}(u) \oplus^\perp F \text{ et } K' = \text{Vect}(u') \oplus^\perp F$$

Si $K_0 := \text{Vect}(u, u') \oplus^\perp F_0$ où F_0 est un hyperplan quelconque de F alors :

$$\dim(K_0) = \dim(\text{Vect}(u, u')) + \dim(F_0) = \dim(\text{Vect}(u, u')) + 2g - 3$$

Puisque $K \neq K'$, $\text{Vect}(u, u')$ doit être de dimension 2 et la dimension de K_0 est $2g - 1$. De plus :

$$K_0 \cap K = \text{Vect}(u) \oplus^\perp F_0 \text{ et } K_0 \cap K' = \text{Vect}(u') \oplus^\perp F_0$$

Puisque u (resp. u') est un vecteur dégénéré de $K_0 \cap K$ (resp. $K_0 \cap K'$), nous avons que K_0 est un hyperplan vérifiant que $K \cap K_0$ et $K' \cap K_0$ sont dégénérés.

Si $K \cap K'$ est dégénéré

Soit $F := K \cap K'$. Puisque F est de dimension $2g - 2$, F^\perp est de dimension 2. L'espace F étant dégénéré, $F \cap F^\perp$ est non-trivial. De plus, tout supplémentaire F_0 de $F \cap F^\perp$ dans F est non-dégénéré et donc de dimension paire, ainsi $\dim(F \cap F^\perp)$ est paire également. Il s'ensuit que $\dim(F \cap F^\perp) = 2$, finalement $F^\perp \subseteq F$. Notons :

$$F = F^\perp \oplus^\perp F_0$$

où F_0 est non dégénéré. Soit x dans K tel que $x \notin F$. Comme F_0 est non-dégénéré, il existe $v \in F_0$ tel que pour tout $f \in F_0$:

$$w(x, f) = w(v, f)$$

Définissons $y := x - v \in K$. Vu que $x \notin F$ et $v \in F$, il s'ensuit que $y \notin F$ et donc

$$K := \text{Vect}(y) \oplus F$$

Remarquons que y est orthogonal à F_0 . De la même manière soit $y' \in K'$ tel que

$$K' := Vect(y') \oplus F \text{ et } y' \in F_0^\perp$$

On définit alors deux formes linéaires sur F^\perp :

$$\phi : \begin{cases} F^\perp & \longrightarrow \mathbb{Z}/p \\ f & \longmapsto \omega(y, f) \end{cases}$$

$$\phi' : \begin{cases} F^\perp & \longrightarrow \mathbb{Z}/p \\ f & \longmapsto \omega(y', f) \end{cases}$$

L'orthogonal de F^\perp est F et $y, y' \notin F$, nous en déduisons donc que ϕ et ϕ' ne sont pas triviaux. On fait une dichotomie suivant que $\ker(\phi)$ soit égal à $\ker(\phi')$ ou pas.

Si $\ker(\phi) = \ker(\phi')$ et $f_0 \in F^\perp$ n'est pas dans le noyau de ϕ alors $\phi(f_0) \neq 0$ et $\phi'(f_0) \neq 0$.

Comme $K \neq K'$, l'espace $Vect(y, y')$ est de dimension 2. Supposons que $f_0 \in Vect(y, y')$ alors $f_0 = \lambda y + \lambda' y'$, comme $f_0 \notin Vect(y)$ et $f_0 \notin Vect(y')$, λ et λ' ne sont nuls ni l'un ni l'autre. Cela implique donc que $y' \in Vect(y) \oplus F = K$ ce qui est impossible. Ainsi $Vect(y, y', f_0)$ est de dimension 3. Il s'ensuit :

$$K_0 := Vect(y, y', f_0) \overset{\perp}{\oplus} F_0$$

est un hyperplan de V (la somme est orthogonale car y, y' et f_0 sont orthogonaux à F_0). Clairement :

$$K \cap K_0 = Vect(y, f_0) \overset{\perp}{\oplus} F_0 \text{ et } K' \cap K_0 = Vect(y', f_0) \overset{\perp}{\oplus} F_0$$

Comme $Vect(y, f_0)$, $Vect(y', f_0)$ et F_0 sont non-dégénérés et les sommes orthogonales, les deux espaces $K \cap K_0$ et $K' \cap K_0$ sont non-dégénérés.

Supposons que $\ker(\phi) \neq \ker(\phi')$ alors on peut trouver $f' \in \ker(\phi)$ qui n'est pas dans $\ker(\phi')$ et $f \in \ker(\phi')$ qui n'est pas dans $\ker(\phi)$. On définit $f_0 := f - f' \neq 0$. Comme dans le cas précédent :

$$K_0 := Vect(y, y', f_0) \overset{\perp}{\oplus} F_0$$

est un hyperplan de V . Clairement :

$$K \cap K_0 = Vect(y, f_0) \overset{\perp}{\oplus} F_0 \text{ et } K' \cap K_0 = Vect(y', f_0) \overset{\perp}{\oplus} F_0$$

De plus $\omega(y, f_0) = \omega(y, f) = \phi(f) \neq 0$ ainsi $Vect(y, f_0)$ est non-dégénéré. Comme $\omega(y', f_0) = -\omega(y', f') = -\phi'(f') \neq 0$, $Vect(y', f_0)$ est non-dégénéré. Puisque F_0 n'est pas dégénéré et que les sommes sont orthogonales, les deux espaces $K \cap K_0$ et $K' \cap K_0$ sont non-dégénérés. ■

On en conclut :

Corollaire 8

Soient $g \geq 2$ et Σ_g une surface de Riemann fermée de genre g . Le lieu orbifold de $\chi^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$ a p composantes connexes chacune étant une fibre au-dessus de l'invariant d'Euler et sa dimension est $2(g-1)(p-1)$.

Démonstration : Montrons que les fibres au-dessus de l'invariant d'Euler du lieu orbifold de $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$ sont connexes.

Soient $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ deux classes de conjugaison dans la variété des caractères $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$ avec un même invariant d'Euler $\xi^k I_p$. Soient $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ deux morphismes non-triviaux de $Hom(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle)$ tels que $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho \in \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i})$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho' \in \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'^i})}$.

Soient $K := \ker(\bar{\rho})$ et $K' := \ker(\bar{\rho}')$.

Invariant d'Euler trivial : $k = 0$

- Si $K = K'$, alors $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ sont dans une même composante $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i})$ au-dessus d'un invariant d'Euler identique. Il existe donc un chemin reliant ces deux représentations par le corollaire 7. Ainsi $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ appartiennent à une même composante connexe du lieu orbifold $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$.
- Si $K \cap K'$ est dégénéré, la proposition 25 stipule que l'on peut trouver $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho_0 \in \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'^i})} \cap e^{-1}(I_p)$.

Vu que $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}) \cap e^{-1}(I_p)$ et $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'^i})} \cap e^{-1}(I_p)$ sont chacun connexe par le corollaire 7, il s'ensuit que $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ appartiennent tous les deux à une même composante connexe du lieu orbifold $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$.

- Si $K \cap K'$ est non-dégénéré alors il existe K_0 tels que $K \cap K_0$ et $K' \cap K_0$ soient dégénérés par le lemme 13. Soit $\bar{\rho}_0$ un morphisme de groupes $Hom(\Gamma, \langle \overline{M_c} \rangle)$ dont le noyau est K_0 . Soit $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho_0$ un élément de $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}_0}^i}) \cap e^{-1}(I_p)$.

En appliquant le cas dégénéré, on sait que $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho_0$ d'une part, et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho_0$ d'autre part, appartiennent à une même composante connexe du lieu singulier de la variété $\chi^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$. En particulier, $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ appartiennent à une même composante connexe de $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$.

Dans tous les cas, $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ sont dans une même composante connexe du lieu orbifold $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$ tant qu'ils vérifient $e(\rho) = I_p = e(\rho')$. La fibre de $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$ au-dessus de I_p est donc connexe.

Invariant d'Euler non-trivial : $k \neq 0$

- Si $K = K'$, alors $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ sont dans une même composante $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i})$ au-dessus d'un invariant d'Euler identique. Il existe donc un chemin reliant ces deux représentations par le corollaire 7. Ainsi $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ appartiennent à une même composante connexe du lieu orbifold $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$.
- Si $K \cap K'$ est non-dégénéré, la proposition 25 stipule que l'on peut trouver $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho_0 \in \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}) \cap \varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'}}^i) \cap e^{-1}(\xi^k I_p)$.

Vu que $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}}^i}) \cap e^{-1}(\xi^k I_p)$ et $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}'}}^i) \cap e^{-1}(\xi^k I_p)$ sont chacun connexe par le corollaire 7, il s'ensuit que $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ appartiennent tous les deux à une même composante connexe du lieu orbifold $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$.

- Si $K \cap K'$ est dégénéré alors il existe K_0 tels que $K \cap K_0$ et $K' \cap K_0$ soient non-dégénérés par le lemme 13. Soit $\bar{\rho}_0$ un morphisme de groupes $Hom(\Gamma, \langle \bar{M}_c \rangle)$ dont le noyau est K_0 . Soit $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho_0$ un élément de $\varphi(\overline{\mathcal{H}_{\bar{\rho}_0}^i}) \cap e^{-1}(\xi^k I_p)$.

En appliquant le cas non-dégénéré, on sait que $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho_0$ d'une part, et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho_0$ d'autre part, appartiennent à une même composante connexe du lieu orbifold $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$. En particulier, les classes de conjugaison $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ sont dans une même composante connexe de $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$.

Dans tous les cas, $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho$ et $PSL(p, \mathbb{C}) \cdot \rho'$ sont dans une même composante connexe du lieu orbifold $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$ tant qu'ils vérifient $e(\rho) = \xi^k I_p = e(\rho')$. La fibre de $\chi_{sing}^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$ au-dessus de $\xi^k I_p$ est donc connexe.

L'affirmation sur la dimension se déduit (comme dans le cas du groupe libre) du théorème 2.4 et du fait que la dimension de $\overline{D}^{2(g-1)}$ est $2(g-1)(p-1)$. ■

Le p -rang de $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$ est $2g$, en combinant ce corollaire au théorème 2.3, nous obtenons une description précise du lieu orbifold de la variété des caractères $\chi^i(\pi_1(\Sigma_g), PSL(p, \mathbb{C}))$.

2.4.3 Le point de vue algébrique pour les groupes libres

Ici Γ est un groupe libre de rang $l \geq 2$. Dans ce que nous avons fait jusqu'ici nous avons étudié le lieu orbifold sous le point de vue de la topologie transcendantale. Nous choisissons maintenant de voir cela avec la topologie de Zariski.

Remarquons que les correspondances obtenues jusqu'ici sont algébriques puisqu'elles viennent de l'inclusion de $\overline{D} \times \langle \overline{M}_c \rangle$ dans $PSL(p, \mathbb{C})$ et d'un morphisme de restriction. En particulier, pour tout morphisme non-trivial $\bar{\rho}$ de $Hom(\Gamma, \langle \overline{M}_c \rangle)$, en définissant $K := \ker(\bar{\rho})$, la correspondance entre :

$$\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i \text{ et } Hom(K, \overline{D})^{\langle \overline{M}_c \rangle} / \langle \overline{M}_c \rangle_{but} - \{[1]\}$$

est un isomorphisme de variétés algébriques.

Lemme 14

Soit $s \geq 1$ un entier. Si $\langle \overline{M}_c \rangle$ agit par équiconjugaison sur \overline{D}^s alors :

$$(\overline{D}^s - \{(1, \dots, 1)\}) / \langle \overline{M}_c \rangle$$

est une variété algébrique irréductible.

Démonstration : L'ensemble \overline{D} est irréductible car c'est un groupe algébrique sur les complexes qui est connexe pour la topologie transcendantale. Ainsi :

$$\overline{D}^s \text{ est irréductible}$$

On remarque que $\overline{D}^s - \{(1, \dots, 1)\}$ est un ouvert de \overline{D}^s pour la topologie de Zariski, il est donc irréductible également.

Finalement, puisque $\langle \overline{M}_c \rangle$ est fini, $(\overline{D}^s - \{(1, \dots, 1)\}) / \langle \overline{M}_c \rangle$ est une variété algébrique bien définie. La projection :

$$\overline{D}^s - \{(1, \dots, 1)\} \rightarrow (\overline{D}^s - \{(1, \dots, 1)\}) / \langle \overline{M}_c \rangle$$

est algébrique. Puisqu'elle est surjective et que $\overline{D}^s - \{(1, \dots, 1)\}$ est irréductible, le quotient est irréductible. ■

La décomposition donnée précédemment de $\chi_{sing}^i(\Gamma, PSL(p, \mathbb{C}))$ comme réunion de composantes a un sens algébrique :

Proposition 26

Soit Γ un groupe libre de rang $l \geq 2$. Soit $\bar{\rho}$ un morphisme de groupes non-trivial de $Hom(\Gamma, \overline{M}_c)$ alors $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i)$ est irréductible. De plus, les composantes irréductibles du lieu orbifold sont exactement les composantes $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i)$.

Démonstration : Le premier point est purement topologique. Soit F_1 et F_2 deux fermés de Zariski de $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i)$ tels que :

$$\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i) = F_1 \cup F_2$$

Alors :

$$\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i = \varphi_{|\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i}^{-1}(F_1 \cup F_2)$$

Comme $\varphi_{|\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i}$ est injectif par la proposition 15 et surjective sur $\varphi(\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i)$ par définition :

$$\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i = \varphi_{|\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i}^{-1}(F_1) \cup \varphi_{|\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i}^{-1}(F_2)$$

Comme φ est algébrique, elle est continue pour la topologie de Zariski, ainsi, nous avons décomposé $\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$ comme une union de fermés de Zariski. Puisque $\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$ est algébriquement isomorphe à :

$$\left(\overline{D}^s - \{(1, \dots, 1)\} \right) / \langle \overline{M}_c \rangle$$

où $s \geq 1$ et que ce dernier espace est irréductible grâce au lemme 12, la décomposition est nécessairement triviale, i.e. un des fermés est vide et l'autre $\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$. Quitte à échanger les rôles de F_1 et F_2 , on peut supposer que :

$$\varphi_{|\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i}^{-1}(F_1) = \emptyset \text{ et } \varphi_{|\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i}^{-1}(F_2) = \overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$$

L'application $\varphi_{|\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i}$ étant surjective sur $\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$, pour tout X contenu dans $\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i$:

$$\varphi_{|\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i} \left(\varphi_{|\overline{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}^i}^{-1}(X) \right) = X$$

ainsi :

$$F_1 = \varphi_{|\overline{\mathcal{H}_p^i}|}(\emptyset) = \emptyset \text{ et } F_2 = \varphi_{|\overline{\mathcal{H}_p^i}|}(\overline{\mathcal{H}_p^i})$$

Toute décomposition de $\varphi_{|\overline{\mathcal{H}_p^i}|}(\overline{\mathcal{H}_p^i})$ comme réunion de fermés de Zariski doit être triviale, ainsi $\varphi_{|\overline{\mathcal{H}_p^i}|}(\overline{\mathcal{H}_p^i})$ est irréductible par définition.

Finalement le lieu orbifold est réunion de $\frac{p^i-1}{p-1}$ composantes (théorème 2.3), chacune est irréductible et aucune n'est contenue l'une dans l'autre. Par unicité de la décomposition d'un espace topologique en une réunion de composante irréductible, les composantes sont les composantes irréductibles du lieu orbifold. ■

Pour généraliser un peu, si l'on restreint le groupe de Lie $PSL(p, \mathbb{C})$ à un de ses sous-groupes maximaux (e.g. $K := PSU(p, \mathbb{C})$), on peut constater que les résultats énoncés ci-dessus restent vrais. En particulier, la variété des caractères $Hom^i(\Gamma, K)/K$ admet une décomposition similaire pour son lieu singulier (essentiellement car K contient des sous-groupes exceptionnels de centralisateurs isomorphes à $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ et \mathbb{Z}/p).

Chapitre 3

Centralisateurs des irréductibles dans $PSL(n, \mathbb{C})$

3.1 Résultats

Dans ce chapitre on se propose de généraliser l'approche développée dans la section 2.2. Il s'agit de classifier les centralisateurs des sous-groupes irréductibles de $PSL(n, \mathbb{C})$.

Dans la section 3.2, on montre la chose suivante (voir théorème 3.1 et corollaire 9) :

Résultat 7 (*commutativité, exposant et ordre*)

Soient $n \geq 1$ et \bar{H} un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$ alors le centralisateur de \bar{H} est abélien, d'exposant divisant n et d'ordre divisant n^2 .

Des généralisations sont données en ce qui concerne les centralisateurs de sous-groupes irréductibles de quotients partiels de $SL(n, \mathbb{C})$.

Dans la section 3.3, on remarque que les conditions nécessaires ci-dessus ne sont pas suffisantes pour être centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$, autrement dit, on met en évidence un groupe abélien d'exposant divisant n et d'ordre divisant n^2 qui n'est isomorphe à aucun centralisateur de sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$.

Après avoir défini la notion de groupe n -compatible dans la sous-section 3.3.1, nous montrons qu'un groupe A est n -compatible si et seulement s'il

existe un groupe abélien B d'ordre n tel que A soit isomorphe à un sous-groupe de $B \times B$ (cf proposition 35). On montre ensuite le théorème 3.3 :

Résultat 8 (Théorème de caractérisation)

Soient n un entier ≥ 1 et A un groupe abélien fini. Il existe un sous-groupe irréductible $\overline{H} \leq PSL(n, \mathbb{C})$ tel que A soit isomorphe au centralisateur de \overline{H} dans $PSL(n, \mathbb{C})$ si et seulement si A est n -compatible.

Autrement dit ce théorème classe les classes d'isomorphismes de centralisateurs de groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$. Une fois de plus, on généralise quelque peu le résultat aux centralisateurs de sous-groupes irréductibles de quotients partiels de $SL(n, \mathbb{C})$. On donne notamment une caractérisation des groupes d'isotropies de la variété des caractères dans la proposition 40.

Dans la section 3.4, on cherche à déterminer les classes de conjugaisons de centralisateurs de groupes irréductibles de $PSL(n, \mathbb{C})$. On commence par définir la notion de n -module alterné dans la sous-section 3.4.1. On montre ensuite comment associer de manière univoque un n -module alterné à un centralisateur de sous-groupe irréductible (cf proposition 46). La correspondance est alors injective (proposition 47).

Il est pour l'instant difficile de caractériser les n -modules alternés issus d'un centralisateur de sous-groupe irréductible (cf questions 1, 2 et 3).

On montre toutefois que si n est sans facteur carré alors on peut classifier les classes de conjugaisons des centralisateurs des sous-groupes irréductibles de $PSL(n, \mathbb{C})$ (cf corollaire 16) :

Résultat 9 (Le cas sans facteur carré)

Soit n un entier ≥ 1 . L'ensemble des centralisateurs de sous-groupes irréductibles de $PSL(n, \mathbb{C})$ modulo conjugaison est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes n -compatibles.

En particulier, on conjecture (cf question 4) qu'il est possible d'obtenir, quand n est sans facteur carré, des résultats analogues à ceux obtenus au chapitre 2 dans le cas n premier en ce qui concerne le lieu singulier de la variété des caractères.

Dans le cas général, on ne sait pas donner une caractérisation intrinsèque des n -modules alternés issus d'un centralisateur de sous-groupe irréductible. Toutefois si l'on s'intéresse uniquement aux groupes n -compatibles saturés (i.e. de cardinal n^2) on obtient le résultat suivant (cf proposition 48) :

Résultat 10 (Sur les groupes n -compatibles saturés)

Soient $n \geq 1$ et \bar{H} un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le groupe \bar{H} est abélien.
2. Le sous-groupe \bar{H} de $PSL(n, \mathbb{C})$ est son propre centralisateur.
3. Le groupe $Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(\bar{H})$ est saturé.
4. Le sous-groupe $Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(\bar{H})$ de $PSL(n, \mathbb{C})$ est irréductible.

Si l'une de ces assertions est vérifiée alors à conjugaison près, le sous-groupe $Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(\bar{H})$ est l'unique sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$ dont le centralisateur est isomorphe à $Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(\bar{H})$.

On conjecture que les groupes n -compatibles saturés jouent un rôle analogue à celui de $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ dans le théorème 2.1 du chapitre 2 (voir la question 3).

3.2 Quelques propriétés sur les centralisateurs

Dans cette section, on se propose de démontrer quelques résultats sur les centralisateurs des sous-groupes irréductibles des quotients de $SL(n, \mathbb{C})$ (et pas seulement de $PSL(n, \mathbb{C})$). On rappelle que, en utilisant le lemme de Schur, le centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ est le centre de $SL(n, \mathbb{C})$.

Parmi les propriétés que nous allons voir, nous démontrerons que les centralisateurs des sous-groupes irréductibles de $SL(n, \mathbb{C})$ sont abéliens. De plus, on peut borner leur exposant et leur cardinal. Tout comme au chapitre 2, il sera parfois plus commode, pour les calculs, de considérer $SL(n, \mathbb{C})$ comme un sous-groupe des automorphismes linéaires du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}/n}$ dont la base canonique (e_0, \dots, e_{n-1}) sera indexée par \mathbb{Z}/n .

Le lemme suivant sera central dans la suite. En quelques mots, si G est un groupe quelconque et N est un sous-groupe central de G , il permet de faire un lien entre le centralisateur d'un sous-groupe de G et le centralisateur de son projeté dans G/N .

Lemme 15

Soient G un groupe et N un sous-groupe du centre $Z(G)$ de G . On note $\pi : G \rightarrow G/N$ l'application quotient.

Si \bar{H} est un sous-groupe de G/N , on lui associe :

$$H := \pi^{-1}(\bar{H}), Z_N(H) := Z_{G/N}(\bar{H}) \text{ et } U_N(H) := \pi^{-1}(Z_N(H))$$

Alors l'application :

$$\phi_{N,H} : \begin{cases} U_N(H) & \longrightarrow & Mor(H, N) \\ u & \longmapsto & (h \mapsto [u, h]) \end{cases}$$

est bien définie, c'est, de plus, un morphisme de groupes dont le noyau est $Z_G(H)$ le centralisateur de H dans G .

Démonstration : Pour montrer que $\phi_{N,H}$ est bien définie, il suffit de montrer que pour tout $u \in U_N(H)$, l'application de H dans G définie par $h \mapsto [u, h]$ est un morphisme de groupes à valeurs dans N .

Comme π est un morphisme de groupes, $\pi([u, h]) = [\pi(u), \pi(h)]$. De plus $\pi(u)$ commute avec $\pi(h)$. On en déduit donc que $[u, h] \in \ker(\pi) = N$. Soient $h_1, h_2 \in H$ alors :

$$\begin{aligned} [u, h_1 h_2] &= u h_1 h_2 u^{-1} h_2^{-1} h_1^{-1} \\ &= u h_1 (u^{-1} u) h_2 u^{-1} h_2^{-1} h_1^{-1} \\ &= u h_1 u^{-1} [u, h_2] h_1^{-1} \\ &= u h_1 u^{-1} h_1^{-1} [u, h_2] \text{ car } [u, h_2] \in N \leq Z(G) \\ &= [u, h_1] [u, h_2] \end{aligned}$$

Ainsi $\phi_{N,H}$ est bien à valeurs dans $Mor(H, N)$. Si maintenant l'on choisit $u_1, u_2 \in U_N(H)$ et $h \in H$ alors :

$$\begin{aligned} \phi_{N,H}(u_1 u_2) \cdot h &:= [u_1 u_2, h] \\ &= u_1 u_2 h u_2^{-1} u_1^{-1} h^{-1} \\ &= u_1 u_2 h u_2^{-1} (h^{-1} h) u_1^{-1} h^{-1} \\ &= u_1 \underbrace{[u_2, h]}_{\in N \leq Z(G)} h u_1^{-1} h^{-1} \end{aligned}$$

On peut alors déplacer $[u_2, h]$ qui est central pour obtenir :

$$\begin{aligned}\phi_{N,H}(u_1 u_2) \cdot h &= u_1 h u_1^{-1} h^{-1} [u_2, h] \\ &= [u_1, h] [u_2, h] \\ &= \phi_{N,H}(u_1) \cdot h \phi_{N,H}(u_2) \cdot h\end{aligned}$$

On obtient donc que l'application $\phi_{N,H}$ est un morphisme de groupes. Finalement $u \in \ker(\phi_{N,H})$ si et seulement si $\phi_{N,H}(u)$ est trivial, si et seulement si pour tout $h \in H$ on a $[u, h]$ trivial si et seulement si $u \in Z_G(H)$. ■

Nous allons maintenant définir quelques objets nécessaires pour comprendre les centralisateurs de groupes irréductibles de quotients de $SL(n, \mathbb{C})$. Soient $n \geq 1$ et d divisant n . Une fois que n est donné, nous noterons toujours ξ le nombre complexe $e^{\frac{2\sqrt{-1}\pi}{n}}$ qui est une racine primitive n -ème de l'unité. Nous définissons alors la projection :

$$\pi_d : SL(n, \mathbb{C}) \rightarrow SL(n, \mathbb{C}) / \langle \xi^{\frac{n}{d}} I_n \rangle$$

Remarquons que tout quotient fini de $SL(n, \mathbb{C})$ est un $\pi_d(SL(n, \mathbb{C}))$ pour d divisant n . En particulier, $PSL(n, \mathbb{C}) = \pi_n(SL(n, \mathbb{C}))$. Comme dans le chapitre 2, nous préférons toujours travailler dans $SL(n, \mathbb{C})$ plutôt que dans ses quotients afin de pouvoir exploiter des propriétés d'algèbre linéaire.

Si H est un sous-groupe de $SL(n, \mathbb{C})$ nous définissons son **d -centralisateur** $Z_d(H)$ par $Z_d(H) := Z_{\pi_d(SL(n, \mathbb{C}))}(\pi_d(H)) \leq \pi_d(SL(n, \mathbb{C}))$.

Si \bar{H} est un sous-groupe irréductible de $\pi_d(SL(n, \mathbb{C}))$ et $H := \pi_d^{-1}(\bar{H})$ alors H est un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$. De plus, le projeté via π_d de $\pi_d^{-1}(\bar{H})$ est \bar{H} . De telle sorte que $Z_{\pi_d(SL(n, \mathbb{C}))}(\bar{H}) = Z_d(H)$.

Ainsi, on voit qu'étudier les d -centralisateurs des groupes irréductibles de $SL(n, \mathbb{C})$ ou les centralisateurs des groupes irréductibles de $\pi_d(SL(n, \mathbb{C}))$ est rigoureusement équivalent. Comme nous l'avons rappelé, nous travaillerons plutôt dans $SL(n, \mathbb{C})$. On définit donc également, si H est un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$, le **d -centralisateur étendu** $U_d(H)$ de H par :

$$U_d(H) := \pi_d^{-1}(Z_d(H))$$

Par la définition directe de $U_d(H)$:

$$U_d(H) = \{g \in SL(n, \mathbb{C}) \mid \forall h \in H, \exists k \in \mathbb{Z}/d \text{ tel que } [g, h] = \xi^{\frac{n}{d}k} I_n\}$$

De plus, si l'on prend $n \geq 1$, d divisant n et H un sous-groupe de $SL(n, \mathbb{C})$. En appliquant le lemme 15 on peut définir un morphisme de groupes :

$$\phi_d : \left\{ \begin{array}{l} U_d(H) \longrightarrow Mor(H, \langle \xi^{\frac{n}{d}} I_n \rangle) \\ u \longmapsto (h \mapsto [u, h]) \end{array} \right.$$

dont le noyau est le centralisateur de H dans $SL(n, \mathbb{C})$. On vérifiera que si d divise d' divisant n alors :

$$U_d(H) \triangleleft U_{d'}(H) \text{ et pour tout } u \in U_d(H), \text{ on a } \phi_d(u) = \phi_{d'}(u)$$

Dans la suite, nous utiliserons les centralisateurs étendus et les ϕ_d associés pour comprendre les centralisateurs.

3.2.1 Commutativité et exposant

La proposition qui suit va permettre de comprendre immédiatement le cas des n -centralisateurs de sous-groupes irréductibles.

Proposition 27

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$. Alors le n -centralisateur $Z_n(H)$ de H est abélien d'exposant divisant n .

Démonstration : Suivant le lemme 15, on définit :

$$\phi_n : \left\{ \begin{array}{l} U_n(H) \longrightarrow Mor(H, \langle \xi I_n \rangle) \\ u \longmapsto (h \mapsto [u, h]) \end{array} \right.$$

Le noyau de ce morphisme de groupes est alors $Z_{SL(n, \mathbb{C})}(H)$ le centralisateur de H dans $SL(n, \mathbb{C})$. Le groupe H étant irréductible, le lemme de Schur implique que $Z_{SL(n, \mathbb{C})}(H) = Z(SL(n, \mathbb{C})) = \langle \xi I_n \rangle$.

Il s'ensuit :

$$U_n(H) / \ker(\phi_n) = U_n(H) / \langle \xi I_n \rangle = \pi_n^{-1}(Z_n(H)) / \langle \xi I_n \rangle \simeq Z_n(H)$$

D'autre part, par passage au quotient :

$$U_n(H) / \ker(\phi_n) \text{ s'identifie à un sous-groupe de } Mor(H, \langle \xi I_n \rangle)$$

Ainsi, $Z_n(H)$ est isomorphe à un sous-groupe de $Mor(H, \langle \xi I_n \rangle)$. Comme ce groupe est abélien d'exposant divisant n , cela implique que $Z_n(H)$ est également abélien d'exposant divisant n . ■

Nous verrons, à la fin de cette sous-section que ce résultat se généralise aux d -centralisateurs pour d divisant n . Avant de faire cela, nous devons diagonaliser les éléments de $U_n(H)$. Cette proposition est une généralisation de la proposition 5.

Proposition 28

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$. Si $u \in U_n(H)$ et $\pi_n(u)$ est d'ordre d dans $Z_n(H)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que :

$$u \text{ soit conjuguée à } \lambda \begin{pmatrix} I_{\frac{n}{d}} & & & \\ & \xi^{\frac{n}{d}} I_{\frac{n}{d}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{\frac{n}{d}(d-1)} I_{\frac{n}{d}} \end{pmatrix}$$

De plus :

$$\lambda \in \begin{cases} \langle \xi I_n \rangle & \text{si } d \text{ est impair} \\ \langle \xi I_n \rangle & \text{si } d \text{ est pair et } n/d \text{ pair} \\ \sqrt{\xi^{-\frac{n(d-1)}{d}}} \langle \xi I_n \rangle & \text{si } d \text{ est pair et } n/d \text{ impair} \end{cases}$$

Démonstration : Commençons par remarquer que $\pi_n(H)$ est irréductible (car H l'est) donc $Z_n(H)$ est fini et donc $U_n(H)$ est fini également. Ainsi, u est nécessairement d'ordre fini. En particulier, il est diagonalisable.

Pour tout $h \in H$, il existe $s_h \in \mathbb{Z}/n$ tel que :

$$[h, u] = \xi^{s_h} I_n$$

Vu que pour $h_1, h_2 \in H$, nous avons :

$$\begin{aligned} \xi^{s_{h_1 h_2}} I_n &= [h_1 h_2, u] \\ &= h_1 h_2 u h_2^{-1} h_1^{-1} u^{-1} \\ &= h_1 [h_2, u] u h_1^{-1} u^{-1} \\ &= [h_1, u] [h_2, u] \\ &= \xi^{s_{h_1}} \xi^{s_{h_2}} I_n \end{aligned}$$

On en déduit que l'application :

$$s : \begin{cases} H & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n \\ h & \longmapsto & s_h \end{cases} \text{ est un morphisme de groupes.}$$

Notons alors ξ^t un générateur du groupe cyclique $s(H)$.

Le lemme 6 implique que H agit sur le spectre $Sp(u)$ de u (i.e. l'ensemble de ses valeurs propres) de la façon suivante :

$$\text{si } h \in H \text{ et } \mu \in Sp(u) \text{ alors } h.\mu := \xi^{sh} \mu$$

Soit X une orbite dans $Sp(u)$ pour l'action de H . Il est alors évident que l'espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}/n}$ suivant est stable par H :

$$\bigoplus_{\mu \in X} E_{\mu}(u)$$

Comme H est irréductible, cet espace (non-trivial) est l'espace tout entier $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}/n}$. En particulier, l'action de H sur $Sp(u)$ est transitive et tous les espaces propres associés ont une même dimension $v > 0$. Remarquant que H agit via le morphisme s dont l'image est engendrée par ξ^t , on peut affirmer (en prenant λ une valeur propre quelconque de u) que :

$$\begin{aligned} Sp(u) &= \{(\xi^t)^k \lambda \mid k \geq 0\} \\ &= \lambda \langle \xi^t \rangle \end{aligned}$$

Le spectre de u est donc bien compris et puisque u est diagonalisable :

$$u \text{ est conjuguée à } \lambda \begin{pmatrix} I_v & & & \\ & \xi^t I_v & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{t(\frac{n}{t}-1)} I_v \end{pmatrix}$$

En utilisant les dimensions, $n = |Sp(u)| \times v = \frac{n}{t}v$, ainsi $t = v$. En rajoutant la condition que $\pi_n(u)$ est d'ordre d , cela implique que $t = \frac{n}{d}k$ avec $0 < k < d$ premier avec d . Ainsi :

$$u \text{ est conjuguée à } \lambda \begin{pmatrix} I_{\frac{n}{d}} & & & \\ & \xi^{\frac{n}{d}} I_{\frac{n}{d}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{\frac{n}{d}(d-1)} I_{\frac{n}{d}} \end{pmatrix}$$

La condition sur λ est alors simplement donnée par le fait que u doit être unimodulaire.

$$\begin{aligned} 1 &= \det(u) \\ &= \lambda^n \xi^{\left(\frac{n}{d}\right)^2 \frac{d(d-1)}{2}} \\ &= \lambda^n \xi^{\frac{n}{d} \frac{n(d-1)}{2}} \end{aligned}$$

Si d est impair alors 2 divise $d - 1$ et on obtient alors $\lambda^n = 1$.

Si d est pair et 2 divise $\frac{n}{d}$ alors $\lambda^n = \xi^{-\frac{n}{d} \frac{n(d-1)}{2}} = (\xi^n)^{\frac{n}{2d}(d-1)} = 1$.

Si d est pair et 2 ne divise pas $\frac{n}{d}$ alors $\lambda^n = \xi^{-\frac{n}{d} \frac{n(d-1)}{2}}$. Il vient donc

$$\lambda \equiv \xi^{-\frac{n(d-1)}{2d}} \equiv \sqrt{\xi^{-\frac{n(d-1)}{d}}} \pmod{\langle \xi I_n \rangle}. \quad \blacksquare$$

On remarquera, comme dans le chapitre 2 qu'il faut avoir une certaine précaution avec les matrices que l'on manipule car elles ne sont pas forcément de déterminant 1. On pourrait choisir de travailler dans $PGL(n, \mathbb{C})$ mais cette approche ne permettant pas de récupérer tous les quotients de $SL(n, \mathbb{C})$ nous resterons dans $SL(n, \mathbb{C})$.

Contrairement à ce que l'on obtient dans la proposition 5, les matrices ne sont pas nécessairement diagonalisables à valeurs propres simples. Maintenant, on calcule le centralisateur des matrices obtenues dans la proposition 28.

Proposition 29

Soient $n \geq 1$, d divisant n et

$$u := \lambda \begin{pmatrix} I_{\frac{n}{d}} & & & \\ & \xi^{\frac{n}{d}} I_{\frac{n}{d}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{\frac{n}{d}(d-1)} I_{\frac{n}{d}} \end{pmatrix}$$

avec λ défini comme dans la proposition 28 tel que $\det(u) = 1$. Soit :

$$M := \lambda \begin{pmatrix} & & & I_{\frac{n}{d}} \\ I_{\frac{n}{d}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & I_{\frac{n}{d}} \end{pmatrix}$$

Alors $U_n(\langle u \rangle) = U_d(\langle u \rangle)$. De plus :

$$U_n(\langle u \rangle) = \left\langle \left(\begin{matrix} GL(n/d, \mathbb{C}) & & \\ & \ddots & \\ & & GL(n/d, \mathbb{C}) \end{matrix} \right), M \right\rangle \cap SL(n, \mathbb{C})$$

Démonstration : Commençons par démontrer que $U_n(\langle u \rangle) = U_d(\langle u \rangle)$. Par les définitions, on a clairement :

$$U_d(\langle u \rangle) \leq U_n(\langle u \rangle)$$

D'autre part si $f \in U_n(\langle u \rangle)$ alors :

$$[f, u] = \xi^l I_n \text{ avec } l \in \mathbb{Z}/n$$

En vertu du lemme 15, on a :

$$[f, u^d] = [f, u]^d = \xi^{ld} I_n$$

Comme u^d est une matrice scalaire, $[f, u^d] = I_n$. Ainsi ld est congru à 0 modulo n et $l = \frac{n}{d}k$ avec k un entier. Ainsi :

$$[f, u] = \xi^{\frac{n}{d}k} I_n \Rightarrow f \in U_d(\langle u \rangle)$$

Montrons maintenant la seconde partie de la proposition. Soit $f \in U_n(\langle u \rangle) = U_d(\langle u \rangle)$ et k un entier tel que $[f, u] = \xi^{\frac{n}{d}k}$. Commençons par décomposer l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}/n}$ via la base canonique (e_0, \dots, e_{n-1}) . Vu la forme de la matrice u , pour $0 \leq i \leq d-1$, on voit que :

$$F_i := \text{Vect}(e_{\frac{n}{d}i}, e_{\frac{n}{d}(i+1)}, \dots, e_{\frac{n}{d}(i+1)-1}) = E_{\lambda \xi^{\frac{n}{d}i}}(u)$$

La matrice f agit sur ces sous-espaces propres en multipliant la valeur propre associée par $\xi^{\frac{n}{d}k}$. Il vient donc :

$$f(F_i) = F_{i+k}$$

Comme M^k envoie également F_i sur F_{i+k} , nous avons que fM^{-k} fixe globalement chaque F_i :

$$fM^{-k} \in \begin{pmatrix} GL(n/d, \mathbb{C}) & & \\ & \ddots & \\ & & GL(n/d, \mathbb{C}) \end{pmatrix}$$

Réciproquement, il est clair que toute matrice se décomposant en d blocs de taille n/d commute avec u . Un calcul direct montre que :

$$[M^k, u] = \xi^{\frac{n}{d}k}$$

Ainsi toute matrice

$$f \in \left\langle \left(\begin{array}{ccc} GL(n/d, \mathbb{C}) & & \\ & \ddots & \\ & & GL(n/d, \mathbb{C}) \end{array} \right), M \right\rangle$$

vérifie que $[f, u] = \xi^{\frac{n}{d}k}$ pour un certain k . ■

On peut donc trouver une généralisation à la proposition 27 pour les d -centralisateurs.

Théorème 3.1

Soient $n \geq 1$, d divisant n et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$. Le d -centralisateur $Z_d(H)$ de H est alors abélien d'exposant divisant $\text{ppcm}(\frac{n}{d}, d)$.

Démonstration : Soient u et v deux éléments de $U_d(H)$. Notons d_u l'ordre de $\pi_n(u)$. On a :

$$H \leq U_d(\langle u \rangle) \leq \underbrace{U_n(\langle u \rangle)}_{\text{proposition 29}} = U_{d_u}(\langle u \rangle)$$

Comme $\pi_n(u) = \phi_n(u)$ est d'ordre d_u , on peut trouver $h \in H$ tel que :

$$[u, h] = \xi^{\frac{n}{d_u}} I_n$$

D'autre part $u \in U_d(H)$ donc :

$$\xi^{\frac{n}{d_u}} I_n = [u, h] \in \langle \xi^{\frac{n}{d}} I_n \rangle \tag{3.1}$$

Remarquons que $u, v \in U_d(H) \leq U_n(H)$ et que $Z_n(H)$ est abélien par la proposition 27. Ainsi $[u, v] \in \ker(\pi_n) = \langle \xi I_n \rangle$. En particulier, la matrice v est dans $U_n(\langle u \rangle) = U_{d_u}(\langle u \rangle)$ et en particulier, $[u, v] \in \langle \xi^{\frac{n}{d_u}} I_n \rangle$.

Par l'équation 3.1, nous obtenons également $\langle \xi^{\frac{n}{d_u}} I_n \rangle \leq \langle \xi^{\frac{n}{d}} I_n \rangle$. Ainsi :

$$[u, v] \in \langle \xi^{\frac{n}{d}} \rangle \text{ donc } [\pi_d(u), \pi_d(v)] \text{ est trivial.}$$

Il s'ensuit que $Z_d(H) = \pi_d(U_d(H))$ est abélien.

Démontrons maintenant l'assertion sur l'exposant. Si $u \in U_d(H) \leq U_n(H)$ est d'ordre d_u dans $Z_n(H)$ alors, en utilisant la proposition 28 :

$$u \text{ est conjuguée à } \lambda \begin{pmatrix} I_{\frac{n}{d_u}} & & & \\ & \xi^{\frac{n}{d_u}} I_{\frac{n}{d_u}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{\frac{n}{d_u}(d_u-1)} I_{\frac{n}{d_u}} \end{pmatrix}$$

Si d_u est impair ou d_u pair et 2 divise $\frac{n}{d_u}$ alors $\lambda \in \langle \xi I_n \rangle$ et (à conjugaison près), $\pi_d(u)$ est le produit de $\pi_d(\lambda I_n)$ d'ordre divisant $\frac{n}{d}$ et :

$$\pi_d \begin{pmatrix} I_{\frac{n}{d_u}} & & & \\ & \xi^{\frac{n}{d_u}} I_{\frac{n}{d_u}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{\frac{n}{d_u}(d_u-1)} I_{\frac{n}{d_u}} \end{pmatrix} \text{ d'ordre } d_u \text{ divisant } d$$

Comme $\pi_d(\lambda I_n)$ est central, l'ordre du produit divise le plus petit commun multiple des deux et l'ordre de $\pi_d(u)$ divise $\text{ppcm}(\frac{n}{d}, d)$.

Si d_u est pair et 2 ne divise pas $\frac{n}{d_u}$ alors $\lambda \in \sqrt{\xi^{-\frac{n(d_u-1)}{d_u}}} \langle \xi I_n \rangle$. On écrit

$$\lambda = \xi^l \sqrt{\xi^{-\frac{n(d_u-1)}{d_u}}}$$

À conjugaison près, $\pi_d(u)^2$ est le produit de $\pi_d(\xi^{2l} I_n)$ (d'ordre divisant $\frac{n}{d}$) de $\pi_d(\xi^{-\frac{n(d_u-1)}{d_u}} I_n)$ qui est trivial car d_u divise d et de

$$\pi_d \begin{pmatrix} I_{\frac{n}{d_u}} & & & \\ & \xi^{\frac{2n}{d_u}} I_{\frac{n}{d_u}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{\frac{2n}{d_u}(d_u-1)} I_{\frac{n}{d_u}} \end{pmatrix} \text{ d'ordre } \frac{d_u}{2} \text{ divisant } \frac{d}{2}$$

Tous les éléments commutent donc l'ordre de $\pi_d(u)^2$ divise $\text{ppcm}(\frac{n}{d}, \frac{d}{2})$. L'ordre de $\pi_d(u)$ va alors diviser $2\text{ppcm}(\frac{n}{d}, \frac{d}{2})$. Par hypothèse, 2 ne divise pas $\frac{n}{d}$ donc 2 ne divise pas $\frac{n}{d}$, ainsi :

$$2\text{ppcm}(\frac{n}{d}, \frac{d}{2}) = \text{ppcm}(\frac{n}{d}, 2\frac{d}{2}) = \text{ppcm}(\frac{n}{d}, d)$$

Dans tous les cas, on obtient la borne voulue pour l'exposant. ■

On remarquera qu'il faut quand même faire attention au scalaire λ . Nous avons besoin d'en avoir une définition précise pour pouvoir calculer l'exposant. On pourra remarquer que les centralisateurs obtenus au théorème 2.1 du chapitre 2 vérifient cette condition.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à une représentation particulière qui se révélera particulièrement utile dans la suite.

3.2.2 Représentation standard, cardinal des centralisateurs

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ on définit la **représentation standard** de $U_n(H)$ comme l'inclusion naturelle ι_H de $U_n(H)$ dans $SL(n, \mathbb{C})$. On notera également $\chi_H := tr \circ \iota_H$ son caractère. L'intérêt de cette représentation est que son caractère va s'avérer être particulièrement simple à calculer.

Proposition 30

Soient $n \geq 1$, H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ et $u \in U_n(H)$, alors :

$$\chi_H(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \notin \langle \xi I_n \rangle \\ n\xi^k & \text{si } u = \xi^k I_n \text{ où } k \in \mathbb{Z}/n \end{cases}$$

Démonstration : Soit $u \in U_n(H)$, si $u = \xi^k I_n \in \langle \xi I_n \rangle$ alors il est clair que $\chi_H(u) = tr(\iota_H(u)) = tr(\xi^k I_n) = n\xi^k$.

Supposons que u ne soit pas central, alors u est non-trivial dans le groupe $U_n(H)/\langle \xi I_n \rangle$ qui est isomorphe à $Z_n(H)$. Soit $d > 1$ l'ordre de u dans $Z_n(H)$. Par la proposition 28, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$u \text{ soit conjuguée à } \lambda \begin{pmatrix} I_{\frac{n}{d}} & & & \\ & \xi^{\frac{n}{d}} I_{\frac{n}{d}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{\frac{n}{d}(d-1)} I_{\frac{n}{d}} \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\chi_H(u) = \lambda \frac{n}{d} (1 + \xi^{\frac{n}{d}} + \dots + \xi^{\frac{n}{d}(d-1)})$$

Comme $\xi^{\frac{n}{d}}$ est une racine primitive d -ème de l'unité pour $d > 1$, la somme $1 + \xi^{\frac{n}{d}} + \dots + \xi^{\frac{n}{d}(d-1)} = 0$ et donc $\chi_H(u) = 0$. ■

Cette proposition simple sera utilisée à plusieurs reprises. Remarquons que l'on pourra utiliser les résultats de la représentation des groupes finis appliqués au groupe $U_n(H)$.

Corollaire 9

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ alors $|Z_n(H)|$ divise n^2 . De plus :

$Z_n(H)$ est irréductible si et seulement si $|Z_n(H)| = n^2$

Démonstration : Par la théorie de la représentation des groupes finis (cf [Ser77]), si l'on a une représentation $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ d'un groupe fini G et que l'on note $\chi := \text{tr} \circ \rho$ alors on peut définir la norme de χ par :

$$\|\chi\|^2 := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\chi(g^{-1})$$

On sait alors que $\|\chi\|^2$ est un entier naturel et que $\|\chi\|^2 = 1$ si et seulement si la représentation ρ est irréductible.

Appliquons cela à la représentation standard ι_H de $U_n(H)$. On a :

$$\|\chi_H\|^2 = \frac{1}{|U_n(H)|} \sum_{u \in U_n(H)} \chi(u)\chi(u^{-1})$$

En vertu de la proposition 30 cela donne :

$$\begin{aligned} \|\chi_H\|^2 &= \frac{1}{|U_n(H)|} \sum_{k=0}^{n-1} \chi(\xi^k I_n) \chi(\xi^{-k} I_n) \\ &= \frac{1}{|U_n(H)|} \sum_{k=0}^{n-1} n \xi^k n \xi^{-k} \\ &= \frac{1}{|U_n(H)|} \sum_{k=0}^{n-1} n^2 \\ &= \frac{n^3}{|U_n(H)|} \end{aligned}$$

D'après ce que l'on a dit sur la représentation des groupes finis, $|U_n(H)|$ divise n^3 . Comme $|U_n(H)| = n|Z_n(H)|$, on en conclut que le cardinal de $Z_n(H)$ divise n^2 .

De plus $Z_n(H)$ est irréductible si et seulement si $\pi_n^{-1}(Z_n(H)) = U_n(H)$ l'est si et seulement si $|U_n(H)| = n^3$ si et seulement si $|Z_n(H)| = n^2$. ■

Avant de généraliser cela à tous les quotients de $SL(n, \mathbb{C})$ on remarque que la borne est toujours atteinte :

Exemple 4

Soit $n \geq 1$. Rappelons que $\xi = e^{\frac{2\sqrt{-1}\pi}{n}}$. On définit :

$$u := \lambda \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi^{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } M := \lambda M_c$$

où M_c est défini (cf chapitre 2) comme la matrice de permutation associée au cycle $(0, \dots, n-1)$ et $\lambda = 1$ si n impair et $\sqrt{\xi}$ si n est pair.

Le groupe $H := \langle u, M \rangle$ est un sous-groupe fini irréductible d'ordre n^3 de $SL(n, \mathbb{C})$. Son n -centralisateur $Z_n(H)$ est fini de cardinal n^2 .

Démonstration : En appliquant la proposition 29, tout élément de $U_n(\langle u \rangle)$ s'écrit comme le produit d'une matrice diagonale et d'une certaine puissance de M . Avec un peu de calcul, on en déduit que $U_n(\langle M \rangle) \cap U_n(\langle u \rangle) = \langle u, M \rangle = H$. Ainsi, $U_n(H) = H$. En particulier, le centralisateur de H est fini et donc (le groupe H étant complètement réductible) H est irréductible.

On remarque alors que $Z_n(H)$ est engendré par $\pi_n(u)$ et $\pi_n(M)$ qui commutent. Il est alors clair que $Z_n(H)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n$. ■

Si H est le sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ construit dans cet exemple, on voit facilement que pour tout d divisant n , $Z_d(H)$ contient $\pi_d(u)^{\frac{n}{d}}$ qui n'est pas dans le centre de $\pi_d(SL(n, \mathbb{C}))$. Par conséquent, $\pi_d(H)$ est un sous-groupe exceptionnel de $\pi_d(SL(n, \mathbb{C}))$ (il est irréductible car H l'est et son centre n'est pas réduit au centre de $\pi_d(SL(n, \mathbb{C}))$). En particulier :

Corollaire 10

Si $n \geq 2$, tout quotient non-trivial de $SL(n, \mathbb{C})$ contient un sous-groupe exceptionnel i.e., aucun quotient non-trivial de $SL(n, \mathbb{C})$ n'est CI au sens de [Sik12].

On peut facilement généraliser le corollaire 9 aux quotients de $SL(n, \mathbb{C})$:

Corollaire 11

Soient $n \geq 1$, d divisant n et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$, alors le cardinal de $Z_d(H)$ divise $\frac{n^3}{d}$.

Démonstration : On sait que $U_d(H) \leq U_n(H)$. De plus, on a $\pi_d(U_d(H)) = Z_d(H)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 |Z_d(H)| &= |\pi_d(U_d(H))| \\
 &= \frac{|U_d(H)|}{d} \\
 &\text{divise } \frac{|U_n(H)|}{d} && \text{car } U_d(H) \leq U_n(H) \\
 &\text{divise } \frac{n|Z_n(H)|}{d} && \text{car } \pi_n(U_n(H)) = Z_n(H) \\
 &\text{divise } \frac{n^3}{d} && \text{par le corollaire 9}
 \end{aligned}$$

Dans cette démonstration, nous avons utilisé une inclusion, à priori, assez faible : $U_d(H) \leq U_n(H)$. Nous allons voir, avec l'exemple suivant que l'inégalité sur le cardinal ne peut pas être améliorée en général.

Exemple 5

On se propose d'étudier le cas $n := 4$ et $d := 2$. On sait qu'il existe un isomorphisme exceptionnel entre $SL(4, \mathbb{C})$ et $Spin(6, \mathbb{C})$. Ceci fait de $SL(4, \mathbb{C})$ le revêtement universel de $SO(6, \mathbb{C})$. En particulier, on voit que $\pi_2(SL(4, \mathbb{C}))$ s'identifie à $SO(6, \mathbb{C})$. Notons $\pi_2 : SL(4, \mathbb{C}) \rightarrow SO(6, \mathbb{C})$ la projection induite.

Notons $\bar{H} \leq SO(6, \mathbb{C})$, le sous-groupe des matrices diagonales (dans une base orthonormale) de $SO(6, \mathbb{C})$. Alors \bar{H} est un sous-groupe fini, qui est son propre centralisateur dans $SO(6, \mathbb{C})$ et il est de cardinal 32.

Si l'on note $H := \pi_2^{-1}(\bar{H})$ alors $|Z_2(H)| = 32 = \frac{4^3}{2} = \frac{n^3}{d}$.

Démonstration : Voir la proposition 51 du chapitre 4 où le sous-groupe des matrices diagonales de $SO(6, \mathbb{C})$ est noté $SDO(6, \mathbb{C})$. ■

Bien que la borne obtenue au corollaire 11 soit généralement atteinte, nous verrons que l'on peut l'améliorer dans certains cas. Rappelons que si

d est un entier et A un groupe abélien, on note $A_{(d)}$ la d -torsion de A , i.e. l'ensemble des éléments d'ordre divisant d .

Lemme 16

Soient $n \geq 1$, d divisant n et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$, on rappelle que l'on a défini :

$$\phi_n : \begin{cases} U_n(H) & \longrightarrow & Mor(H, \langle \xi I_n \rangle) \\ u & \longmapsto & (h \mapsto [u, h]) \end{cases}$$

alors $U_d(H) = \phi_n^{-1}(\phi_n(U_n(H))_{(d)})$. Via l'identification de la proposition 27, $U_d(H) = \phi_n^{-1}(Z_n(H)_{(d)})$

Démonstration : Soit $u \in U_d(H)$ alors pour tout $h \in H$ on a $\phi_n(u)(h) = [u, h] \in \langle \xi^{\frac{n}{d}} I_n \rangle$ donc $\phi_n(u)(h)$ est d'ordre divisant d . Ainsi $\phi_n(u)$ l'est aussi et donc $U_d(H) \leq \phi_n^{-1}(\phi_n(U_n(H))_{(d)})$.

Réciproquement, si $u \in \phi_n^{-1}(\phi_n(U_n(H))_{(d)})$ alors pour tout $h \in H$, $[u, h] = \phi_n(u)(h) \in \langle \xi^{\frac{n}{d}} \rangle$ et donc $u \in U_d(H)$.

Ainsi on a bien $U_d(H) = \phi_n^{-1}(\phi_n(U_n(H))_{(d)})$. ■

Cela aboutit à la proposition suivante qui résume ce que nous avons obtenu pour les d -centralisateurs en général :

Proposition 31

Soient $n \geq 1$, d divisant n et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$. Alors le cardinal de $Z_d(H)$ divise $\frac{n^3}{d}$. Si, de plus, les entiers d et n/d sont premiers entre eux, alors le cardinal de $Z_d(H)$ divise nd .

Démonstration : Le fait que le cardinal de $Z_d(H)$ divise $\frac{n^3}{d}$ est l'objet du corollaire 11.

Supposons de plus que $pgcd(d, n/d) = 1$. On sait que le cardinal de $Z_n(H)$ divise n^2 par le corollaire 9. Notons $n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ comme produit de nombres premiers. Quitte à échanger les p_i et puisque $pgcd(d, n/d) = 1$, on peut supposer que :

$$d = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s} \text{ et } n/d = p_{s+1}^{a_{s+1}} \dots p_r^{a_r}$$

Vu que $Z_n(H)$ est abélien par la proposition 27 d'ordre divisant n^2 , il existe, pour tout $1 \leq i \leq r$ un unique groupe $S_i \leq Z_n(H)$ d'ordre une puissance de p_i tel que $Z_n(H) = S_1 \times \dots \times S_r$. On voit alors clairement

que $(Z_n(H))_{(d)} = S_1 \times \cdots \times S_s$. De plus, vu que $|Z_n(H)|$ divise n^2 , on en conclut que $|(Z_n(H))_{(d)}|$ divise d^2 . Le lemme 16 stipule que $U_d(H) = \phi_n^{-1}((Z_n(H))_{(d)})$. Ainsi :

$$\begin{aligned} |Z_d(H)| &= |\pi_d(U_d(H))| \\ &= \frac{|U_d(H)|}{d} \\ &= \frac{|\phi_n^{-1}((Z_n(H))_{(d)})|}{d} \\ &= \frac{n|(Z_n(H))_{(d)}|}{d} \\ &\text{divise } \frac{nd^2}{d} = nd \end{aligned}$$

■

Une autre conséquence du résultat sur le caractère de la représentation standard :

Théorème 3.2

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$.

Pour tout sous-groupe A de $Z_n(H)$, $Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(A)) = A$.
En particulier tout sous-groupe de $Z_n(H)$ est centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$.

Démonstration : Notons $B := Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(A))$. L'inclusion $A \leq B$ est évidente.

Comme $\pi_n(H) \leq Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(A)$ on en déduit que $B \leq Z_n(H)$. Ainsi

$$A \leq B \leq Z_n(H)$$

Montrons que $Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(B) = Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(A)$. Comme $A \leq B$, il est clair que $Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(B) \leq Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(A)$. De plus, si z commute avec A alors tout élément de $b \in B := Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(A))$ commute avec z par définition. Ainsi $z \in Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(B)$. Donc on a bien :

$$Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(B) = Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(A) \tag{3.2}$$

Si A_0 (resp. B_0) désigne $\pi_n^{-1}(A)$ (resp. $\pi_n^{-1}(B)$) alors on a $A_0 \leq B_0$, on note alors $Z_1(A_0)$ (resp. $Z_1(B_0)$) le centralisateur de A_0 (resp. B_0) dans

$SL(n, \mathbb{C})$, il vient donc $Z_1(B_0) \leq Z_1(A_0)$. De plus, en appliquant le lemme 15, $[U_n(A_0) : Z_1(A_0)]$ et $[U_n(B_0) : Z_1(B_0)]$ sont finis. De plus :

$$\begin{aligned} U_n(A_0) &= \pi_n^{-1}(Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(A)) && \text{par définition} \\ &= \pi_n^{-1}(Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(B)) && \text{par l'équation 3.2} \\ &= U_n(B_0) && \text{par définition} \end{aligned}$$

Vu que $Z_1(B_0) \leq Z_1(A_0)$:

$$\begin{aligned} [U_n(B_0) : Z_1(B_0)] &= [U_n(A_0) : Z_1(B_0)] \\ &= [U_n(A_0) : Z_1(A_0)][Z_1(A_0) : Z_1(B_0)] \end{aligned}$$

En particulier :

$$[Z_1(A_0) : Z_1(B_0)] < \infty \quad (3.3)$$

On raisonne par l'absurde, supposons que $A \neq B$ alors l'inclusion de A_0 dans B_0 est stricte. Notons ρ_{A_0} (resp. ρ_{B_0}) l'inclusion de A_0 (resp. B_0) dans $SL(n, \mathbb{C})$ de caractère χ_{A_0} (resp. χ_{B_0}).

Comme $A_0 < B_0 \leq \pi_n^{-1}(Z_n(H)) = U_n(H)$ ces représentations sont des représentations restreintes de la représentation standard ι_H dont le caractère a été calculé dans la proposition 30. En particulier, on constate que :

$$\|\xi_{A_0}\|^2 = \frac{n^3}{|A_0|} \text{ et } \|\xi_{B_0}\|^2 = \frac{n^3}{|B_0|}$$

Or $|A_0| < |B_0|$ donc $\|\xi_{A_0}\| > \|\xi_{B_0}\|$. En terme de représentations de groupes finis (cf. [Ser77]), cela signifie qu'il existe un B_0 -module irréductible de $V := \mathbb{C}^{\mathbb{Z}/n}$ qui se décompose en somme non-triviale de sous-modules sous l'action de A_0 . En particulier, cela implique que le centralisateur de la représentation ρ_{B_0} est d'indice infini dans le centralisateur de la représentation ρ_{A_0} . Cela contredit clairement l'assertion 3.3. Par conséquent, nous avons $A = B$ et donc :

$$A = Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(A))$$

Or $Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(A)$ contient $\pi_n(H)$ car A est inclus dans $Z_n(H)$. Comme $\pi_n(H)$ est irréductible, $Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(A)$ l'est aussi et on a donc montré que A est centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$. ■

Dans cette section préliminaire, nous avons pu donner des conditions nécessaires pour être centralisateur d'un sous-groupe irréductible d'un quotient de $SL(n, \mathbb{C})$. Le but de la prochaine section est de donner une condition nécessaire et suffisante pour cela, autrement dit nous allons classifier les centralisateurs des sous-groupes irréductibles de $PSL(n, \mathbb{C})$ à isomorphisme près.

3.3 Le théorème de caractérisation

Nous venons de voir quelques conditions nécessaires pour être centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$. Nous souhaitons donner une condition nécessaire et suffisante sur un groupe abstrait pour qu'il apparaisse comme le centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$.

Soit $n \geq 1$ et A un groupe abélien. On dit que A est n -**compatible** s'il existe un entier f et un $2f$ -uplet d'entiers $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$ tels que les quatre conditions suivantes soient réunies :

- Le groupe A est isomorphe à $\mathbb{Z}/e_f \times \mathbb{Z}/d_f \times \dots \times \mathbb{Z}/e_1 \times \mathbb{Z}/d_1$.
- pour tout $1 \leq i \leq f - 1$, l'entier d_{i+1} divise d_i .
- pour tout $1 \leq i \leq f$, l'entier e_i divise d_i .
- le produit des $d_i : d_f \dots d_1$ divise n .

Ni f , ni le $2f$ -uplet $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$ n'a de raison d'être unique. Un $2f$ -uplet $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$ vérifiant ces conditions ci-dessus est appelé suite de n -**compatibilité** pour A .

Dans la première sous-section, nous démontrerons quelques propositions sur les groupes n -compatibles. En particulier, on montrera qu'un groupe A est n -compatible si et seulement s'il existe un groupe B d'ordre n tel que $A \leq B \times B$. Le but de cette sous-section est, plus généralement, de montrer quelques propositions nécessaires à l'établissement du théorème de caractérisation. L'énoncé du théorème de caractérisation est alors assez simple :

Théorème 3.3 (Théorème de caractérisation)

Soient n un entier ≥ 1 et A un groupe abélien fini. Il existe un sous-groupe irréductible $\overline{H} \leq PSL(n, \mathbb{C})$ tel que A soit isomorphe au centralisateur de \overline{H} dans $PSL(n, \mathbb{C})$ si et seulement si A est n -compatible.

Notons en particulier qu'il ne suffit pas à un groupe A d'être abélien d'exposant divisant n et d'ordre divisant n^2 pour être centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$:

Contre-exemple 1

Définissons le groupe abélien $A := \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$. Alors A est abélien d'ordre 4^2 , d'exposant 4, pourtant, A n'est pas 4-compatible. En vertu du théorème de caractérisation ci-dessus, le groupe A n'est pas centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(4, \mathbb{C})$.

Démonstration : On raisonne par l'absurde, si A est 4-compatible alors on peut trouver $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$ une suite de 4-compatibilité pour A .

Comme $d_f \dots d_1$ divise 4, on voit que (quitte à enlever les $d_i = 1$ qui ne changent rien) l'on peut supposer $f = 1$ ou 2. Si $f = 1$ alors $A = \mathbb{Z}/e_1 \times \mathbb{Z}/d_1$ et alors le rang de A est plus petit que 2, ce qui contredit le fait que le rang de A soit clairement 3.

Ainsi, $f = 2$ et $A = \mathbb{Z}/e_2 \times \mathbb{Z}/d_2 \times \mathbb{Z}/e_1 \times \mathbb{Z}/d_1$ avec $1 < d_2 \leq d_1$. Vu que $d_2 d_1 = 4$ on a donc $d_2 = d_1 = 2$. Ainsi (comme e_i divise d_i pour $i = 1, 2$) l'exposant de A est égal à 2, ce qui contredit le fait que l'exposant de A soit clairement 4. ■

La dernière sous-section sera consacrée à ce que l'on peut en déduire sur les centralisateurs des sous-groupes irréductibles de $\pi_d(SL(n, \mathbb{C}))$ pour d divisant n et pas seulement $PSL(n, \mathbb{C})$. On donnera en particulier une conséquence sur la variété des caractères à valeurs dans $\pi_d(SL(n, \mathbb{C}))$.

3.3.1 Sur la notion de groupe n -compatible

Dans cette sous-section nous utiliserons la notion de type d'un groupe abélien fini. Rappelons que si A est un groupe abélien fini, la classification de ces groupes stipule qu'il existe un unique entier r et un r -uplet d'entiers (d_r, \dots, d_1) tels que A soit isomorphe à $\mathbb{Z}/d_r \times \dots \times \mathbb{Z}/d_1$ et pour $1 \leq i \leq r-1$, l'entier d_{i+1} divise d_i . Un tel r -uplet est alors appelé le **type** de A et r est, par définition, son **rang**.

On rappelle sans démonstration que le rang d'un groupe abélien A peut également se caractériser de la manière suivante, c'est le cardinal minimal d'une partie génératrice pour A .

Finalement si p est un nombre premier et A un groupe abélien, on appelle p -**composante** de A le sous-groupe de A constitué des éléments dont l'ordre est une puissance de p . Si $S_p(A)$ désigne la p -composante de A pour tout nombre premier p , on pourra vérifier que A se décompose comme somme directe de ses p -composantes. On commence avec une proposition tout à fait élémentaire :

Proposition 32

- Soit A un groupe abélien fini et n un entier. Alors :*
- *Le groupe A est $|A|$ -compatible.*
 - *Si A est n -compatible alors A est abélien, l'exposant de A divise n et son ordre n^2 .*
 - *Si A est n -compatible alors A est nk -compatible pour tout entier $k > 0$.*

Démonstration : – Soit (d_r, \dots, d_1) le type de A alors A est isomorphe à $\mathbb{Z}/d_r \times \dots \times \mathbb{Z}/d_1$ avec d_{i+1} divisant d_i pour tout $1 \leq i \leq r-1$. On constate que $(1, d_r, 1, d_{r-1}, \dots, 1, d_1)$ est une suite de $|A|$ -compatibilité pour A . En effet :

$$A \text{ est isomorphe à } \prod_{i=1}^r \underbrace{\mathbb{Z}/1 \times \mathbb{Z}/d_i}_{=\mathbb{Z}/d_i}$$

De plus, pour tout $1 \leq i \leq r-1$, d_{i+1} divise d_i . Pour tout $1 \leq i \leq r$, 1 divise d_i et $d_r \dots d_1 = |A|$ divise $|A|$.

Par définition, A est donc $|A|$ -compatible.

- Soient A un groupe n -compatible et $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$ une suite de n -compatibilité pour A . Alors, clairement A est abélien. De plus, pour tout i , e_i divise d_i qui divise d_1 qui divise $d_r \dots d_1$ divisant n . Ainsi :

A isomorphe à $\mathbb{Z}/e_f \times \mathbb{Z}/d_f \times \dots \times \mathbb{Z}/e_1 \times \mathbb{Z}/d_1$ d'exposant divisant n

De plus $|A| = e_f \dots e_1 d_f \dots d_1$ divisant $(d_f \dots d_1)^2$ divisant n^2 . Donc le cardinal de A divise n^2 .

- Soient A un groupe n -compatible, $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$ une suite de n -compatibilité pour A et $k \geq 1$. Alors $d_f \dots d_1$ divise n qui divise nk , on vérifie alors que $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$ est une suite de nk compatibilité pour A . ■

Cette proposition permet d'affirmer que tout groupe fini abélien est n -compatible pour un certain n (en l'occurrence $n = |A|$). De plus, tout groupe n -compatible vérifie les conditions nécessaires pour être centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$ données dans la section 3.2.

Tout ce qui suit dans cette sous-section a pour but de reformuler la définition d'un groupe n -compatible. Énonçons d'abord un lemme tiré de l'article de Garrett Birkhoff [Bir35].

Lemme 17

Soient A un groupe abélien de type (d_r, \dots, d_1) et B un sous-groupe de A . Alors il existe (h_r, \dots, h_1) tels que pour tout $1 \leq i \leq r - 1$, on ait h_i divisant h_{i-1} , pour tout $1 \leq i \leq r$, on ait h_i divisant d_i et :

$$H \text{ isomorphe à } \mathbb{Z}/h_r \times \dots \times \mathbb{Z}/h_1$$

Démonstration : Voir la preuve du théorème de [Bir35]. Le théorème est seulement énoncé pour les p -groupes abéliens mais il se généralise facilement aux groupes abéliens finis quelconques car ils sont le produit de leurs p -composantes. ■

Remarquons que la condition de ce lemme est clairement suffisante. C'est donc une équivalence (nous n'utiliserons que le fait que ce soit une condition nécessaire dans la suite).

Nous pouvons maintenant montrer une proposition qui stipule qu'être un groupe n -compatible est stable par passage aux sous-groupes.

Proposition 33

Soient $n \geq 1$ et A un groupe n -compatible, alors tout sous-groupe de A est n -compatible.

Démonstration : Notons B un sous-groupe de A . Puisque A est n -compatible, on peut choisir $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$ une suite de n -compatibilité pour A . Quitte à enlever les d_i triviaux (i.e. égaux à 1), on peut supposer que $d_i > 1$ pour tout i . Notons :

$$A_0 := \prod_{i=1}^f \mathbb{Z}/d_i \times \mathbb{Z}/d_i$$

Alors A est clairement un sous-groupe de A_0 . Ainsi B est un sous-groupe de A_0 . Si l'on note pour $1 \leq i \leq 2f$:

$$t_i := \begin{cases} d_j & \text{si } i = 2j - 1 \\ d_j & \text{si } i = 2j \end{cases}$$

Alors on remarque que (t_{2f}, \dots, t_1) est le type de A_0 . En appliquant le lemme 17, il existe des entiers (k_{2f}, \dots, k_1) tels que pour tout $1 \leq i \leq 2f-1$, k_{i+1} divise k_i , pour tout $1 \leq i \leq 2f$, k_i divise t_i et :

$$B \text{ est isomorphe à } \prod_{i=1}^{2f} \mathbb{Z}/k_i = \prod_{i=1}^f \mathbb{Z}/k_{2i} \times \mathbb{Z}/k_{2i-1}$$

Notons pour $1 \leq i \leq f$, $v_i := k_{2i-1}$ et $w_i := k_{2i}$. Alors w_i divise k_i pour tout $1 \leq i \leq f$. De plus pour tout $1 \leq i \leq f-1$, v_{i+1} divise w_i qui divise v_i . Il est clair que :

$$B \text{ est isomorphe à } \prod_{i=1}^f \mathbb{Z}/w_i \times \mathbb{Z}/v_i$$

Finalement, $v_f \dots v_1$ divise $t_{2f-1} \dots t_1 = d_f \dots d_1$ qui divise n car A est n -compatible via $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$. Ainsi, on vient de montrer que $(w_f, v_f, \dots, w_1, v_1)$ est une suite de n -compatibilité pour B , le groupe B est donc, par définition, n -compatible. ■

Dans ce qui suit, nous allons voir qu'être n -compatible est particulièrement restrictif dans certains cas :

Proposition 34

Soient $n \geq 1$ et A un groupe abélien d'ordre n^2 . Le groupe A est n -compatible si et seulement s'il existe un groupe abélien B d'ordre n tel que A soit isomorphe à $B \times B$.

Démonstration : Supposons d'abord que A soit isomorphe à $B \times B$ où B est d'ordre n . On pose (d_r, \dots, d_1) le type de B . Le groupe B étant de cardinal n , le produit $d_r \dots d_1$ est égal à n . Par hypothèse :

$$A \text{ est isomorphe à } B \times B = \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/d_i \times \mathbb{Z}/d_i$$

Il est alors clair que $(d_f, d_f, \dots, d_1, d_1)$ est une suite de n -compatibilité pour A qui est donc n -compatible.

Réciproquement, supposons que A soit n -compatible d'ordre n^2 . Prenons $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$ une suite de n -compatibilité pour A . Alors on a :

$$\prod_{i=1}^f e_i d_i = |A| = n^2$$

$$\prod_{i=1}^f \frac{e_i}{d_i} = \left(\frac{n}{d_f \dots d_1}\right)^2 \quad \text{en divisant par } d_f^2 \dots d_1^2$$

$$\sum_{i=1}^f \underbrace{\log\left(\frac{e_i}{d_i}\right)}_{\leq 0} = 2 \underbrace{\log\left(\frac{n}{d_f \dots d_1}\right)}_{\geq 0} \quad \text{en passant au logarithme}$$

Ainsi on obtient : $\sum_{i=1}^f \log\left(\frac{e_i}{d_i}\right) = 0 = 2 \log\left(\frac{n}{d_f \dots d_1}\right)$. Vu que pour tout i , $\log\left(\frac{e_i}{d_i}\right) \leq 0$ on a $e_i = d_i$ et, de plus $d_1 \dots d_f = n$. Maintenant :

$$A \text{ est isomorphe à } \prod_{i=1}^f \underbrace{\mathbb{Z}/e_i \times \mathbb{Z}/d_i}_{=\mathbb{Z}/d_i \times \mathbb{Z}/d_i}.$$

Donc A est isomorphe à $B \times B$ avec $B = \mathbb{Z}/d_f \times \dots \times \mathbb{Z}/d_1$ qui est d'ordre n . ■

On peut alors retrouver le contre-exemple 1 avec une preuve plus simple :

Contre-exemple 2

Le groupe $A = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$ est abélien d'exposant divisant 4 et d'ordre divisant 4^2 mais n'est pas 4-compatible.

Démonstration : Supposons que le groupe A soit 4-compatible alors A , qui est d'ordre 4^2 serait isomorphe à $B \times B$ par la proposition 34. Mais ceci est impossible car le rang de $B \times B$ est pair alors que le rang de A est 3. ■

On finit cette sous-section en donnant une caractérisation plus simple pour les groupes n -compatibles.

Proposition 35

Soient $n \geq 1$ et A un groupe abélien fini. Alors A est n -compatible si et seulement s'il existe un groupe abélien B d'ordre n tel que A soit isomorphe à un sous-groupe de $B \times B$.

Démonstration : Supposons que A soit n -compatible. Soit $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$ une suite de n -compatibilité pour A alors :

$$A \text{ est isomorphe à } \prod_{i=1}^f \mathbb{Z}/e_i \times \mathbb{Z}/d_i \leq \prod_{i=1}^f \mathbb{Z}/d_i \times \mathbb{Z}/d_i$$

Ainsi A est isomorphe à un sous-groupe de $B_0 \times B_0$ où le groupe $B_0 = \mathbb{Z}/d_f \times \dots \times \mathbb{Z}/d_1$. Le cardinal de B_0 est égal à $d := d_f \dots d_1$ qui divise n par hypothèse. Notons $B := B_0 \times \mathbb{Z}/(n/d)$ alors B est de cardinal n et de plus :

$$A \leq B_0 \times B_0 \leq B \times B$$

Ainsi, on a pu construire B abélien d'ordre n tel que $A \leq B \times B$.

Réciproquement si $A \leq B \times B$ avec B de cardinal n . En appliquant la proposition 34, le groupe $B \times B$ est n -compatible. En appliquant la proposition 33, A est n -compatible. ■

Au travers de cette sous-section, nous avons pu donner deux définitions équivalentes pour la n -compatibilité. La définition initiale par les suites de n -compatibilité et la proposition 35 en incluant A dans $B \times B$. Chacune de ces définitions nous permettra de donner un sens pour l'équivalence du théorème de caractérisation de la page 122.

3.3.2 Preuve du théorème de caractérisation

L'objectif de cette sous-section est de montrer le théorème de caractérisation. Étant donné $n \geq 1$ et A un groupe abélien fini, A est centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$ si et seulement si A est n -compatible.

Nous commencerons par montrer que la n -compatibilité de A est une condition suffisante. Nous utiliserons la définition de la n -compatibilité par les suites de compatibilité. Nous montrerons ensuite que la n -compatibilité de A est une condition nécessaire. Nous utiliserons alors l'équivalence donnée dans la proposition 35.

La n -compatibilité est suffisante. L'idée est que si A est n -compatible et $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$ est une suite de n -compatibilité pour A alors le $2(f-1)$ -uplet $(e_f, d_f, \dots, e_2, d_2)$ est une suite de n/d_1 -compatibilité pour le groupe $B := \mathbb{Z}/e_f \times \mathbb{Z}/d_f \times \dots \times \mathbb{Z}/e_2 \times \mathbb{Z}/d_2$ sous-groupe de A .

Autrement dit si, pour tout $K_0 \leq SL(n/d, \mathbb{C})$ on peut construire un sous-groupe $H \leq SL(n, \mathbb{C})$ tel que le n -centralisateur de H soit isomorphe à $Z_{n/d}(K_0) \times \mathbb{Z}/e \times \mathbb{Z}/d$ pour tout e divisant d divisant n alors on peut construire un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ dont le n -centralisateur est isomorphe à A pour tout A n -compatible par récurrence.

Si l'idée reste relativement simple, la construction effective est un peu plus compliquée. Nous la divisons donc en plusieurs parties pour en faciliter la compréhension. Le premier lemme construit un sous-groupe H_0 dont le n -centralisateur sera isomorphe au groupe $Z_{n/d}(K_0) \times \mathbb{Z}/d \times \mathbb{Z}/d$. Ensuite, dans une nouvelle proposition, on montrera comment l'on peut réduire un des facteurs égal à \mathbb{Z}/d . La conclusion sera une récurrence.

Lemme 18

Soient $n \geq 1$ et d un diviseur non-trivial de n . Rappelons que $\xi := e^{\frac{2\sqrt{-1}\pi}{n}}$ racine primitive n -ème de l'unité. On définit des matrices de tailles n par blocs de taille n/d :

$$u := \lambda \begin{pmatrix} I_{\frac{n}{d}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \xi^{\frac{n}{d}(d-1)} I_{\frac{n}{d}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ et } M := \lambda \begin{pmatrix} & & & I_{\frac{n}{d}} \\ & & & \\ & & & \\ I_{\frac{n}{d}} & & & \ddots \end{pmatrix}$$

où λ est choisi tel que $\det(u) = 1$ (remarquons que u et M sont conjugués). Soit K_0 un sous-groupe irréductible de $SL(n/d, \mathbb{C})$ tel que l'exposant de $Z_{\frac{n}{d}}(K_0)$ divise d et :

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} g & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \\ & & & g \end{pmatrix} \mid g \in K_0 \right\}$$

Alors si $H_0 := \langle K, M, u \rangle$, le groupe H_0 est irréductible et son n -centralisateur étendu $U_n(H_0)$ est égal à :

$$\left\{ \mu u^s \begin{pmatrix} y_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \\ & & & y_0 \end{pmatrix} M^k \mid \mu \in \langle \xi I_n \rangle, y_0 \in U_{\frac{n}{k}}(K_0) \text{ et } s, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Démonstration : Le groupe $\langle u, M \rangle$ est fini et normalise le groupe K qui est complètement réductible (essentiellement car K_0 est complètement réductible en tant que sous-groupe de $SL(n/d, \mathbb{C})$ et car l'isomorphisme de K_0 sur K se fait via l'injection diagonale de $SL(n/d, \mathbb{C})$ dans $SL(n, \mathbb{C})$). Ainsi, H_0 , engendré par u, M et K est une extension finie de K et est complètement réductible. Par [Sik12], pour montrer que H_0 est irréductible, il suffit de montrer que son centralisateur est fini, ou encore que $U_n(H_0)$ est fini. Soit v dans $U_n(H_0)$. Comme $u \in H_0$, on en déduit que $v \in U_n(u)$ et par la proposition 29, on obtient :

$$v = \begin{pmatrix} v_0 & & \\ & \ddots & \\ & & v_{d-1} \end{pmatrix} M^l \text{ où } s, k \geq 0 \text{ et } v_0, \dots, v_{d-1} \in GL(n/d, \mathbb{C})$$

De plus, $M \in H_0$ donc $v \in U_n(M)$ et il existe un entier l tel que $[v, M] = \xi^l I_n$. En remarquant que M est d'ordre d modulo le centre de $SL(n, \mathbb{C})$, l'ordre de ξ^l doit diviser d (vu que l'application $[v, \cdot]$ est un morphisme). Ainsi $l = \frac{n}{d}s$ où s est un entier. D'autre part :

$$\begin{aligned} [v, M] &= \begin{pmatrix} v_0 & & \\ & \ddots & \\ & & v_{d-1} \end{pmatrix} M^l M M^{-l} \begin{pmatrix} v_0 & & \\ & \ddots & \\ & & v_{d-1} \end{pmatrix}^{-1} M^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} v_0 & & \\ & \ddots & \\ & & v_{d-1} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} v_0 & & \\ & \ddots & \\ & & v_{d-1} \end{pmatrix}^{-1} M^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} v_0 v_{-1}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & v_{d-1} v_{d-2}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $0 \leq i \leq d-1$, on obtient :

$$v_i = \xi^l v_{i-1}$$

Par récurrence immédiate, pour tout $0 \leq i \leq d-1$:

$$v_i = \xi^{\frac{n}{d} s i} v_0$$

Cela implique donc :

$$v = u^s \begin{pmatrix} x_0 & & \\ & \ddots & \\ & & x_0 \end{pmatrix} M^l$$

avec $x_0 := \lambda^{-s}v_0 \in GL(n/d, \mathbb{C})$. Comme $\det(v) = 1$ et $\det(u) = \det(M) = 1$, on obtient $\det(x_0)^d = 1$. Si μ est une racine $\frac{n}{d}$ -ème de $\det(x_0)^{-1}$, alors $\mu^n = (\det(x_0)^d)^{-1} = 1$ et $\det(\mu x_0) = 1$ donc :

$$v = \mu u^s \begin{pmatrix} y_0 & & \\ & \ddots & \\ & & y_0 \end{pmatrix} M^l \text{ avec } y_0 \in SL(\frac{n}{d}, \mathbb{C}).$$

Prenons maintenant $k = \begin{pmatrix} k_0 & & \\ & \ddots & \\ & & k_0 \end{pmatrix}$ dans K (autrement dit $k_0 \in K_0$), comme $K \leq H_0$ et $v \in U_n(H_0)$, on en déduit que $v \in U_n(K)$ et il existe donc un entier r tel que :

$$[v, k] = \xi^r I_n \tag{3.4}$$

On voit facilement que $\mu u^s M^l$ commute avec k et $y := \begin{pmatrix} y_0 & & \\ & \ddots & \\ & & y_0 \end{pmatrix}$.

L'équation 3.4 revient donc à écrire :

$$[y, k] = \xi^r I_n \text{ i.e. } \begin{pmatrix} [y_0, k_0] & & \\ & \ddots & \\ & & [y_0, k_0] \end{pmatrix} = \xi^r I_n$$

Nous venons donc de voir que pour tout $k_0 \in K_0$, $[y_0, k_0]$ doit être central. Ceci implique que $y_0 \in U_{\frac{n}{d}}(K_0)$, vu que l'on s'était ramené au cas où y_0 était de déterminant 1. En particulier, $U_n(H_0)$ est nécessairement fini. Cela implique que H_0 est irréductible. Nous avons montré que la forme la plus générale d'un élément v de $U_n(H_0)$ est

$$\mu u^s \begin{pmatrix} y_0 & & \\ & \ddots & \\ & & y_0 \end{pmatrix} M^k$$

avec k et s des entiers, μ une racine n -ème de l'unité est y_0 dans $U_{n/d}(K_0)$. Réciproquement il est trivial de voir que tout élément de cette forme là sera dans $U_n(H_0)$ (ce sont rigoureusement les mêmes calculs que ceux que l'on vient de faire). Ainsi le groupe $U_n(H_0)$ est égal à

$$\left\{ \mu u^s \begin{pmatrix} y_0 & & \\ & \ddots & \\ & & y_0 \end{pmatrix} M^k \mid \mu \in \langle \xi I_n \rangle, y_0 \in U_{\frac{n}{d}}(K_0) \text{ et } s, k \in \mathbb{Z} \right\} \blacksquare$$

Nous allons utiliser cette construction explicite dans la prochaine proposition qui est essentiellement l'hérédité de notre récurrence.

Proposition 36

Soient $n \geq 2$, d un diviseur non-trivial de n et e un diviseur n . Si K_0 est un sous-groupe irréductible de $SL(n/d, \mathbb{C})$ tel que $Z_n(K_0)$ est d'exposant divisant d , il existe un sous-groupe irréductible H de $SL(n, \mathbb{C})$ tel que :

$$Z_n(H) \text{ soit isomorphe à } Z_n(K_0) \times \mathbb{Z}/e \times \mathbb{Z}/d$$

Démonstration : Rappelons que ξ désigne $e^{\frac{2\sqrt{-1}\pi}{n}}$ une racine primitive n -ème de l'unité. Par hypothèse, $Z_{\frac{n}{d}}(K_0)$ est d'exposant divisant d , on peut donc définir u, M, K, H_0 comme dans le lemme 18, on obtient alors que :

$$H_0 := \langle K, M, u \rangle$$

est un sous-groupe irréductible et si $v \in SL(n, \mathbb{C})$ alors

$$v \in U_n(H_0) \Leftrightarrow v = \mu u^s \begin{pmatrix} y_0 & & \\ & \ddots & \\ & & y_0 \end{pmatrix} M^k$$

où $s, k \in \mathbb{Z}$, $\mu \in \langle \xi I_n \rangle$ et $y_0 \in U_{\frac{n}{k}}(K_0)$. Définissons :

$$V := \left\langle \xi I_n, u, \begin{pmatrix} y_0 & & \\ & \ddots & \\ & & y_0 \end{pmatrix} \mid y_0 \in U_{\frac{n}{k}}(K_0) \right\rangle$$

Comme $V \cap \langle M \rangle$ est inclus dans le centre dans de $SL(n, \mathbb{C})$ et que $[V, M] \leq Z(SL(n, \mathbb{C}))$:

$$Z_n(H_0) = \pi_n(U_n(H_0)) \text{ est isomorphe à } \pi_n(V) \times \langle \pi_n(M) \rangle$$

De plus si :

$$W := \left\langle \xi I_n, \begin{pmatrix} y_0 & & \\ & \ddots & \\ & & y_0 \end{pmatrix} \mid y_0 \in U_{\frac{n}{k}}(K_0) \right\rangle$$

en remarquant que $W \cap \langle u \rangle$ est inclus dans le centre de $SL(n, \mathbb{C})$ et que u commute avec tous les éléments de W , nous obtenons :

$\pi_n(V)$ est isomorphe à $\pi_n(W) \times \langle \pi_n(u) \rangle$

Au final :

$Z_n(H_0)$ est isomorphe à $(\pi_n(W) \times \langle \pi_n(u) \rangle) \times \langle \pi_n(M) \rangle$

En remarquant que l'application :

$$\psi : \begin{cases} Z_{n/d}(K_0) & \longrightarrow & \pi_n(W) \\ \pi_{n/d}(y_0) & \longmapsto & \pi_n \begin{pmatrix} y_0 & & \\ & \ddots & \\ & & y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

est un morphisme de groupes bien défini et bijectif, on obtient que :

$Z_n(H_0)$ est isomorphe à $(Z_{n/d}(K_0) \times \langle \pi_n(u) \rangle) \times \langle \pi_n(M) \rangle$

Si $e = 1$ on définit :

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_0 I_{\frac{n}{d}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{d-1} I_{\frac{n}{d}} \end{pmatrix} \mid \lambda_0, \dots, \lambda_{d-1} \in \mathbb{C}^* \text{ et } \lambda_0 \dots \lambda_{d-1} = 1 \right\}$$

Soit $H := \langle H_0, X \rangle$. Comme H_0 est irréductible et contenu dans H , H est également irréductible. De plus, tout élément de X étant diagonal par blocs scalaires de taille $\frac{n}{d}$, on obtient que X commute avec tous les éléments de W et $\langle u \rangle$. Ainsi :

$$U_n(H) \geq V \text{ et donc } Z_n(H) \geq \pi_n(W) \times \langle \pi_n(u) \rangle$$

Montrons que c'est une égalité. Si v est dans $U_n(H)$ alors $v \in U_n(H_0)$ et donc $v = wu^s M^l$ où s, l sont entiers et $w \in W$. Prenons :

$$x := \begin{pmatrix} 2I_{\frac{n}{d}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & dI_{\frac{n}{d}} & \\ & & & (2 \dots d)^{-1} I_{\frac{n}{d}} \end{pmatrix} \in X$$

Si $v \in U_n(H)$ alors il doit exister un entier r tel que :

$$[v, x] = \xi^r I_n$$

Comme w et u^s commutent avec x et $v = wu^s M^l$, cela implique que :

$$[M^l, x] = [v, x] = \xi^r I_n$$

Or $[M^l, x]$ est une matrice diagonale à coefficients réels strictement positif donc $\xi^r = 1$ et $r = 0$. On en conclut que M^l commute avec x , par suite, M^l est scalaire. Ainsi :

$$Z_n(H) \cap \langle \pi_n(M) \rangle \text{ est trivial}$$

et donc $Z_n(H) = \pi_n(W) \times \langle \pi_n(u) \rangle$ qui est isomorphe à $\pi_n(W) \times \mathbb{Z}/d$. Cela couvre le cas où $(e, d) = (1, d)$.

Supposons maintenant que e divisant d soit non-trivial. On définit la matrice x de taille n par blocs de taille $\frac{n}{e}$:

$$x := \begin{pmatrix} I_{\frac{n}{e}} & & \\ & \ddots & \\ & & \xi^{\frac{n}{e}(e-1)} I_{\frac{n}{e}} \end{pmatrix}$$

On définit $H := \langle x, H_0 \rangle$. Comme x est diagonale par blocs scalaires de taille $\frac{n}{e}$ et e divise d , x est également diagonale par blocs scalaires de taille $\frac{n}{d}$, ainsi elle commute avec $V = \langle W, u \rangle$. Nous avons donc :

$$U_n(H) \geq V$$

On voit facilement que $[M^{\frac{n}{e}}, x] = \xi^{\frac{n}{e}} I_n$ de telle sorte que $M^{\frac{n}{e}} \in U_n(H)$ et donc :

$$U_n(H) \text{ contient } \langle V, M^{\frac{n}{e}} \rangle \text{ et donc } Z_n(H) \geq \pi_n(V) \times \langle \pi_n(M)^{\frac{n}{e}} \rangle$$

Nous allons montrer que c'est une égalité. Soit $1 \leq s < \frac{n}{e}$. Nous identifierons ici les matrices à des endomorphismes linéaires de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}/n}$ en utilisant sa base canonique (e_0, \dots, e_{n-1}) indexée par \mathbb{Z}/n . Nous avons :

$$\begin{aligned} M^s x \cdot e_0 &= M^s \cdot e_0 = e_s \\ x M^s \cdot e_0 &= x \cdot e_s = e_s \text{ car } s < \frac{n}{e} \end{aligned}$$

Ainsi, $[M^s, x] \cdot e_0 = e_0$. D'autre part :

$$\begin{aligned} M^s x \cdot e_{\frac{n}{e}-1} &= M^s \cdot e_{\frac{n}{e}-1} = e_{\frac{n}{e}-1+s} \\ x M^s \cdot e_{\frac{n}{e}-1} &= x \cdot e_{\frac{n}{e}-1+s} = \xi^{\frac{n}{e}} e_{\frac{n}{e}-1+s} \end{aligned}$$

Ainsi $[M^s, x] \cdot e_{\frac{n}{e}-1} = \xi^{\frac{n}{e}} e_{\frac{n}{e}-1+s}$. Il s'ensuit que $[M^s, x]$ ne peut être une matrice scalaire. En particulier $M^s \notin U_n(H)$. On en conclut que $M^s \in U_n(H)$ si et seulement si $M^s \in \langle M^{\frac{n}{e}} \rangle$ et donc :

$$Z_n(H) \cap \langle \pi_n(M) \rangle = \langle \pi_n(M)^{\frac{n}{e}} \rangle$$

Finalement, on a bien :

$$Z_n(H) = \pi_n(V) \times \langle \pi_n(M)^{\frac{n}{e}} \rangle = \pi_n(W) \times \langle \pi_n(u) \rangle \times \langle \pi_n(M)^{\frac{n}{e}} \rangle$$

Autrement dit :

$$Z_n(H) \text{ est isomorphe à } Z_{\frac{n}{d}}(K_0) \times \mathbb{Z}/e \times \mathbb{Z}/d. \quad \blacksquare$$

Nous pouvons maintenant conclure :

Corollaire 12

Soient $n \geq 1$ et A un groupe n -compatible, alors il existe un sous-groupe irréductible H de $SL(n, \mathbb{C})$ tel que $Z_n(H)$ soit isomorphe à A .

Démonstration : Il s'agit maintenant d'une récurrence faible. Supposons que le résultat soit vrai pour tout entier $< n$, montrons-le pour n . Soit A un groupe n -compatible. Si le cardinal de A est égal à 1 alors le groupe A est trivial est dans ce cas $H := SL(n, \mathbb{C})$ convient.

Si le cardinal de A n'est pas égal à 1 alors on note $d > 1$ son exposant. Prenons $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1, e, d)$ une suite de n -compatibilité pour A . Soit :

$$B := \mathbb{Z}/e_f \times \mathbb{Z}/d_f \times \dots \times \mathbb{Z}/e_1 \times \mathbb{Z}/d_1$$

Il est clair que $(e_f, d_f, \dots, e_1, d_1)$ est une suite de n/d -compatibilité pour B , comme $n/d < n$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et trouver un sous-groupe irréductible K_0 de $SL(n/d, \mathbb{C})$ dont le centralisateur est isomorphe à B . De plus, par construction, l'exposant d_1 de B divise d . On est donc dans les conditions d'application de la proposition 36 appliquée à K_0 , e et d . On peut trouver H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ tel que :

$$Z_n(H) \text{ soit isomorphe à } Z_{n/d}(K_0) \times \mathbb{Z}/e \times \mathbb{Z}/d = B \times \mathbb{Z}/e \times \mathbb{Z}/d$$

On voit alors que $Z_n(H)$ est isomorphe à A et on peut conclure par récurrence. \blacksquare

Ceci montre qu'être un groupe n -compatible est suffisant pour être le centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$ (il suffit de prendre le sous-groupe $\overline{H} := \pi_n(H)$ de $PSL(n, \mathbb{C})$).

La n -compatibilité est nécessaire. Contrairement à ce qu'il se passait au chapitre 2, il semble difficile de décomposer un sous-groupe exceptionnel de $PSL(n, \mathbb{C})$. Nous verrons toutefois (modulo un lemme abstrait) que la n -compatibilité des centralisateurs de sous-groupes irréductibles se transmet par récurrence.

La première étape (la plus importante) est de décomposer le centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$. La remarque sur e sera utilisée dans la section 3.4.2.

Lemme 19

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ alors $Z_n(H)$ est abélien par la proposition 27. Si d est l'exposant de $Z_n(H)$, il existe un sous-groupe irréductible L de $SL(n/d, \mathbb{C})$ et e divisant d tel que $Z_n(H)$ soit isomorphe à $V \times \mathbb{Z}/d$ où V est un groupe abélien d'exposant divisant d qui se décompose selon une suite exacte :

$$1 \rightarrow Z_{\frac{n}{d}}(L) \rightarrow V \rightarrow \mathbb{Z}/e \rightarrow 1$$

De plus, il existe $u \in U_n(H)$ tel que $\pi_n(u)$ soit d'ordre d et tel que e soit l'indice du centralisateur de u dans $U_n(H)$.

Démonstration : En utilisant la proposition 27 :

$Z_n(H)$ est abélien d'exposant divisant n

Soit d l'exposant de $Z_n(H)$ et $u \in U_n(H)$ dont l'image dans $Z_n(H)$ est d'ordre d . Par la proposition 28, on peut supposer (quitte à conjuguer) que :

$$u = \lambda \begin{pmatrix} I_{\frac{n}{d}} & & & \\ & \xi^{\frac{n}{d}} I_{\frac{n}{d}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{\frac{n}{d}(d-1)} I_{\frac{n}{d}} \end{pmatrix}$$

avec λ donné dans la proposition 28. Comme $H \leq U_n(\langle u \rangle)$, la proposition 29 implique que :

$$H \leq \langle GL(n/d, \mathbb{C})^{\mathbb{Z}/d}, M \rangle$$

avec M défini par blocs de taille $\frac{n}{d}$:

$$M := \lambda \begin{pmatrix} & & & I_{\frac{n}{d}} \\ & & & \\ & & & \\ I_{\frac{n}{d}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & I_{\frac{n}{d}} \end{pmatrix}$$

Soit $K := H \cap GL(n/d, \mathbb{C})^{\mathbb{Z}/d}$ i.e. le sous-groupe des matrices de H qui sont diagonales par blocs. Si $k \in K$ est défini par les blocs diagonaux k_0, \dots, k_{d-1} , on définit $p_i : K \rightarrow GL(n/d, \mathbb{C})$ l'application envoyant k sur k_i . On définit finalement $K_i := p_i(K)$.

Soit q la projection (bien définie car M^k est diagonale par blocs si et seulement si elle est scalaire) :

$$H \leq \langle GL(n/d, \mathbb{C})^{\mathbb{Z}/d}, M \rangle \rightarrow \langle \pi_n(M) \rangle$$

Si $q(H) \neq \langle \pi_n(M) \rangle$ alors H n'agit pas transitivement sur les espaces propres de u , en particulier H ne peut être irréductible. Cela implique que $q(H) = \langle M \rangle$ (on ne peut toutefois pas affirmer, même à conjugaison près, que la matrice M est dans H , on peut le comparer à la proposition 7).

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} h_0 & & \\ & \ddots & \\ & & h_{d-1} \end{pmatrix} M$ dans H . Si l'on conjugue H par :

$$x := \begin{pmatrix} h_0^{-1} & & & \\ & (h_0 h_1)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (h_0 \dots h_{d-1})^{-1} \end{pmatrix}$$

Par calcul direct :

$$x \gamma x^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & & & \\ & I_{\frac{n}{d}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{\frac{n}{d}} \end{pmatrix} M \text{ où } \gamma_0 := (h_0 \dots h_{d-1})^{-1}$$

Comme x commute avec u , quitte à conjuguer par x , on peut supposer que $u \in U_n(H)$ et que H contient la matrice suivante :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 & & & \\ & I_{\frac{n}{d}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{\frac{n}{d}} \end{pmatrix} M$$

Le groupe K étant normal dans H (c'est le noyau de $q|_H$), nous avons :

$$\gamma K \gamma^{-1} = K$$

Cela implique :

$$\gamma_0 K_0 \gamma_0^{-1} = K_{-1} \text{ et pour } 1 \leq i \leq d-1, K_i = K_{i-1}$$

En particulier :

$$K_0 = \dots = K_{d-1} \text{ et } \gamma_0 \text{ normalise } K_0$$

Montrons que K_0 est un sous-groupe irréductible de $GL(n/d, \mathbb{C})$. Soit E un sous-espace invariant de K_0 (écrit comme un sous-espace vectoriel de $Vect(e_0, \dots, e_{\frac{n}{d}-1})$) définissons :

$$F := \bigoplus_{j=0}^{d-1} \gamma^j \cdot E$$

La somme est directe car si $V_i := Vect(e_{\frac{n}{d}i}, e_{\frac{n}{d}(i+1)}, \dots, e_{\frac{n}{d}(i+1)-1})$ alors :

$$\gamma^j \cdot E \subseteq V_j$$

De plus V_0, \dots, V_{d-1} sont clairement en somme directe. Montrons que F est stable par H . Tout d'abord, $\gamma \cdot F = F$ car :

$$\begin{aligned} \gamma \cdot F &= \bigoplus_{j=0}^{d-1} \gamma^{j+1} \cdot E \\ &= \bigoplus_{j=1}^{d-1} \gamma^j \cdot E \oplus \underbrace{\gamma^d \cdot E}_{=E \text{ car } \gamma^d \in K} \\ &= \bigoplus_{j=0}^{d-1} \gamma^j \cdot E \\ &= F \end{aligned}$$

Montrons que F est également stable par K :

$$\text{si } \begin{pmatrix} k_0 & & \\ & \ddots & \\ & & k_{d-1} \end{pmatrix} \in K$$

vu que γ normalise K , on a :

$$\begin{pmatrix} k_0 & & \\ & \ddots & \\ & & k_{d-1} \end{pmatrix} \gamma^j = \gamma^j \begin{pmatrix} k'_0 & & \\ & \ddots & \\ & & k'_{d-1} \end{pmatrix}$$

où $k'_0, \dots, k'_{d-1} \in K_0$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} k_0 & & \\ & \ddots & \\ & & k_{d-1} \end{pmatrix} (\gamma^j.E) = \gamma^j \begin{pmatrix} k'_0 & & \\ & \ddots & \\ & & k'_{d-1} \end{pmatrix} .E = \gamma^j.(k_0.E) = \gamma^j.E$$

L'espace F ainsi construit est donc stable par H qui est irréductible par hypothèse. On en déduit que F est soit trivial soit tout l'espace. Si F est trivial alors en particulier E l'est. Si F est tout l'espace alors $F \cap V_0 = V_0$ or $F \cap V_0 = E$ donc $E = V_0$. Autrement dit tout sous-espace propre de V_0 stable par K_0 est trivial, ceci justifie que K_0 soit irréductible.

Comme $u \in U_n(H)$, on en déduit que $U_n(H) \leq U_n(u)$. On définit un morphisme de groupes (comme dans le lemme 15) :

$$f_1 : \begin{cases} U_n(H) & \longrightarrow & \text{Mor}(\langle \gamma \rangle, Z(SL(n, \mathbb{C}))) \\ v & \longmapsto & (\gamma^l \mapsto [v, \gamma^l]) \end{cases}$$

Remarquons que f_1 se factorise en une application (toujours notée f_1) partant de $Z_n(H)$. Son image est nécessairement d'exposant divisant d car $Z_n(H)$ l'est. Ainsi :

$$f_1 : \begin{cases} Z_n(H) & \longrightarrow & \text{Mor}(\langle \gamma \rangle, \langle \xi^{\frac{n}{d}} I_n \rangle) \\ \pi_n(v) & \longmapsto & (\gamma^l \mapsto [v, \gamma^l]) \end{cases}$$

Soit $V := \ker(f_1)$. Comme $u \in U_n(H)$ vérifie $[u, \gamma] = \xi^{\frac{n}{d}} I_n$ et u d'ordre d , le morphisme f_1 admet une section :

$$Z_n(H) = V \times \langle \pi_n(u) \rangle$$

Notons $V_1 := \pi_n^{-1}(V)$. Soit v dans V_1 . Comme $v \in U_n(H)$, on sait que :

$$v = \begin{pmatrix} v_0 & & \\ & \ddots & \\ & & v_{d-1} \end{pmatrix} M^l \text{ où } v_0, \dots, v_{d-1} \in GL(n/d, \mathbb{C}) \text{ et } l \geq 0.$$

On définit un nouveau morphisme de groupes :

$$f_2 : \begin{cases} V_1 & \longrightarrow & Mor(\langle u \rangle, \langle \xi^{\frac{n}{d}} I_n \rangle) \\ v & \longmapsto & (u^l \mapsto [v, u^l]) \end{cases}$$

Soit $V_2 := \ker(f_2)$. Comme $Mor(\langle u \rangle, \langle \xi^{\frac{n}{d}} I_n \rangle)$ est cyclique d'ordre d , il est clair que $Im(f_2)$ est engendré par un élément d'ordre e divisant d , ainsi on obtient une suite exacte :

$$1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_1 \rightarrow \mathbb{Z}/e \rightarrow 1 \quad (3.5)$$

On remarque que le centralisateur de u dans $U_n(H)$ est le groupe engendré par V_2 et u , ainsi :

$$e = \frac{|V_1|}{|V_2|} = \frac{|V_1|d}{|V_2|d} = \frac{|U_n(H)|}{|Z_{U_n(H)}(u)|} = [U_n(H) : Z_{U_n(H)}(u)]$$

La suite exacte (3.5) (même quand on la regarde dans $PSL(n, \mathbb{C})$) n'a aucune raison d'être scindée. Cependant, en utilisant les inclusions suivantes $\langle \xi I_n \rangle \leq V_2 \leq V_1$, on a :

$$\begin{cases} Z_n(H) = U_n(H)/\langle \xi I_n \rangle = (V_1/\langle \xi I_n \rangle) \times \langle \pi_n(u) \rangle = V \times \langle \pi_n(u) \rangle \\ 1 \rightarrow V_2/\langle \xi I_n \rangle \rightarrow V \rightarrow \mathbb{Z}/e \rightarrow 1 \end{cases}$$

Soit $W := V_2/\langle \xi I_n \rangle = \pi_n(V_2)$. Si $v \in V_1$ alors :

$$v = \begin{pmatrix} v_0 & & \\ & \ddots & \\ & & v_{d-1} \end{pmatrix} M^l \text{ où } v_0 \in GL(n/d, \mathbb{C}) \text{ et } l \geq 0$$

On voit alors que $v \in V_2$ implique :

$$v = \begin{pmatrix} v_0 & & \\ & \ddots & \\ & & v_{d-1} \end{pmatrix} \text{ où } v_0, \dots, v_{d-1} \in GL(n/d, \mathbb{C}) \text{ (i.e. } l = 0)$$

Comme $[\gamma, v] = I_n$ (car $v \in V_2 \leq V_1$) nous avons en plus que $v_0 = \dots = v_{d-1}$ et v_0 commute avec γ_0 . En particulier :

$$v = \begin{pmatrix} v_0 & & \\ & \ddots & \\ & & v_0 \end{pmatrix} \text{ où } v_0 \in GL(n/d, \mathbb{C})$$

De plus, si $v \in V_2$ alors pour tout $k \in K$, il existe $\xi^l \in \langle \xi I_n \rangle$ tel que :

$$[v, k] = \xi^l I_n \Rightarrow \pi_{\frac{n}{d}}(v) \in Z_{\frac{n}{d}}(K_0)$$

Remarquons que $\pi_n(v)$ étant d'ordre divisant d , on a $\xi^l \in \langle \xi^{\frac{n}{d}} I_n \rangle$. On définit maintenant une application :

$$f_3 : \begin{array}{l|l} V_2 & \longrightarrow Z_{\frac{n}{d}}(K_0) \\ v & \longmapsto [v_0] \end{array}$$

Cette application est bien définie. C'est clairement un morphisme de groupes de noyau $\langle \xi I_n \rangle$. Ainsi $W = V_2 / \langle \xi I_n \rangle$ est isomorphe à un sous-groupe de $Z_{\frac{n}{d}}(K_0)$.

Remarquons que nous avons fait ici un léger abus de notation. En effet K_0 n'est, à priori, pas un sous-groupe de $SL(n/d, \mathbb{C})$ mais de $GL(n/d, \mathbb{C})$. Dans ce cas $Z_{\frac{n}{d}}(K_0)$ désigne le centralisateur de l'image de K_0 dans le groupe quotient $PGL(n/d, \mathbb{C})$.

Nous avons vu que W est isomorphe à un sous-groupe du centralisateur de l'image de K_0 dans $PGL(n/d, \mathbb{C})$. Si l'on définit L_0 comme l'image réciproque dans $SL(n/d, \mathbb{C})$ de l'image de K_0 dans $PGL(n/d, \mathbb{C})$ qui est égal à $PSL(n/d, \mathbb{C})$, alors par définition W est isomorphe à un sous-groupe de $Z_{n/d}(L_0)$ et de plus L_0 est irréductible car $\pi_{n/d}(L_0)$ l'est car K_0 l'est. Par le théorème 3.2, il existe L irréductible de $SL(n/d, \mathbb{C})$ tel que $W = Z_{n/d}(L)$. ■

Nous allons maintenant démontrer un lemme sur la décomposition de certains groupes abéliens (il faut le mettre en lien avec la décomposition vue dans le lemme 19).

Lemme 20

Soient d un entier et A un groupe abélien d'exposant divisant d . Supposons que l'on ait une suite exacte :

$$1 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow \mathbb{Z}/e \rightarrow 1$$

alors A est isomorphe à un sous-groupe de $B \times \mathbb{Z}/d$.

Démonstration : Comme A se décompose comme le produit de ses composantes p -primaires et que la suite exacte se décompose sur chaque composante p -primaire, il suffit de démontrer le lemme quand d est une puissance de p est A un p -groupe d'exposant divisant d pour tout p premier.

Notons $d = p^\alpha$, A un p -groupe d'exposant divisant d et $e = p^k$ avec $k \leq \alpha$. Dans la suite exacte :

$$1 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow \mathbb{Z}/p^k \rightarrow 1$$

on note $\pi : A \rightarrow \mathbb{Z}/p^k$ la projection.

Soient $(p^{\alpha_s}, \dots, p^{\alpha_1})$ le type de A et $(p^{\beta_r}, \dots, p^{\beta_1})$ le type de B . En appliquant le lemme 17, on a $s \geq r$. De plus A est clairement engendré par les r générateurs de B et un élément x envoyé sur le générateur de \mathbb{Z}/p^k via π . Ainsi A est engendré par $r + 1$ éléments et donc $s \leq r + 1$.

Si $s = r$, on définit $\alpha_{r+1} := 0$. Dans tous les cas :

$$A \text{ est isomorphe à } \mathbb{Z}/p^{\alpha_{r+1}} \times \dots \times \mathbb{Z}/p^{\alpha_1}$$

Le groupe A est d'exposant divisant p^α par hypothèse, le groupe B est donc également d'exposant divisant p^α , ainsi le type de $B \times \mathbb{Z}/d$ est $(p^{\beta_r}, \dots, p^{\beta_1}, p^\alpha)$. En utilisant à nouveau le lemme 17, le groupe A est isomorphe à un sous-groupe de $B \times \mathbb{Z}/p^\alpha$ si et seulement si $\alpha_{r+1} \leq \beta_r \dots \alpha_2 \leq \beta_1, \alpha_1 \leq \alpha$.

Par hypothèse, la condition $\alpha_1 \leq \alpha$ est toujours vérifiée car A est d'exposant divisant p^α . Par conséquent, le groupe A est isomorphe à un sous-groupe de $B \times \mathbb{Z}/p^\alpha$ si et seulement si $\alpha_{r+1} \leq \beta_r \dots \alpha_2 \leq \beta_1$.

On raisonne par l'absurde et on suppose que A n'est pas isomorphe à un sous-groupe de $B \times \mathbb{Z}/p^\alpha$ alors il existe un entier j tel que $2 \leq j \leq r + 1$ et $\alpha_j > \beta_{j-1}$.

On rappelle que si C est un groupe abélien, $C_{(d)}$ désigne sa d -torsion. D'une part :

$A/A_{(p^{\alpha_{j-1}})}$ contient $p^{\alpha_j-1}\mathbb{Z}/p^{\alpha_j} \times \dots \times p^{\alpha_j-1}\mathbb{Z}/p^{\alpha_1}$ comme facteur direct

Ainsi :

$$rg(A/A_{(p^{\alpha_{j-1}})}) \geq j \tag{3.6}$$

D'autre part, comme $B_{(p^{\alpha_j-1})} \leq A_{(p^{\alpha_j-1})}$, l'application de projection $f : A \rightarrow A/A_{(p^{\alpha_j-1})}$ se factorise par $A/B_{(p^{\alpha_j-1})}$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A/A_{(p^{\alpha_j-1})} \\ & \searrow p & \nearrow g \\ & & A/B_{(p^{\alpha_j-1})} \end{array}$$

Comme f est surjective, g est nécessairement surjective. Puisque $\beta_{j-1} \leq \alpha_j - 1$, nous avons :

$$B/B_{(p^{\alpha_j-1})} = p^{\alpha_j-1}\mathbb{Z}/p^{\beta_{j-2}} \times \dots \times p^{\alpha_j-1}\mathbb{Z}/p^{\beta_1}$$

Par conséquent, $B/B_{(p^{\alpha_j-1})}$ est engendré par $j - 2$ éléments. De plus, $A/B_{(p^{\alpha_j-1})}$ est engendré par les $j - 2$ éléments générant $B/B_{(p^{\alpha_j-1})}$ et l'élément $x \bmod B_{(p^{\alpha_j-1})}$ (rappelons que x est défini comme étant un élément de A tel que $\pi(x)$ engendre \mathbb{Z}/p^k).

Le groupe $A/B_{(p^{\alpha_j-1})}$ est donc engendré par $j - 1$ éléments, et donc l'image de $A/B_{(p^{\alpha_j-1})}$ par g est également engendrée par $j - 1$ éléments. Il s'ensuit que le rang de $g(A/B_{(p^{\alpha_j-1})}) = A/A_{(p^{\alpha_j-1})}$ est strictement plus petit que j ce qui contredit l'inégalité 3.6.

Par conséquent A est isomorphe à un sous-groupe de $B \times \mathbb{Z}/d$. Nous l'avons démontré dans le cas des p -groupes. Rappelons que cela se généralise à tout groupe abélien fini en décomposant un groupe abélien fini comme produit de ses composantes p -primaires. ■

Même si le lemme va nous permettre de conclure (cf proposition suivante), il est nécessaire de remarquer que l'inclusion n'est absolument pas canonique et, en particulier, donne assez peu de conditions sur le type de A . On verra que pour aborder le problème (plus difficile) de la classification des classes de conjugaison, il faudra préciser les choses. Pour l'instant nous allons pouvoir montrer que la condition de n -compatibilité est nécessaire.

Proposition 37

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ alors $Z_n(H)$ est n -compatible.

Démonstration : On démontre ce résultat par récurrence forte. Soit $n \geq 1$ tel que pour tout $m < n$ le résultat soit vrai. Soit H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ et $Z_n(H)$ son n -centralisateur.

Si l'exposant de $Z_n(H)$ est 1 alors $Z_n(H)$ est le groupe trivial et $Z_n(H)$ est clairement n -compatible.

Sinon, l'exposant d de $Z_n(H)$ est strictement plus grand que 1. En appliquant le lemme 19, il existe un sous-groupe irréductible L de $SL(n/d, \mathbb{C})$ et e divisant d tel que $Z_n(H)$ soit isomorphe à $V \times \mathbb{Z}/d$ où V est un groupe abélien d'exposant d qui se décompose selon une suite exacte :

$$1 \rightarrow Z_{\frac{n}{d}}(L) \rightarrow V \rightarrow \mathbb{Z}/e \rightarrow 1 \quad (3.7)$$

En appliquant le lemme 20 à la suite exacte 3.7 (on peut le faire car V est d'exposant divisant d), on en conclut que V est isomorphe à un sous-groupe de $Z_{\frac{n}{d}}(L) \times \mathbb{Z}/d$.

Par hypothèse de récurrence, $Z_{\frac{n}{d}}(L)$ est n/d -compatible, par conséquent (cf proposition 35), il existe C un groupe abélien d'ordre n/d tel que $Z_{\frac{n}{d}}(L)$ soit isomorphe à un sous-groupe de $C \times C$.

Ainsi V est isomorphe à un sous-groupe de $C \times C \times \mathbb{Z}/d$.

Vu que $Z_n(H)$ est isomorphe à $V \times \mathbb{Z}/d$, le groupe $Z_n(H)$ est isomorphe à un sous-groupe de $C \times C \times \mathbb{Z}/d \times \mathbb{Z}/d$. En posant $B := C \times \mathbb{Z}/d$ qui est un groupe abélien d'ordre n , on a montré que $Z_n(H)$ est isomorphe à un sous-groupe de $B \times B$ où B est abélien d'ordre n . En appliquant, à nouveau, la proposition 35, le groupe $Z_n(H)$ est n -compatible. Ceci permet de conclure la récurrence. ■

Conclusion sur le théorème de caractérisation. On commence par démontrer le théorème de caractérisation (ce qui est une formalité vu le travail que nous avons effectué) :

Démonstration du théorème 3.3 : Si A est n -compatible, alors il existe un sous-groupe irréductible H de $SL(n, \mathbb{C})$ tel que $Z_n(H)$ soit isomorphe à A par le corollaire 12. Ainsi A est isomorphe, par définition, au centralisateur de $\bar{H} := \pi_n(H)$ dans $PSL(n, \mathbb{C})$. Comme H irréductible, \bar{H} l'est également et A est donc isomorphe au centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$.

Réciproquement si $\bar{H} \leq PSL(n, \mathbb{C})$ est un sous-groupe irréductible, alors son centralisateur dans $PSL(n, \mathbb{C})$ est clairement égal au n -centralisateur de $H := \pi_n^{-1}(\bar{H})$. Comme H est irréductible (car \bar{H} l'est), on peut appliquer la proposition 37 pour avoir que $Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(\bar{H}) = Z_n(H)$ est n -compatible. ■

S'il est relativement satisfaisant de pouvoir caractériser les classes d'isomorphisme des centralisateurs des sous-groupes irréductibles de $PSL(n, \mathbb{C})$, le théorème de caractérisation ne donne pas vraiment de renseignement sur les classes de conjugaison sur ces centralisateurs. Cette étude sera entreprise dans la section 3.4.

Avant de faire ce travail, nous allons dire quelques mots sur l'étude analogue dans les quotients arbitraires de $SL(n, \mathbb{C})$ i.e. les $\pi_d(SL(n, \mathbb{C}))$ pour d divisant n .

3.3.3 Conséquences pour les quotients arbitraires de $SL(n, \mathbb{C})$

Tout comme dans la section 3.2, nous allons voir que les résultats obtenus sur les centralisateurs des sous-groupes irréductibles de $PSL(n, \mathbb{C})$ se généralisent partiellement aux centralisateurs partiels. La proposition suivante va permettre de relier les d -centralisateurs aux n -centralisateurs :

Proposition 38

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$. Si l'on décompose n en produit de facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, alors pour tout $1 \leq i \leq r$, il existe un unique p_i -sous-groupe S_{p_i} de $Z_n(H)$ tel que :

$$Z_n(H) = S_{p_1} \times \dots \times S_{p_r}$$

et pour tout $1 \leq i \leq r$, en notant $n_i := \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$, nous avons :

$$Z_{p_i^{\alpha_i}}(H) = S_{p_i} \times \mathbb{Z}/n_i$$

Démonstration : Par la proposition 27, le groupe $Z_n(H)$ est abélien. Il est donc produit de ses composantes p -primaires. Vu que $Z_n(H)$ est d'exposant n , seules les composantes p_i -primaires de $Z_n(H)$ sont potentiellement non-triviales. Si l'on note S_{p_i} la composante p_i -primaire de $Z_n(H)$ pour $1 \leq i \leq r$, on a :

$$Z_n(H) = S_{p_1} \times \dots \times S_{p_r}$$

Fixons maintenant $1 \leq i \leq r$. On sait que :

$$\phi_{p_i^{\alpha_i}} : U_{p_i^{\alpha_i}}(H) \rightarrow (Z_n(H))_{(p_i^{\alpha_i})} = S_{p_i}$$

est surjective sur S_{p_i} par le lemme 16. Cette application se factorise clairement via $U_{p_i^{\alpha_i}}(H)/\langle \xi^{n/p_i^{\alpha_i}} I_n \rangle = Z_{p_i^{\alpha_i}}(H)$. Ainsi, il existe un morphisme de groupes surjectif :

$$f : Z_{p_i}^{\alpha_i}(H) \rightarrow S_{p_i}$$

dont le noyau est $\ker(\phi_{p_i}^{\alpha_i}) / \langle \xi^{n/p_i^{\alpha_i}} I_n \rangle = \langle \xi I_n \rangle / \langle \xi^{n/p_i^{\alpha_i}} I_n \rangle$ qui est isomorphe au groupe cyclique \mathbb{Z}/n_i .

Le groupe $Z_{p_i}^{\alpha_i}(H)$ étant également abélien d'exposant divisant n par le théorème 3.1, on peut l'écrire comme produit de ses composantes p_j -primaires T_{p_j} pour $1 \leq j \leq r$:

$$Z_{p_i}^{\alpha_i}(H) = T_{p_i} \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r T_{p_j} \quad (3.8)$$

Nous avons vu que $|\ker(f)| = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$ est premier avec p_i donc $\ker(f) \cap T_{p_i}$ est trivial.

D'autre part, puisque pour $j \neq i$, $|T_{p_j}|$ est premier avec p_i , T_{p_j} est contenu dans $\ker(f)$.

Le noyau de f est un sous-groupe de $Z_{p_i}^{\alpha_i}(H)$ contenant chaque T_{p_j} pour $j \neq i$ et d'intersection triviale avec T_{p_i} . Vu la décomposition donnée à l'équation 3.8, on en déduit que :

$$\ker(f) = \prod_{j=1, j \neq i}^r T_{p_j}$$

Par conséquent, au vu de la décomposition donnée à l'équation 3.8, $Z_{p_i}^{\alpha_i}(H) / \ker(f)$ est isomorphe à T_{p_i} . D'autre part, vu que f est surjectif sur S_{p_i} , on en déduit que $Z_{p_i}^{\alpha_i}(H) / \ker(f)$ est isomorphe à S_{p_i} . Finalement :

$$Z_{p_i}^{\alpha_i}(H) = T_{p_i} \times \ker(f) = T_{p_i} \times \mathbb{Z}/n_i$$

Et on en déduit donc que $Z_{p_i}^{\alpha_i}(H)$ est isomorphe à $S_{p_i} \times \mathbb{Z}/n_i$. ■

Il aurait été plus simple d'obtenir $Z_n(H) = Z_{p_1}^{\alpha_1}(H) \times \cdots \times Z_{p_r}^{\alpha_r}(H)$ mais cette décomposition est fautive. Ce que nous dit la proposition est que, à l'image du centre de $SL(n, \mathbb{C})$ près, cette décomposition est vraie.

En particulier, nous voyons que si p divise n alors $Z_{p^{\text{val}_p(n)}} H$ est isomorphe au produit d'un groupe cyclique d'ordre $n/p^{\text{val}_p(n)}$ et de l'unique p -Sylow de $Z_n(H)$. En particulier, on obtient :

Proposition 39

Soit $n \geq 1$, on note $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers. Fixons $1 \leq i \leq r$.

Un groupe abélien A est isomorphe à $Z_{p_i^{\alpha_i}}(H)$ où H est un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ si et seulement si A est isomorphe au produit de S , un groupe $p_i^{\alpha_i}$ -compatible, avec un groupe cyclique d'ordre $n/p_i^{\alpha_i}$.

Démonstration : Supposons que A soit isomorphe à $Z_{p_i^{\alpha_i}}(H)$ où H est un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$. D'après la proposition 38, le groupe A se décompose comme le produit de S_{p_i} , la p_i -composante de $Z_n(H)$, avec un groupe cyclique d'ordre $n/p_i^{\alpha_i}$.

Il nous suffit donc de justifier que S_{p_i} est $p_i^{\alpha_i}$ -compatible. Le groupe $Z_n(H)$ est n -compatible par le théorème 3.3. La proposition 35 implique alors qu'il existe B un groupe abélien de cardinal n tel que :

$$S_{p_i} \leq Z_n(H) \leq B \times B$$

Comme S_{p_i} est un p_i -groupe par définition, il est inclus dans la composante p_i -primaire de $B \times B$. Si l'on note B_i la composante p_i -primaire de B , il est clair que la composante primaire de $B \times B$ est $B_i \times B_i$. Ainsi :

$$S_{p_i} \leq B_i \times B_i$$

Or le cardinal de B est n donc le cardinal de B_i est égal à la plus haute puissance de p_i divisant n : i.e. $p_i^{\alpha_i}$. Ainsi, par la proposition 35, le groupe B_i est $p_i^{\alpha_i}$ -compatible.

Réciproquement soit S un groupe $p_i^{\alpha_i}$ -compatible, par la proposition 32, le groupe S est n -compatible. Le théorème 3.3 implique alors qu'il existe $H \leq SL(n, \mathbb{C})$ tel que $Z_n(H)$ soit isomorphe à S .

En appliquant la proposition 38, le groupe $Z_{p_i^{\alpha_i}}(H)$ est isomorphe au produit de la composante p_i -primaire de $Z_n(H)$ avec un groupe cyclique d'ordre $n/p_i^{\alpha_i}$. Or S étant $p_i^{\alpha_i}$ -compatible, il est d'exposant une puissance de p_i par la proposition 32, donc $Z_n(H) = S$ est égal à sa composante p_i -primaire. En particulier, $Z_{p_i^{\alpha_i}}(H)$ est isomorphe à $S \times \mathbb{Z}/(n/p_i^{\alpha_i})$. ■

Pour finir cette sous-section, nous parlons de la variété des caractères, plus précisément, dans le cas fuchsien, on donne une condition nécessaire sur les groupes d'isotropie :

Proposition 40

Soient Γ un groupe fuchsien, $n \geq 1$ et d divisant n . Si l'on note $G := \pi_d(SL(n, \mathbb{C}))$ et ρ une représentation irréductible de Γ dans G .

Alors le groupe d'isotropie de $G \cdot \rho$ dans l'orbifolde $\chi^i(\Gamma, G)$ est n -compatible d'exposant divisant d .

Démonstration : En vertu du corollaire 4, le groupe d'isotropie en $G \cdot \rho$ s'identifie à $Z(\rho)/Z(G)$ (on rappelle que $Z(\rho)$ est le centralisateur dans G du sous-groupe $\rho(\Gamma)$).

Notons $H := \pi_d^{-1}(\rho(\Gamma))$. Comme ρ est irréductible, son image l'est et donc H l'est aussi. Avec cette notation $Z(\rho)$ s'identifie à $Z_d(H)$, le d -centralisateur de H . On définit le morphisme de groupes suivant (comme au lemme 15) :

$$\phi_n : \begin{cases} U_n(H) & \longrightarrow & Mor(H, \langle \xi I_n \rangle) \\ u & \longmapsto & (h \mapsto [u, h]) \end{cases}$$

Le lemme 16 implique que $U_d(H) = \phi_n^{-1}(Z_n(H)_{(d)})$. Or, par définition :

$$Z_d(H) = U_d(H) / \langle \xi^{\frac{n}{d}} I_n \rangle$$

Finalement $\phi_d(U_d(H)) = \phi_n(U_d(H)) = Z_n(H)_{(d)}$ par ce qui est écrit mais aussi $U_d(H) / \langle \xi I_n \rangle$. Or ce quotient est :

$$U_d(H) / \langle \xi I_n \rangle = (U_d(H) / \langle \xi^{\frac{n}{d}} I_n \rangle) / \langle \xi^d I_n \rangle = Z_d(H) / Z(G)$$

Autrement dit, on a montré que $Z_n(H)_{(d)}$ est isomorphe à $Z_d(H) / Z(G)$ qui s'identifie au groupe d'isotropie de $G \cdot \rho$.

Par définition, le groupe $Z_n(H)_{(d)}$ est d'exposant divisant d , de plus $Z_n(H)$ étant n -compatible par le théorème 3.3, le groupe $(Z_n(H))_{(d)}$ l'est aussi en appliquant la proposition 33. ■

Ceci conclut cette section sur le théorème de caractérisation qui avait pour but de caractériser les classes d'isomorphismes apparaissant comme centralisateur des sous-groupes irréductibles de $PSL(n, \mathbb{C})$. Dans la suite, nous allons nous intéresser aux classes de conjugaisons de ces centralisateurs.

3.4 Classes de conjugaison des centralisateurs

Dans le théorème 2.1 du chapitre 2 nous n'avons pas seulement donné les classes d'isomorphisme potentielles de centralisateurs des sous-groupes

irréductibles de $PSL(p, \mathbb{C})$ mais aussi montré que pour chaque classe d'isomorphisme, il n'existait qu'une seule classe de conjugaison de centralisateurs. Commençons par donner un contre-exemple à cette assertion quand p n'est pas premier. Autrement dit, pour un certain n , on va trouver deux sous-groupes irréductibles H_1 et H_2 de $SL(n, \mathbb{C})$ tels que $Z_n(H_1)$ soit isomorphe à $Z_n(H_2)$ mais $Z_n(H_1)$ ne soit pas conjugué à $Z_n(H_2)$.

Contre-exemple 3

Soient $n = 4$ et $A = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Définissons :

$$H_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in SL(2, \mathbb{C}) \right\} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Soit $K := D \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ dans $SL(2, \mathbb{C})$ où D désigne le sous-groupe des matrices diagonales de $SL(2, \mathbb{C})$ et :

$$H_2 := \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_2 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} I_2 \end{pmatrix} \mid k \in K \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}^* \right\} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Alors $Z_4(H_1)$ et $Z_4(H_2)$ sont isomorphes à A mais $Z_4(H_1)$ et $Z_4(H_2)$ ne sont pas des groupes conjugués dans $PSL(4, \mathbb{C})$.

Démonstration : On peut remarquer que H_1 est un groupe construit comme dans la construction de la proposition 36, avec le groupe abélien $A = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ muni de la suite de 4-compatibilité (2, 2) alors que H_2 est un groupe construit comme dans la construction de la proposition 36, avec le groupe abélien $A = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ muni de la suite de 4-compatibilité (1, 2, 1, 2).

Par un calcul direct, $U_4(H_1)$ est engendré par ces trois éléments :

$$\sqrt{-1}I_4, \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

et $U_4(H_2)$ est engendré par ces trois éléments :

$$\sqrt{-1}I_4, \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il est clair que pour $i = 1, 2$ le groupe $Z_4(H_i) = U_4(H_i) / \langle \sqrt{-1}I_4 \rangle$ est engendré par deux éléments qui commutent et qui sont d'ordre 2. Ainsi $Z_4(H_i)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Si $Z_4(H_1)$ et $Z_4(H_2)$ étaient conjugués, il est clair que $U_4(H_1)$ et $U_4(H_2)$ seraient alors conjugués. Mais ceci est impossible car $U_4(H_1)$ n'est pas commutatif alors que $U_4(H_2)$ l'est. ■

Outre le fait de motiver l'étude qui va suivre, à savoir que la classification des classes de conjugaison des centralisateurs est strictement plus complexe que celle de leurs classes d'isomorphisme, ce contre-exemple a la vertu de nous donner une indication sur l'outil que l'on doit utiliser pour le faire.

En effet, ce qui interdit la conjugaison entre deux centralisateurs isomorphes est la différence entre leurs relevés respectifs par rapport à la commutation. On verra que l'on peut définir le crochet de deux éléments de $Z_n(H)$ en prenant le relevé de chacun de ces deux éléments et en le calculant dans $U_n(H)$. Par le même genre de technique élémentaire que dans le lemme 15, cela définit un morphisme de groupes de $Z_n(H) \times Z_n(H)$ vers \mathbb{Z}/n (si le groupe abélien $Z_n(H)$ est vu comme un \mathbb{Z}/n -module alors l'application est bilinéaire).

Autrement dit, pour distinguer les différentes classes de conjugaisons, nous allons rajouter une structure supplémentaire sur le groupe abélien (n -compatible) $Z_n(H)$, celle de module alterné. Dans une première sous-section, nous allons démontrer quelques propriétés sur les modules alternés, avec quelques exemples. Le sujet ayant été assez peu traité (celui des modules symplectiques l'a été beaucoup plus), nous allons montrer les propositions spécifiques aux modules alternés dont nous aurons besoin par la suite (essentiellement sur la notion de lagrangien).

Dans une seconde sous-section, nous ferons correspondre à chaque classe de conjugaison de centralisateurs de sous-groupes irréductibles de $PSL(n, \mathbb{C})$ une unique classe de modules alternés. Nous montrerons alors que la correspondance est injective. Cela nous permettra d'en déduire un certain nombre de conséquences sur des cas particuliers.

Dans la dernière sous-section, nous donnerons quelques pistes sur la caractérisation des modules alternés apparaissant de cette manière. En effet la correspondance injective évoquée ci-dessus n'a pas encore d'image bien définie (on ne sait pas exactement quelles propriétés nécessaires et suffisantes doivent vérifier les modules alternés pour être issus d'un centralisateur d'irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$).

3.4.1 Sur les modules alternés

Dans cette sous-section, nous définissons la notion de module alterné. Le concept est défini par Wall dans [Wal64] et par Tignol et Amitsur dans [AT86]. Parmi les résultats que nous allons établir, un certain nombre pourront être retrouvés dans ces références. Nous rappelons ici les définitions (classiques) ainsi que quelques propriétés immédiates.

Soient $n \geq 1$ et A un groupe abélien d'exposant divisant n (i.e. un \mathbb{Z}/n -module). Si l'on se donne une application $\phi : A \times A \rightarrow \mathbb{Z}/n$, alors on dit que (A, ϕ) est un n -**module bilinéaire** si ϕ est une application \mathbb{Z}/n -bilinéaire. Par définition, le **groupe sous-jacent** au module bilinéaire (A, ϕ) est A et la **forme bilinéaire** associée à (A, ϕ) est l'application ϕ .

Dans toute la suite, on fixe n un entier supérieur ou égal à 1. De plus, les modules bilinéaires que nous allons considérer dans la suite seront tous supposés finis.

Soit (A, ϕ) un n -module bilinéaire, on dit que (A, ϕ) est un n -**module alterné** si $\phi(a, a) = 0$ pour tout $a \in A$. Si (A, ϕ) est un n -module alterné alors pour tout $a, b \in A$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(a + b, a + b) && \text{car } (A, \phi) \text{ est alterné} \\ &= \phi(a, a) + \phi(a, b) + \phi(b, a) + \phi(b, b) && \text{par "bilinéarité"} \\ &= \phi(a, b) + \phi(b, a) && \text{car } (A, \phi) \text{ est alterné} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $a, b \in A$, on a $\phi(a, b) = -\phi(b, a)$. On résumera cela en disant que si (A, ϕ) est un n -module alterné alors, en particulier ϕ est antisymétrique (la réciproque est vraie si 2 est inversible modulo n).

Soient (A, ϕ) un n -module alterné et $a, b \in A$, on dit que a est **orthogonal** à b si $\phi(a, b) = 0$. Comme A est alterné, tout élément de A est orthogonal à lui-même et la relation d'orthogonalité est symétrique par antisymétrie de la forme bilinéaire ϕ .

Soient (A, ϕ) un n -module alterné et S un sous-ensemble de A . On définit S^\perp l'**orthogonal** de S comme l'ensemble des éléments de A orthogonaux à S . On peut directement vérifier que S^\perp est un sous-groupe de A .

Soient (A, ϕ) un n -module alterné et B un sous-groupe de A alors le n -module bilinéaire $(B, \phi|_{B \times B})$ est également un n -module alterné appelé le n -**sous-module induit** sur B par A .

Soient (A_1, ϕ_1) et (A_2, ϕ_2) deux n -modules alternés, on définit la **somme orthogonale** de ces modules par :

$$(A_1, \phi_1) \overset{\perp}{\oplus} (A_2, \phi_2) := (A, \phi)$$

Avec $A := A_1 \oplus A_2$ et $\phi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \phi_1(a_1, b_1) + \phi_2(a_2, b_2)$. Il s'agit d'une vérification immédiate de voir que (A, ϕ) est un n -module alterné, que $A_1 \leq A_2^\perp$ ainsi que $A_2 \leq A_1^\perp$ et que le n -sous-module induit par A sur A_i est (A_i, ϕ_i) .

Réciproquement si (A, ϕ) est un n -module alterné et B, C sont deux sous-groupes de A tels que $A = B \oplus C$ avec $B \leq C^\perp$, on peut vérifier que le module (A, ϕ) est somme des deux sous-modules induits sur B et C par A .

Soit A un \mathbb{Z}/n -module fini, on définit A^* , le **dual** de A comme le groupe $A^* := \text{Mor}(A, \mathbb{Z}/n)$. Un résultat pas tout à fait trivial (cela utilise la classification des groupes abéliens finis) montre que A est isomorphe à A^* en tant que groupe. Remarquons que l'isomorphisme entre ces deux groupes n'est pas canonique.

Soit (A, ϕ) un n -module alterné, nous définissons l'**application duale** associée à (A, ϕ) comme étant l'application :

$$\phi^\dagger : \begin{cases} A & \longrightarrow & A^* \\ a & \longmapsto & b \mapsto \phi(a, b) \end{cases}$$

Le **noyau** K_ϕ de (A, ϕ) est, par définition, le noyau $\ker(\phi^\dagger)$ de l'application ϕ^\dagger . Autrement dit $K_\phi = A^\perp$ i.e. l'ensemble des éléments de A qui sont orthogonaux à tout élément de A .

Soit (A, ϕ) un n -module alterné, on dit que (A, ϕ) est un **n -module symplectique** si son noyau K_ϕ est trivial (i.e. l'application ϕ est non-dégénérée).

On remarque que l'on peut associer à tout n -module alterné (A, ϕ) un n -module symplectique (B, ϕ_B) en posant $B := A/K_\phi$ et :

$$\phi_B(a_1 \text{ mod } K_\phi, a_2 \text{ mod } K_\phi) := \phi(a_1, a_2)$$

Le fait que (B, ϕ_B) soit bien défini et constitue un n -module symplectique est clair. Ce module symplectique sera toujours noté $(A/K_\phi, \bar{\phi})$ et appelé le **n -module symplectique** associé à (A, ϕ) .

Un exemple particulièrement important de n -module symplectique (et classique) est construit de la manière suivante :

Exemple 6

Soit B be un groupe abélien d'exposant divisant n , on le considère donc comme un \mathbb{Z}/n -module. On définit $A := B \times B^*$ et :

$$\phi : \begin{cases} A \times A & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n \\ ((a_1, \psi_1), (a_2, \psi_2)) & \longmapsto & \psi_2(a_1) - \psi_1(a_2) \end{cases}$$

Alors (A, ϕ) est n -module symplectique. Dans la suite on notera un tel module symplectique $B \times B^*$ (la forme bilinéaire alternée sous-entendue est la forme ϕ ci-dessus).

Soient (A, ϕ) un n -module alterné et S un sous-ensemble de A . On dit que S est **isotrope** si $S \subseteq S^\perp$. Si de plus $S = S^\perp$ alors S est un sous-groupe de A appelé **lagrangien** de (A, ϕ) .

Dans l'exemple 6 ci-dessus, les sous-groupes B et B^* de A sont tous les deux des lagrangiens de (A, ϕ) .

Soient (A, ϕ) un n -module alterné et (A', ϕ') un n' -module alterné, on dit que (A, ϕ) et (A', ϕ') sont **isométriques** s'il existe un isomorphisme de groupes $g : A \rightarrow A'$ vérifiant $\phi = g^* \phi'$ où l'on voit ϕ et ϕ' comme deux applications à valeurs dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} (ce groupe contient un unique sous-groupe cyclique de cardinal donné). La relation d'isométrie entre les modules alternés est clairement une relation d'équivalence.

La nécessité d'avoir une liberté sur le n vient de la remarque suivante, si l'on donne à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ deux structures de module alterné donnée respectivement par l'application nulle dans $\mathbb{Z}/2$ et dans $\mathbb{Z}/4$, on veut pouvoir identifier ces deux modules. Cette définition est d'ailleurs cohérente avec [Wal64], où les modules bilinéaires finis sont définis avec une forme bilinéaire allant dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Dans le cadre où cela va s'appliquer pour nous, on préfère conserver la donnée de n .

Par abus de notations, à chaque fois que cela ne posera pas d'ambiguïté, nous désignerons un module (A, ϕ) par son groupe sous-jacent A .

Avant de passer aux propositions qui vont nous servir dans la suite, on définit une notation qui nous servira essentiellement dans les exemples. Si A est un groupe abélien fini de type (d_r, \dots, d_1) muni d'une n -forme bilinéaire

alternée ϕ , cela signifie que A est isomorphe au produit de \mathbb{Z}/d_i pour i allant de 1 à r . Si l'on fixe, pour tout $1 \leq i \leq r$, un générateur e_i de \mathbb{Z}/d_i alors il est clair que pour donner ϕ , il suffit de donner les valeurs de ϕ en les (e_i, e_j) . On associe donc à tout ϕ , n -forme bilinéaire alternée la matrice :

$$M_\phi \in M_r(\mathbb{Z}/n) \text{ définie par } (M_\phi)_{i,j} := \phi(e_i, e_j) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq r$$

Il est évident que M_ϕ est alors antisymétrique. Réciproquement, tout matrice antisymétrique M de $M_r(\mathbb{Z}/n)$ vérifiant que l'ordre de $M_{i,j}$ divise celui de e_i et e_j définit une n -forme bilinéaire alternée sur A .

Dans les exemples, on prendra généralement un groupe abélien sous sa forme donnée par la classification des groupes abéliens finis, avec sa base évidente et l'on écrira une matrice antisymétrique pour décrire la forme alternée associée. On commence avec une proposition élémentaire :

Proposition 41

Soient $n \geq 1$, (A, ϕ) un n -module symplectique et B un sous-groupe de A alors :

1. $|B||B^\perp| = |A|$ et $B^{\perp\perp} = B$.
2. Si le sous-module induit sur B par (A, ϕ) est un n -module symplectique alors le sous module induit sur B^\perp par (A, ϕ) est un n -module symplectique, de plus $A = B \oplus B^\perp$.

Démonstration : Voir la proposition 2.2 de [AT86] ou le lemme 1 de [Wal64]. ■

Alors que les modules alternés, en général, sont assez différents les uns des autres, la proposition suivante implique que tout module symplectique est isométrique à un construit comme dans l'exemple 6. En particulier l'ensemble des modules symplectiques est assez rigide.

Corollaire 13

Soient $n \geq 1$ et (A, ϕ) un n -module symplectique. Il existe $B \leq A$ tel que (A, ϕ) soit isométrique à $B \times B^*$.

Démonstration : Voir le lemme 7 de [Wal64] ou le théorème 4.1 dans [AT86]. ■

Cette construction peut être vue comme l’analogie d’une base symplectique pour (A, ϕ) (i.e. une ”base” de B en tant que groupe abélien fini et la ”base duale” dans B^*). Une conséquence directe de ce corollaire est que deux modules symplectiques (A, ϕ) et (A', ϕ') sont isométriques si et seulement si A et A' sont isomorphes en tant que groupe.

Il est remarquable qu’une telle base symplectique existe pour ces modules finis (comme pour le cas des formes bilinéaires sur les K -espaces vectoriels). Alors que les K -espaces vectoriels munis d’une forme alternée (pas forcément symplectique) sont toujours somme du noyau et d’un complémentaire non-dégénéré, ce n’est pas le cas pour les modules alternés généraux tels que nous les avons définis. En effet, on peut considérer le contre-exemple suivant :

Contre-exemple 4

Soit $A := \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/8$ vu comme un $\mathbb{Z}/8$ -module. Notons $e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0)$ et $e_3 := (0, 0, 1)$. Alors dans la base e_1, e_2, e_3 , on définit la forme alternée ϕ sur A par sa matrice :

$$M_\phi := \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors le noyau K_ϕ de (A, ϕ) n’est pas facteur direct de A , en particulier, A n’est pas somme de son noyau et d’un module non-dégénéré.

Démonstration : Par un calcul direct, on peut vérifier que $K_\phi = \langle e_1 + 2e_2 + 2e_3 \rangle$ isomorphe à $\mathbb{Z}/4$. On remarque que $2(e_1 + 2e_2 + 2e_3) = 4e_3 \in K_\phi$. De plus si $(x, y, z) \in A$ alors $4(x, y, z) = (0, 0, 4z)$ donc tout élément $a \in A$ d’ordre 8 vérifie que $4a = 4e_3 \in K_\phi$. En particulier, K_ϕ n’est pas facteur direct de A . ■

Cet exemple simple permet de justifier qu’il n’existe pas caractérisation simple des modules alternés indécomposables (en effet s’il l’était alors le noyau serait facteur direct). Notons un autre corollaire de la proposition 41 :

Corollaire 14

Soient $n \geq 1$ et (A, ϕ) un n -module symplectique, alors tout lagrangien L de A est de cardinal $\sqrt{|A|}$.

Démonstration : Par définition d’un lagrangien, $L = L^\perp$, en appliquant le point (1) de la proposition 41, on a $|L|^2 = |A|$. ■

Dans leur papier [AT86], J.-P. Tignol et S.A. Amitsur se sont intéressés aux lagrangiens des modules symplectiques, ils appliquent cela aux algèbres à divisions (cf [AT85]). En ce qui nous concerne, nous allons plutôt nous intéresser aux lagrangiens des modules alternés. On rappelle donc quelques résultats sur les lagrangiens :

Proposition 42

Soient $n \geq 1$ et (A, ϕ) un n -module alterné. Les lagrangiens de A sont exactement les éléments maximaux pour l'inclusion parmi les groupes isotropes. Autrement dit, un sous-groupe isotrope L de A est un lagrangien de A si et seulement si pour tout K' isotrope contenant L on ait $K' = L$.

Démonstration : Soit L un sous-groupe isotrope de A . Supposons que L soit un lagrangien, alors si K' est un isotrope de A contenant L , $L^\perp \supseteq K'$ car K' est orthogonal à L donc à L^\perp . Or L est lagrangien donc $L = L^\perp$ ainsi $K' \subseteq L$, or $K' \supseteq L$ par hypothèse donc $L = K'$ et L est donc maximal parmi les isotropes de A .

Supposons que L ne soit pas lagrangien. Comme L est isotrope, nous avons que $L \leq L^\perp$ et il existe $a \in L^\perp$ qui n'est pas dans L . Définissons $K' := \langle L, a \rangle$, clairement $L \leq K'$ et $K' \neq L$, de plus L étant isotrope et orthogonal à a par hypothèse, K' est un groupe isotrope. Ainsi L n'est pas maximal parmi les sous-groupes isotropes de A . ■

Soit (A, ϕ) un n -module alterné alors l'ensemble des sous-groupes isotropes de A est non-vide (il contient le groupe trivial) et fini (car A est fini). Il existe donc un élément maximal pour l'inclusion. En vertu de cette proposition tout module alterné admet l'existence d'un lagrangien. De plus si K est un sous-groupe isotrope, il va toujours exister un sous-groupe isotrope maximal contenant K , ainsi tout sous-groupe isotrope est contenu dans un lagrangien. En particulier, pour tout $a \in A$, il existe un lagrangien contenant a (en appliquant ce que l'on vient de faire à $K = \langle a \rangle$).

La proposition qui suit est une généralisation simple du corollaire 14 :

Proposition 43

Soient $n \geq 1$ et (A, ϕ) un n -module alterné. Pour tout lagrangien L de A le cardinal de L est égal à $\sqrt{|A||K_\phi|}$.

Démonstration : Notons :

$$\pi : \begin{cases} A & \longrightarrow & A/K_\phi \\ a & \longmapsto & a \text{ mod } K_\phi \end{cases}$$

Par la proposition 42 les lagrangiens de A sont les isotropes maximaux de A et les lagrangiens de A/K_ϕ sont les isotropes maximaux de A/K_ϕ .

L'application π envoie un isotrope de A sur un isotrope de A/K_ϕ (par définition de la forme symplectique sur A/K_ϕ) et l'image réciproque par π d'un isotrope de A/K_ϕ est un isotrope de A . De plus, les applications définies sur les ensembles isotropes π et π^{-1} sont croissantes pour l'inclusion. On en déduit qu'un isotrope de A est maximal si et seulement si son image via π l'est. En particulier, par la proposition 42, un isotrope de A est un lagrangien si et seulement si sa projection dans A/K_ϕ l'est.

Prenons L un lagrangien de A alors $\pi(L)$ est un lagrangien de A/K_ϕ . Par le corollaire 14 :

$$|\pi(L)| = \sqrt{|A|/|K_\phi|} \tag{3.9}$$

Comme L est un lagrangien, L contient le noyau K_ϕ de A , par suite :

$$\begin{aligned} |L| &= |K_\phi| |\pi(L)| \\ &= |K_\phi| \sqrt{|A|/|K_\phi|} \text{ par l'équation (3.9)} \\ &= \sqrt{|A||K_\phi|}. \end{aligned}$$

■

On retiendra donc que le cardinal des lagrangiens des modules alternés est constant. Ce n'est pas le cas de la classe d'isomorphisme des lagrangiens.

Exemple 7

Soit (A, ϕ) le module alterné défini dans le contre-exemple 4. Alors $A = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/8$, si l'on note $e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ dans A alors les sous-groupes $L_1 := \langle e_3, e_1 + 2e_2 \rangle$ et $L_2 := \langle e_1, 2e_2, 2e_3 \rangle$ sont des lagrangiens de A et :

$$\begin{aligned} L_1 &\text{ est isomorphe à } \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8 \\ L_2 &\text{ est isomorphe à } \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \end{aligned}$$

En particulier, L_1 n'est pas isomorphe à L_2 .

Démonstration : D'après le contre-exemple 4, $|K_\phi| = 4$ donc le cardinal d'un lagrangien de (A, ϕ) est $\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 4} = 16$ par la proposition 43.

On vérifie directement que L_1 et L_2 sont isotropes.

De plus $e_1 + 2e_2$ est d'ordre 2 et n'est pas dans $\langle e_3 \rangle$ ainsi L_1 est isomorphe à $\langle e_1 + 2e_2 \rangle \times \langle e_3 \rangle$. Donc L_1 est isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8$. En particulier, L_1 est isotrope et a le cardinal d'un lagrangien donc il est lagrangien (par maximalité des lagrangiens).

Finalement, il est clair que L_2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$. Le groupe L_2 est donc isotrope de cardinal, le cardinal d'un lagrangien, il est donc lagrangien par maximalité des lagrangiens. ■

Parmi les n -modules alternés, nous distinguons une classe particulière. On dit qu'un n -module alterné (A, ϕ) est **n -sous-symplectique** s'il existe un groupe abélien B d'ordre n tel que, en tant que n -module alterné, $(A, \phi) \leq B \times B^*$ (où $B \times B^*$ est muni de sa structure symplectique canonique).

La façon dont vont apparaître ces modules alternés sera toujours de la manière suivante :

Proposition 44

Soit $n \geq 1$ et G un groupe fini tel que G se décompose comme une extension centrale d'un groupe abélien A par un groupe cyclique C engendré par c_0 isomorphe à \mathbb{Z}/n :

$$1 \rightarrow C \rightarrow G \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 1$$

Alors l'application :

$$\phi_G : \begin{cases} A \times A & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n \\ (a, b) & \longmapsto & \phi_G(a, b) \text{ où } [\widehat{a}, \widehat{b}] = c_0^{\phi_G(a, b)} \begin{cases} \widehat{a} \in G \mid \pi(\widehat{a}) = a \\ \widehat{b} \in G \mid \pi(\widehat{b}) = b \end{cases} \end{cases}$$

est bien définie (ne dépend pas des relevés \widehat{a} et \widehat{b} choisis). De plus, (A, ϕ_G) est un module alterné.

Démonstration : Si $a, b \in A$, $\widehat{a}, \widehat{a}'$ sont deux relevés de a dans G et $\widehat{b}, \widehat{b}'$ sont deux relevés de b dans G alors, \widehat{a} et \widehat{a}' diffèrent par un élément de C qui est central, par suite :

$$[\widehat{a}', \widehat{b}'] = [\widehat{a}, \widehat{b}']$$

De la même façon :

$$[\widehat{a}, \widehat{b}'] = [\widehat{a}, \widehat{b}]$$

Ainsi on a $[\widehat{a}', \widehat{b}'] = [\widehat{a}, \widehat{b}]$. De plus $\pi([\widehat{a}, \widehat{b}]) = [a, b] = 0$ car A est abélien. Ainsi ϕ_G est bien défini à valeurs dans $C = \mathbb{Z}/n$.

En appliquant le lemme 15 (par définition C est inclus dans le centre de G), l'application ϕ_G est bilinéaire. Cela implique, en particulier, que (A, ϕ_G) est un module bilinéaire. Comme il est clair que \widehat{a} commute avec \widehat{a} pour tout $a \in A$, on a $\phi_G(a, a) = 0$. Ainsi (A, ϕ_G) est un module alterné. ■

En général, les extensions de A par \mathbb{Z}/n ne sont pas uniquement déterminées par ϕ_G . Toutefois, dans le lemme suivant, nous allons constater que, en rajoutant quelques conditions (sur l'ordre des relevés des éléments d'une partie génératrice bien choisie de A), on obtient unicité. Ce lemme sera utilisé dans la sous-section suivante et dans le chapitre 4.

Lemme 21

Soit $n \geq 1$, C un groupe cyclique d'ordre n (noté multiplicativement, généré par c_0) et A un groupe abélien fini. Notons (d_r, \dots, d_1) le type de A , alors A est isomorphe à $\mathbb{Z}/d_r \times \dots \times \mathbb{Z}/d_1$, on note e_i l'élément de A envoyé sur $(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{place } i}, 0, \dots, 0)$.

Prenons G et H deux extensions centrales de A par C , on note π_G (resp. π_H) la projection de G (resp. H) sur A . Si $\phi_G = \phi_H$ et pour tout $1 \leq i \leq r$, il existe $g_i \in G$ (resp. $h_i \in H$) tel que $\pi_G(g_i) = e_i$ (resp. $\pi_H(h_i) = e_i$) et l'ordre de g_i est égal à l'ordre de h_i qui est d_i ou $2d_i$ alors il existe un isomorphisme f entre G et H tel que f envoie $c_0 \in G$ sur $c_0 \in H$.

Démonstration : On définit une section ensembliste u pour π_G et v pour π_H . Pour tout élément $a \in A$, par définition des (e_i) , il existe un unique r -uplet $(\alpha_r, \dots, \alpha_1)$ d'entiers vérifiant :

$$a = \sum_{i=1}^r \alpha_i e_i \text{ et } 0 \leq \alpha_i < d_i$$

On définit alors $u(a) := g_r^{\alpha_r} \dots g_1^{\alpha_1}$ et $v(a) := h_r^{\alpha_r} \dots h_1^{\alpha_1}$. Il est clair que u et v sont respectivement des sections ensemblistes des morphismes π_G et π_H . Tout élément de G s'écrit de manière unique comme le produit d'un élément c de C et d'un élément de la forme $u(a)$ où $a \in A$. On définit l'application f de la manière suivante :

$$f : \begin{cases} G & \longrightarrow & H \\ cu(a) & \longmapsto & cv(a) \end{cases}$$

Ensemblement, on voit que f est une application bijective. De plus, f fixe point par point les éléments de C . Il ne reste donc plus qu'à montrer que f est un morphisme de groupes.

Soit $k_1, k_2 \in G$, on écrit $k_1 = c_1 u(a_1)$, $k_2 = c_2 u(a_2)$ alors :

$$\begin{aligned} f(k_1 k_2) &= f(k_1) f(k_2) \\ \Leftrightarrow f(c_1 c_2 u(a_1) u(a_2)) &= c_1 c_2 u(a_1) u(a_2) \\ \Leftrightarrow f(\underbrace{c_1 c_2 u(a_1) u(a_2) u(a_1 a_2)^{-1}}_{\in C} u(a_1 a_2)) &= c_1 c_2 v(a_1) v(a_2) \\ \Leftrightarrow c_1 c_2 u(a_1) u(a_2) u(a_1 a_2)^{-1} v(a_1 a_2) &= c_1 c_2 v(a_1) v(a_2) \\ \Leftrightarrow u(a_1) u(a_2) u(a_1 a_2)^{-1} &= v(a_1) v(a_2) v(a_1 a_2)^{-1} \end{aligned}$$

Autrement dit, il nous faut vérifier que pour tout $a_1, a_2 \in A$:

$$u(a_1) u(a_2) u(a_1 a_2)^{-1} = v(a_1) v(a_2) v(a_1 a_2)^{-1} \quad (3.10)$$

Pour $i = 1, 2$, on note :

$$a_i := \sum_{j=1}^r \gamma_j^i e_j \text{ avec } 0 \leq \gamma_j^i < d_j$$

On écrit également pour $1 \leq j \leq r$:

$$\delta_j := \begin{cases} \gamma_j^1 + \gamma_j^2 & \text{si } \gamma_j^1 + \gamma_j^2 < d_j \\ \gamma_j^1 + \gamma_j^2 - d_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Clairement :

$$a_1 + a_2 = \sum_{j=1}^r \delta_j e_j \text{ avec } 0 \leq \delta_j < d_j$$

Par définition de u et les expressions données plus haut :

$$\begin{aligned} u(a_1) u(a_2) &= g_r^{\gamma_r^1} \dots g_1^{\gamma_1^1} g_r^{\gamma_r^2} \dots g_1^{\gamma_1^2} \\ &= g_r^{\gamma_r^1} \dots g_2^{\gamma_2^1} g_r^{\gamma_r^2} g_1^{\gamma_1^1} c_0^{\gamma_1^1 \gamma_r^2 \phi_G(e_1, e_r)} g_{r-1}^{\gamma_{r-1}^2} \dots g_1^{\gamma_1^2} \end{aligned}$$

On a utilisé l'égalité $g_r g_1 = c_0^{\phi_G(e_r, e_1)} g_1 g_r$ et le fait que c_0 est dans le centre de G . Par récurrence immédiate :

$$u(a_1)u(a_2) = g_r^{\gamma_r^1 + \gamma_r^2} g_{r-1}^{\gamma_{r-1}^1} \cdots g_1^{\gamma_1^1} g_{r-1}^{\gamma_{r-1}^2} \cdots g_1^{\gamma_1^2} \prod_{i=2}^{r-1} c_0^{\phi_G(e_i, e_r) \gamma_i^1 \gamma_i^2}$$

On peut répéter le processus de $g_{r-1}^{\gamma_{r-1}^2}$ à $g_1^{\gamma_1^2}$:

$$u(a_1)u(a_2) = g_r^{\gamma_r^1 + \gamma_r^2} \cdots g_1^{\gamma_1^1 + \gamma_1^2} \prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^{j-1} c_0^{\phi_G(e_i, e_j) \gamma_i^1 \gamma_j^2}$$

On remarque maintenant que pour $1 \leq i \leq r$:

$$g_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i} \text{ est dans } C \text{ donc central}$$

Aussi :

$$\begin{aligned} g_r^{\gamma_r^1 + \gamma_r^2} \cdots g_1^{\gamma_1^1 + \gamma_1^2} &= g_r^{\gamma_r^1 + \gamma_r^2 - \delta_r} g_r^{\delta_r} \cdots g_1^{\gamma_1^1 + \gamma_1^2 - \delta_1} g_1^{\delta_1} \\ &= g_r^{\gamma_r^1 + \gamma_r^2 - \delta_r} \cdots g_1^{\gamma_1^1 + \gamma_1^2 - \delta_1} g_r^{\delta_r} \cdots g_1^{\delta_1} \\ &= \prod_{i=1}^r g_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i} u(a_1 + a_2) \end{aligned}$$

Au final, on vient de montrer :

$$u(a_1)u(a_2)u(a_1 + a_2)^{-1} = \prod_{i=1}^r g_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i} \prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^{j-1} c_0^{\phi_G(e_i, e_j) \gamma_i^1 \gamma_j^2} \quad (3.11)$$

Par les mêmes arguments appliqués à H :

$$v(a_1)v(a_2)v(a_1 + a_2)^{-1} = \prod_{i=1}^r h_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i} \prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^{j-1} c_0^{\phi_H(e_i, e_j) \gamma_i^1 \gamma_j^2} \quad (3.12)$$

Par hypothèse, ϕ_G et ϕ_H sont égaux, ainsi :

$$\prod_{i=1}^{j-1} c_0^{\phi_G(e_i, e_j) \gamma_i^1 \gamma_j^2} = \prod_{i=1}^{j-1} c_0^{\phi_H(e_i, e_j) \gamma_i^1 \gamma_j^2} \quad (3.13)$$

Soit $1 \leq i \leq r$, par hypothèse g_i et h_i sont du même ordre qui est soit d_i soit $2d_i$. Si l'ordre de g_i est d_i alors, comme $\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i = 0$ ou d_i , on en déduit que $h_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i} = 1_G = g_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i}$.

Si g_i et h_i sont d'ordre $2d_i$ alors si $\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i = 0$, il est clair que $h_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i} = 1_G = g_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i}$, sinon $\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i = d_i$, auquel cas $h_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i}$ et $g_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i}$ sont deux éléments d'ordre 2 dans C , comme C est cyclique il en admet au plus un donc $h_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i} = g_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i}$.

Dans tous les cas $h_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i} = g_i^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i}$ pour tout $1 \leq i \leq r$ donc :

$$\prod_{i=1}^r u(a_i)^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i} = \prod_{i=1}^r v(b_i)^{\gamma_i^1 + \gamma_i^2 - \delta_i}$$

En combinant cette égalité avec les équations 3.11, 3.12 et 3.13 nous obtenons :

$$u(a_1)u(a_2)u(a_1 + a_2)^{-1} = v(a_1)v(a_2)v(a_1 + a_2)^{-1}$$

Nous avons vu au début de la preuve (voir page 160) qu'il suffisait de vérifier cela pour tout $a_1, a_2 \in A$ pour en déduire que f est un morphisme de groupes. D'après ce que l'on avait dit, le fait que f soit bijectif est automatique. ■

Dans la suite, nous utilisons ces résultats pour aller vers une classification des classes de conjugaison des centralisateurs de sous-groupes irréductibles de $PSL(n, \mathbb{C})$. En particulier, nous verrons que les n -modules alternés sous-symplectiques auront un rôle particulier.

3.4.2 Classe de conjugaison des centralisateurs comme module alterné

Pour faire apparaître les modules alternés, nous allons reformuler le problème. Soit $n \geq 1$, on note \mathcal{Z}_n l'ensemble formé par les centralisateurs d'irréductibles dans $PSL(n, \mathbb{C})$ et \mathcal{U}_n l'ensemble de leurs tirés en arrière dans $SL(n, \mathbb{C})$. De plus, si A est un groupe n -compatible, alors on note $\mathcal{Z}_n(A)$ l'ensemble des éléments de \mathcal{Z}_n qui sont isomorphes à A et $\mathcal{U}_n(A)$ l'ensemble de leurs tirés en arrière dans $SL(n, \mathbb{C})$. Le théorème de caractérisation assure que :

$$\mathcal{Z}_n = \bigcup_{A \text{ } n\text{-compatible}} \mathcal{Z}_n(A) \text{ et si } A \text{ est } n\text{-compatible alors } \mathcal{Z}_n(A) \neq \emptyset$$

Il est clair que $PSL(n, \mathbb{C})$ agit par conjugaison sur \mathcal{Z}_n et $\mathcal{Z}_n(A)$. Ce que nous souhaitons déterminer est $\mathcal{Z}_n/PSL(n, \mathbb{C})$. Pour cela nous allons

plutôt chercher à classifier \mathcal{U}_n . Si U est un élément de \mathcal{U}_n , on remarque que $Z(SL(n, \mathbb{C}))$ est inclus dans U . Nous dirons que U_1 et U_2 dans \mathcal{U}_n sont **équivalents** s'il existe un isomorphisme $\psi : U_1 \rightarrow U_2$ fixant $Z(SL(n, \mathbb{C}))$ point par point. Autrement dit s'il existe ψ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & Z(SL(n, \mathbb{C})) & \longrightarrow & U_1 & \xrightarrow{\pi_n} & \pi_n(U_1) & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \psi & & & & \\ 1 & \longrightarrow & Z(SL(n, \mathbb{C})) & \longrightarrow & U_2 & \xrightarrow{\pi_n} & \pi_n(U_2) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Si U_1 et U_2 sont équivalents alors on écrira $U_1 \approx U_2$. Cette relation est bien sûr une relation d'équivalence. Vu le diagramme commutatif plus haut, si U_1 et U_2 sont équivalents alors ψ descend en un isomorphisme de groupes entre $\pi_n(U_1)$ et $\pi_n(U_2)$, ainsi si U_1 et U_2 sont équivalents alors ils appartiennent au même $\mathcal{U}_n(A)$.

Le premier résultat, stipule que la classification des n -centralisateurs (\mathcal{Z}_n) modulo conjugaison ou la classification des n -centralisateurs étendus (\mathcal{U}_n) modulo équivalence est la même chose.

Proposition 45

Soient $n \geq 1$, H_1 et H_2 deux sous-groupes irréductibles de $SL(n, \mathbb{C})$. Alors $Z_n(H_1)$ et $Z_n(H_2)$ sont conjugués si et seulement si $U_n(H_1)$ et $U_n(H_2)$ sont équivalents.

En particulier, nous obtenons une bijection entre $\mathcal{Z}_n/PSL(n, \mathbb{C})$ et \mathcal{U}_n/\approx via l'application π_n .

Démonstration : Supposons que $Z_n(H_1)$ et $Z_n(H_2)$ soient conjugués. Prenons $g \in PSL(n, \mathbb{C})$ tel que $gZ_n(H_1)g^{-1} = Z_n(H_2)$. Soit \hat{g} un relevé de g dans $SL(n, \mathbb{C})$, on a $\hat{g}U_n(H_1)\hat{g}^{-1} = U_n(H_2)$. La conjugaison par \hat{g} restreinte à $U_n(H_1)$ induit alors un isomorphisme entre $U_n(H_1)$ et $U_n(H_2)$ fixant point par point $Z(SL(n, \mathbb{C}))$.

Réciproquement s'il existe un isomorphisme ψ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & Z(SL(n, \mathbb{C})) & \longrightarrow & U_n(H_1) & \xrightarrow{\pi_n} & Z_n(H_1) & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \psi & & & & \\ 1 & \longrightarrow & Z(SL(n, \mathbb{C})) & \longrightarrow & U_n(H_2) & \xrightarrow{\pi_n} & Z_n(H_2) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Pour $i = 1, 2$, notons ι_{H_i} la représentation standard de $U_n(H_i)$ dans $SL(n, \mathbb{C})$ et χ_{H_i} son caractère (cf début de la sous-section 3.2.2). Notons de plus $\rho := \iota_{H_2} \circ \psi$ et $\chi := tr \circ \rho$ le caractère de ρ .

Alors ι_{H_1} et ρ sont deux représentations de $U_n(H_1)$ dans $SL(n, \mathbb{C})$. Par la proposition 30, pour $u \in U_n(H_1)$:

$$\chi_{H_1}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \notin \langle \xi I_n \rangle \\ n\xi^k & \text{si } u = \xi^k I_n \text{ où } k \in \mathbb{Z}/n \end{cases}$$

De plus, si $u \in U_n(H_1)$ et u n'est pas central alors $\psi(u) \in U_n(H_2)$ n'est pas central et si $u = \xi^k I_n$ alors $\psi(u) = \xi^k I_n$, en appliquant la proposition 30 à $U_n(H_2)$, on obtient que pour tout $u \in U_n(H_1)$:

$$\chi(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \notin \langle \xi I_n \rangle \\ n\xi^k & \text{si } u = \xi^k I_n \text{ où } k \in \mathbb{Z}/n \end{cases}$$

Les deux représentations de $U_n(H_1)$, ι_{H_1} et ρ ont même caractère, elles sont donc conjuguées par la théorie de la représentation des groupes finis (cf [Ser77]). En particulier, il existe $\hat{g} \in SL(n, \mathbb{C})$ tel que \hat{g} conjugue $U_n(H_1)$ (l'image de ι_{H_1}) en $U_n(H_2)$ (l'image de ρ). Il est alors clair que $g := \pi_n(\hat{g})$ conjugue $Z_n(H_1)$ en $Z_n(H_2)$. ■

Cette proposition reformule le problème de la classification des éléments de $Z_n/PSL(n, \mathbb{C})$ en un problème sur la classification des éléments de \mathcal{U}_n/\approx . Nous allons faire correspondre à ces objets des modules alternés.

Proposition 46

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$. Pour tout $x \in Z_n(H)$ on choisit un relevé \hat{x} de x dans $U_n(H)$. On définit une forme alternée (comme dans la proposition 44) :

$$\phi_H : \begin{cases} Z_n(H) \times Z_n(H) & \longrightarrow \mathbb{Z}/n \\ (a, b) & \longmapsto \phi_H(a, b) \text{ vérifiant } [\hat{a}, \hat{b}] = \xi^{\phi_H(a, b)} I_n \end{cases}$$

Le noyau K_{ϕ_H} du module alterné $(Z_n(H), \phi_H)$ est l'image du centre de $U_n(H)$ par π_n .

Si $U_n(H_1)$ et $U_n(H_2)$ sont deux éléments équivalents de \mathcal{U}_n alors $(Z_n(H_1), \phi_{H_1})$ et $(Z_n(H_2), \phi_{H_2})$ sont isométriques.

Démonstration : L'existence de cette forme alternée est l'objet de la proposition 44.

Soit $a \in Z_n(H)$ alors $a \in K_{\phi_H}$ si et seulement si $[\widehat{a}, \widehat{b}] = I_n$ pour tout $b \in Z_n(H)$, si et seulement si $\widehat{a} \in Z(U_n(H))$. Ainsi le noyau de $(Z_n(H), \phi_H)$ correspond bien au centre de $U_n(H)$.

Si ψ est un isomorphisme entre $U_n(H_1)$ et $U_n(H_2)$ fixant point par point le centre de $SL(n, \mathbb{C})$ alors ψ passe au quotient par $Z(SL(n, \mathbb{C}))$ et induit un isomorphisme $\bar{\psi}$ entre $Z_n(H_1)$ et $Z_n(H_2)$. Si $a, b \in Z_n(H_1)$:

$$\begin{aligned} \phi_{H_2}(\bar{\psi}(a), \bar{\psi}(b)) &= [\widehat{\bar{\psi}(a)}, \widehat{\bar{\psi}(b)}] \\ &= \psi([\widehat{a}, \widehat{b}]) && \text{par définition de } \bar{\psi} \\ &= \psi(\phi_{H_1}(a, b)) && \text{par définition de } \phi_{H_1} \\ &= \phi_{H_1}(a, b) && \text{car } \psi \text{ fixe le centre de } SL(n, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

En particulier, on voit que le module $(Z_n(H_1), \phi_{H_1})$ est isométrique au module $(Z_n(H_2), \phi_{H_2})$ avec le fait que $\bar{\psi}$ soit un isomorphisme de groupes. ■

La proposition suivante stipule que deux éléments de \mathcal{U}_n dont les n -modules alternés sont isométriques sont équivalents.

Proposition 47

Soient $n \geq 1$, H_1 et H_2 deux sous-groupes irréductibles de $SL(n, \mathbb{C})$ tels que $(Z_n(H_1), \phi_{H_1})$ et $(Z_n(H_2), \phi_{H_2})$ soient isométriques, alors les éléments $U_n(H_1)$ et $U_n(H_2)$ de \mathcal{U}_n sont équivalents.

Démonstration : Prenons H_1 et H_2 deux sous-groupes irréductibles contenus dans $SL(n, \mathbb{C})$ tels que $Z_n(H_i)$ soient isomorphes au même groupe abélien A pour $i = 1, 2$. On suppose de plus que $(Z_n(H_1), \phi_{H_1})$ et $(Z_n(H_2), \phi_{H_2})$ sont isométriques. Notons $g : Z_n(H_1) \rightarrow Z_n(H_2)$ l'isomorphisme de groupes tel que $\phi_{H_2} = g^* \phi_{H_1}$. Soit $\pi_i : U_n(H_i) \rightarrow Z_n(H_i)$ la projection canonique.

Quitte à remplacer π_2 par $g \circ \pi_2$, on peut supposer que les groupes $U_n(H_1)$ et $U_n(H_2)$ sont deux extensions centrales d'un même groupe abélien A (égal à $Z_n(H_1)$) par un groupe cyclique d'ordre n ($Z(SL(n, \mathbb{C}))$) et induisent la même forme alternée ϕ via la construction de la proposition 44.

Si (d_r, \dots, d_1) désigne le type de A alors A est isomorphe à $\mathbb{Z}/d_r \times \dots \times \mathbb{Z}/d_1$ et l'on fixe pour $1 \leq i \leq r$, $e_i \in A$ tel que e_i est envoyé sur $(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{place } i}, 0, \dots, 0)$ via l'isomorphisme.

Comme $e_i \in Z_n(H_1)$ est d'ordre d_i , on sait qu'il va exister (par la proposition 28) $g_i \in U_n(H_1)$ et $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tels que $\pi_n(g_i) = e_i$:

$$g_i \text{ soit conjuguée à } \lambda_i \begin{pmatrix} I_{\frac{n}{d_i}} & & & \\ & \xi^{\frac{n}{d_i}} I_{\frac{n}{d_i}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{\frac{n}{d_i}(d_i-1)} I_{\frac{n}{d_i}} \end{pmatrix}$$

De plus :

$$\lambda_i \in \begin{cases} \langle \xi I_n \rangle & \text{si } d_i \text{ est impair} \\ \langle \xi I_n \rangle & \text{si } d_i \text{ est pair et } n/d_i \text{ pair} \\ \sqrt{\xi^{-\frac{n(d_i-1)}{d_i}}} \langle \xi I_n \rangle & \text{si } d_i \text{ est pair et } n/d_i \text{ impair} \end{cases}$$

Ainsi, on en déduit que, quitte à multiplier g_i par un élément de $\langle \xi I_n \rangle$:

$$g_i \text{ est d'ordre } \begin{cases} 2d_i & \text{si } d_i \text{ est pair et } n/d_i \text{ impair} \\ d_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour les mêmes raisons, pour tout $1 \leq i \leq r$, il existe $h_i \in U_n(H_2)$ tel que $\pi_n(h_i) = e_i$ et :

$$h_i \text{ est d'ordre } \begin{cases} 2d_i & \text{si } d_i \text{ est pair et } n/d_i \text{ impair} \\ d_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, on peut toujours choisir les relevés de e_i dans $U_n(H_1)$ et $U_n(H_2)$ de telle sorte qu'ils soient de même ordre d_i ou $2d_i$. On est donc dans les conditions d'application du lemme 21. Par suite, il existe un isomorphisme entre $U_n(H_1)$ et $U_n(H_2)$ fixant point par point le centre de $SL(n, \mathbb{C})$, ceci montre que $U_n(H_1)$ et $U_n(H_2)$ sont équivalents. ■

La proposition 47 a deux corollaires intéressants. Le premier concerne les centralisateurs d'irréductibles de $PSL(n, \mathbb{C})$ dont le cardinal est n^2 .

Corollaire 15

Soient $n \geq 1$ et A un groupe n -compatible d'ordre n^2 . Alors l'ensemble $\mathcal{Z}_n(A)/PSL(n, \mathbb{C})$ est réduit à un élément qui est la classe d'isométrie d'un n -module symplectique.

Démonstration : Le théorème de caractérisation (théorème 3.3) assure que $\mathcal{Z}_n(A)/PSL(n, \mathbb{C})$ contient au moins un élément car A est n -compatible.

Supposons maintenant que A soit isomorphe à $Z_n(H)$, le corollaire 9 implique alors que $Z_n(H)$ est irréductible (vu que $|Z_N(H)| = |A| = n^2$ par hypothèse). Par suite, $U_n(H)$ est irréductible et son centralisateur (par le

lemme de Schur) est réduit au centre de $SL(n, \mathbb{C})$. En particulier le centre de $U_n(H)$ est réduit au groupe $Z(SL(n, \mathbb{C}))$.

La proposition 46 stipule que le radical K_{ϕ_H} de $(Z_n(H), \phi_H)$ est l'image du centre de $U_n(H)$ dans $Z_n(H)$ or, on vient de justifier que ce centre est réduit au groupe $Z(SL(n, \mathbb{C}))$. Par conséquent, K_{ϕ} est trivial et le module $(Z_n(H), \phi_H)$ est un n -module symplectique.

Si l'on choisit maintenant $Z_n(H_1)$ et $Z_n(H_2)$ dans $\mathcal{Z}_n(A)$ alors les n -modules alternés associés $(Z_n(H_1), \phi_{H_1})$ et $(Z_n(H_2), \phi_{H_2})$ sont deux n -modules symplectiques (par ce que l'on vient de faire) vérifiant que $Z_n(H_1)$ est isomorphe à $Z_n(H_2)$ (par définition ils sont tous les deux isomorphes à A), nous avons vu dans la sous-section 3.4.1 que l'on pouvait alors en déduire que $(Z_n(H_1), \phi_{H_1})$ et $(Z_n(H_2), \phi_{H_2})$ étaient isométriques.

En appliquant la proposition 47, $U_n(H_1) \approx U_n(H_2)$ et en appliquant la proposition 45 $Z_n(H_1)$ et $Z_n(H_2)$ sont conjugués l'un à l'autre. En particulier $\mathcal{Z}_n(A)/PSL(n, \mathbb{C})$ a au plus un élément. ■

Le second corollaire va concerner le cas où n est sans facteur carré.

Corollaire 16

Soient $n \geq 1$ sans facteur carré et A un groupe n -compatible. Alors l'ensemble $\mathcal{Z}_n(A)/PSL(n, \mathbb{C})$ est réduit à un élément.

Démonstration : Le théorème de caractérisation (théorème 3.3) assure que $\mathcal{Z}_n(A)/PSL(n, \mathbb{C})$ contient au moins un élément car A est n -compatible.

Soit $Z_n(H) \in \mathcal{Z}_n(A)$, notons d l'exposant de $Z_n(H)$. Le lemme 19 implique que l'on peut trouver un sous-groupe irréductible L de $SL(n/d, \mathbb{C})$ et e divisant d tel que $Z_n(H)$ soit isomorphe à $V \times \mathbb{Z}/d$ où V est un groupe abélien d'exposant divisant d qui se décompose selon une suite exacte :

$$1 \rightarrow Z_{\frac{n}{d}}(L) \rightarrow V \rightarrow \mathbb{Z}/e \rightarrow 1 \tag{3.14}$$

Dans $Z_n(H) = V \times \mathbb{Z}/d$ on choisit a un élément d'ordre d . Raisononnons par l'absurde. Supposons que $Z_{\frac{n}{d}}(L)$ n'est pas trivial.

On peut alors choisir $b \in Z_{\frac{n}{d}}(L)$ d'ordre $d' > 1$ divisant $\frac{n}{d}$. L'ordre de $a + b$ est alors dd' car $\text{pgcd}(d, d')$ divise $\text{pgcd}(d, n/d) = 1$ car n est sans facteur carré. Cela contredit le fait que $Z_n(H)$ soit d'exposant d .

Par suite $Z_{\frac{n}{d}}(L)$ est trivial et donc $Z_n(H)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/e \times \mathbb{Z}/d$.

Par le lemme 19, il existe $u \in U_n(H)$ tel que $x := \pi_n(u) \in Z_n(H)$ soit d'ordre d et tel que :

$$e = [U_n(H) : Z_{U_n(H)}(u)] \quad (3.15)$$

Si l'on écrit $Z_n(H) = \langle y \rangle \times \langle x \rangle$ avec y d'ordre e alors le n -module alterné $(Z_n(H), \phi_H)$ est uniquement déterminé par la valeur de $\phi_H(x, y)$. Supposons que l'ordre de $\phi_H(x, y)$ divise strictement e alors le groupe $B := \langle y^{\frac{e}{e'}} \rangle \times \langle x \rangle$ d'ordre $\frac{de}{e'}$ est exactement l'orthogonal de x dans $Z_n(H)$.

Par suite $\pi_n^{-1}(A) \leq U_n(H)$ est exactement le centralisateur de u dans $U_n(H)$ (cf proposition 46) et donc :

$$[U_n(H) : Z_{U_n(H)}(u)] = [Z_n(H) : A] = \frac{de}{e'} e' = e' < e$$

Ce qui contredit l'égalité 3.15 et donc $\phi_H(x, y)$ est d'ordre exactement e . Quitte à remplacer y par y^k , on peut supposer $\phi_H(x, y) = \frac{n}{e}$. On a donc montré que le module $(Z_n(H), \phi_H)$ est nécessairement isométrique au module :

$$\left(\mathbb{Z}/e \times \mathbb{Z}/d, \phi : ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mapsto \frac{n}{e}(a_1 b_2 - b_1 a_2) \right)$$

En particulier, si $Z_n(H_1)$ et $Z_n(H_2)$ sont deux éléments de $\mathcal{Z}_n(A)$ alors les n -modules alternés associés sont isométriques. Par la proposition 47, $U_n(H_1) \approx U_n(H_2)$ et en appliquant la proposition 45 $Z_n(H_1)$ et $Z_n(H_2)$ sont conjugués l'un à l'autre. En particulier $\mathcal{Z}_n(A)/PSL(n, \mathbb{C})$ a au plus un élément. ■

Ce dernier corollaire implique en particulier que dans le cas sans facteur carré, deux centralisateurs de sous-groupes irréductibles dans $PSL(n, \mathbb{C})$ sont isomorphes si et seulement s'ils sont conjugués. Remarquons que si n admet un facteur carré alors cela devient automatiquement faux (on peut toujours construire un contre-exemple comme le contre-exemple 3).

En particulier, quand n est sans facteur carré, on a une généralisation du théorème 2.1. Cela semble suggérer que l'approche du chapitre 2 pour étudier la variété des caractères se généralise au cas sans facteur carré.

Les groupes n -compatibles d'ordre n^2 auront un rôle particulier dans la dernière sous-section.

3.4.3 Sur une classification possible des classes de conjugaison des centralisateurs

On explique ici comment ce qui a été démontré dans la sous-section 3.4.2 permet d'envisager une classification des classes de conjugaison des centralisateurs.

Soient $n \geq 1$ et A un groupe n -compatible. On définit $\mathcal{A}_n(A)$ l'ensemble des n -modules alternés de groupe sous-jacent A et $\overline{\mathcal{A}}_n(A)$ l'ensemble $\mathcal{A}_n(A)$ quotienté par la relation d'isométrie. Si $(A, \phi) \in \mathcal{A}_n(A)$, on notera $\overline{(A, \phi)}$ sa classe dans $\overline{\mathcal{A}}_n(A)$.

Soit $U_n(H) \in \mathcal{U}_n(A)$ et $f : Z_n(H) \rightarrow A$ un isomorphisme de groupes abstrait entre $Z_n(H)$ et A alors on peut associer à $U_n(H)$ un n -module alterné $(A, f_*\phi_H)$ par la proposition 46. De plus, il est clair que si $f, g : Z_n(H) \rightarrow A$ sont deux isomorphismes, alors $\overline{(A, f_*\phi_H)} = \overline{(A, g_*\phi_H)}$. On note alors la classe associée (indépendante de l'isomorphisme choisi) $\overline{(A, \phi_H)}$. Autrement dit, il existe une application :

$$\Lambda_A : \left| \begin{array}{ll} \mathcal{U}_n(A)/\approx & \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_n(A) \\ U_n(H) & \longmapsto \overline{(A, \phi_H)} \end{array} \right.$$

La proposition 47 assure alors que Λ_A est une application injective. Dans de nombreux cas (e.g. si A est n -compatible d'ordre n^2 ou n sans facteur carré) nous avons vu que l'application Λ_A ne sera pas surjective, autrement dit, il existe certaines contraintes sur les n -modules alternés construits à partir d'un centralisateur de sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$. Toutefois, nous n'avons pas pu mettre en évidence de telles contraintes :

Question 1

Soient $n \geq 1$ et A un groupe n -compatible, à quoi est égale l'image de Λ_A ?

On peut répondre partiellement à cette question en considérant certains groupes n -compatibles. Soient $n \geq 1$ et A un groupe n -compatible, on dit que A est **saturé** si $|A| = n^2$. Si les groupes n -compatibles saturés nous intéressent, c'est parce que nous allons voir dans la proposition suivante qu'ils vérifient des propriétés intéressantes relativement à la classification des centralisateurs d'irréductibles.

Proposition 48

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le groupe $\pi_n(H)$ est abélien.
2. Le sous-groupe $\pi_n(H)$ de $PSL(n, \mathbb{C})$ est son propre centralisateur.
3. Le groupe $Z_n(H)$ est saturé.
4. Le sous-groupe $Z_n(H)$ de $PSL(n, \mathbb{C})$ est irréductible.

Si l'une de ces assertions est vérifiée alors à conjugaison près, $Z_n(H)$ est l'unique sous-groupe irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$ dont le centralisateur est isomorphe à $Z_n(H)$.

Démonstration : $3 \Leftrightarrow 4$. Nous avons vu dans le corollaire 9 que $Z_n(H)$ était irréductible si et seulement si $Z_n(H)$ était de cardinal n^2 (on utilisait la représentation standard de $U_n(H)$) vu que $Z_n(H)$ est toujours n -compatible par le théorème de caractérisation, on a l'équivalence.

$1 \Rightarrow 4$. Si $\pi_n(H)$ est abélien alors $\pi_n(H)$ est contenu dans $Z_n(H)$ or $\pi_n(H)$ est irréductible donc $Z_n(H)$ l'est aussi.

$4 \Rightarrow 2$. Si $Z_n(H)$ est irréductible alors $Z_n(H)$ est abélien (par la proposition 27), de plus on ($4 \Rightarrow 3$) $Z_n(H)$ est de cardinal n^2 . De cela on en déduit que $Z_n(H)$ est contenu dans son centralisateur. Or le centralisateur de $Z_n(H)$ est d'ordre divisant n^2 (par le corollaire 9) donc $Z_n(H)$ est son propre centralisateur. Vu que $\pi_n(H)$ commute avec $Z_n(H)$, on en déduit que $\pi_n(H)$ est inclus dans le centralisateur de $Z_n(H)$ qui est $Z_n(H)$.

Si l'on avait $\pi_n(H) < Z_n(H)$ alors H serait un sous-groupe de $U_n(H)$ de cardinal $< n^3$, en utilisant le caractère de la représentation standard (proposition 30), le caractère de l'inclusion de H dans $SL(n, \mathbb{C})$ serait de norme > 1 , ce qui contredirait l'irréductibilité de H . Ainsi $\pi_n(H) = Z_n(H)$ et, par définition $\pi_n(H)$ est son propre centralisateur dans $PSL(n, \mathbb{C})$.

$2 \Rightarrow 1$. Si $\pi_n(H)$ est son propre centralisateur alors, en particulier, $\pi_n(H)$ est abélien.

Pour finir si K est un sous-groupe irréductible de $SL(n, \mathbb{C})$ tel que $Z_n(K)$ est isomorphe à $Z_n(H)$ saturé alors $Z_n(H)$ est saturé implique que $Z_n(K)$ est conjugué à $Z_n(H)$ (par le corollaire 15). De plus on vient de

voir que dans ce cas $\pi_n(K) = Z_n(K)$ et $\pi_n(H) = Z_n(H)$ donc les groupes $\pi_n(H)$ et $\pi_n(K)$ sont conjugués eux aussi. ■

Ces groupes n -compatibles sont intéressants car ils permettent de répondre partiellement à la question 1 :

Proposition 49

Soient $n \geq 1$ et (A, ϕ) un n -module alterné n -sous-symplectique alors A est n -compatible et (A, ϕ) est dans l'image de Λ_A .

Démonstration : Rappelons que nous avons défini (à la fin de la section 3.4.1) la notion de n -module alterné n -sous-symplectique en disant qu'un n -module alterné (A, ϕ) est n -sous-symplectique s'il existe un groupe abélien B d'ordre n tel que (A, ϕ) soit un sous-module de $B \times B^*$ (muni de la forme symplectique canonique).

Si (A, ϕ) est un n -module alterné sous-symplectique alors on choisit B un groupe abélien d'ordre n tel que (A, ϕ) soit un sous-module de $B \times B^*$ qui est isomorphe (en tant que groupe) à $B \times B$. En particulier A est n -compatible.

Soit \overline{H} le sous-groupe de $PSL(n, \mathbb{C})$ dont le centralisateur est isomorphe à $B \times B$, il est unique à conjugaison près en vertu de la proposition 48. De plus la structure de module sur son centralisateur (qui est \overline{H}) est nécessairement une structure symplectique par le corollaire 15.

Soit A le sous-groupe de \overline{H} via l'inclusion de A dans $B \times B^*$. Alors le théorème 3.2 implique que A est le n -centralisateur d'un sous-groupe irréductible K de $SL(n, \mathbb{C})$. De plus, la structure de n -module alternée (A, ϕ_K) associée (via la proposition 46) est clairement isométrique à celle induite par (A, ϕ) dans $B \times B^*$. Ainsi, on vient de montrer que l'image de $U_n(K)$ par Λ_A est (A, ϕ) . ■

Jusqu'ici, nous n'avons pas trouvé d'éléments dans l'image de Λ_A qui ne soit pas sous-symplectique. Nous conjecturons en réponse à la question 1 que l'image de Λ_A est exactement l'ensemble des classes d'isométries de n -module alternés (A, ϕ) sous-symplectiques.

Indépendamment du fait que cette conjecture puisse être vraie ou fausse, il se pose la question de reconnaître les n -modules sous-symplectiques. En effet, si l'on se donne un n -module alterné quelconque, il semble difficile (sans faire un grand nombre de calculs) de déterminer si ce n -module est sous-symplectique ou non. Dans cette question, nous proposons une équivalence :

Question 2

Soit $n \geq 1$. Est-ce qu'un n -module alterné est sous-symplectique si et seulement si le cardinal d'un de ses lagrangiens divise n ?

S'il est évident que pour tout lagrangien L d'un n -module alterné sous-symplectique, le cardinal de L divise n , la réciproque est loin d'être évidente.

L'intérêt de cette équivalence (si elle est vraie) est qu'il est très simple de calculer le cardinal d'un lagrangien d'un n -module alterné quelconque (cf proposition 43), ainsi il serait facile de reconnaître si un n -module alterné est sous-symplectique ou non.

On aimerait que les groupes n -compatibles saturés aient un rôle analogue à celui joué par $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ dans le théorème 2.1. En effet, les groupes n -compatibles saturés sont maximaux pour l'inclusion dans \mathcal{Z}_n (cela est une conséquence immédiate du fait que leur cardinal est exactement n^2). On aimerait alors savoir si ce sont les seuls éléments maximaux de \mathcal{Z}_n .

Question 3

Soit $n \geq 1$, est-ce que l'on peut trouver, parmi les éléments de \mathcal{Z}_n un élément maximal pour l'inclusion qui ne soit pas irréductible ?

En effet, on sait qu'un élément de \mathcal{Z}_n est irréductible si et seulement s'il est de cardinal n^2 (cf proposition 48) auquel cas il est nécessairement maximal. Si, réciproquement, tout élément maximal de \mathcal{Z}_n pour l'inclusion est irréductible (i.e. la réponse à la question 3 est non) alors on en déduit que le n -module alterné associé à tout élément de \mathcal{Z}_n est sous-symplectique.

Un des arguments les plus en faveur du fait que les n -modules alternés associés aux éléments de \mathcal{Z}_n soient sous-symplectiques est que le théorème de caractérisation (théorème 3.3) nous dit que tout centralisateur d'irréductible de $PSL(n, \mathbb{C})$ est isomorphe à un groupe n -compatible et donc (proposition 35) isomorphe à un sous-groupe de $B \times B = B \times B^*$ en tant que groupe. Bien sûr, cette inclusion ne dit absolument rien sur la structure de module alterné sous-jacente.

Par le corollaire 16, si n est sans facteur carré, il est immédiat que tout élément de \mathcal{Z}_n est inclus dans le module $\mathbb{Z}/n \times (\mathbb{Z}/n)^*$. Cette conjecture se révèle donc exacte dans le cas où n est sans facteur carré.

Nous allons maintenant expliquer en quoi la connaissance des n -modules alternés construits comme centralisateurs d'irréductibles de $PSL(n, \mathbb{C})$ per-

met de paramétriser le lieu singulier de $\chi^i(\Gamma, PSL(n, \mathbb{C}))$ où Γ est un groupe de type fini. En effet, si l'on note X l'ensemble de ces n -modules alternés, alors on peut associer à tout $x \in X$ construit à partir d'un centralisateur Z_x une sous-variété de $\chi(\Gamma, PSL(n, \mathbb{C}))$ contenant l'ensemble des classes de conjugaisons de représentations irréductibles dont le centralisateur contient Z_x . Il suffit en effet de prendre $\chi(\Gamma, Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(Z_x))$ plongé dans la variété des caractères $\chi(\Gamma, PSL(n, \mathbb{C}))$.

S'il est possible de caractériser les éléments de $\chi(\Gamma, Z_{PSL(n, \mathbb{C})}(Z_x))$ irréductibles dans $PSL(n, \mathbb{C})$ alors on dispose de l'analogie des composantes du chapitre 2. On conjecture alors qu'il est possible de comprendre la combinatoire du lieu singulier de la variété des caractères en utilisant la structure d'espace ordonné de X (dans une sorte de généralisation du théorème 2.3).

En particulier, si X est réduit aux classes d'isométrie de n -modules alternés sous-symplectiques, les composantes associées aux maximaux de X sont des réunions finies de points dans $\chi^i(\Gamma, PSL(n, \mathbb{C}))$ qui apparaissent alors comme les sommets d'une structure simpliciale gouvernée par X (les faces de ce simplexe étant données, en général par les composantes) sur le lieu singulier de $\chi^i(\Gamma, PSL(n, \mathbb{C}))$.

On finit en donnant une question qui semble être intermédiaire entre le cas où n est premier du chapitre 2 et le cas général :

Question 4

Soient $n \geq 1$ sans facteur carré et Γ un groupe de type fini. Est-il possible de paramétrer le lieu singulier de la variété des caractères $\chi(\Gamma, PSL(n, \mathbb{C}))$?

Ce qui suggère que cette analyse est possible est, bien sûr, le corollaire 16 classifiant $\mathcal{Z}_n/PSL(n, \mathbb{C})$ via une bijection avec l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n$.

Chapitre 4

Centralisateurs des irréductibles dans $Spin(n, \mathbb{C})$ et ses quotients

4.1 Résultats

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux centralisateurs des groupes irréductibles de $Spin(n, \mathbb{C})$ et de ses quotients ($SO(n, \mathbb{C})$ et $PSO(n, \mathbb{C})$ si n est pair). On rappelle qu'il existe des isomorphismes exceptionnels entre le groupe $Spin(n, \mathbb{C})$ pour $3 \leq n \leq 6$ et d'autres groupes de Lie (on peut voir cela en utilisant, par exemple, le fait que les diagrammes de Dynkin coïncident pour les deux groupes de Lie considérés, cf [Kna02]) :

Groupe de Spin	Groupe de Lie
$Spin(3, \mathbb{C})$	$SL(2, \mathbb{C})$
$Spin(4, \mathbb{C})$	$SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$
$Spin(5, \mathbb{C})$	$Sp(4, \mathbb{C})$
$Spin(6, \mathbb{C})$	$SL(4, \mathbb{C})$

TABLE 4.1.1 – Isomorphismes exceptionnels entre certains groupes de Spin et certains groupes de Lie

Dans la section 4.2, on étudie le cas de $SO(n, \mathbb{C})$ et nous montrons (voir propositions 50, 51 et 53) la chose suivante :

Résultat 11 (Le cas de $SO(n, \mathbb{C})$)

Soient $n \geq 3$ et H un sous-groupe irréductible de $SO(n, \mathbb{C})$ alors le centralisateur de H dans $SO(n, \mathbb{C})$ est 2-abélien élémentaire et est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales (dans une base orthonormale) contenues dans $SO(n, \mathbb{C})$ (que l'on note $SDO(n, \mathbb{C})$).

De plus, le sous-groupe $SDO(n, \mathbb{C})$ est abélien irréductible et est son propre centralisateur dans $SO(n, \mathbb{C})$.

La proposition 54 donne, en particulier, une description précise des centralisateurs d'irréductibles que l'on obtient à conjugaison près.

Dans la section 4.3, nous cherchons à déterminer pour quels $n \geq 3$, le groupe $Spin(n, \mathbb{C})$ contient un sous-groupe exceptionnel (i.e. irréductible à centralisateur non-trivial).

Pour cela, on fait quelques rappels sur l'algèbre de Clifford associée à un espace complexe muni d'une forme quadratique non-dégénérée dans la sous-section 4.3.1. Cela permet de donner une construction explicite de $Spin(n, \mathbb{C})$ comme revêtement connexe, simplement connexe à deux feuillets de $SO(n, \mathbb{C})$. On introduit, en particulier le groupe $G_n \leq Spin(n, \mathbb{C})$ des spin fondamentaux (voir page 195) qui, à conjugaison près, contient le centralisateur de tout sous-groupe irréductible de $Spin(n, \mathbb{C})$.

Dans la sous-section 4.3.2, après avoir donné (cf lemmes 23 et 24) deux critères d'irréductibilité, on montre le théorème 4.1 :

Résultat 12 (Sous-groupes exceptionnels dans $Spin(n, \mathbb{C})$)

Si $n \geq 7$ alors $Spin(n, \mathbb{C})$ contient un sous-groupe irréductible à centralisateur non-trivial.

De plus, au vu de la table 4.1 et en utilisant le lemme de Schur, les groupes $Spin(3, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})$ et $Spin(6, \mathbb{C}) = SL(4, \mathbb{C})$ ne peuvent contenir de sous-groupes exceptionnels. Pour le cas $n = 5$, l'exemple 8 montre que $Spin(5, \mathbb{C})$ contient un sous-groupe exceptionnel. Mais pour le cas $n = 4$ (voir proposition 58), on justifie que ce groupe ne contient pas de sous-groupe exceptionnel. On remarque toutefois, via la table 4.1 que le groupe $Spin(4, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ n'est pas simple (sous cette forme il est d'ailleurs clair qu'il ne contient aucun sous-groupe exceptionnel).

Dans [Sik12], Sikora définit un groupe de Lie complexe $G_{\mathbf{CI}}$, comme un groupe de Lie complexe ne contenant aucun sous-groupe exceptionnel. Il pose

alors une question (la question 19) : est-ce que $SL(n, \mathbb{C})$ et $GL(n, \mathbb{C})$ sont les seuls groupes de Lie complexes CI? Clairement si G n'est pas simple alors la réponse est non (n'importe quel produit non-trivial de $SL(n, \mathbb{C})$ convient). Toutefois, si l'on impose que G est simple, la réponse n'est pas connue.

Dans la proposition 61, nous montrons que si G est un groupe de Lie complexe simple et CI alors G est isomorphe à $SL(n, \mathbb{C})$ ou G est isomorphe à un groupe de Lie de type G_2, F_4, E_6, E_7 ou E_8 . Relativement à la question 19 de [Sik12], on pose alors une nouvelle question (cf question 5) : existe-t-il, parmi les groupes de Lie de type G_2, F_4, E_6, E_7 ou E_8 , un groupe CI?

Dans la section 4.4, on s'intéresse à la classification des centralisateurs dans $Spin(n, \mathbb{C})$. Pour ce faire, nous introduisons dans la sous-section 4.4.1, les $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques. Le théorème 4.2 classe ces $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques.

D'un côté, on voit avec l'exemple 9 que tout sous-groupe de G_n admet une structure naturelle de $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique.

D'autre part, si G est un 2-groupe quasiment élémentaire (on dit qu'un 2-groupe G est quasiment élémentaire s'il existe un élément z central d'ordre 2 dans G tel que $G/\langle z \rangle$ soit 2-abélien élémentaire) alors on peut lui associer, naturellement, un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique.

Le théorème 4.3 stipule que l'application induite entre les classes d'isomorphismes de 2-groupes quasiment élémentaires et les classes d'isométrie de $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques est une bijection.

On montre alors dans la sous-section 4.4.2, le théorème 4.4 :

Résultat 13 (Centralisateurs de $Spin(n, \mathbb{C})$)

Soit G un groupe fini.

Alors il existe $n \geq 3$ et H un sous-groupe irréductible de $Spin(n, \mathbb{C})$ tel que G soit isomorphe au centralisateur de H dans $Spin(n, \mathbb{C})$ si et seulement si G est un 2-groupe quasiment élémentaire.

Ce théorème est plus faible que le théorème de caractérisation du chapitre 3. En effet, il n'y a pas d'indication ici sur le n pour lequel le 2-groupe quasiment élémentaire est isomorphe à centralisateur de sous-groupe irréductible de $Spin(n, \mathbb{C})$.

À la fin de la sous-section 4.4.2, nous complétons ce théorème avec quelques pistes pour classifier (à n fixé) les centralisateurs d'irréductibles de $Spin(n, \mathbb{C})$ (voir e.g. la question 6).

La section 4.5 contient quelques indications sur les centralisateurs des irréductibles de $PSO(2n, \mathbb{C})$. On montre, dans cette section, qu'il n'existe pas dans $PSO(4, \mathbb{C})$ et $PSO(6, \mathbb{C})$ (voir respectivement proposition 69 et exemple 13) de sous-groupes irréductibles à centralisateur non-abélien.

On constate toutefois (contre-exemple 6) que $PSO(8, \mathbb{C})$ contient un sous-groupe irréductible dont le centralisateur est non-abélien. Ceci permet alors de justifier que la variété des caractères $\chi^i(\Gamma, G)$ n'est pas nécessairement une orbifold abélienne quand Γ est fuchsien et G un groupe de Lie réductif complexe (voir contre-exemple 7).

4.2 Centralisateurs des irréductibles dans $SO(n, \mathbb{C})$

Par définition, ici, $SO(n, \mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices carrées A de déterminant 1, de taille n , vérifiant $AA^t = I_n$.

Dans la suite, il sera parfois utile de considérer $SO(n, \mathbb{C})$ comme les transformations linéaires de $V := \mathbb{C}^n$ conservant la forme quadratique canonique q (celle pour laquelle (e_0, \dots, e_{n-1}) , la base canonique de V est orthonormée). Rappelons qu'il n'existe (à conjugaison près) qu'une seule forme quadratique non dégénérée sur V car V est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. On notera B_q la forme polaire associée :

$$B_q(u, v) := \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$$

Par définition d'une forme quadratique q , B_q est bilinéaire. On peut montrer que $SO(n, \mathbb{C})$ stabilise également B_q .

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel W de V est dit **isotrope** si pour tout $w \in W$, $q(w) = 0$. On peut montrer que tout pour tout sous-groupe P de $SO(n, \mathbb{C})$, P est inclus dans un sous-groupe parabolique de $SO(n, \mathbb{C})$ si et seulement si P stabilise un sous-espace isotrope non-trivial de V . En particulier, un sous-groupe H de $SO(n, \mathbb{C})$ est irréductible si et seulement s'il ne stabilise aucun sous-espace isotrope non-trivial.

Nous allons voir que l'irréductibilité d'un sous-groupe de $SO(n, \mathbb{C})$ impose des conditions assez fortes sur son centralisateur.

Proposition 50

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe irréductible de $SO(n, \mathbb{C})$ alors tout élément de $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H)$ est diagonalisable. De plus son spectre est contenu dans $\{\pm 1\}$.

Tous les éléments de $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H)$ sont d'ordre divisant 2 et le groupe $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H)$ est donc abélien.

Démonstration : Dans cette preuve on utilisera l'interprétation de $SO(n, \mathbb{C})$ comme les transformations de l'espace (V, q) .

Comme H est irréductible, le centre de $SO(n, \mathbb{C})$ est d'indice fini dans $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H)$. Ainsi, le centre de $SO(n, \mathbb{C})$ étant de cardinal fini (c'est soit 1 soit 2 suivant la parité de n), le groupe $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H)$ est fini. En particulier, tous ses éléments sont diagonalisables.

Soit $\lambda \in Sp(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u et $x \in E_\lambda(u)$, l'espace propre associé à la valeur propre λ pour u .

$$\begin{aligned} \lambda^2 q(x) &= q(\lambda x) \\ &= q(u(x)) \text{ car } x \in E_\lambda(u) \\ &= q(x) \text{ car } u \in SO(n, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Ainsi $q(x)(\lambda^2 - 1) = 0$. Autrement dit si $\lambda^2 \neq 1$ (i.e. $\lambda \neq \pm 1$) alors $q(x) = 0$ pour tout $x \in E_\lambda(u)$. On vient de voir que si $\lambda \neq \pm 1$ alors $E_\lambda(u)$ est un sous-espace isotrope de V non-trivial par définition.

Comme H commute avec u , le groupe H stabilise chaque sous-espace propre de u (conséquence du lemme 6). Si le spectre de u n'était pas contenu dans $\{\pm 1\}$ alors l'espace propre pour u associé à une valeur propre différente de ± 1 fournirait un sous-espace isotrope non-trivial et stable par l'action de H et contredirait l'irréductibilité de H . Par conséquent, le spectre de u est contenu dans ± 1 .

La matrice u est diagonalisable, vu que $Sp(u) \subseteq \{\pm 1\}$, u est diagonalisable avec des éléments ± 1 sur la diagonale, en particulier $u^2 = I_n$.

Le groupe $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H)$ est un groupe dont tous les éléments sont d'ordre divisant 2, c'est donc un groupe abélien. ■

Nous allons vérifier que l'on peut diagonaliser simultanément les éléments de $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H)$ dans $SO(n, \mathbb{C})$. Il apparaîtra alors un sous-groupe particulier de $SO(n, \mathbb{C})$ auquel nous donnons maintenant un nom.

On notera $SDO(n, \mathbb{C})$ le sous-groupe des matrices de $SO(n, \mathbb{C})$ qui sont diagonales. Ce groupe vérifie les propriétés élémentaires suivantes :

Proposition 51

Soit $n \geq 3$. Ensemblistement, le groupe $SDO(n, \mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices diagonales avec des ± 1 sur la diagonale.

Le groupe $SDO(n, \mathbb{C})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^{n-1}$.

Le groupe $SDO(n, \mathbb{C})$ est son propre centralisateur dans $SO(n, \mathbb{C})$, on en déduit que $SDO(n, \mathbb{C})$ est un sous-groupe irréductible de $SO(n, \mathbb{C})$.

Démonstration : Soit $d \in SDO(n, \mathbb{C})$ alors il existe des nombres complexes $d_0, \dots, d_{n-1} \in \mathbb{C}^n$ tels que :

$$d = \begin{pmatrix} d_0 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{n-1} \end{pmatrix}$$

Comme d est orthogonale, l'inverse de d est sa transposée d^t . Vu que d est diagonale, $d^t = d$. Ainsi $d^2 = I_n$. Cela revient à imposer pour tout $0 \leq i \leq n - 1$ $d_i^2 = 1$, i.e. $d_i = \pm 1$.

De plus, l'application suivante :

$$\phi : \begin{cases} SDO(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \{\pm 1\}^n \\ d & \longmapsto & (d_i)_{0 \leq i \leq n-1} \end{cases}$$

est clairement un morphisme de groupes injectif. De plus (x_0, \dots, x_{n-1}) est dans l'image de ϕ si et seulement si $x_0 \dots x_{n-1} = 1$.

L'image de ϕ est donc un sous-groupe d'indice 2 dans $\{\pm 1\}^n$. Ce dernier groupe étant abélien 2-élémentaire de dimension n , tout sous-groupe d'indice 2 est abélien 2-élémentaire de dimension $n - 1$. Autrement dit $SDO(n, \mathbb{C})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^{n-1}$.

Soit Z le centralisateur de $SDO(n, \mathbb{C})$ dans $SO(n, \mathbb{C})$. Étant donné que $SDO(n, \mathbb{C})$ est abélien, le groupe Z contient $SDO(n, \mathbb{C})$. Réciproquement, si l'on identifie $SO(n, \mathbb{C})$ aux transformations de (V, q) muni de sa base

canonique (e_0, \dots, e_{n-1}) alors on note pour tout $0 \leq i \neq j \leq n-1$, $d_{i,j}$ l'élément de $SDO(n, \mathbb{C})$ vérifiant pour tout $0 \leq k \leq n-1$:

$$d_{i,j}(e_k) = \begin{cases} -e_k & \text{si } k = i \text{ ou } j \\ e_k & \text{sinon} \end{cases}$$

Prenons maintenant $z \in Z$ et $0 \leq k_0 \leq n-1$. Comme $n \geq 3$, il existe k_1, k_2 tel que k_0, k_1 et k_2 soit deux à deux différents.

Pour $i = 1, 2$, z commute avec d_{k_0, k_i} donc z stabilise l'espace propre $E_{-1}(d_{k_0, k_i}) = \text{Vect}(e_{k_0}, e_{k_i})$. En particulier :

$$z(e_{k_0}) \in \text{Vect}(e_{k_0}, e_{k_1}) \cap \text{Vect}(e_{k_0}, e_{k_2}) = \text{Vect}(e_{k_0})$$

Ainsi $z(e_{k_0}) = \lambda_{k_0} e_{k_0}$. Ceci étant vrai pour tout k_0 , z est diagonale est donc $z \in SDO(n, \mathbb{C})$.

Nous avons donc montré que $SDO(n, \mathbb{C})$ est son propre centralisateur. Le sous-groupe $SDO(n, \mathbb{C})$ de $SO(n, \mathbb{C})$ est fini donc complètement réductible, puisque son centralisateur est également fini, il est irréductible (cf corollaire 17 [Sik12]). ■

Si A est un ensemble, on notera $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A . L'ensemble $\mathcal{P}(A)$ est muni d'une loi de groupe Δ , la **différence symétrique** définie par :

$$B\Delta C := (B \cup C) \cap (B \cap C)^c = (B \cap C^c) \cup (B^c \cap C)$$

Le fait que $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ soit un groupe peut-être directement vérifié.

Dans le groupe $(\mathcal{P}(A), \Delta)$, l'élément neutre est l'ensemble vide \emptyset et l'inverse de B est B (tous les éléments sont d'ordre divisant 2).

On notera également $\mathcal{P}_0(A)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(A)$ dont les ensembles sont de cardinal (fini) pair. On pourra vérifier que $\mathcal{P}_0(A)$ est un sous-groupe de $\mathcal{P}(A)$ (cela vient de la formule $|A\Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$).

Proposition 52

Si $n \geq 3$ alors l'application f de $SDO(n, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{P}_0(\mathbb{Z}/n)$ envoyant d sur $\{0 \leq i \leq n-1 \mid d(e_i) = -e_i\}$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration : Soient d_1 et d_2 dans $SDO(n, \mathbb{C})$. Soit $0 \leq k \leq n - 1$ alors il existe $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{\pm 1\}$ tels que

$$d_j(e_k) = \epsilon_j e_k \text{ pour } j = 1, 2$$

C'est une conséquence de la proposition 51. On en déduit que :

$$(d_1 d_2)(e_k) = \epsilon_1 \epsilon_2 e_k$$

Ainsi, $k \in f(d_1 d_2) := \{0 \leq i \leq n - 1 \mid d_1 d_2(e_i) = -e_i\}$ si et seulement si $\epsilon_1 \epsilon_2 = -1$, si et seulement si :

$$k \in f(d_1) \cap f(d_2)^c \text{ ou } f(d_2) \cap f(d_1)^c$$

si et seulement si $k \in f(d_1) \Delta f(d_2)$. Comme il est clair que $f(I_n) = \emptyset$, l'application f est un morphisme de groupes.

Un élément $d \in SDO(n, \mathbb{C})$ est dans le noyau de f si et seulement si $d(e_i) \neq -e_i$ pour tout $0 \leq i \leq n - 1$, comme $d(e_i) = \pm e_i$, on en conclut que $d(e_i) = e_i$ pour tout $0 \leq i \leq n - 1$ et donc $d = I_n$. Ainsi l'application est injective.

Finalement $SDO(n, \mathbb{C})$ et $\mathcal{P}_0(\mathbb{Z}/n)$ étant tous les deux de cardinal 2^{n-1} l'application f est aussi surjective. ■

L'identification de $SDO(n, \mathbb{C})$ à $\mathcal{P}_0(\mathbb{Z}/n)$ est une identification relativement naturelle dont l'intérêt va devenir clair quand nous étudierons les centralisateurs du groupe $Spin(n, \mathbb{C})$. Dans la suite le groupe $\mathcal{P}_0(\mathbb{Z}/n)$ sera noté P_n .

La prochaine proposition stipule que $SDO(n, \mathbb{C})$ est, à conjugaison près, le plus grand élément parmi les centralisateurs des groupes irréductibles de $SO(n, \mathbb{C})$.

Proposition 53

Soient $n \geq 3$ et H un sous-groupe irréductible de $SO(n, \mathbb{C})$ alors $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H)$ est simultanément diagonalisable dans $SO(n, \mathbb{C})$. En particulier, $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H)$ est conjugué à un sous-groupe de $SDO(n, \mathbb{C})$.

Démonstration : Nous allons montrer la chose suivante par récurrence forte sur $n \geq 1$. Tout sous-groupe A de $SO(n, \mathbb{C})$ tel que A est abélien et dont tous les éléments sont diagonalisables à valeurs propres dans ± 1 admet une base orthonormale de diagonalisation dans (V, q) .

Supposons que le résultat soit vrai pour tout $k < n$. Soit A un sous-groupe A de $SO(n, \mathbb{C})$ tel que A soit abélien et dont tous les éléments sont diagonalisables à valeurs propres dans ± 1 . Si tous les éléments de A sont scalaires alors $A \leq \{\pm I_n\}$ et il n'y a rien à démontrer.

Sinon, il existe $a_0 \in A$ tel que $E_1(a_0)$ et $E_{-1}(a_0)$ sont non-triviaux. Comme a_0 est diagonalisable :

$$V = E_1(a_0) \oplus E_{-1}(a_0) \quad (4.1)$$

De plus, si $(x, y) \in E_1(a_0) \times E_{-1}(a_0)$ alors :

$$\underbrace{-B(x, y)}_{\text{car } (x, y) \in E_1(a_0) \times E_{-1}(a_0)} = B_q(a_0(x), a_0(y)) \overbrace{=}^{\text{car } a_0 \in SO(n, \mathbb{C})} B_q(x, y)$$

Ainsi $B_q(x, y) = 0$ et donc la décomposition 4.1 est orthogonale. De cela, on déduit que l'orthogonal de $E_1(a_0)$ dans V est exactement $E_{-1}(a_0)$ (car B_q est non dégénérée) et donc $(E_1(a_0), q)$ et $(E_{-1}(a_0), q)$ sont tous les deux non-dégénérés.

D'autre part, comme A est abélien tout élément a de A stabilise $E_1(a_0)$ d'une part et $E_{-1}(a_0)$ d'autre part. Par hypothèse de récurrence appliqué à $(E_1(a_0), q)$ et $(E_{-1}(a_0), q)$ il existe une base orthonormale de diagonalisation pour A : β_i dans $(E_i(a_0), q)$ pour $i = \pm 1$. On en déduit que (β_1, β_{-1}) est également une base orthonormale de diagonalisation pour A .

Prenons maintenant H un sous-groupe irréductible de $SO(n, \mathbb{C})$. La proposition 50 implique que $Z_n(H)$ est un groupe abélien dont tous les éléments sont diagonalisables à valeurs propres dans ± 1 . Il existe donc une base orthonormale de diagonalisation β pour $Z_n(H)$. Si \mathcal{C} désigne la base canonique de V alors la matrice de passage $P_{\beta, \mathcal{C}}$ est dans $O(n, \mathbb{C})$ car les bases β et \mathcal{C} sont orthonormées. De plus :

$$P_{\beta, \mathcal{C}}^{-1} Z_n(H) P_{\beta, \mathcal{C}} \leq SDO(n, \mathbb{C})$$

Quitte à multiplier $P_{\beta, \mathcal{C}}$ à droite par la matrice diagonale d_- avec des 1 sur la diagonale sauf sur la première ligne où il y a un -1 , on peut supposer $P_{\beta, \mathcal{C}} \in SO(n, \mathbb{C})$. ■

Le groupe $SDO(n, \mathbb{C})$ prend donc le rôle de $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ au théorème 2.1 du chapitre 2. C'est à dire c'est le plus grand élément (à conjugaison près) parmi les centralisateurs de $SO(n, \mathbb{C})$.

Dans la suite, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 22

Soit $n \geq 1$, le groupe $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}/n}$ agit sur $SDO(n, \mathbb{C})$ en permutant les éléments diagonaux. Alors pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}/n}$, il existe $g_\sigma \in SO(n, \mathbb{C})$ tel que pour tout $d \in SDO(n, \mathbb{C})$:

$$\sigma \cdot d = g_\sigma d g_\sigma^{-1}$$

Démonstration : On définit :

$$M : \begin{cases} \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}/n} & \longrightarrow O(n, \mathbb{C}) \\ \sigma & \longmapsto (M_\sigma : e_i \mapsto e_{\sigma(i)}) \end{cases}$$

Par définition, l'action de $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}/n}$ sur $SDO(n, \mathbb{C})$ est donnée par $\sigma \cdot d = M_\sigma d M_\sigma^{-1}$. De plus, on sait que $\det(M_\sigma) = \epsilon(\sigma)$ où ϵ est la signature de $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}/n}$.

Notons $g_\sigma := \begin{pmatrix} \epsilon(\sigma) & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} M_\sigma$ alors d'une part $\det(g_\sigma) = \epsilon(\sigma)^2 = 1$ donc g_σ est dans $SO(n, \mathbb{C})$. De plus $\begin{pmatrix} \epsilon(\sigma) & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ est dans le commutateur du groupe $SDO(n, \mathbb{C})$ ainsi $g_\sigma d g_\sigma^{-1} = M_\sigma d M_\sigma^{-1} = \sigma \cdot d$. ■

Avec ce lemme, on pourra permuter les vecteurs de base e_0, \dots, e_{n-1} quitte à conjuguer.

Proposition 54

Soient $n \geq 3$, H un sous-groupe irréductible de $SO(n, \mathbb{C})$ et A son centralisateur. Alors, il existe r (peut-être 0), $d_1, \dots, d_r > 0$ et $k \geq 0$ tels que le groupe A soit conjugué au groupe :

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} a_1 I_{d_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_r I_{d_r} & \\ & & & I_k \end{pmatrix} \right) \mid a_1, \dots, a_r \in \{\pm 1\} \text{ et } \prod_{i=1}^r a_i^{d_i} = 1 \right\}$$

Si n pair, ou un des d_i est impair alors $k = 0$. Sinon, $k = 0$ ou k est impair. Les d_1, \dots, d_r, k sont uniques à l'ordre des d_i près. Réciproquement, tout groupe de la forme ci-dessus est le centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $SO(n, \mathbb{C})$.

Démonstration : Quitte à conjuguer (proposition 53), on peut supposer que A est un sous-groupe de $SDO(n, \mathbb{C})$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}/n$, on définit :

$$A_i^- := \{a \in A \mid a(e_i) = -e_i\}$$

Pour tout $i, j \in \mathbb{Z}/n$, on note $i \approx j$ si $A_i^- = A_j^-$. La relation \approx est clairement une relation d'équivalence.

Notons L_1, \dots, L_s ses classes d'équivalence avec $s \geq 1$. On voit que, parmi ces classes, au plus une vérifie que pour $i \in L_v$ $A_i^- = \emptyset$. Quitte à renuméroter les partitions (et éventuellement rajouter l'ensemble vide à la partition), on peut supposer que les classes d'équivalences pour \approx sont :

$$L_1, \dots, L_r, L \text{ avec pour } i \in L, A_i^- = \emptyset$$

Notons pour $1 \leq i \leq r$, $d_i := |L_i|$ et $k := |L|$. Quitte à faire agir une permutation sur $SDO(n, \mathbb{C})$ (qui correspond à une conjugaison dans $SO(n, \mathbb{C})$ par le lemme 22) on peut supposer :

$$\begin{aligned} L_1 &= \{0, \dots, d_1 - 1\} \\ L_2 &= \{d_1, \dots, d_1 + d_2 - 1\} \\ &\vdots \\ L_r &= \{d_1 + \dots + d_{r-1}, \dots, d_1 + \dots + d_r - 1\} \\ L &= \{n - k, \dots, n - 1\} \end{aligned}$$

Par définition de \approx , si $i, j \in L_v$ alors pour tout $a \in A$, $a(e_i) = -e_i$ si et seulement si $a \in A_i^- = A_j^-$ si et seulement si $a(e_j) = -e_j$. De plus si $i \in L$ alors $a(e_i) = e_i$ pour tout $a \in A$. Par conséquent, après permutation des vecteurs de base, le groupe A est inclus dans le groupe :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 I_{d_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_r I_{d_r} & \\ & & & I_k \end{pmatrix} \mid a_1, \dots, a_r \in \{\pm 1\} \text{ et } \prod_{i=1}^r a_i^{d_i} = 1 \right\} \quad (4.2)$$

Le groupe (4.2) sera noté $Z_{n, d_1, \dots, d_r, k}$ dans la suite.

On pose maintenant $F_v := Vect(e_i \mid i \in L_v)$ et $F := Vect(e_i \mid i \in L)$. Nous allons montrer que chacun de ces sous-espaces est l'intersection d'un certain nombre de sous-espaces propres associés à des éléments de A . Par définition :

$$V = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r \oplus F \tag{4.3}$$

Pour $1 \leq v \leq r$, on note :

$$E_v := \bigcap_{a \in (A_{d_1+\dots+d_{v-1}}^-)^c} E_1(a) \cap \bigcap_{a \in A_{d_1+\dots+d_{v-1}}^-} E_{-1}(a)$$

et :

$$E := \bigcap_{a \in A} E_1(a)$$

Nous allons montrer que $F_v = E_v$ pour tout $1 \leq v \leq r$ et $F = E$. Pour cela, on commence par montrer que F_v est contenu dans E_v et F est contenu dans E . On montre ensuite que $F_v \cap F_w$ est trivial si $v \neq w$ ainsi que $F_v \cap F$ est trivial.

Soit $i \in L_v$ alors pour tout $a \in A_i^- = A_{d_1+\dots+d_{v-1}}^-$, $a(e_i) = -e_i$ et pour tout $a \in (A_{d_1+\dots+d_{v-1}}^-)^c$, $a(e_i) \neq e_i$ donc $a(e_i) = e_i$. Ainsi, $e_i \in E_v$ et donc $F_v \leq E_v$.

De même, si $i \in L$, alors pour tout $a \in A$, $a(e_i) = e_i$. Ainsi $F \leq E$. Soit $x \in E$, vue la décomposition 4.3, on peut écrire :

$$x := \sum_{v=1}^r \underbrace{f_v}_{\in F_v} + \underbrace{f}_{\in F}$$

Soit $1 \leq v \leq r$, on choisit $a \in A_{d_1+\dots+d_{v-1}}^-$, vu que $F_v \leq E_v$, on a $a(f_v) = -f_v$, de plus pour tout $1 \leq w \leq r$, $a(f_w) \in F_w$, ainsi :

$$x - a(x) = \underbrace{f - a(f)}_{=f-f=0 \text{ car } f \in F} + \sum_{w=1, w \neq v} \underbrace{f_w - a(f_w)}_{\in F_w} + 2f_v$$

Ainsi $f_v = 0$. Ceci étant vrai pour tout $v \in V$, on en déduit que $x \in F$ et donc $E = F$.

De la même façon si $x \in E_v$ et :

$$x = \sum_{w=1}^r \underbrace{f_w}_{\in F_w} + \underbrace{f}_{\in F}$$

Alors on peut montrer que x appartient à F_v (vu que $A_{d_1+\dots+d_{v-1}}^- \neq A_{d_1+\dots+d_w-1}^-$ si $v \neq w$, en calculant $x - a(x)$ pour a un élément dans la différence symétrique de ces deux ensembles, on voit que $f_w = 0$ si $w \neq v$, de même en calculant $x + a(x)$ pour $a \in A_{d_1+\dots+d_{v-1}}^-$, on voit que $f = 0$). Par suite, $x \in F_v$ et donc $E_v = F_v$.

En conclusion, chaque F_v et F est une intersection de sous-espaces propres d'éléments de A .

Soit H le groupe dont A est le centralisateur dans $SO(n, \mathbb{C})$. Vu que H commute avec tout élément de A , il stabilise tous les espaces propres de chaque élément de A . Ainsi H stabilise F_v et F . On en déduit que :

$$H \leq \left(\begin{array}{cccc} O(d_1, \mathbb{C}) & & & \\ & \ddots & & \\ & & O(d_r, \mathbb{C}) & \\ & & & O(k, \mathbb{C}) \end{array} \right) \cap SO(n, \mathbb{C}) \quad (4.4)$$

Maintenant il est clair que chaque élément du groupe $Z_{n, d_1, \dots, d_r, k}$ du type (4.2) commute avec les éléments dans le groupe (4.4). Ainsi :

$$Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H) \leq Z_{n, d_1, \dots, d_r, k} \leq Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H)$$

donc le centralisateur de H dans $SO(n, \mathbb{C})$ est exactement $Z_{n, d_1, \dots, d_r, k}$.

Remarquons que si n pair alors $-I_n \in Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H)$ et donc L défini plus haut est vide (et donc son cardinal k est nul).

Si $k > 0$ est impair et s'il existe d_i impair alors l'élément :

$$\left(\begin{array}{cccc} a_1 I_{d_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_r I_{d_r} & \\ & & & -I_k \end{array} \right) \in Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H) \text{ avec } a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq k \\ -1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

ce qui contredit la définition de L .

Finalement, si $k > 0$ est pair alors :

$$\begin{pmatrix} I_{d_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{d_r} & \\ & & & -I_k \end{pmatrix} \in Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H)$$

ce qui contredit à nouveau la définition de L .

On a donc bien les conditions nécessaires données dans la proposition. Remarquons que d_1, \dots, d_r, k sont invariants par conjugaison à l'ordre des entiers près.

Réciproquement, si l'on associe à tout (n, d_1, \dots, d_r, k) vérifiant les conditions données ci-dessus le groupe :

$$H_{n, d_1, \dots, d_r, k} := \begin{pmatrix} O(d_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & O(d_r) & \\ & & & O(k) \end{pmatrix} \cap SO(n, \mathbb{C})$$

Alors, le groupe $Z_{n, d_1, \dots, d_r, k}$ est clairement contenu dans le centralisateur du groupe $H_{n, d_1, \dots, d_r, k}$. On peut alors vérifier que le centralisateur de $H_{n, d_1, \dots, d_r, k}$ doit fixer chaque F_v et F . On en conclut que :

$$Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H_{n, d_1, \dots, d_r, k}) = Z_{n, d_1, \dots, d_r, k}$$

De par sa définition, $H_{n, d_1, \dots, d_r, k}$ est complètement réductible, comme son centralisateur est fini, il est irréductible. Ainsi, tout groupe de la forme $Z_{n, d_1, \dots, d_r, k}$ est centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $SO(n, \mathbb{C})$. ■

Tout sous-groupe de $SDO(n, \mathbb{C})$ contenant le centre de $SO(n, \mathbb{C})$ n'est pas nécessairement centralisateur d'un groupe irréductible :

Contre-exemple 5

On se place dans le cas où $n = 7$. À tout sous-ensemble de cardinal pair P de $\mathbb{Z}/7$, on associe la matrice diagonale d_P dont le i -ème élément diagonal est 1 si $i \in P$ et -1 sinon.

Considérons le sous-groupe A de $SDO(7, \mathbb{C})$ engendré par $d_{\{1,2,3,4\}}$ et $d_{\{3,4,5,6\}}$ alors A n'est pas centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $SO(7, \mathbb{C})$.

Démonstration : La preuve est assez simple, elle provient de la remarque suivante, si dans un groupe G on prend un sous-groupe G_1 de G et que l'on applique trois fois le centralisateur alors on retrouve $Z_G(G_1)$ i.e. :

$$Z_G(Z_G(Z_G(G_1))) = Z_G(G_1)$$

Si l'on suppose maintenant que $A = Z_{SO(\tau, \mathbb{C})}(H)$ pour H un groupe alors $Z_{SO(\tau, \mathbb{C})}(Z_{SO(\tau, \mathbb{C})}(A)) = A$. Or, en calculant les classes d'équivalence de \approx (cf la preuve précédente) pour A , $d_{1,2} \in Z_{SO(\tau, \mathbb{C})}(H)$ mais $d_{1,2}$ n'est pas dans A donc A n'est pas centralisateur d'un groupe irréductible. ■

Cette décomposition n'a donc rien d'évident et nous l'utiliserons dans l'étude du cas de $Spin(n, \mathbb{C})$. Avant d'expliquer ce qu'il se passe dans le groupe $Spin(n, \mathbb{C})$, nous évoquons une conséquence intéressante sur la variété des caractères.

Corollaire 17

Soient $n \geq 3$, Γ un groupe fuchsien et $G := SO(n, \mathbb{C})$ ou $Spin(n, \mathbb{C})$. Le groupe d'isotropie locale en chaque point de l'orbifolde $\chi^i(\Gamma, G)$ est 2-abélien élémentaire.

Démonstration : Soit ρ une représentation irréductible de Γ dans G .

Si $G = SO(n, \mathbb{C})$ alors la proposition 50 implique que le centralisateur $Z(\rho)$ de ρ est 2-abélien élémentaire. Le groupe d'isotropie étant le quotient de $Z(\rho)$ par le centre de G , il est également 2-abélien élémentaire.

Si $G = Spin(n, \mathbb{C})$ alors on note $\pi : Spin(n, \mathbb{C}) \rightarrow SO(n, \mathbb{C})$ la projection naturelle. Si $K := \ker(\pi)$ alors $K \leq Z(G)$ ainsi :

$$Z(\rho)/Z(G) = (Z(\rho)/K)/\pi(Z(G))$$

Autrement dit le groupe d'isotropie locale de $G \cdot \rho$ est un quotient de $Z(\rho)/K$. D'une part $Z(\rho)/K$ est contenu dans $Z(\pi \circ \rho)$.

D'autre part $\pi \circ \rho$ étant une représentation irréductible (car ρ l'est) son centralisateur est 2-abélien élémentaire. Le groupe d'isotropie locale de $G \cdot \rho$ étant quotient d'un groupe 2-abélien élémentaire, il est également 2-abélien élémentaire. ■

Les groupes d'isotropie locale sur la variété des caractères dans $SO(n, \mathbb{C})$ et $Spin(n, \mathbb{C})$ sont donc très bien compris. Si l'on veut toutefois classifier les centralisateurs à conjugaison près dans $Spin(n, \mathbb{C})$, nous devons étudier plus en avant le groupe $Spin(n, \mathbb{C})$.

4.3 Sous-groupes exceptionnels de $Spin(n, \mathbb{C})$

L'objectif de cette section est de déterminer pour quels n on peut trouver un sous-groupe exceptionnel (irréductible à centralisateur non-trivial) dans $Spin(n, \mathbb{C})$. Pour faire cela, nous allons commencer par rappeler la construction de l'algèbre de Clifford associée à un espace quadratique (V, q) où q est non-dégénérée dans la sous-section 4.3.1. Dans la sous-section 4.3.2, nous donnons quelques critères d'irréductibilité en rapport avec le groupe G_n des spin fondamentaux. On en tire quelques conséquences sur les centralisateurs d'irréductibles. En particulier nous obtenons le tableau 4.3.2.

On rappelle la définition suivante de Sikora (cf [Sik12]), un groupe de Lie complexe G est dit **CI** si le centralisateur de chaque sous-groupe irréductible de G est réduit au centre de G . En substance, la question 19 de [Sik12], demande si $SL(n, \mathbb{C})$ et $GL(n, \mathbb{C})$ sont les seuls groupes de Lie réductifs complexes et CI.

Une des conséquences (voir aussi la discussion à la fin de la section 4.3.2) de ce que l'on a fait est que parmi tous les groupes de Lie connexes classiques (i.e. quotients de $SL(n, \mathbb{C})$, $Spin(n, \mathbb{C})$ ou $Sp(2n, \mathbb{C})$) seul $Spin(4, \mathbb{C})$ est CI sans être égal à $SL(n, \mathbb{C})$ pour un certain n . En particulier la réponse à la question de Sikora est "non". Nous posons une nouvelle question relativement à ce problème (cf question 5) .

On introduit, dans cette section des notations et résultats que l'on utilisera également dans la section 4.4.

4.3.1 Rappels sur l'algèbre de Clifford

Dans toute la suite, on considère un \mathbb{C} -espace vectoriel $V := \mathbb{C}^{\mathbb{Z}/n}$ muni de sa base canonique (e_0, \dots, e_{n-1}) . Sur cette espace vectoriel on définit une forme quadratique q :

$$q : \begin{cases} V & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ \sum x_i e_i & \longmapsto & \sum x_i^2 \end{cases}$$

Cette forme quadratique est non-dégénérée. De plus (e_0, \dots, e_{n-1}) est une base orthonormale pour cet espace. On définit tout d'abord l'**algèbre tensorielle** $T(V)$ par :

$$T(V) = \mathbb{C} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \dots \oplus V^{\otimes k} \oplus \dots$$

L'algèbre de Clifford $\mathcal{C}(V, q)$ associée à (V, q) est alors définie par :

$$\mathcal{C}(V, q) := \frac{T(V)}{\langle u \otimes u - q(u) \mid u \in V \rangle}$$

On remarquera que $\mathcal{C}(V, q)$ est une \mathbb{C} -algèbre (le produit de deux éléments venant du produit tensoriel dans l'algèbre tensorielle). Si $s, t \in \mathcal{C}(V, q)$ alors on notera $st := s \otimes t$.

La proposition suivante est une proposition classique sur les algèbres de Clifford, on peut par exemple la retrouver dans [M-T86] :

Proposition 55

Soient $n \geq 1$ et (V, q) un \mathbb{C} -espace vectoriel quadratique non-dégénéré muni d'une base orthonormale (e_0, \dots, e_{n-1}) . On note B_q la forme polaire associée à q . Alors :

- L'algèbre de Clifford $\mathcal{C}(V, q)$ contient \mathbb{C} et V .
- En tant qu'algèbre, $\mathcal{C}(V, q)$ est engendrée par e_0, \dots, e_{n-1} .
- En tant que \mathbb{C} -espace vectoriel, $\mathcal{C}(V, q)$ est de dimension finie 2^n et admet pour base :

$$\{e_{i_1} \dots e_{i_k} \mid k \geq 0 \text{ et } 0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1\}$$

- Si $u, v \in V$ alors $B_q(u, v) = uv \in \mathcal{C}(V, q)$.

Les éléments de la base donnée dans cette proposition auront une certaine importance dans les calculs qui suivent. Nous allons leur donner une notation spécifique. Pour tout $A \subseteq \{0, \dots, n-1\}$:

$$e_A := \begin{cases} e_{a_1} \dots e_{a_k} & \text{si } A = \{a_1 < \dots < a_k\} \text{ avec } k := |A| > 0 \\ 1 & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$

On voit alors qu'une base de $\mathcal{C}(V, q)$ est indexée par $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/n)$, on retrouve le fait que sa dimension est 2^n .

Pour calculer le produit de deux éléments $\mathcal{C}(V, q)$, on remarque :

$$\text{pour } 0 \leq i, j \leq n-1 \quad e_i e_j + e_j e_i = 2B_q(e_i, e_j)$$

Vu que (e_0, \dots, e_{n-1}) est une base orthonormale pour q , on en déduit :

$$e_i e_j = \begin{cases} -e_j e_i & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Par conséquent, si A et B sont contenus dans $\{0, \dots, n-1\}$ alors :

$$e_A e_B = (-1)^{r(A,B)} e_{A \Delta B} \text{ où } r(A, B) := \sum_{j \in B} |\{k \in A \mid k > j\}| \quad (4.5)$$

Le nombre entier $r(A, B)$ est congru modulo 2 au nombre d'échanges entre e_i et e_j nécessaire pour ranger les éléments de la base (e_0, \dots, e_{n-1}) dans $e_A e_B$ d'une façon croissante.

Il existe une graduation naturelle par \mathbb{N} de l'algèbre tensorielle $T(V)$ qui descend naturellement (vu la forme de l'idéal par lequel on quotiente l'algèbre tensorielle) en une graduation par $\mathbb{Z}/2$ dans l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}(V, q)$. On peut alors expliciter :

le sous-espace de degré 0 : $\mathcal{C}(V, q)^+ := \text{Vect}(e_A \mid |A| \text{ pair})$

le sous-espace de degré 1 : $\mathcal{C}(V, q)^- := \text{Vect}(e_A \mid |A| \text{ impair})$

Un élément contenu dans $\mathcal{C}(V, q)^+$ (resp. $\mathcal{C}(V, q)^-$) sera dit **pair** (resp. **impair**). La proposition suivante est alors conséquence des règles de calcul données plus haut (cf [M-T86]).

Proposition 56

Soient $n \geq 1$ et (V, q) un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension quadratique de base orthonormale (e_0, \dots, e_{n-1}) .

Si n est impair alors le centre de $\mathcal{C}(V, q)^+$ est réduit à \mathbb{C} et le centre de $\mathcal{C}(V, q)$ est $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}e_{\{0, \dots, n-1\}}$.

Si n est pair alors le centre de $\mathcal{C}(V, q)^+$ est $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}e_{\{0, \dots, n-1\}}$ et le centre de $\mathcal{C}(V, q)$ est réduit à \mathbb{C} .

Nous allons maintenant construire le groupe $Spin(V, q)$. Tout d'abord, si $u \in V$ est un vecteur non-isotrope alors la réflexion orthogonale s_u de V par rapport à u^\perp (fixant point par point u^\perp et envoyant u sur $-u$) est donnée par :

$$s_u(x) = x - 2 \frac{B_q(x, u)}{q(u)} u$$

Dans l'algèbre de Clifford :

$$x - 2 \frac{B_q(x, u)}{q(u)} u = x - (xu + ux)u^{-2}u = -uxu^{-1}$$

Ainsi, toute réflexion orthogonale s_u est induite, dans l'algèbre de Clifford par $S_u : x \mapsto -uxu^{-1}$ où $x \in V \subseteq \mathcal{C}(V, q)$. Comme tout élément de $SO(V, q)$ s'écrit comme un produit d'un nombre pair de telles réflexions, pour tout $g \in SO(V, q)$, il existe un élément $u \in \mathcal{C}(V, q)^+$ inversible tel que $S_u = g$. Réciproquement si $u \in \mathcal{C}(V, q)^+$ est inversible et vérifie $uVu^{-1} \subseteq V$ alors l'application $S_u : x \mapsto uxu^{-1}$ induit un élément de $SO(V, q)$ sur V .

Notons Γ^+ le **groupe de Clifford pair** défini par :

$$\Gamma^+ := \{u \in \mathcal{C}(V, q)^+ \mid u \text{ inversible et } uVu^{-1} \subseteq V\}$$

On en déduit une application surjective :

$$\psi : \begin{array}{l} \Gamma^+ \longrightarrow SO(V, q) \\ u \longmapsto S_u \end{array}$$

Le groupe Γ^+ n'est pas tout à fait le groupe de Spin. Notons que l'anti-automorphisme J de $T(V)$ défini sur les tenseurs purs par $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)^J := v_k \otimes \cdots \otimes v_1$ descend en un anti-automorphisme (toujours noté J) de $\mathcal{C}(V, q)$.

On définit alors la **norme spinorielle** sur Γ^+ par $Q(x) := xx^J$. On peut vérifier que $Q(x)$ est un scalaire. Or Γ^+ est constitué d'éléments inversibles donc $Q(x) \in \mathbb{C}^*$. L'application Q est alors un morphisme de groupes de Γ^+ vers \mathbb{C}^* . Son noyau est, par définition, le groupe $Spin(V, q)$. On note :

$$\pi : \begin{array}{l} Spin(V, q) \longrightarrow SO(V, q) \\ u \longmapsto S_u \end{array}$$

On peut vérifier que cette application est toujours surjective car pour $u \in \Gamma^+$, $\psi(\sqrt{Q(u)}^{-1}u) = \psi(u)$ et ψ est surjective.

Le noyau de π est contenu dans le centre de $\mathcal{C}(V, q)$ (car les éléments dans ce noyau commutent avec tous les éléments de V) et dans $\mathcal{C}(V, q)^+$, ils sont donc scalaires (cf proposition 56). Or il n'y a que deux scalaires dont

la norme spinorielle est $1 : \pm 1$. Nous avons donc construit un revêtement d'ordre 2 de $SO(V, q)$.

Dans la suite, nous noterons (comme avant) $SO(n, \mathbb{C})$ le groupe $SO(V, q)$ et $Spin(n, \mathbb{C})$ le groupe $Spin(V, q)$ en fixant sur (V, q) une base orthonormale (e_0, \dots, e_{n-1}) . Le morphisme de projection de $Spin(n, \mathbb{C})$ sur $SO(n, \mathbb{C})$ sera toujours noté π . Nous donnons maintenant quelques éléments de calcul dans $Spin(n, \mathbb{C})$ pour ensuite les utiliser dans la sous-section 4.3.2.

Proposition 57

Soient $n \geq 1$ et A, B deux sous-ensembles de $\{0, \dots, n-1\}$:

$$e_A^2 = (-1)^{\frac{|A|(|A|-1)}{2}}$$

$$[e_A, e_B] = (-1)^{|A||B|+|A \cap B|}$$

Explicitement $[e_A, e_B] = \begin{cases} (-1)^{|A \cap B|} & \text{si } |A| \text{ ou } |B| \text{ est pair} \\ -(-1)^{|A \cap B|} & \text{si } |A| \text{ et } |B| \text{ sont impairs} \end{cases}$

Démonstration : D'après l'équation 4.5 :

$$\begin{aligned} e_A^2 &= (-1)^{r(A,A)} e_{A \Delta A} \\ &= (-1)^{r(A,A)} e_\emptyset \\ &= (-1)^{r(A,A)} \end{aligned}$$

Si $A = \emptyset$ alors $r(A, A) = 0 = \frac{|A|(|A|-1)}{2}$ sinon, $|A| = k > 0$ et on note $A = \{a_1 < \dots < a_k\}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} r(A, A) &= \sum_{i=1}^k |\{b \in A \mid b > a_i\}| \\ &= \sum_{i=1}^k |\{a_{i+1} < \dots < a_k\}| \\ &= \sum_{i=1}^k k - i \\ &= \frac{k(k-1)}{2} \\ &= \frac{|A|(|A|-1)}{2} \end{aligned}$$

On vient donc de montrer que $e_A^2 = (-1)^{\frac{|A|(|A|-1)}{2}}$. En particulier $e_A^{-1} = (-1)^{\frac{|A|(|A|-1)}{2}} e_A$.

Si A, B sont deux parties de $\{0, \dots, n-1\}$ alors :

$$\begin{aligned} [e_A, e_B] &= e_A e_B e_A^{-1} e_B^{-1} \\ &= (e_A e_B) e_A (-1)^{\frac{|A|(|A|-1)}{2}} e_B (-1)^{\frac{|B|(|B|-1)}{2}} \\ &= (e_A e_B)^2 (-1)^{\frac{|A|(|A|-1)}{2}} (-1)^{\frac{|B|(|B|-1)}{2}} \\ &= (-1)^{2r(A,B)} (e_{A\Delta B})^2 (-1)^{\frac{|A|(|A|-1)}{2}} (-1)^{\frac{|B|(|B|-1)}{2}} \\ &= (-1)^{\frac{|A\Delta B|(|A\Delta B|-1)}{2}} (-1)^{\frac{|A|(|A|-1)}{2}} (-1)^{\frac{|B|(|B|-1)}{2}} \end{aligned}$$

Maintenant, on utilise la formule sur le cardinal de $A\Delta B$ (vu que l'on va diviser le nombre par 2 et regarder la congruence modulo 2, il nous suffit de regarder la congruence modulo 4) :

$$\begin{aligned} |A\Delta B|(|A\Delta B|-1) &= (|A|+|B|-2|A\cap B|)(|A|+|B|-2|A\cap B|-1) \\ &= |A|(|A|-1) + |B|(|B|-1) + 2(|A||B| - |A\cap B|) \pmod{4} \end{aligned}$$

Ainsi $[e_A, e_B] = (-1)^{|A||B|-|A\cap B|} = (-1)^{|A||B|+|A\cap B|}$. En particulier si $|A|$ ou $|B|$ est pair alors $|A||B| = 0 \pmod{2}$ et $[e_A, e_B] = (-1)^{|A\cap B|}$. Si $|A|$ et $|B|$ sont impairs alors $|A||B| = 1 \pmod{2}$ et $[e_A, e_B] = -(-1)^{|A\cap B|}$. ■

Dans la prochaine sous-section nous allons essentiellement nous intéresser au groupe $G_n := \langle \pm e_i e_j \mid 0 \leq i < j \leq n-1 \rangle$. Ce groupe sera appelé **le groupe des spin fondamentaux** à l'ordre n . En remarquant que le groupe $SDO(n, \mathbb{C})$ est engendré par les $s_{e_i} s_{e_j}$ avec $0 \leq i < j \leq n-1$, nous voyons que $G_n = \pi^{-1}(SDO(n, \mathbb{C}))$. À conjugaison près, tous les centralisateurs de groupes irréductibles de $Spin(n, \mathbb{C})$ se trouvent dans G_n . C'est pourquoi, dans la prochaine sous-section, nous allons travailler sur les sous-groupes de G_n .

4.3.2 Groupe des spin fondamentaux et irréductibilité

Dans cette sous-section nous cherchons à donner des critères d'irréductibilité en lien avec G_n . Comme nous l'avons déjà remarqué, tout sous-groupe irréductible de $Spin(n, \mathbb{C})$ peut-être conjugué de telle sorte que son centralisateur dans $Spin(n, \mathbb{C})$ soit contenu dans le groupe des spin fondamentaux G_n .

Irréductibilité. Le premier lemme que l'on démontre est une condition nécessaire et suffisante d'irréductibilité pour un sous-groupe de G_n .

Lemme 23

Soient $n \geq 3$ et H un sous-groupe de G_n , alors H est irréductible si et seulement si pour tout $0 \leq i < j \leq n - 1$, $e_{\{i,j\}} \notin Z_{Spin(n,\mathbb{C})}(H)$.

De plus, si $H \leq G_n$ est irréductible alors $Z_{Spin(n,\mathbb{C})}(H) \leq G_n$.

Démonstration : On remarquera que H est irréductible si et seulement si son projeté $\pi(H)$ dans $SO(n, \mathbb{C})$ l'est.

Supposons qu'il existe $0 \leq i < j \leq n - 1$ tel que H commute avec $e_{\{i,j\}}$. Pour tout $h \in H$, il existe A un sous-ensemble de cardinal pair de $\{0, \dots, n - 1\}$ tel que $h = \pm e_A$. Par hypothèse, $[h, e_{\{i,j\}}] = 1$, on en déduit, en vertu de la proposition 57, que :

$$|A \cap \{i, j\}| = 0 \text{ mod } 2$$

Comme il est clair que cette intersection est de cardinal 0, 1 ou 2 on en déduit qu'il existe B sous-ensemble de cardinal pair de $\{0, \dots, n - 1\} - \{i, j\}$ tel que :

$$A = B \text{ ou } A = B \cup \{i, j\}$$

Ainsi, si l'on regarde l'image de e_i et e_j par la matrice $\pi(h)$:

$$(\pi(h)(e_i), \pi(h)(e_j)) = \begin{cases} (e_i, e_j) & \text{si } A = B \\ (-e_i, -e_j) & \text{si } A = B \cup \{i, j\} \end{cases}$$

Dans les deux cas, on remarque que pour tout $h \in H$, $\pi(h)(e_i + \sqrt{-1}e_j) = \pm(e_i + \sqrt{-1}e_j)$. Autrement dit $\pi(H)$ stabilise la droite engendrée par $e_i + \sqrt{-1}e_j$ qui est un vecteur isotrope non-trivial, cela montre que $\pi(H)$ n'est pas irréductible et donc H n'est pas irréductible.

Réciproquement, supposons qu'aucun $e_{\{i,j\}}$ ne centralise H . Pour montrer que H est irréductible, nous allons montrer que le centralisateur de $\pi(H)$ dans $SO(n, \mathbb{C})$ est contenu dans $SDO(n, \mathbb{C})$.

Pour tout $0 \leq i < j \leq n - 1$, il existe $h_{i,j} \in H$ tel que $h_{i,j}$ ne commute pas avec $e_{\{i,j\}}$ (i.e. $[h_{i,j}, e_{\{i,j\}}] = -1$). Comme chaque élément de h de H s'écrit $h = \pm e_A$ avec A de cardinal pair dans $\{0, \dots, n - 1\}$, on peut trouver (par la proposition 57) B de cardinal impair dans A , ne contenant ni i ni j tel que :

$$h_{i,j} = \pm e_i e_B \text{ ou } h_{i,j} \pm e_j e_B$$

Par conséquent, pour tout $0 \leq i < j \leq n-1$, le groupe $\pi(H)$ contient un élément $\pi(h_{i,j})$ tel que e_i et e_j appartiennent à des sous-espaces propres différents pour $\pi(h_{i,j})$.

Fixons $0 \leq i \leq n-1$. Soit z commutant avec $\pi(H)$ alors pour tout $j \neq i$, z stabilise les deux sous-espaces propres (orthogonaux l'un à l'autre) de $\pi(h_{i,j})$. En particulier $z(e_i)$ appartient au sous-espace propre pour $\pi(h_{i,j})$ contenant e_i . Vu que e_j est dans un sous-espace propre différent, e_j est orthogonal à $z(e_i)$.

Par suite, $z(e_i) \in \text{Vect}(e_j \mid j \neq i)^\perp = \text{Vect}(e_i)$. On en déduit que $z(e_i) = \lambda e_i$. On vient de montrer que pour tout z commutant avec $\pi(H)$ et $0 \leq i \leq n-1$, $z(e_i) \in \text{Vect}(e_i)$ on en déduit que z est diagonale et donc $z \in SDO(n, \mathbb{C})$. Ceci justifie que $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(\pi(H)) \leq SDO(n, \mathbb{C})$ est fini et donc $\pi(H)$ est irréductible. Finalement, cela implique que H l'est.

Finalement, si $H \leq G_n$ est irréductible alors $\pi(H) \leq SDO(n, \mathbb{C})$ l'est. Dans ce cas $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(\pi(H))$ contient $SDO(n, \mathbb{C})$. Or ce groupe est maximal à conjugaison près parmi les centralisateurs d'irréductibles (par la proposition 53). Ainsi on a $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(\pi(H)) = SDO(n, \mathbb{C})$. Comme il est clair que $\pi(Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H)) \leq Z_{SO(n, \mathbb{C})}(\pi(H))$ on en déduit que $Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H) \leq G_n$. ■

On fait une remarque d'ordre algorithmique. Il est assez simple (pour des valeurs raisonnables de n) de faire la liste de tous les éléments de G_n . Si l'on se donne $g_1, \dots, g_k \in G_n$, la proposition 57 permet de déterminer facilement si un élément de G_n commute ou non avec tous les g_1, \dots, g_k . En vertu du lemme 23, nous avons un critère d'irréductibilité pour les sous-groupes de G_n exprimé uniquement en terme de centralisateur dans G_n .

Autrement dit on peut programmer une fonction (nous l'avons fait sur GAP : [GAP]) prenant en entrée $n \geq 3$ et une liste d'éléments $\{g_1, \dots, g_k\}$ de G_n et renvoyant le centralisateur de $\{g_1, \dots, g_k\}$ dans G_n . En parcourant les éléments de cette liste, on peut rapidement dire si le groupe engendré par g_1, \dots, g_k est irréductible ou non. S'il est irréductible, le centralisateur calculé est en fait le centralisateur dans $Spin(n, \mathbb{C})$. Nous utiliserons de tels calculs plus tard.

Le lemme qui suit donne un critère suffisant de réductibilité pour les sous-groupes généraux de $Spin(n, \mathbb{C})$:

Lemme 24

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe de $Spin(n, \mathbb{C})$, s'il existe $0 \leq i < j \leq n - 1$ tels que $e_{\{i,j\}}$ centralise H alors H n'est pas irréductible.

Démonstration : Quitte à remplacer H par $\pi^{-1}(\pi(H))$ (ce qui ne change ni son irréductibilité, ni son centralisateur) on peut supposer que H contient le centre de $Spin(n, \mathbb{C})$.

On choisit donc $0 \leq i < j \leq n - 1$ tels que $e_{\{i,j\}}$ centralise H . Quitte à conjuguer (cf lemme 22 qui stipule que le normalisateur de $SDO(n, \mathbb{C})$ contient les permutations de \mathbb{Z}/n), on peut supposer $i = 0, j = 1$.

Ainsi $e_{\{0,1\}}$ est contenu dans le centralisateur de H . Par suite :

$$\pi(e_{\{0,1\}}) = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

est contenu dans le centralisateur de $\pi(H)$. On en déduit que :

$$\pi(H) \leq \begin{pmatrix} O(2, \mathbb{C}) & 0 \\ 0 & O(n-2, \mathbb{C}) \end{pmatrix}$$

Dans $\mathcal{C}(V, q)$, l'algèbre de Clifford dans laquelle on a construit le groupe $Spin(n, \mathbb{C})$, on construit deux sous-algèbres :

$S :=$ la sous-algèbre engendrée par e_0, e_1

$T :=$ la sous-algèbre engendrée par e_2, \dots, e_{n-1}

Par la décomposition de $\pi(H)$, on en déduit que tout élément de $h \in H$ s'écrit $h = s(h)t(h)$ avec $s(h) \in S, t(h) \in T$ et $s(h)$ et $t(h)$ sont uniques à multiplication par un scalaire près.

Soit $2 \leq k \leq n - 1$ alors $[e_{\{0,1\}}, e_k] = 1$ par la proposition 57. Donc $e_{\{0,1\}}$ commute avec tout élément de T . Ainsi, comme $e_{\{0,1\}}$ commute avec tout élément de h (par hypothèse) et tout élément de T (on vient de le montrer), on en déduit que pour tout $h \in H, [e_{\{0,1\}}, s(h)] = 1$.

Calculons le centralisateur de $e_{\{0,1\}}$ dans S . On sait que :

$$S = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}e_0 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_{\{0,1\}}$$

Soit $s = \lambda + \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_{\{0,1\}} e_{\{0,1\}}$ l'élément le plus général de S alors :

$$\begin{aligned} e_{\{0,1\}} s e_{\{0,1\}}^{-1} &= \lambda + \lambda_0 e_{\{0,1\}} e_0 e_{\{0,1\}}^{-1} + \lambda_1 e_{\{0,1\}} e_1 e_{\{0,1\}}^{-1} + \lambda_{\{0,1\}} e_{\{0,1\}} e_{\{0,1\}} e_{\{0,1\}}^{-1} \\ &= \lambda - \lambda_0 e_0 - \lambda_1 e_1 + \lambda_{\{0,1\}} e_{\{0,1\}} \end{aligned}$$

Ainsi $[e_{\{0,1\}}, s] = 1$ si et seulement si $e_{\{0,1\}} s e_{\{0,1\}}^{-1} = s$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \lambda & = \lambda \\ -\lambda_0 & = \lambda_0 \\ -\lambda_1 & = \lambda_1 \\ \lambda_{\{0,1\}} & = \lambda_{\{0,1\}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent $[e_{\{0,1\}}, s] = 1$ si et seulement si $s \in Vect(1, e_{\{0,1\}}) = S^+$ l'ensemble des éléments pairs de S . Il s'ensuit que pour tout $h \in H$, $h = s(h)t(h)$ avec $s(h) \in S^+$ et $t(h) \in T^+$ donc pour tout $h \in H$:

$$\pi(h) = \begin{pmatrix} \pi(s(h)) & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \pi(t(h)) \end{pmatrix}$$

avec $\pi(s(h)) \in SO(2, \mathbb{C})$ or $SO(2, \mathbb{C})$ est un groupe abélien infini. On en déduit que si :

$$g(A) := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \text{ avec } A \in SO(2, \mathbb{C})$$

alors $g(A)$ commute avec $\pi(H)$. Le centralisateur de $\pi(H)$ dans le groupe $SO(n, \mathbb{C})$ contient donc un sous-groupe infini. On en déduit que $\pi(H)$ n'est pas irréductible et donc H ne l'est pas non-plus. ■

Quelques conséquences pour $n \leq 6$. Pour le cas $n = 2$, on sait que $SO(2, \mathbb{C})$ est abélien, on laisse donc ce cas de côté.

$n = 3$. Le groupe $Spin(3, \mathbb{C})$ est isomorphe à $SL(2, \mathbb{C})$. On en déduit (par le lemme de Schur) que tout centralisateur d'irréductible dans $Spin(3, \mathbb{C})$ est réduit au centre de $Spin(3, \mathbb{C})$.

$n = 4$. Le groupe $Spin(4, \mathbb{C})$ est isomorphe (cf table 4.1) au groupe semi-simple $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$. La proposition est la suivante :

Proposition 58

Soit H un sous-groupe irréductible de $Spin(4, \mathbb{C})$ alors le centralisateur de H est réduit au centre de $Spin(4, \mathbb{C})$.

Démonstration : Quitte à conjuguer H , on peut supposer $Z_{Spin(4, \mathbb{C})}(H) \leq G_4$ (vient de la proposition 53). Prenons $\pm e_A \in Z_{Spin(4, \mathbb{C})}(H) \leq G_4$ avec A un sous-ensemble de cardinal pair contenu dans $\{0, 1, 2, 3\}$.

Si A est de cardinal 2 alors on contredit l'irréductibilité de H par le lemme 24. Donc $|A| \neq 2$, vu que $|A|$ est pair et inférieur à 4, on en conclut que $|A| = 0$ ou $|A| = 4$ auquel cas $\pm e_A$ est un élément dans le centre de $Spin(4, \mathbb{C})$. On en déduit que $Z_{Spin(4, \mathbb{C})}(H)$ est réduit au centre de $Spin(4, \mathbb{C})$. ■

$n = 5$. Le groupe $Spin(5, \mathbb{C})$ est isomorphe à $Sp(4, \mathbb{C})$ (cf table 4.1). La proposition est la suivante :

Proposition 59

Soit H un sous-groupe irréductible de $Spin(5, \mathbb{C})$ alors le centralisateur de H dans $Spin(5, \mathbb{C})$ est d'exposant 2 et donc abélien. De plus, le centralisateur de H est soit isomorphe à $\mathbb{Z}/2$ (dans ce cas c'est le centre de $Spin(5, \mathbb{C})$), soit isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Démonstration : Quitte à conjuguer H , on peut supposer $Z_{Spin(5, \mathbb{C})}(H) \leq G_5$ (vient de la proposition 53). Prenons $\pm e_A \in Z_{Spin(5, \mathbb{C})}(H) \leq G_5$ avec A un sous-ensemble de cardinal pair contenu dans $\{0, \dots, 4\}$.

Le cardinal de A est 0, 2 ou 4. Si $|A| = 2$ alors $\pm e_A$ commute avec H et cela contredit l'irréductibilité de H par le lemme 24. Ainsi $|A| = 0$ ou $|A| = 4$ or (proposition 57) :

$$\begin{aligned} (\pm e_A)^2 &= e_A^2 \\ &= (-1)^{\frac{|A|(|A|-1)}{2}} \\ &= 1 \text{ car } |A| = 0 \pmod 4 \end{aligned}$$

On vient donc de montrer que tout élément de $Z_{Spin(5, \mathbb{C})}(H)$ est d'ordre divisant 2, comme il contient -1 , il est d'exposant 2 et en particulier (on l'a déjà vu), il est abélien.

Supposons qu'il existe deux sous-ensembles de cardinal 4, A et B , de $\{0, \dots, 4\}$ tels que $A \neq B$ et $\pm e_A, \pm e_B$ centralisent H . Alors :

$$|A \Delta B| = \underbrace{|A| + |B|}_{=8} - 2|A \cap B|$$

Ainsi $2|A \cap B| = 8 - |A \Delta B|$.

Or $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, vu que A et B sont de cardinal 4 dans un ensemble de cardinal 5 et que $A \neq B$, on a $|A \cup B| = 5$ et donc :

$$|A \cap B| = 3 \Rightarrow |A \Delta B| = 2$$

Or $e_{A \Delta B} = \pm e_A e_B$ qui commute avec H car e_A , e_B et ± 1 commutent avec H . Ceci contredit l'irréductibilité de H par le lemme 24. Par suite, le centralisateur de H ne peut contenir plus de 4 éléments. Comme il est d'exposant 2, on a la conclusion. ■

Remarquons que l'on peut effectivement trouver un sous-groupe exceptionnel de $Spin(5, \mathbb{C})$ (irréductible et à centralisateur non-trivial) :

Exemple 8

Le sous-groupe H de G_5 engendré par $\{e_{\{0,1\}}, e_{\{1,2\}}, e_{\{2,3\}}\}$ est un sous-groupe exceptionnel de $Spin(5, \mathbb{C})$. Le centralisateur de H dans le groupe $Spin(5, \mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Démonstration : En utilisant un logiciel de calcul, le centralisateur de H dans G_5 est $\{\pm 1, \pm e_{\{0,1,2,3\}}\}$. Par le lemme 23, H est irréductible, de plus ce centralisateur est d'ordre 4 et d'exposant 2, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. ■

$n = 6$. Dans ce cas le groupe $Spin(6, \mathbb{C})$ est isomorphe à $SL(4, \mathbb{C})$ et donc tout centralisateur d'irréductible dans $Spin(6, \mathbb{C})$ est réduit au centre de $Spin(6, \mathbb{C})$.

Conséquences pour $n \geq 7$. Dans le cas où $n \geq 7$, nous allons voir que les centralisateurs d'irréductibles peuvent avoir une structure plus compliquée.

Théorème 4.1

Soit $n \geq 7$. Alors il existe H un sous-groupe irréductible du groupe $Spin(n, \mathbb{C})$ tel que le centralisateur de $Spin(n, \mathbb{C})$ ne soit pas réduit au centre de $Spin(n, \mathbb{C})$. De plus, si $n \neq 8$ on peut même choisir H de telle sorte que $Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H)$ ne soit pas abélien.

Démonstration : Pour $n = 7$, on considère le groupe suivant :

$$H_7 := \langle \pm 1, e_{\{3,4,5,6\}}, e_{\{1,2,4,5\}}, e_{\{1,2,3,5\}}, e_{\{2,3,4,6\}} \rangle \leq G_7$$

En calculant le centralisateur de H_7 dans G_7 avec GAP, on obtient :

$$Z_{G_7}(H_7) = \{\pm 1, \pm e_{\{0,2,5,6\}}, \pm e_{\{1,2,3,4,5,6\}}, \pm e_{\{0,1,3,4\}}\}$$

En particulier, par le lemme 23, H_7 est un sous-groupe irréductible de $Spin(7, \mathbb{C})$, de plus, dans ce cas :

$$Z_{Spin(7, \mathbb{C})}(H_7) = Z_{G_7}(H_7) = \{\pm 1, \pm e_{\{0,2,5,6\}}, \pm e_{\{1,2,3,4,5,6\}}, \pm e_{\{0,1,3,4\}}\}$$

Remarquons finalement que le centralisateur de H_7 dans $Spin(7, \mathbb{C})$ est engendré par $e_{\{1,2,3,4,5,6\}}$ d'ordre 4 et $e_{\{0,2,5,6\}}$ d'ordre 2, on en déduit que :

$$Z_{Spin(7, \mathbb{C})}(H_7) = \langle e_{\{1,2,3,4,5,6\}} \rangle \rtimes \langle e_{\{0,2,5,6\}} \rangle \quad (4.6)$$

En utilisant la proposition 57, comme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{0, 2, 5, 6\} = \{2, 5, 6\}$ de cardinal 3 impair :

$$[e_{\{1,2,3,4,5,6\}}, e_{\{0,2,5,6\}}] = -1$$

Ainsi, vu la décomposition (4.6) de $Z_{Spin(7, \mathbb{C})}(H_7)$ on en déduit que $Z_{Spin(7, \mathbb{C})}(H_7)$ est isomorphe au groupe diédral \mathbb{D}_4 d'ordre 8, en particulier, il n'est pas commutatif.

Pour $n = 8$, on considère le groupe suivant :

$$H_8 := \langle \pm 1, e_{\{4,5,6,7\}}, e_{\{2,3,6,7\}}, e_{\{1,3,5,7\}} \rangle \leq G_8$$

En calculant le centralisateur de H_8 dans G_8 avec GAP, on obtient :

$$Z_{G_8}(H_8) = \left\{ \begin{array}{cccc} \pm 1, & \pm e_{\{4,5,6,7\}}, & \pm e_{\{2,3,6,7\}}, & \pm e_{\{1,3,5,7\}} \\ \pm e_{\{2,3,4,5\}}, & \pm e_{\{1,3,4,6\}}, & \pm e_{\{1,2,5,6\}}, & \pm e_{\{1,2,4,7\}} \\ \pm e_{\{0,3,5,6\}}, & \pm e_{\{0,3,4,7\}}, & \pm e_{\{0,2,5,7\}}, & \pm e_{\{0,2,4,6\}} \\ \pm e_{\{0,1,6,7\}}, & \pm e_{\{0,1,4,5\}}, & \pm e_{\{0,1,2,3\}}, & \pm e_{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}} \end{array} \right\}$$

En particulier, par le lemme 23, H_8 est un sous-groupe irréductible de $Spin(8, \mathbb{C})$, de plus, dans ce cas :

$$Z_{Spin(8, \mathbb{C})}(H_8) = Z_{G_8}(H_8)$$

Le centralisateur de $Z_{Spin(8, \mathbb{C})}(H_8)$ est constitué d'éléments d'ordre divisant 2 (ils sont de la forme $\pm e_A$ avec $|A| = 0 \pmod{4}$). Ainsi $Z_{Spin(8, \mathbb{C})}(H_8)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^5$.

Pour $n = 9$, on considère le groupe suivant :

$$H_9 := \langle \pm 1, e_{\{5,6,7,8\}}, e_{\{1,3,5,7\}}, e_{\{2,3,6,7\}}, e_{\{0,1\}} \rangle \leq G_9$$

En calculant le centralisateur de H_9 dans G_9 avec GAP, on obtient :

$$Z_{G_9}(H_9) = \left\{ \begin{array}{lll} \pm 1, & \pm e_{\{5,6,7,8\}}, & \pm e_{\{3,4,7,8\}} \\ \pm e_{\{3,4,5,6\}}, & \pm e_{\{2,4,6,8\}}, & \pm e_{\{2,4,5,7\}} \\ \pm e_{\{2,3,6,7\}}, & \pm e_{\{2,3,5,8\}}, & \pm e_{\{0,1,6,7\}} \\ \pm e_{\{0,1,5,8\}}, & \pm e_{\{0,1,3,4,6,8\}}, & \pm e_{\{0,1,3,4,5,7\}} \\ \pm e_{\{0,1,2,4,7,8\}}, & \pm e_{\{0,1,2,4,5,6\}}, & \pm e_{\{0,1,2,3\}} \\ \pm e_{\{0,1,2,3,5,6,7,8\}} \end{array} \right\}$$

En particulier, par le lemme 23, H_9 est un sous-groupe irréductible de $Spin(9, \mathbb{C})$, de plus, dans ce cas :

$$Z_{Spin(9, \mathbb{C})}(H_9) = Z_{G_9}(H_9)$$

Le groupe $Z_{Spin(9, \mathbb{C})}(H_9)$ est de cardinal 32, si $x := e_{\{0,1,3,4,6,8\}}$ alors :

$$\begin{aligned} [e_{\{0,1,3,4,6,8\}}, e_{\{3,4,7,8\}}] &= (-1)^{|\{0,1,3,4,6,8\} \cap \{3,4,7,8\}|} \\ &= -1 \end{aligned}$$

En particulier, on constate que $Z_{Spin(9, \mathbb{C})}(H_9)$ n'est pas abélien.

On suppose maintenant $n \geq 10$. On considère le sous-groupe K_{n-7} de G_n engendré par $e_{\{i,j\}}$ avec $7 \leq i < j \leq n-1$. Notons alors :

$$H := \langle H_7, K_{n-7} \rangle \leq G_n$$

Calculons le centralisateur de H dans G_n . Soit $e_A \in G_n$, si $A \cap \{7, \dots, n\}$ n'est ni vide ni égal à $\{7, \dots, n\}$ alors on peut trouver $7 \leq i < j \leq n$ vérifiant $i \in A$ et $j \notin A$. On en déduit $|A \cap \{i, j\}| = 1$ et donc e_A ne commute pas avec $e_{\{i,j\}} \in K_{n-7}$. En particulier :

$$\pm e_A \in Z_{G_n}(H) \Rightarrow A \subseteq \{0, \dots, 6\} \text{ ou } A \supseteq \{7, \dots, n\}$$

Si $A \subseteq \{0, \dots, 6\}$ alors il est clair (vu que e_A commute avec K_{n-7} dans ce cas) que $\pm e_A \in Z_{G_n}(H)$ si et seulement si $\pm e_A \in Z_{G_7}(H_7)$.

Si A contient $\{7, \dots, n\}$ alors $\pm e_A \in Z_{G_n}(H)$ si et seulement si l'élément $e_{A-\{7, \dots, n\}}$ est dans $Z_{G_7}(H_7)$.

En particulier, $Z_{G_n}(H)$ ne contient jamais d'éléments $\pm e_A$ avec $|A| = 2$ donc par le lemme 23, H est irréductible dans $Spin(n, \mathbb{C})$ et :

$$Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H) = Z_{G_n}(H)$$

De plus $Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H)$ contient le sous-groupe $Z_{G_7}(H_7)$ qui est non abélien donc $Z_{G_n}(H)$ n'est pas abélien. ■

Une conséquence immédiate de ce théorème est que $Spin(n, \mathbb{C})$ n'est jamais CI (au sens de Sikora, cf question 19 dans [Sik12]) pour $n \geq 7$. De plus, nous avons construit (pour $n \neq 8$) des centralisateurs d'irréductibles non-abéliens. Une question naturelle est alors, est-ce que l'on peut faire cela pour $n = 8$:

Proposition 60

Soit H un sous-groupe irréductible de $Spin(8, \mathbb{C})$, alors le groupe $Z_{Spin(8, \mathbb{C})}(H)$ est d'exposant 2, en particulier il est abélien.

Démonstration : Soit H un sous-groupe irréductible de $Spin(8, \mathbb{C})$. Quitte à conjuguer, on peut supposer que $Z_{Spin(8, \mathbb{C})}(H)$ est contenu dans G_8 en vertu de la proposition 53.

Soit $\pm e_A \in Z_{Spin(8, \mathbb{C})}(H) \leq G_8$ avec A un sous-ensemble de cardinal pair de $\{0, \dots, 7\}$. Si $|A| = 0, 4$ ou 8 alors $\pm e_A$ est d'ordre 2.

Supposons que $|A| = 2$ alors H est centralisé par e_A avec $|A|$ d'ordre 2, cela contredit l'irréductibilité de H par le lemme 24.

Supposons que $|A| = 6$ alors $\pm e_A e_{\{0, \dots, 7\}} = \pm e_{A^c}$ donc H étant centralisé par $-1, e_A$ et $e_{\{0, \dots, 7\}}$ est centralisé par e_{A^c} avec $|A^c| = 8 - |A| = 2$. Cela contredit l'irréductibilité de H par le lemme 24.

D'après ce que nous avons vu, si $\pm e_A \in Z_{Spin(8, \mathbb{C})}(H)$ alors $|A| = 0, 4$ ou 8 et donc tout élément de $Z_{Spin(8, \mathbb{C})}(H)$ est d'ordre divisant 2, comme -1 centralise H est d'ordre 2, le groupe $Z_{Spin(8, \mathbb{C})}(H)$ est d'exposant 2 et donc (on l'a déjà vu) abélien. ■

Nous résumons maintenant ce que nous avons montré pour $n \geq 3$ dans un tableau. La première colonne donne le groupe de spin considéré. Dans la deuxième colonne on répond à la question "peut-on trouver un centralisateur d'irréductible non-trivial?". Dans la troisième colonne, on répond à la question "peut-on trouver un centralisateur d'irréductible non-abélien?".

Remarque sur les groupes CI. On rappelle (cf [Sik12]) qu'un groupe de Lie complexe G est dit CI s'il n'existe aucun sous-groupe exceptionnel dans G , autrement dit, si le centralisateur de tout sous-groupe irréductible dans G est réduit au centre de G .

Groupe de Spin	non-trivial	non-abélien
$Spin(3, \mathbb{C}) = SL(3, \mathbb{C})$	non	non
$Spin(4, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$	non	non
$Spin(5, \mathbb{C}) = Sp(4, \mathbb{C})$	oui	non
$Spin(6, \mathbb{C}) = SL(4, \mathbb{C})$	non	non
$Spin(7, \mathbb{C})$	oui	oui
$Spin(8, \mathbb{C})$	oui	non
$Spin(n, \mathbb{C})$ avec $n \geq 9$	oui	oui

TABLE 4.3.1 – Centralisateurs d'irréductibles pour les groupes de Spin

On remarquera que la réponse à la question 19 (« est-ce que $SL(n, \mathbb{C})$ et $GL(n, \mathbb{C})$ sont les seuls groupes CI? ») de [Sik12] posée par Sikora est « non » puisque $Spin(4, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ est un contre-exemple. Si toutefois on impose que G soit simple (ce qui est sous-entendu dans le papier de Sikora) alors la réponse n'est pas connue (puisque $Spin(4, \mathbb{C})$ n'est pas simple). Toutefois, on peut commencer à y répondre :

Proposition 61

Soit G un groupe de Lie connexe sur \mathbb{C} , simple et CI alors il existe $n \geq 2$ tel que G soit isomorphe à $SL(n, \mathbb{C})$ ou G est isomorphe à un groupe de Lie de type G_2, F_4, E_6, E_7 ou E_8 .

Démonstration : Par la classification des algèbres de Lie simple, que l'on peut, par exemple, retrouver dans [Kna02], il y a quatre types d'algèbres de Lie simple classiques et 5 types exceptionnels (ici les adjectifs "classiques" et "exceptionnels" qualifient des groupes de Lie et pas des sous-groupes irréductibles de groupes de Lie). On donne dans ce tableau les types classiques ainsi que l'unique groupe de Lie simple, connexe, simplement connexe qui leur est associé.

Type	valeur de n	Groupe de Lie associé
A_n	$n \geq 1$	$SL(n+1, \mathbb{C})$
B_n	$n \geq 2$	$Spin(2n+1, \mathbb{C})$
C_n	$n \geq 3$	$Sp(2n, \mathbb{C})$
D_n	$n \geq 4$	$Spin(2n, \mathbb{C})$

TABLE 4.3.2 – Classification des groupes de Lie simples, connexes et simplement connexes classiques

Dans la table 4.3.2, nous avons enlevé les doublons issus d'isomorphismes exceptionnels.

Pour ce qui est du type A_n , nous avons vu au chapitre 3 qu'aucun quotient non-trivial de $SL(n+1, \mathbb{C})$ n'est *CI*.

Pour le type B_n , nous avons vu au théorème 4.1 que si $n \geq 3$, alors le groupe $Spin(2n+1, \mathbb{C})$ n'est jamais *CI*. En utilisant la proposition 23 de [Sik12] aucun quotient de $Spin(2n+1, \mathbb{C})$ n'est *CI*. Si $n = 2$, le groupe $Spin(2n+1, \mathbb{C}) = Spin(5, \mathbb{C})$ et nous avons vu, dans l'exemple 8, qu'il existait un sous-groupe irréductible exceptionnel dans $Spin(5, \mathbb{C})$. Par suite, $Spin(5, \mathbb{C})$ n'est pas *CI* et donc ses quotients non-plus.

Pour le type C_n , la proposition 3.32 de [FL12] montre qu'il existe toujours un sous-groupe exceptionnel de $Sp(2n, \mathbb{C})$ pour $n \geq 3$. Ainsi $Sp(2n, \mathbb{C})$ n'est pas *CI* et aucun de ses quotients ne peut l'être non-plus.

Pour le type D_n , nous avons vu au théorème 4.1 que si $n \geq 4$, le groupe $Spin(2n, \mathbb{C})$ n'est jamais *CI*. En utilisant la proposition 23 de [Sik12] aucun quotient de $Spin(2n, \mathbb{C})$ n'est *CI* non-plus. ■

Nous posons donc une nouvelle question :

Question 5

Parmi les groupes de Lie complexes de type G_2, F_4, E_6, E_7 ou E_8 , est-ce que l'un d'entre eux est *CI* ?

Dans cette sous-section, nous avons vu apparaître des centralisateurs plus compliqués que ceux du chapitre 3 (certains ne sont pas commutatifs).

Le but de la prochaine section est de donner les classes d'isomorphismes de groupes qui apparaissent comme un centralisateur d'irréductibles dans $Spin(n, \mathbb{C})$.

4.4 Les centralisateurs dans $Spin(n, \mathbb{C})$

Dans la sous-section 4.4.1, on définit les $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques et on les classifie. Ensuite, on montre que ces $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques sont naturellement reliés à une classe de 2-groupes, les 2-groupes quasi-élémentaires. Par définition, un tel groupe G (voir aussi la sous-section 4.4.1) contient un élément central z d'ordre 2 tel que le groupe quotient $G/\langle z \rangle$ soit 2-abélien élémentaire.

Dans la seconde sous-section, on utilise ce que l'on a fait avant pour montrer qu'un groupe G est isomorphe au centralisateur d'un sous-groupe irréductible de $Spin(n, \mathbb{C})$ (pour un certain n) si et seulement si G est un 2-groupe quasiment élémentaire. On propose aussi quelques remarques et prolongements sur la classification de ces centralisateurs.

4.4.1 Modules quadratiques sur les $\mathbb{Z}/2$ -espaces vectoriels

Définitions et premières propriétés. Un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique (de dimension finie) est la donnée (E, q) d'un $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel E de dimension finie d et d'une application $q : E \rightarrow \mathbb{Z}/2$ vérifiant que la forme polaire B_q associée est bilinéaire où :

$$B_q : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \\ (x, y) & \longmapsto q(x + y) - q(x) - q(y) \end{cases}$$

On remarquera que dans le cadre restreint dans lequel on travaille (les $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques), la notion de forme polaire est différente de celle que l'on donne quand l'on travaille sur les corps de caractéristique différente de 2.

Si (E, q) est un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique, le **radical** $R(E, q)$ de (E, q) est, par définition, le noyau du module (nécessairement) alterné (E, B_q) (cf sous-section 3.4.1 pour les définitions sur les modules alternés). Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des éléments orthogonaux (pour B_q) à tout élément de E .

On dit qu'un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique (E, q) est **non-singulier** si son radical $R(E, q)$ est trivial (autrement dit si (E, B_q) est un 2-module symplectique). Deux $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques (E, q) et (E', q') sont **isométriques** s'il existe un isomorphisme de groupes $\psi : E \rightarrow E'$ tel que $q' = q \circ \psi$.

Contrairement au cas de la caractéristique $\neq 2$, il ne suffit pas de classer les modules symétriques pour classer les modules quadratiques (ceci vient du fait que la forme quadratique associée à B_q est nécessairement triviale).

Ce genre de structure apparaît naturellement dans notre étude. En effet, l'exemple suivant montre que le groupe P_n (voir la section 4.2) des sous-ensembles pairs de $\{0, \dots, n-1\}$ est muni d'une structure quadratique.

Exemple 9

Soit $n \geq 3$, rappelons que P_n désigne le groupe des sous-ensembles de $\{0, \dots, n-1\}$ dont le cardinal est pair, muni de la loi Δ de différence symétrique. On définit :

$$q : \begin{cases} P_n & \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \\ A & \longmapsto \frac{|A|}{2} \pmod{2} \end{cases}$$

Alors $B_q(A, B) \equiv |A \cap B| \pmod{2}$ pour $A, B \in P_n$. En particulier B_q est bilinéaire. Donc (P_n, q) est un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique de dimension $n-1$. De plus, le radical $R(P_n, q)$ est trivial si n est impair et de cardinal 2 sinon.

Démonstration : Soient A, B deux parties de $\{0, \dots, n-1\}$ alors :

$$\begin{aligned} B_q(A, B) &= \frac{|A\Delta B|}{2} - \frac{|A|}{2} - \frac{|B|}{2} \pmod{2} \\ &= \frac{|A| + |B| - 2|A \cap B|}{2} - \frac{|A|}{2} - \frac{|B|}{2} \pmod{2} \\ &= \frac{-2|A \cap B|}{2} \pmod{2} \\ &= |A \cap B| \pmod{2} \end{aligned}$$

Si A, B, C sont trois parties de $\{0, \dots, n-1\}$ alors :

$$\begin{aligned} B_q(A\Delta B, C) &= |(A\Delta B) \cap C| \pmod{2} \\ &= |(A \cap C) \Delta (B \cap C)| \pmod{2} \\ &= \underbrace{|A \cap C|}_{B_q(A, C)} + \underbrace{|B \cap C|}_{B_q(B, C)} - \underbrace{2|A \cap B \cap C|}_{=0 \pmod{2}} \pmod{2} \\ &= B_q(A, C) + B_q(B, C) \end{aligned}$$

Vu que B_q est symétrique par définition, on obtient que B_q est bilinéaire. Comme l'on a vu que $|P_n| = 2^{n-1}$, on obtient que (P_n, q) est un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique de dimension $n-1$.

Soit B un sous-ensemble de $\{0, \dots, n-1\}$ de cardinal pair tel que $B \neq \emptyset$ et $B \neq \{0, \dots, n-1\}$ alors il existe $0 \leq i < j \leq n-1$ tel que $i \in B$ et $j \notin B$ donc $B_q(B, \{i, j\}) = 1$ et B n'est pas dans le radical de (P_n, q) .

Par contre-apposition, le radical de (P_n, q) est contenu dans l'ensemble :

$$\{\emptyset, \{0, \dots, n-1\}\}$$

Si n est impair alors $\{0, \dots, n-1\}$ n'est pas dans P_n donc le radical est trivial, sinon $\{0, \dots, n-1\}$ est dans P_n et est clairement orthogonal à tout le monde car $B_q(A, \{0, \dots, n-1\}) = |A| = 0 \pmod{2}$. Ainsi le radical est d'ordre 2 dans ce cas. ■

Bien sûr, c'est cet exemple qui justifie l'intérêt de notre étude des modules quadratiques (rappelons que tout centralisateur d'irréductible dans $Spin(n, \mathbb{C})$ se projette, à conjugaison près, sur $SDO(n, \mathbb{C})$ qui est canoniquement isomorphe à (P_n, Δ)). En particulier, vue l'expression simple de q et de B_q dans ce cas, il nous sera assez facile de trouver des bases dans des sous-modules de P_n (voir la sous-section 4.4.2).

Avant de passer à la classification des modules quadratiques, on classe les modules alternés associés.

Proposition 62

Soit (E, q) un module quadratique de dimension n avec un radical de dimension r . Alors il existe une base $(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k, z_1, \dots, z_r)$ de E telle que (z_1, \dots, z_r) soit une base de $Rad(q)$ et telle que la famille $(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$ soit symplectique, i.e. :

$$\begin{aligned} B_q(x_i, x_j) &= 0 && \text{pour } 1 \leq i, j \leq k \\ B_q(y_i, y_j) &= 0 && \text{pour } 1 \leq i, j \leq k \\ B_q(x_i, y_j) &= 0 && \text{pour } 1 \leq i \neq j \leq k \\ B_q(x_i, y_i) &= 1 && \text{pour } 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

Démonstration : Si (E, q) est non-singulier alors (par définition) (E, B_q) est un 2-module symplectique donc, par le lemme 13, il existe une base symplectique pour (E, B_q) .

Sinon on choisit un supplémentaire vectoriel F à $R(E, q)$ dans E :

$$E := F \oplus R(E, q)$$

Prenons $f \in R(F, q|_F)$ alors f est orthogonal à tout F , comme f est aussi orthogonal à $R(E, q)$, on en déduit que f est orthogonal à tout E donc

$f \in R(E, q)$. Autrement dit $R(F, q|_F) \leq F \cap R(E, q)$ or ces deux espaces sont supplémentaires donc $R(F, q|_F)$ est trivial. Ainsi $(F, q|_F)$ est non-singulier, par ce qui précède on peut y choisir une base symplectique. La conjonction de cette base symplectique avec n'importe quelle base vectorielle de $R(E, q)$ vérifie alors les conditions demandées dans la proposition. ■

Dans la suite, si (E, q) est un module quadratique, une base comme dans la proposition ci-dessus pour (E, q) sera appelée **base adaptée** de (E, q) .

En particulier, les $\mathbb{Z}/2$ -modules alternés sont classifiés par leur dimension et la dimension de leur radical. Dans ce qui suit, nous verrons qu'il n'en va pas de même pour les $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques.

Classification des $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques. Rappelons que les $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques non-singuliers sont complètement classifiés par leur invariant de Arf. Nous choisissons de revoir la classification complète des $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques (pas nécessairement singulier) car nous en aurons besoin par la suite.

On commence avec les $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques dont la forme bilinéaire associée est triviale.

Proposition 63

Soit (E, q) un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique de dimension d dont le radical est E . Alors soit $q = 0$ soit il existe une base e_1, \dots, e_d de E telle que $q(e_1) = 1$ et $q(e_i) = 0$ pour $i \geq 2$.

En particulier, il y a, à isométrie près, exactement deux $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques de dimension d dont le radical est tout l'espace.

Démonstration : On remarque que comme $Rad(E, q) = E$, pour tout $u, v \in E$, $q(u + v) = q(u) + q(v)$. Ainsi, donner une forme quadratique sur E pour laquelle $Rad(E, q) = E$ est équivalent à donner une forme linéaire $q : E \rightarrow \mathbb{Z}/2$. Comme $GL(E)$ agit sur le dual de E^* avec deux orbites :

$$\{0\} \text{ et } E^* - \{0\}$$

on en déduit qu'il y a exactement deux $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques de dimension d dont le radical est l'espace entier à isométrie près, celui pour lequel $q = 0$ et celui pour lequel $q \neq 0$. Dans le cas où $q \neq 0$ on choisit $e_1 \notin \ker(q)$ et (e_2, \dots, e_d) une base de $\ker(q)$, cela fournit alors une base de E satisfaisant les conditions ci-dessus. ■

Dans la suite, on notera $[[d]]_0$ un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique de dimension d dont le radical est l'espace entier et la forme quadratique triviale et $[[d]]_1$ un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique de dimension d dont le radical est l'espace entier et la forme quadratique non-triviale.

Ensuite, on classe les $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques non-singuliers de dimension 2.

Proposition 64

Soit (E, q) un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique non-singulier de dimension 2 alors (E, q) est isométrique à l'un de ces deux modules :

$$(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, (a, b) \mapsto ab)$$

$$(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, (a, b) \mapsto a + ab + b)$$

De plus ces deux modules ne sont pas isométriques l'un à l'autre.

Démonstration : D'après la proposition 62, on peut choisir une base adaptée (x, y) pour (E, q) . Dans la base (x, y) on a alors :

$$q(ax + by) = a^2q(x) + b^2q(y) + abB_q(x, y) = aq(x) + bq(y) + ab$$

Si $q(x) = q(y) = 0$ alors on a trouvé une base de E dans laquelle q est donnée par $(a, b) \mapsto ab$.

Si $q(x) = 0$ et $q(y) = 1$ alors $x' := x$ et $y' := x + y$ est une base symplectique de E , en effet $B_q(x', y') = B_q(x, x) + B_q(x, y) = 0 + 1 = 1$. De plus $q(x') = q(x) = 0$ et $q(y') = q(x) + q(y) + B_q(x, y) = 0 + 1 + 1 = 0 \pmod{2}$.

Ainsi (E, q) admet une base dans laquelle q est donnée par $(a, b) \mapsto ab$.

Si $q(x) = 1$ et $q(y) = 0$ alors, quitte à prendre la base $x' := y$ et $y' := x$ on est dans le deuxième cas et (E, q) admet une base dans laquelle q est donnée par $(a, b) \mapsto ab$.

Dans le dernier cas $q(x) = q(y) = 1$, la forme quadratique est donnée par $(a, b) \mapsto a + b + ab$.

Remarquons de plus que si la forme quadratique sur E est donnée par $(a, b) \mapsto ab$ alors $(1, 0)$ est un vecteur isotrope non-trivial, alors que si la

forme quadratique sur E est donnée par $(a, b) \mapsto a + b + ab$, il n'y a qu'un seul vecteur isotrope à savoir $(0, 0)$.

Par cette remarque, les deux $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques de la proposition n'ont pas le même nombre de vecteurs isotropes, ils ne peuvent donc pas être isométriques. ■

Un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique isométrique à

$$(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, (a, b) \mapsto ab)$$

est appelé **plan hyperbolique** et on le notera \mathbb{H} . Un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique isométrique à

$$(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, (a, b) \mapsto a + ab + b)$$

est appelé **plan métaplectique** et on le notera \mathbb{M} .

Au vu de la proposition 62, il est clair que tout $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique se décompose une somme orthogonale de $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques de dimension 2 non-singuliers et de son radical. Comme nous venons de classifier tous ces objets, nous pourrions en conclure que nous avons classifié les $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques. Si l'on obtient bien tous les modules quadratiques de cette manière là, la description n'est pas optimale. Nous allons maintenant montrer deux lemmes qui vont permettre d'optimiser cette description.

Lemme 25

À isométrie près, $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H} = \mathbb{M} \oplus \mathbb{M}$.

Démonstration : Définissons une base adaptée x_1, y_1, x_2, y_2 de

$$(E, q) := \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$$

avec $q(x_1) = q(y_1) = q(x_2) = q(y_2) = 0$. Alors on construit :

$$\begin{aligned} x'_1 &:= x_1 + x_2 + y_2 \\ y'_1 &:= y_1 + x_2 + y_2 \\ x'_2 &:= x_2 + x_1 + y_1 \\ y'_2 &:= y_2 + x_1 + y_1 \end{aligned}$$

La famille (x'_1, y'_1, x'_2, y'_2) est une base de E car l'application envoyant e_i sur e'_i et f_i sur f'_i a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ qui est de déterminant } 1$$

Ainsi la famille (x'_1, y'_1, x'_2, y'_2) est une base de E .

Remarquons de plus que c'est une base symplectique :

$$\begin{aligned} B_q(x'_1, y'_1) &= B_q(x_1, y_1) = 1 \\ B_q(x'_1, x'_2) &= B_q(x_1, y_1) + B_q(x_2, y_2) = 1 + 1 = 0 \\ B_q(x'_1, y'_2) &= B_q(x_2, y_2) + B_q(x_2, y_2) = 1 + 1 = 0 \\ B_q(y'_1, x'_2) &= B_q(y_1, x_1) + B_q(y_2, x_2) = 1 + 1 = 0 \\ B_q(y'_1, y'_2) &= B_q(y_1, x_1) + B_q(x_2, y_2) = 1 + 1 = 0 \\ B_q(x'_2, y'_2) &= B_q(x_2, y_2) = 1 \end{aligned}$$

Ainsi $E = Vect(x'_1, y'_1) \overset{\perp}{\oplus} Vect(x'_2, y'_2)$. Finalement :

$$\begin{aligned} q(x'_1) &= q(x_1) + q(x_2 + y_2) = 0 + 1 = 1 \\ q(y'_1) &= q(y_1) + q(x_2 + y_2) = 0 + 1 = 1 \\ q(x'_2) &= q(x_2) + q(x_1 + y_1) = 0 + 1 = 1 \\ q(y'_2) &= q(y_2) + q(x_1 + y_1) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

On en déduit donc que $Vect(x'_1, y'_1)$ et $Vect(x'_2, y'_2)$ sont tous les deux métaplectiques. Par suite, on a bien montré que $\mathbb{H} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{H} = \mathbb{M} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{M}$ à isométrie près. \blacksquare

Le second lemme stipule qu'un phénomène identique se produit quand l'on associe un radical avec un métaplectique :

Lemme 26

Soit $d \geq 1$, à isométrie près, on a $\mathbb{M} \overset{\perp}{\oplus} [[d]]_1 = \mathbb{H} \overset{\perp}{\oplus} [[d]]_1$.

Démonstration : Soit $(E, q) = \mathbb{M} \overset{\perp}{\oplus} [[d]]_1$. Prenons une base (z_1, \dots, z_d) de $[[d]]_1$ telle que $q(z_1) = 1$ et $q(z_i) = 0$ pour $i \geq 2$ et (x, y) une base canonique pour \mathbb{M} . Définissons $x' := x + z_1$ et $y' := y + z_1$ alors :

$(x', y', z_1, \dots, z_d)$ est une base de E

De plus $B_q(x', y') = B'_q(x, y) = 1$, donc c'est une base symplectique de E . Finalement :

$$\begin{aligned} q(x') &= q(x) + q(z_1) = 1 + 1 = 0 \\ q(y') &= q(y) + q(z_1) = 1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $(E, q) = Vect(x', y') \oplus^{\perp} [[d]]_1 = \mathbb{H} \oplus^{\perp} [[d]]_1$. ■

Dans la suite nous noterons la somme orthogonale de k plans hyperboliques (resp. métaboliques) $k\mathbb{H}$ (resp. $k\mathbb{M}$). Pour distinguer, certains types de modules quadratiques, nous allons devoir compter des vecteurs isotropes, pour faire cela nous aurons besoin d'un lemme de dénombrement :

Lemme 27

Soit $l \geq 1$, on note

$$u_l := |\{(a_1, b_1, \dots, a_l, b_l) \in (\mathbb{Z}/2)^l \mid \sum_{j=1}^l a_j b_j = 0\}|$$

On a $u_1 = 3$ et la suite (u_l) vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\text{si } l \geq 2, u_l = 2u_{l-1} + 2^{2l-2}$$

En particulier, pour tout $l \geq 1$, $u_l > 2^{2l-1}$.

Démonstration : Clairement, pour $l = 1$ l'équation $ab = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ qui sont $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ d'où $u_1 = 3$.

Pour l'équation de récurrence, on remarque que :

$$\sum_{j=1}^l a_j b_j = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{l-1} a_j b_j = 0 \\ a_l b_l = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{l-1} a_j b_j = 1 \\ a_l b_l = 1 \end{cases}$$

L'équation $\sum_{j=1}^{l-1} a_j b_j = 0$ a u_{l-1} solutions et l'équation $a_l b_l = 0$ a 3 solutions donc le système $\begin{cases} \sum_{j=1}^{l-1} a_j b_j = 0 \\ a_l b_l = 0 \end{cases}$ a $3u_{l-1}$ solutions.

L'équation $\sum_{j=1}^{l-1} a_j b_j = 1$ a $2^{2l-2} - u_{l-1}$ solutions et l'équation $a_l b_l = 1$ a 1 solution donc le système $\begin{cases} \sum_{j=1}^{l-1} a_j b_j = 1 \\ a_l b_l = 1 \end{cases}$ a $2^{2l-2} - u_{l-1}$ solutions.

Au final :

$$\begin{aligned} u_{l-1} &= 3u_{l-1} + 2^{2l-2} - u_{l-1} \\ &= 2u_{l-1} + 2^{2l-2} \end{aligned}$$

Montrons que $u_l \geq 2^{2l-1}$ par récurrence sur $l \geq 1$. Le résultat est vrai pour $l = 1$ car $u_1 = 3 > 2$. Si $u_{l-1} > 2^{2l-3}$ alors :

$$\begin{aligned} u_{l-1} &= 2u_{l-1} + 2^{2l-2} \\ &> 2^{2l-2} + 2^{2l-2} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &> 2^{2l-1} \end{aligned}$$

Ainsi on a l'inégalité souhaitée par récurrence. ■

Le théorème de classification est le suivant :

Théorème 4.2

Soit (E, q) un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique alors, si la dimension de $Rad(E, q)$ est d et $\dim(E) - d = 2k$, le $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique est isométrique à l'un de ces trois $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques :

$$k\mathbb{H} \perp \perp [[d]]_0$$

$$(k-1)\mathbb{H} \perp \perp \mathbb{M} \perp \perp [[d]]_0$$

$$k\mathbb{H} \perp \perp [[d]]_1$$

De plus, aucun de ces trois modules ci-dessus n'est isométrique à l'autre.

Démonstration : D'après la proposition 62, il existe k -sous-espaces de dimension 2 E_1, \dots, E_k de E non-singuliers tels que :

$$E = E_1 \perp \perp \dots \perp \perp E_k \perp \perp Rad(E, q)$$

En utilisant la proposition 63, il existe $\epsilon \in \{0, 1\}$ tel que $Rad(E, q) = [[d]]_\epsilon$, de plus, chaque E_i est isomorphe à \mathbb{H} ou à \mathbb{M} par la proposition 64. Ainsi :

$$E = a\mathbb{H} \oplus (k-a)\mathbb{M} \oplus [[d]]_\epsilon$$

avec a le nombre de plans hyperboliques parmi les E_i . En utilisant le lemme 25 :

$$(k-a)\mathbb{M} = \begin{cases} (k-a)\mathbb{H} & \text{si } k-a \text{ est pair} \\ (k-a-1)\mathbb{H} \oplus \mathbb{M} & \text{si } k-a \text{ est impair} \end{cases}$$

Au final, si $k-a$ est pair alors :

$$E = k\mathbb{H} \oplus [[d]]_\epsilon$$

ce qui donne les cas 1 et 3 (pour $\epsilon = 0$ ou 1). Si $k-a$ est impair alors :

$$E = (k-1)\mathbb{H} \oplus \mathbb{M} \oplus [[d]]_\epsilon$$

Si $\epsilon = 1$ alors le lemme 26 implique que

$$E = (k-1)\mathbb{H} \oplus \mathbb{M} \oplus [[d]]_1 = k\mathbb{H} \oplus [[d]]_1$$

On est donc dans le cas 3 à nouveau. Si $k-a$ est impair et $\epsilon = 0$ alors on est dans le deuxième cas.

Remarquons que la classe du radical est un invariant par isométrie donc $k\mathbb{H} \oplus [[d]]_1$ est différent de $(k-1)\mathbb{H} \oplus \mathbb{M} \oplus [[d]]_0$ et $k\mathbb{H} \oplus [[d]]_0$.

Il ne reste plus qu'à justifier que $(k-1)\mathbb{H} \oplus \mathbb{M} \oplus [[d]]_0$ et $k\mathbb{H} \oplus [[d]]_0$ sont différents.

Tout d'abord, on remarque que $q|_{Rad(E,q)}$ est trivial dans chacun de ces cas, ainsi on peut considérer le module quotient $E/Rad(E, q)$ non-singulier dans chacun des cas. Ainsi les deux modules $(k-1)\mathbb{H} \oplus \mathbb{M} \oplus [[d]]_0$ et $k\mathbb{H} \oplus [[d]]_0$ sont isométriques si et seulement si $(k-1)\mathbb{H} \oplus \mathbb{M}$ et $k\mathbb{H}$ sont isométriques.

Si $(E_1, q_1) = (k-1)\mathbb{H} \oplus \mathbb{M}$ et $(E_2, q_2) = k\mathbb{H}$. Comptons le nombre de vecteurs isotropes dans (E_1, q_1) et (E_2, q_2) . On choisit $(x_1^i, y_1^i, \dots, x_k^i, y_k^i)$ une base symplectique de (E_i, q_i) . Alors pour $a \in E_1$ on écrit :

$$a = \sum_{j=1}^k a_j x_j^1 + b_j y_j^1 \Rightarrow q_1(a) = \sum_{j=1}^k a_j b_j + a_k + b_k$$

De la même façon, si $a \in E_2$ alors :

$$a = \sum_{j=1}^k a_j x_j^2 + b_j y_j^2 \Rightarrow q_2(a) = \sum_{j=1}^k a_j b_j$$

Pour $l \geq 1$, on a noté dans le lemme 27 :

$$u_l := |\{(a_1, b_1, \dots, a_l, b_l) \in (\mathbb{Z}/2)^{2l} \mid \sum_{j=1}^l a_j b_j = 0\}|$$

En écrivant :

$$q_1(a) = \sum_{j=1}^{k-1} a_j b_j + (a_k + b_k + a_k b_k) \text{ et } q_2(a) = \sum_{j=1}^{k-1} a_j b_j + (a_k b_k)$$

On obtient (comme dans le lemme 27 pour l'équation de récurrence) :

$$\begin{aligned} |q_1^{-1}(\{0\})| &= u_{k-1} + 3(2^{2k-2} - u_{k-1}) \\ |q_2^{-1}(\{0\})| &= 3u_{k-1} + (2^{2k-2} - u_{k-1}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |q_2^{-1}(\{0\})| - |q_1^{-1}(\{0\})| &= 2(u_{k-1} - (2^{2k-2} - u_{k-1})) \\ &= 2(2u_{k-1} - 2^{2k-2}) \\ &> 0 \text{ par l'inégalité stricte du lemme 27} \end{aligned}$$

On voit que $(E_1, q_1) = (k-1)\mathbb{H} \oplus \mathbb{M}$ et $(E_2, q_2) = k\mathbb{H}$ n'ont jamais le même nombre de vecteurs isotropes, ils sont donc différents. ■

Dans cette preuve, nous aurions pu utiliser l'invariant de Arf pour justifier que $(E_1, q_1) = (k-1)\mathbb{H} \oplus \mathbb{M}$ et $(E_2, q_2) = k\mathbb{H}$ sont différents. Dans la suite, nous n'utiliserons, dans la sous-section 4.4.2, que le fait que chaque $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique est isométrique à l'un de ceux que nous avons donnés plus haut, nous n'utiliserons pas que chacun de ces modules est différent de l'autre.

Les 2-groupes quasiment élémentaires. On se propose ici de montrer que les $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques classifient un ensemble particulier de 2-groupes à isomorphisme près. On dit qu'un 2-groupe G est **quasiment élémentaire** s'il existe un élément $z \in G$ central d'ordre 2 tel que $G/\langle z \rangle$ soit 2-abélien élémentaire (i.e. isomorphe à un produit de groupes cycliques d'ordre 2). On peut facilement faire le cas des groupes d'ordre 8 :

Exemple 10

Parmi les 5 classes de groupes d'ordre 8, $\mathbb{Z}/8$, $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$, $(\mathbb{Z}/2)^3$, \mathbb{D}_4 le groupe diédral d'ordre 8 et \mathbb{Q}_8 le groupe quaternionique d'ordre 8, seuls les quatre derniers sont des 2-groupes quasiment élémentaires.

Peut-être plus intéressant pour nous, il est possible de construire de nombreux exemples via :

Exemple 11

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe irréductible de $Spin(n, \mathbb{C})$ alors le centralisateur de H dans $Spin(n, \mathbb{C})$ est un 2-groupe quasiment élémentaire.

Démonstration : Il est clair que $\pi(Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H)) \leq Z_{SO(n, \mathbb{C})}(\pi(H))$. D'une part, $\pi(Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H))$ est isomorphe à $Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H)/\langle -1 \rangle$. D'autre part, on sait (proposition 50) que $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(\pi(H))$ est 2-abélien élémentaire donc, par définition, $Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H)$ est un 2-groupe quasiment élémentaire. ■

Dans la définition d'un 2-groupe quasiment élémentaire, il n'y a pas, à priori, d'unicité imposée à l'élément z d'ordre 2 par lequel on quotiente, toutefois, nous allons voir que, excepté dans un cas, il est unique :

Lemme 28

Soit G un 2-groupe quasi-élémentaire tel que G ne soit pas 2-abélien élémentaire.

Alors il existe un unique $z \in G$ d'ordre 2, tel que $G/\langle z \rangle$ soit 2-abélien élémentaire. L'élément z est défini comme le carré de n'importe quel élément d'ordre 4 de G . En particulier, $\langle z \rangle$ est un sous-groupe caractéristique de G .

Démonstration : Par définition, il existe $z \in G$ d'ordre 2 tel que $G/\langle z \rangle$ soit 2-abélien élémentaire. Comme G est un 2-groupe qui n'est pas 2-abélien élémentaire, il existe un élément d'ordre 4. Prenons x un élément d'ordre 4. Alors $x^2 \in \langle z \rangle$ car $G/\langle z \rangle$ est d'exposant 2.

Ainsi $x^2 = z$ ou $x^2 = 1_G$ or ce dernier n'est pas possible car l'on a choisi x d'ordre 4. Ainsi $x^2 = z$. Il s'ensuit que pour tout $x \in G$ d'ordre 4, $x^2 = z$. Cela montre que si $z \in G$ d'ordre 2 tel que $G/\langle z \rangle$ soit 2-abélien élémentaire alors z est le carré de tout élément d'ordre 4 dans G . En particulier, s'il existe un élément d'ordre 4 alors z est unique.

Clairement $\langle z \rangle$ est le groupe engendré par l'ensemble des carrés des éléments de G , ce groupe est caractéristique dans G . ■

En vertu de ce lemme, on peut associer, à tout 2-groupe, une classe d'isométrie de $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques. En effet, si G est un 2-groupe quasi-élémentaire qui n'est pas 2-abélien élémentaire, on peut lui associer (cf lemme 28) un unique élément z d'ordre 2 tel que le quotient $E_G := G/\langle z \rangle$ soit 2-abélien élémentaire (remarquons que cela définit alors un $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel).

Si pour $x \in E_G$, on choisit un relevé $\hat{x} \in G$, on définit alors une application $q_G : \begin{cases} E_G & \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \\ x & \longmapsto q_G(x) \text{ où } \hat{x}^2 = z^{q_G(x)} \end{cases}$. Clairement, q_G ne dépend pas du relevé choisi. De plus :

Lemme 29

Soit G un 2-groupe quasi-élémentaire qui n'est pas 2-abélien élémentaire, alors (E_G, q_G) est un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique et B_{q_G} la forme polaire associée vérifie pour tout $x, y \in E_G$ avec des relevés \hat{x} et \hat{y} dans G vérifie : $[\hat{x}, \hat{y}] = z^{B_{q_G}(x,y)}$.

Démonstration : Soit $x, y \in E_G$ avec des relevés \hat{x} et \hat{y} dans G :

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{y}] &= \hat{x}\hat{y}\hat{x}^{-1}\hat{y}^{-1} \\ &= \hat{x}\hat{y}\hat{x}\hat{x}^{-2}\hat{y}^{-1} \\ &= \hat{x}\hat{y}\hat{x}\hat{y}^{-1}\hat{x}^{-2} \text{ car } \hat{x}^{-2} \in \langle z \rangle \\ &= \hat{x}\hat{y}\hat{x}\hat{y}^{-2}\hat{x}^{-2} \\ &= z^{q_G(x+y)} z^{-q_G(x)} z^{-q_G(y)} \text{ car } \hat{x}\hat{y} \text{ est un relevé de } x + y \\ &= z^{B_{q_G}(x,y)} \text{ par définition de } B_{q_G} \end{aligned}$$

On a donc l'expression voulue pour $B_{q_G}(\cdot, \cdot)$. Le fait que B_{q_G} soit bilinéaire est alors une simple application du lemme 15 au vu de cette expression. ■

Dans le cas où G est 2-abélien élémentaire, on définit le module (E_G, q_G) de la manière suivante, $E_G = G/\langle z \rangle$ où z est n'importe quel élément d'ordre 2 et $q_G := 0$. Charge au lecteur de réaliser que le lemme ci-dessus s'accorde avec ce cas-là.

Il existe une analogie entre la méthode utilisée au chapitre 3 pour classifier les centralisateurs d'irréductibles par les n -modules alternés et ce que l'on fait ici pour les $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques. En effet, la forme bilinéaire associée est toujours un commutateur des relevés. Toutefois, il y a quelques différences. Alors que dans le chapitre 3, on contrôlait complètement l'ordre d'un relevé, ici ce n'est pas le cas. C'est la raison pour laquelle, on doit conserver la forme quadratique associée.

Dans la suite, il est bien évident que nous aurons besoin de comparer les modules (E_G, q_G) , pour cela il faut associer à G non pas (E_G, q_G) mais plutôt sa classe d'isométrie. On fera cet abus de notation qui consiste à toujours parler du module (E_G, q_G) bien que ce que l'on ait en tête soit plutôt sa classe d'isométrie.

Reprenons quelques exemples de groupes d'ordre 8 qui sont quasiment élémentaire :

Exemple 12

Les module associés à $(\mathbb{Z}/2)^3$, $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$, \mathbb{D}_4 et \mathbb{Q}_8 sont respectivement $[[2]]_0$, $[[2]]_1$, \mathbb{H} et \mathbb{M} .

Démonstration : Clairement si G abélien (avec le lemme 29) alors la forme polaire associée à q_G est triviale. De plus, $q_G = 0$ si et seulement si tous les éléments sont d'ordre 2. Vu qu'il n'y a que deux $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques dont la forme polaire associée est triviale de dimension 2 : $[[2]]_1$ et $[[2]]_0$ par la proposition 63, on en déduit que le module associé à $(\mathbb{Z}/2)^3$ est $[[2]]_0$ et le module associé à $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ est $[[2]]_1$.

Le groupe \mathbb{Q}_8 contient 6 éléments d'ordre 4, 1 élément d'ordre 2 et 1 élément d'ordre 1. On en déduit que le module qui lui est associé contient 3 vecteurs non-isotropes ainsi ce module est un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique, dont le radical est trivial, contenant 3 vecteurs non-isotropes donc c'est le module \mathbb{M} .

Le groupe \mathbb{D}_4 contient 2 éléments d'ordre 4, 5 éléments d'ordre 2 et 1 élément d'ordre 1. On en déduit que le module qui lui est associé est de dimension 2, dont le radical est trivial, contenant au moins 2 vecteurs isotropes donc c'est le module \mathbb{H} . ■

Nous constatons donc qu'il y a une bijection entre les classes d'isomorphismes de 2-groupes quasiment élémentaires de cardinal 2^3 et les classes d'isométrie de $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques de dimension $3 - 1 = 2$. Nous allons montrer que cette bijection se généralise en remplaçant 3 par $d \geq 1$.

Notons \mathcal{QE}_d l'ensemble des classes d'isomorphismes de 2-groupes quasiment élémentaires de cardinal 2^d . Supposons que G soit un 2-groupe quasiment élémentaire de cardinal 2^d , on lui associe la classe d'isométrie de $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques de (E_G, q_G) . En tant que groupe, il est clair que E_G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^{d-1}$. Cela permet donc de définir une structure quadratique sur $(\mathbb{Z}/2)^{d-1}$. Cette structure est unique à isométrie près.

Dans la suite on note $E_d := (\mathbb{Z}/2)^d$. On vient de voir que l'on peut associer à G , de manière univoque, la classe d'isométrie de (E_{d-1}, q_G) (pour calculer q_G , on aura besoin de fixer un isomorphisme abstrait quelconque f de E_G vers E_{d-1}).

Lemme 30

Soit $d \geq 1$. L'application qui, à un 2-groupe quasiment élémentaire G de cardinal 2^d associe la classe de (E_{d-1}, q_G) est invariant modulo isomorphisme sur G . De plus, si G_1 et G_2 sont deux 2-groupes quasiment élémentaires tels que (E_{d-1}, q_{G_1}) soit isométrique à (E_{d-1}, q_{G_2}) alors G_1 et G_2 sont isomorphes.

Démonstration : Soient G_1 et G_2 deux 2-groupes quasiment élémentaires et ψ un isomorphisme de G_1 vers G_2 . Si G_1 et G_2 sont tous les deux 2-élémentaires alors clairement $(E_{d-1}, q_{G_1}) = 0 = (E_{d-1}, q_{G_2})$.

Sinon, aucun des deux n'est abélien élémentaire, auquel cas on note z_i (cf lemme 28) l'unique élément de G_i qui est le carré d'un élément d'ordre 4 dans G_i . Vu que $\psi(z_1)$ est clairement le carré d'un élément d'ordre 4, on a, par unicité, $z_2 = \psi(z_1)$. Ainsi l'isomorphisme $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ descend en un isomorphisme $\bar{\psi} : G_1/\langle z_1 \rangle \rightarrow G_2/\langle z_2 \rangle$. Il est alors clair, vue la définition de q_{G_i} que $q_{G_1} = q_{G_2} \circ \bar{\psi}$ et donc $(G_1/\langle z_1 \rangle, q_{G_1})$ et $(G_2/\langle z_2 \rangle, q_{G_2})$ sont isométriques via $\bar{\psi}$. On en déduit que (E_{d-1}, q_{G_1}) est isométrique à (E_{d-1}, q_{G_2}) .

Supposons maintenant (E_{d-1}, q_{G_1}) soit isométrique à (E_{d-1}, q_{G_2}) via ψ (comme avant, le cas où le module est $[[d-1]]_0$ est relié de manière univoque au cas où G est 2-abélien élémentaire). On écrit les suites exactes correspondantes :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \langle z_1 \rangle & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{\pi_1} & E_{d-1} \longrightarrow 1 \\ & & & & & & \downarrow \psi \\ 1 & \longrightarrow & \langle z_2 \rangle & \longrightarrow & G_2 & \xrightarrow{\pi_2} & E_{d-1} \longrightarrow 1 \end{array}$$

Quitte à remplacer π_1 par $\pi_1 \circ \psi$, on peut supposer :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \langle z_1 \rangle & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{\pi_1} & E_{d-1} \longrightarrow 1 \\ & & & & & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & \langle z_2 \rangle & \longrightarrow & G_2 & \xrightarrow{\pi_2} & E_{d-1} \longrightarrow 1 \end{array}$$

Au niveau des formes quadratiques, cela aboutit à $q_{G_1} = q_{G_2}$.

Prenons e_1, \dots, e_{d-1} une base de E_{d-1} et g_1, \dots, g_{d-1} (resp. h_1, \dots, h_{d-1}) des relevés dans G_1 (resp. G_2). On voit que l'ordre de g_i est égal à 2 si $q_{G_1}(e_i) = 0$ et 4 sinon (resp. l'ordre de h_i est égal à 2 si $q_{G_2}(e_i) = 0$ et 4 sinon). Comme $q_{G_1} = q_{G_2}$ par hypothèse, on voit que l'on est dans les conditions d'application du lemme 21 (remarquons que $d_1 = \dots = d_{d-1} = 2$ dans ce cas) et il existe donc un isomorphisme entre G_1 et G_2 . ■

Ce lemme implique que l'on peut associer, à tout élément de \mathcal{QE}_d (l'ensemble des classes d'isomorphismes de 2-groupes quasiment élémentaires de cardinal 2^d), une unique classe de $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique de dimension $d - 1$. Notons \mathcal{Q}_{d-1} l'ensemble des classe d'isométrie de $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique de dimension $d - 1$.

On reformule le lemme en disant que l'application :

$$\Lambda : \left[\begin{array}{l} \mathcal{QE}_d \longrightarrow \mathcal{Q}_{d-1} \\ [G] \longmapsto [E_{d-1}, q_G] \end{array} \right.$$

est bien définie et injective. Il ne nous reste plus à montrer qu'elle est surjective.

Lemme 31

Soit $d \geq 1$ et (E_{d-1}, q) un $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique de dimension $d - 1$, il existe un 2-groupe G quasiment élémentaire de cardinal 2^d dont le $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique est isométrique à (E_{d-1}, q) .

Démonstration : Si $(E_{d-1}, q) = (E_{d-1}, 0)$ alors $G = (\mathbb{Z}/2)^d$ convient. Sinon, on peut supposer $q \neq 0$. Nous allons définir le groupe G par générateurs et relations.

$$G := \left\langle z, g_1, \dots, g_{d-1} \left[\begin{array}{ll} [z, g_i] = 1 & \text{pour } 1 \leq i \leq d - 1 \\ z^2 = 1 & \\ g_i^2 = z^{q(g_i)} & \text{pour } 1 \leq i \leq d - 1 \\ [g_i, g_j] = z^{B_q(g_i, g_j)} & \text{pour } 1 \leq i, j \leq d - 1 \end{array} \right. \right\rangle$$

Il est clair que z est central dans G car il commute avec tous les générateurs de G . Ainsi, on peut considérer le groupe $G/\langle z \rangle$. On voit alors :

$$G/\langle z \rangle = \left\langle e_1, \dots, e_{d-1} \left| \begin{array}{ll} e_i^2 = 1 & \text{pour } 1 \leq i \leq d-1 \\ [e_i, e_j] = 1 & \text{pour } 1 \leq i, j \leq d-1 \end{array} \right. \right\rangle$$

Autrement dit, $G/\langle z \rangle$ est clairement 2-abélien élémentaire de dimension $d-1$. Comme z est central d'ordre 2 dans G , on en déduit que G est un 2-groupe quasi-élémentaire. Il nous reste à justifier que (E_{d-1}, q_G) est bien isométrique à (E_{d-1}, q) .

Prenons donc $a \in G/\langle z \rangle$ avec :

$$a = \sum_{j=1}^{d-1} a_j e_j$$

Alors un relevé de a est $\hat{a} := g_1^{a_1} \dots g_{d-1}^{a_{d-1}}$. Pour calculer $q_G(a)$, nous allons donc calculer \hat{a}^2 :

$$\hat{a}^2 = g_1^{a_1} \dots g_{d-1}^{a_{d-1}} g_1^{a_1} \dots g_{d-1}^{a_{d-1}} \quad (4.7)$$

Soit $1 \leq j \leq d-1$, on sait que :

$$\begin{aligned} g_j^{a_j} g_1^{a_1} &= [g_j, g_1]^{a_j a_1} g_1^{a_1} g_j^{a_j} \\ &= z^{a_j a_1 B_q(e_j, e_1)} g_1^{a_1} g_j^{a_j} \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on applique cela à $j = d-1, \dots, 2$, on obtient :

$$\hat{a}^2 = g_1^{2a_1} g_2^{a_2} \dots g_{d-1}^{a_{d-1}} g_2^{a_2} \dots g_{d-1}^{a_{d-1}} z^{a_1 \sum_{j=2}^{d-1} a_j B_q(e_j, e_1)}$$

En appliquant cela de nouveau pour $i = 2$ jusqu'à $d-1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{a}^2 &= g_1^{2a_1} \dots g_{d-1}^{2a_{d-1}} z^{\sum_{i=1}^{d-1} a_i \sum_{j=i+1}^{d-1} a_j B_q(e_j, e_i)} \\ &= \prod_{i=1}^{d-1} z^{a_i q(e_i)} z^{\sum_{i=1}^{d-1} a_i \sum_{j=i}^{d-1} a_j B_q(e_j, e_i)} \\ &= z^{q(a)} \end{aligned}$$

Ainsi, $q_G(a)$ qui est, par définition l'unique entier k modulo 2 tel que $a^2 = z^k$, est égal à $q(a)$. On en conclut que le module associé à G est bien (E_{d-1}, q) et on peut conclure. ■

Au final nous avons montré le théorème suivant :

Théorème 4.3

L'application Λ associant à toute classe d'isomorphisme $[G]$ dans \mathcal{QE}_d la classe d'isométrie de $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques $[E_{d-1}, q_G]$ dans \mathcal{Q}_{d-1} est une bijection.

Dans la suite, nous allons utiliser ce théorème et le théorème de classification des $\mathbb{Z}/2$ -modules quadratiques (théorème 4.2).

4.4.2 Caractérisation des centralisateurs dans $Spin(n, \mathbb{C})$

Dans cette sous-section, nous voulons donner la liste des groupes finis qui peuvent apparaître comme un centralisateur d'irréductible dans $Spin(n, \mathbb{C})$ pour un certain n . Précisément, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.4

Soit G un groupe fini. Alors il existe $n \geq 3$ et H un sous-groupe irréductible de $Spin(n, \mathbb{C})$ tel que G soit isomorphe au centralisateur dans $Spin(n, \mathbb{C})$ de H si et seulement si G est un 2-groupe quasiment élémentaire.

Démonstration du théorème 4.4. L'exemple 11, justifie que tout centralisateur d'irréductible dans un certain $Spin(n, \mathbb{C})$ est un 2-groupe quasiment élémentaire. Nous allons montrer la réciproque de cette affirmation (ce qui démontrera le théorème) :

Proposition 65

Soit G un 2-groupe quasiment élémentaire alors il existe $n \geq 3$ et H un sous-groupe irréductible de $Spin(n, \mathbb{C})$ tel que $Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H)$ soit isomorphe à G .

Démonstration : Par le théorème 4.3, G est uniquement déterminé par le $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique qu'il induit. Par le théorème 4.2, le $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique associé à G est isométrique à l'un des trois modules suivants pour $k \geq 0$ et $d \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{type 1} &: k\mathbb{H} \oplus [[d]]_0 \\ \text{type 2} &: (k-1)\mathbb{H} \oplus \mathbb{M} \oplus [[d]]_0 \\ \text{type 3} &: k\mathbb{H} \oplus [[d]]_1 \end{aligned}$$

Il suffit donc, pour montrer la proposition, de trouver pour tout choix de k et d et pour chaque type un groupe H dont le centralisateur aura pour $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique induit le module correspondant. Dans la suite, nous allons complètement décrire la construction pour le type 1. Pour les types 2 et 3, nous décrirons seulement le groupe H (laissant au lecteur le soin de se convaincre que les calculs pour le type 1, légèrement modifiés, permettent de conclure pour les type 2 et 3).

Pour le type 1, on choisit $k \geq 0$ et $d \geq 0$. Définissons :

$$K := \begin{pmatrix} SO(5, \mathbb{C}) & \\ & SO(3, \mathbb{C}) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \overline{H} := \begin{pmatrix} K & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & K & & & & \\ & & & SO(5, \mathbb{C}) & & & \\ & & & & SO(4, \mathbb{C}) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & SO(4, \mathbb{C}) \end{pmatrix}$$

Il y a k copies de K et d copies de $SO(4, \mathbb{C})$. Le groupe \overline{H} est alors un sous-groupe de $SO(n, \mathbb{C})$ avec $n = 8k + 5 + 4d$. On note

$$(e_0, \dots, e_{8k+4}, a_0, \dots, a_{4d-1})$$

la base canonique de l'espace vectoriel sous-jacent (i.e. la base dans laquelle \overline{H} a la forme ci-dessus). On définit :

$$\begin{aligned} L_i &:= \{8i - 8, \dots, 8i - 4\}, g_i := e_{L_i} \in Spin(n, \mathbb{C}) \text{ pour } 1 \leq i \leq k+1 \\ R_i &:= \{8i - 3, 8i - 2, 8i - 1\}, h_i := e_{R_i} \in Spin(n, \mathbb{C}) \text{ pour } 1 \leq i \leq k \\ U_j &:= \{4j - 4, \dots, 4j - 1\}, u_j := a_{U_j} \in Spin(n, \mathbb{C}) \text{ pour } 1 \leq j \leq d \end{aligned}$$

Clairement, le centralisateur de \overline{H} dans $O(n, \mathbb{C})$ est le groupe :

$$\left\langle \pi(g_i), \pi(h_i), \pi(g_{k+1}), \pi(u_j) \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d \end{array} \right\rangle$$

Le groupe A suivant est alors inclus dans $SO(n, \mathbb{C})$ et est d'indice 2 dans le groupe ci-dessus :

$$A := \left\langle \pi(g_i h_i), \pi(h_i g_{i+1}), \pi(u_j) \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d \end{array} \right\rangle$$

On en déduit que ce groupe A est exactement le centralisateur de \overline{H} dans $SO(n, \mathbb{C})$. Nous en déduisons que \overline{H} a un centralisateur fini, comme \overline{H} est complètement réductible, \overline{H} est irréductible.

Notons $H := \pi^{-1}(\overline{H})$, c'est un sous-groupe irréductible de $Spin(n, \mathbb{C})$ car \overline{H} l'est. De plus :

$$Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H) \leq \pi^{-1}(A) = \left\langle -1, g_i h_i, h_i g_{i+1}, u_j \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d \end{array} \right\rangle \quad (4.8)$$

Nous allons voir que l'inclusion (4.8) est une égalité. En rappelant que le groupe $Spin(n, \mathbb{C})$ est construit comme un sous-groupe multiplicatif dans l'algèbre de Clifford engendrée par les e_i et les a_j on définit :

- la sous-algèbre S_i^+ engendrée par $e_{8i-8}, \dots, e_{8i-4}$ pour $1 \leq i \leq k+1$
- la sous-algèbre T_i^+ engendrée par $e_{8i-3}, e_{8i-2}, e_{8i-1}$ pour $1 \leq i \leq k$
- la sous-algèbre V_j^+ engendrée par $a_{4j-4}, \dots, a_{4j-1}$ pour $1 \leq j \leq d$

De par la décomposition de \overline{H} , il est clair que tout élément h de H s'écrit :

$$h = s_1 t_1 \dots s_k t_k s_{k+1} v_1 \dots v_d \text{ avec } \begin{cases} s_i \in S_i^+ & \text{pour } 1 \leq i \leq k+1 \\ t_i \in T_i^+ & \text{pour } 1 \leq i \leq k \\ v_i \in V_j^+ & \text{pour } 1 \leq j \leq d \end{cases}$$

Pour tout $1 \leq i \leq k$, $g_i h_i$, commute avec S_i^+ et T_i^+ , de plus si $l \neq i$ $g_i h_i$ commute avec S_l^+ et T_l^+ car $g_i h_i$ est un élément pair dans l'algèbre de Clifford. De même $g_i h_i$ commute avec V_j^+ . Ainsi $g_i h_i$ commute avec H .

On montre de même que $h_i g_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq k$ et u_j pour $1 \leq j \leq d$ sont dans le centralisateur de H . Au vu de l'inclusion 4.8, on en déduit que :

$$Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H) = \left\langle -1, g_i h_i, h_i g_{i+1}, u_j \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d \end{array} \right\rangle$$

Pour déterminer le module quadratique associé à $Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H)$, nous allons maintenant construire une nouvelle base pour $A = Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H)/\langle -1 \rangle$. On note q la forme quadratique associée au 2-groupe quasiment élémentaire $Z_{Spin(n, \mathbb{C})}(H)$. On définit dans A :

$$\begin{aligned} X_i &:= \pi(g_1 h_1 \dots g_i h_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq k \\ Y_i &:= \pi(h_i g_{i+1}) \text{ pour } 1 \leq i \leq k \\ A_j &:= \pi(u_j) \text{ pour } 1 \leq j \leq d \end{aligned}$$

Il est clair que $(X_1, Y_1, \dots, X_k, Y_k, A_1, \dots, A_d)$ est une base de A (essentiellement car $(\pi(g_1 h_1), \pi(h_1 g_2), \dots, \pi(g_k h_k), \pi(h_k g_{k+1}), \pi(u_1), \dots, \pi(u_d))$ en est une). Nous allons montrer que c'est une base symplectique au sens de la proposition 62.

Auparavant, on remarque (cf exemple 9) que si E_1, E_2 sont deux sous-ensembles de $\{0, \dots, n-1\}$ alors :

$$q(\pi(e_{E_1})) = \frac{|E_1|}{2} \text{ et } B_q(\pi(e_{E_1}), \pi(e_{E_2})) = |E_1 \cap E_2|$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{pour } 1 \leq i_1 < i_2 \leq k \quad B_q(X_{i_1}, X_{i_2}) &= |\bigcup_{i=1}^{i_1} L_i \cup R_i| = 8i_1 = 0 \pmod{2} \\ \text{pour } 1 \leq i_1 < i_2 \leq k \quad B_q(Y_{i_1}, Y_{i_2}) &= |\emptyset| = 0 \pmod{2} \\ \text{pour } 1 \leq i_1 < i_2 \leq k \quad B_q(X_{i_1}, Y_{i_2}) &= |\emptyset| = 0 \pmod{2} \\ \text{pour } 1 \leq i_1 < i_2 \leq k \quad B_q(Y_{i_1}, X_{i_2}) &= |R_{i_1} \cup L_{i_1+1}| = 8 = 0 \pmod{2} \\ \text{pour } 1 \leq j_1 < j_2 \leq d \quad B_q(A_{j_1}, A_{j_2}) &= |\emptyset| = 0 \pmod{2} \\ \text{pour } 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j \leq d \quad B_q(X_i, A_j) &= |\emptyset| = 0 \pmod{2} \\ \text{pour } 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j \leq d \quad B_q(Y_i, A_j) &= |\emptyset| = 0 \pmod{2} \\ \text{pour } 1 \leq i \leq k \quad B_q(X_i, Y_i) &= |L_i| = 5 = 1 \pmod{2} \end{aligned}$$

Ceci permet d'affirmer que $(X_1, Y_1, \dots, X_k, Y_k, A_1, \dots, A_d)$ est une base symplectique. En particulier, si pour $i = 1, \dots, k$, on note $P_i := Vect(X_i, Y_i)$ le plan dans A engendré par X_i et Y_i alors :

$$A = P_1 \oplus \dots \oplus P_k \oplus Vect(A_1, \dots, A_d)$$

On en déduit que le radical de (A, q) est exactement $Vect(A_1, \dots, A_d)$. Il s'agit maintenant de déterminer quels sont les types des P_i (hyperbolique

Pour le type 2, c'est un tout petit peu plus compliqué. Prenons le même groupe $K \leq SO(8, \mathbb{C})$, définissons :

$$K' = \begin{pmatrix} SO(5, \mathbb{C}) & & \\ & SO(5, \mathbb{C}) & \\ & & SO(5, \mathbb{C}) \end{pmatrix}$$

Alors le groupe \overline{H} qui va convenir est :

$$\overline{H} := \begin{pmatrix} K & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & K & & & & \\ & & & K' & & & \\ & & & & SO(4, \mathbb{C}) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & SO(4, \mathbb{C}) \end{pmatrix}$$

Avec $k - 1$ copies de K et d copies de $SO(4, \mathbb{C})$. Par rapport au type 1, le centralisateur de \overline{H} aura le même nombre de générateurs et l'on pourra construire, sur le module quadratique associé, une base symplectique de manière similaire. Il est clair que la partie radicale va rester identique. Les $k - 1$ copies de K vont aboutir (comme dans le cas du type 1) à $(k - 1)\mathbb{H}$. Finalement le remplacement de :

$$\begin{pmatrix} K & \\ & SO(5, \mathbb{C}) \end{pmatrix} \text{ par } \begin{pmatrix} SO(5, \mathbb{C}) & & \\ & SO(5, \mathbb{C}) & \\ & & SO(5, \mathbb{C}) \end{pmatrix}$$

aboutit à un plan métaplectique. En effet, l'analogue de L_k, L_{k+1} et R_k dans ce cas sont trois sous-ensembles de cardinal 5 (alors que dans le cas de type 1, seul L_{k+1} et L_k sont de cardinal 5). On a alors :

$$q(X_k) = \frac{|L_1 \cup R_1 \cup \dots \cup L_k \cup R_k|}{2} = 4(k - 1) + 5 = 1 \pmod{2}$$

$$q(Y_k) = \frac{|R_k \cup L_{k+1}|}{2} = 5 = 1 \pmod{2}$$

Autrement dit $P_k := Vect(X_k, Y_k)$ est métaplectique. On obtient finalement $(k - 1)\mathbb{H} \oplus \mathbb{M} \oplus [[d]]_0$ au lieu de $k\mathbb{H} \oplus [[d]]_0$. ■

Le théorème 4.4 a une (relative) faiblesse par rapport au théorème de caractérisation donné au chapitre 3. En effet, ce dernier théorème donnait une condition nécessaire et suffisante à n fixé alors que le théorème de caractérisation de ce chapitre ne donne pas de condition sur n .

En regardant de plus près pour \mathbb{D}_4 , nous avons vu dans le théorème 4.1 que \mathbb{D}_4 apparaissait comme le centralisateur d'un irréductible de $Spin(7, \mathbb{C})$ alors que dans la preuve de la proposition 65, pour \mathbb{D}_4 (qui est associé à \mathbb{H} , voir exemple 12) de type 1 avec $k = 1, d = 0$, nous le réalisons comme le centralisateur d'un irréductible dans $Spin(13, \mathbb{C})$.

On voit donc que la proposition 65 ne donne aucun renseignement sur ce qui se passe à n fixé.

Perspectives d'amélioration. Nous allons ici donner quelques pistes pour classifier les centralisateurs d'irréductibles dans $Spin(n, \mathbb{C})$ à n donné.

Rappelons que G_n est le groupe des spin fondamentaux et qu'il se projette naturellement sur P_n l'ensemble des parties paires de $\{0, \dots, n-1\}$. De plus P_n est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{Z}/2$ -module quadratique (cf exemple 9). Explicitement, la projection (toujours notée π par abus de notation) est définie par :

$$\pi : \begin{cases} G_n & \longrightarrow P_n \\ \pm e_A & \longmapsto A \end{cases}$$

Tout comme pour le chapitre 3, la notion d'orthogonalité dans P_n caractérise une commutation dans G_n (ceci vient de la forme polaire associée). Ainsi, on obtient facilement :

Proposition 66

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe de G_n alors

$$Z_{G_n}(H) = \pi^{-1}((\pi(H))^\perp)$$

Démonstration : En effet, soit $\pm e_B \in G_n$. Alors $\pm e_B \in Z_{G_n}(H)$ si et seulement si $[e_A, e_B] = 1$ pour tout $e_A \in H$ si et seulement si $B_q(A, B) = 0$ pour tout $A \in \pi(H)$ si et seulement si $B \in (\pi(H))^\perp$. ■

Il est maintenant simple de caractériser géométriquement les groupes $H \leq G_n$ irréductibles dans $Spin(n, \mathbb{C})$, au vu du lemme 23 et de cette proposition, c'est équivalent au fait que $(\pi(H))^\perp$ ne contienne aucun élément de la forme $\pi(e_i e_j)$.

Dans ce qui suit, on utilisera un lemme géométrique dans le module quadratique P_n :

Lemme 32

Soient $n \geq 3$ et A un sous-espace de P_n contenant le radical de P_n alors $(A^\perp)^\perp = A$.

Démonstration : Notons $R(P_n)$ le radical de P_n et $p : P_n \rightarrow \overline{P_n} := P_n/R(P_n)$. Alors $P_n/R(P_n)$ muni de la projection de la forme polaire de P_n sur $\overline{P_n}$ est un espace symplectique. Par la proposition 41 :

$$|((p(A))^\perp)^\perp| = |p(A)| \quad (4.9)$$

Comme, ensemblistement, on a $p((A^\perp)^\perp) = ((p(A))^\perp)^\perp$ on en conclut, avec l'égalité 4.9 que :

$$|p((A^\perp)^\perp)| = |p(A)| \quad (4.10)$$

Vu que $(A^\perp)^\perp$ et A contiennent tous les deux le radical de $P_n = \ker(p)$ (le premier car c'est un orthogonal, le second par hypothèse) on en déduit :

$$|(A^\perp)^\perp| = \frac{|p((A^\perp)^\perp)|}{|R(P_n)|} \text{ et } |A| = \frac{|p(A)|}{|R(P_n)|}$$

En utilisant l'égalité 4.10, A et $(A^\perp)^\perp$ ont même cardinal, comme A est contenu dans $(A^\perp)^\perp$ on en déduit l'égalité de ces deux sous-espaces. ■

Le corollaire que l'on en tire est le suivant :

Corollaire 18

Soit $n \geq 1$. Tout sous-groupe de G_n contenant le centre de $Spin(n, \mathbb{C})$ et aucun élément de la forme $e_{\{i,j\}}$ est centralisateur d'un sous-groupe irréductible dans $Spin(n, \mathbb{C})$ inclus dans G_n .

Démonstration : Soit Z un tel sous-groupe, notons $H_0 := Z_{G_n}(Z)$. Montrons tout d'abord que $Z_{G_n}(H_0) = Z$. En effet :

$$\begin{aligned} \pi(Z_{G_n}(H_0)) &= \pi(H_0)^\perp \text{ par la proposition 66} \\ &= (\pi(Z_{G_n}(Z)))^\perp \\ &= (\pi(Z)^\perp)^\perp \text{ par la proposition 66} \\ &= \pi(Z) \left\{ \begin{array}{l} \text{car } H \text{ contient le centre de } G_n \\ \text{et à cause du lemme 32} \end{array} \right. \end{aligned}$$

On vient de montrer que $\pi(Z_{G_n}(H_0)) = \pi(Z)$, comme $Z_{G_n}(H_0)$ et Z contiennent le noyau de π , on en déduit $Z_{G_n}(H_0) = Z$.

Le centralisateur du groupe $H_0 \leq G_n$ dans G_n est Z qui ne contient aucun élément de la forme $e_{\{i,j\}}$, par conséquent (lemme 23), le sous-groupe H_0 de $Spin(n, \mathbb{C})$ est irréductible et son centralisateur dans $Spin(n, \mathbb{C})$ est égal à son centralisateur dans G_n qui est Z . ■

À conjugaison près, tout centralisateur d'irréductible de $Spin(n, \mathbb{C})$ est inclus dans G_n , contient le centre de $Spin(n, \mathbb{C})$ et ne peut contenir aucun élément de la forme $e_{\{i,j\}}$ (lemme 24). On en conclut (par ce corollaire) que le centralisateur de ce groupe irréductible quelconque est en fait le centralisateur d'un groupe irréductible inclus dans G_n . Le problème de classification des centralisateurs de sous-groupes irréductibles de $Spin(n, \mathbb{C})$ devient donc un problème beaucoup plus combinatoire de classification des centralisateurs d'irréductibles dans G_n . En particulier on en arrive à la question suivante :

Question 6

Soit $n \geq 3$, peut-on caractériser les classes d'isomorphismes de sous-groupes de G_n contenant le centre de $Spin(n, \mathbb{C})$ et aucun élément de la forme $e_{\{i,j\}}$?

On remarquera que ce problème peut être aussi vu dans P_n via la projection π . Il est évident que cette question peut se reformuler en une question plus fine sur les classes de conjugaisons dans $Spin(n, \mathbb{C})$.

4.5 Remarques sur le cas de $PSO(2n, \mathbb{C})$

Si n est impair alors $SO(n, \mathbb{C})$ est de centre trivial, on en déduit que le groupe $PSO(n, \mathbb{C})$ est égal au groupe $SO(n, \mathbb{C})$.

En revanche, si n est pair alors $-I_n$ est un élément central de $SO(n, \mathbb{C})$ et donc $PSO(n, \mathbb{C}) \neq SO(n, \mathbb{C})$. On suppose donc que n est pair. On changera alors n en $2n$.

En un certain sens, nous allons voir dans la suite, à travers quelques exemples que le groupe de Lie $PSO(2n, \mathbb{C})$ a le comportement le plus compliqué vis-à-vis des centralisateurs parmi tous les groupes que nous avons considérés ($PSL(n, \mathbb{C})$ et ses quotients, $SO(n, \mathbb{C})$, $Spin(n, \mathbb{C})$).

Si l'on note $\pi_P : SO(2n, \mathbb{C}) \rightarrow PSO(2n, \mathbb{C})$ la projection naturelle, on peut montrer la proposition suivante :

Proposition 67

Soient $n \geq 2$ et \overline{H} un sous-groupe irréductible de $PSO(2n, \mathbb{C})$ alors le centralisateur de \overline{H} dans $PSO(2n, \mathbb{C})$ est d'exposant divisant 4.

Démonstration : Notons $H := \pi_P^{-1}(\overline{H})$ qui est un sous-groupe irréductible de $SO(2n, \mathbb{C})$,

$$U := \pi_P^{-1}(Z_{PSO(2n, \mathbb{C})}(\overline{H}))$$

Alors pour tout $u \in U$, $h \in H$ on a $[u, h] = \pm I_{2n}$, on en déduit que $[u^2, h] = I_{2n}$ i.e. u^2 centralise H . Par la proposition 50, u^2 est d'ordre divisant 2. On en déduit que u est d'ordre divisant 4. ■

Cette proposition est tout ce que l'on peut dire en général sur le centralisateur d'un irréductible dans $PSO(2n, \mathbb{C})$. Une question naturelle :

Question 7

Soit $n \geq 1$. Peut-on borner le cardinal des centralisateurs de sous-groupes irréductibles de $PSO(2n, \mathbb{C})$ en fonction de n ?

Si l'on s'intéresse spécifiquement à la structure de groupe des centralisateurs d'irréductibles dans $PSO(2n, \mathbb{C})$, on obtient pour $n = 3$:

Exemple 13

Tout \overline{H} sous-groupe irréductible de $PSO(6, \mathbb{C})$ vérifie que son centralisateur dans $PSO(6, \mathbb{C})$ est abélien.

Démonstration : Il s'agit simplement de voir que $PSO(6, \mathbb{C})$ s'identifie à $PSL(4, \mathbb{C})$ et d'appliquer les résultats du chapitre 3. ■

Nous avons un autre exemple :

Exemple 14

La projection du groupe $SDO(4, \mathbb{C})$ dans $PSO(4, \mathbb{C})$ est un groupe abélien irréductible dont le centralisateur est abélien.

Démonstration : Soient :

$$d_{1,2} := \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } d_{2,3} := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Il est clair que $SDO(4, \mathbb{C})$ est engendré par $d_{1,2}$, $d_{2,3}$ et $-I_4$. Prenons les deux éléments suivants dans $SO(4, \mathbb{C})$:

$$u_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 := \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

Par un calcul direct :

$$\begin{aligned} [u_1, d_{1,2}] &= I_4 & [u_1, d_{2,3}] &= -I_4 & [u_1, -I_4] &= I_4 \\ [u_2, d_{1,2}] &= -I_4 & [u_2, d_{2,3}] &= I_4 & [u_2, -I_4] &= I_4 \end{aligned}$$

Chaque ligne implique que $\pi_P(u_i)$ commute avec le projeté du groupe $SDO(4, \mathbb{C})$ dans $PSO(4, \mathbb{C})$. D'autre part, on a $[u_1, u_2] = I_4$.

Posons $H := SDO(4, \mathbb{C})$ et $U := \pi_P^{-1}(Z_{PSO(2n, \mathbb{C})}(\pi_P(H)))$. Alors par le lemme 15 on peut construire un morphisme de groupes :

$$\phi : \begin{cases} U & \longrightarrow & Mor(H, \langle -I_4 \rangle) \\ u & \longmapsto & (h \mapsto [u, h]) \end{cases}$$

L'image d'un élément de U via ϕ ne peut envoyer $-I_4$ sur $-I_4$ car $-I_4$ est scalaire. On en déduit que l'image de ϕ est au plus de cardinal 4, vu que u_1 et u_2 sont différents via ϕ , on en déduit que $|\phi(U)| = 4$. En particulier, on en déduit que U est engendré par u_1, u_2 et $Z_{SO(n, \mathbb{C})}(H) = H$ dans ce cas. Ainsi $\pi_P(U)$ est abélien. On peut même voir que tous les éléments sont d'ordre 2 donc $Z_{PSO(4, \mathbb{C})}(\pi_P(SDO(4, \mathbb{C})))$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^5$. ■

Si l'on regarde pour de plus grands n :

Proposition 68

Soit $n > 2$ alors le projeté de $SDO(2n, \mathbb{C})$ dans $PSO(2n, \mathbb{C})$ est son propre centralisateur, en particulier, il est abélien.

Démonstration : Soient $H := SDO(2n, \mathbb{C})$ et $U := \pi_P^{-1}(Z_{PSO(2n, \mathbb{C})}(\pi_P(H)))$. Alors, il est clair que U est inclus dans le normalisateur de $SDO(2n, \mathbb{C})$. Rappelons que tout élément de $SDO(2n, \mathbb{C})$ est identifié à un élément de P_n . Si $A \in P_n$, on note d_A l'élément correspondant (rappelons que d_A désigne la matrice diagonale avec $(d_A)_{i,i} = 1$ si $i \notin A$ et -1 sinon).

Soit $u \in U$. Si u n'est pas dans le centralisateur de $SDO(2n, \mathbb{C})$ alors il existe $0 \leq i < j \leq 2n - 1$ tels que $[x, d_{\{i,j\}}] = -I_{2n}$. Le lemme 6 implique alors que les espaces propres associés à 1 et -1 pour $d_{\{i,j\}}$ ont la même dimension, or l'espace propre associé à 1 a pour dimension $2n - 2$ et

l'espace propre associé à -1 a pour dimension 2. Si les dimensions étaient égales, on aurait $n = 4$. Comme $n > 4$, c'est impossible et donc :

$$U = Z_{SO(2n, \mathbb{C})}(SDO(2n, \mathbb{C})) = SDO(2n, \mathbb{C})$$

Par suite, le projeté de $SDO(2n, \mathbb{C})$ est donc bien son propre centralisateur dans $PSO(2n, \mathbb{C})$. ■

Nous étudions complètement le cas de $PSO(4, \mathbb{C})$:

Proposition 69

Soit \overline{H} un sous-groupe irréductible de $PSO(4, \mathbb{C})$ alors le centralisateur de \overline{H} dans $PSO(4, \mathbb{C})$ est abélien.

Démonstration : Dans cette preuve, on note $H := \pi_P^{-1}(\overline{H})$, $Z := Z_{SO(4, \mathbb{C})}(H)$ et $U := \pi_P^{-1}(Z_{PSO(4, \mathbb{C})}(\overline{H}))$. Par le lemme 15 on peut construire un morphisme de groupes :

$$\phi : \begin{cases} U & \longrightarrow & Mor(H, \langle -I_4 \rangle) \\ u & \longmapsto & (h \mapsto [u, h]) \end{cases}$$

De plus le noyau de ϕ est exactement Z . Nous allons faire une disjonction de cas selon le cardinal de Z .

Si $|Z| = 2$ alors $Z = \langle -I_4 \rangle$, dans ce cas $U/\ker(\phi)$ qui est inclus dans le groupe abélien $Mor(H, \langle -I_4 \rangle)$ s'identifie à $U/\langle -I_4 \rangle = Z_{PSO(4, \mathbb{C})}(\overline{H})$. Ce dernier groupe est donc abélien.

Si $|Z| = 8$ alors, par la proposition 51, le groupe H est $SDO(4, \mathbb{C})$ donc (cf exemple 14) $Z_{PSO(4, \mathbb{C})}(\overline{H})$ est abélien.

Si $|Z| = 4$ alors, quitte à conjuguer, on peut supposer :

$$Z = \langle d_{\{1,2\}}, -I_4 \rangle$$

Soit x un élément de $SO(4, \mathbb{C})$ normalisant Z alors $x \cdot (-I_4) = -I_4$ donc $x \cdot d_{\{1,2\}} = \pm d_{\{1,2\}}$. En particulier, on en déduit que l'indice du centralisateur de Z dans le normalisateur de Z est 2. Vu que U normalise $\ker(\phi) = Z$, on en déduit que l'indice de Z dans U est soit 2 soit 1.

Si $[U : Z] = 1$ alors $U = Z$ et donc $Z_{PSO(4, \mathbb{C})}(\overline{H}) = \pi_P(U) = \pi_P(Z)$ est abélien.

Si $[U : Z] = 2$ alors on choisit $x \in U$ qui n'est pas dans Z . Deux éléments les plus généraux $x^{\epsilon_1} z_1, x^{\epsilon_2} z_2$ dans U vérifient alors :

$$[x^{\epsilon_1} z_1, x^{\epsilon_2} z_2] = [z_1, x]^{\epsilon_2} [x, z_2]^{\epsilon_1} \in \langle -I_4 \rangle$$

En particulier, $Z_{PSO(4, \mathbb{C})}(\overline{H}) = \pi_P(U)$ est abélien. ■

Alors que les cas de $PSO(4, \mathbb{C})$ et $PSO(6, \mathbb{C})$ semblent suggérer que les centralisateurs dans $PSO(2n, \mathbb{C})$ sont toujours abéliens on a le contre-exemple suivant pour $n = 8$:

Contre-exemple 6

On définit dans $SO(8, \mathbb{C})$ le groupe :

$$H := \langle d_{\{4,5,6,7\}}, d_{\{2,3,6,7\}}, d_{\{1,3,5,7\}} \rangle$$

Alors l'image de H dans $PSO(8, \mathbb{C})$ est un groupe irréductible de centralisateur non-abélien.

Démonstration : Remarquons pour commencer que l'image réciproque de H dans $Spin(8, \mathbb{C})$ est le groupe H_8 considéré dans le théorème 4.1. En particulier, H_8 est irréductible donc H l'est aussi et sa projection dans $PSO(8, \mathbb{C})$ l'est aussi. Définissons :

$$u := \begin{pmatrix} & I_4 \\ I_4 & \end{pmatrix}$$

Par un calcul direct :

$$[u, d_{\{4,5,6,7\}}] = -I_8, [u, d_{\{2,3,6,7\}}] = I_8, [u, d_{\{1,3,5,7\}}] = I_8$$

De plus $SDO(8, \mathbb{C})$ commute clairement avec H . De cela, on en déduit que le projeté du groupe engendré par $SDO(8, \mathbb{C})$ et u est dans le centralisateur du projeté de H dans $PSO(8, \mathbb{C})$. On remarque toutefois que :

$$[u, d_{\{1,2\}}] = d_{\{1,2,5,6\}} \notin \langle -I_8 \rangle$$

ainsi le projeté du groupe engendré par $SDO(8, \mathbb{C})$ et u n'est pas commutatif, en particulier, le centralisateur du projeté de H n'est pas commutatif. ■

Nous déduisons du contre-exemple 6, un contre-exemple sur la variété des caractères : toutes les orbifolles construites comme la partie irréductible d'une variété des caractères de Γ un groupe fuchsien dans un groupe de Lie simple complexe ne sont pas nécessairement des orbifolles abéliennes (i.e. dont tous les groupes d'isotropies sont abéliens).

Contre-exemple 7

Soit Γ un groupe fuchsien dont le 2-rang est strictement supérieur à 2. Alors l'orbifolde $\chi^i(\Gamma, PSO(8, \mathbb{C}))$ est une orbifolde non-abélienne.

Démonstration : L'hypothèse sur le 2-rang de Γ assure qu'il existe un morphisme de groupes surjectif ϕ_1 de Γ vers $(\mathbb{Z}/2)^3$. On note alors ϕ_2 l'isomorphisme de $(\mathbb{Z}/2)^3$ vers $\pi_P(H)$ où :

$$H := \langle d_{\{4,5,6,7\}}, d_{\{2,3,6,7\}}, d_{\{1,3,5,7\}} \rangle$$

est le groupe du contre-exemple 6. Alors on note $\rho := \phi_2 \circ \phi_1$:

$$\begin{array}{ccc} & \rho & \\ & \curvearrowright & \\ \Gamma & \xrightarrow{\phi_1} & (\mathbb{Z}/2)^3 \xrightarrow{\phi_2} \pi_P(H) \end{array}$$

Le morphisme de groupes ρ est surjectif sur $\pi_P(H)$, $\pi_P(H)$ étant un sous-groupe irréductible de $PSO(8, \mathbb{C})$, la représentation ρ est irréductible. De plus le groupe d'isotropie locale en la classe de conjugaison de ρ s'identifie à $Z(\rho)/Z(PSO(8, \mathbb{C}))$. Or :

$$\begin{aligned} Z(\rho)/Z(PSO(8, \mathbb{C})) &= Z(\rho) \text{ car le centre de } PSO(8, \mathbb{C}) \text{ est trivial} \\ &= Z_{PSO(8, \mathbb{C})}(\pi_P(H)) \text{ par définition} \end{aligned}$$

On a montré, dans le contre-exemple 6, que $Z_{PSO(8, \mathbb{C})}(\pi_P(H))$ n'était pas abélien, on en déduit que le groupe d'isotropie en la classe de conjugaison de ρ vu comme un point de l'orbifolde $\chi^i(\Gamma, PSO(8, \mathbb{C}))$ est un groupe non-abélien. ■

Bibliographie

- [ALR07] Alejandro Adem, Johann Leida, Yongbin Ruan. *Orbifolds and stringy topology*. Cambridge University Press, 2007.
- [AM04] Alejandro Adem, R. James Milgram. *Cohomology of Finite Groups*. Springer Science and Business Media, 2004.
- [AT85] Shimshon Avraham Amitsur, Jean-Pierre Tignol. Kummer subfields of Malcev-Neumann division algebras. *Israel Journal of mathematics*, Vol. 50, Nos 1-2, 1985.
- [AT86] Shimshon Avraham Amitsur, Jean-Pierre Tignol. Symplectic modules. *Israel Journal of mathematics*, Vol. 54, No 3, 1986.
- [Art68] Michael Artin. On the solutions of analytic equations. *Inventiones Mathematicae*, Volume 5, Issue 4, pp 277–291, 1968.
- [Bir35] Garrett Birkhoff. Subgroups of abelian groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 2(1) :385–401, 1935.
- [Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups*. Springer, 1991.
- [BFM02] Armand Borel, Robert Friedman, John W. Morgan. *Almost commuting elements in compact Lie groups*. *Mem. Amer. Math. Soc.*, (157), 2002.
- [Bro82] Kenneth Stephen Brown. *Cohomology of Groups*. Springer, 1982.
- [Buc99] Bogdan Bucicovschi. Seeley’s theory of pseudodifferential operators on orbifolds. ArXiv :math/9912228 [math.DG], 1999.
- [DHW12] Karel Dekimpe, Manfred Hart and Sarah Wauters. A seven-term exact sequence for the cohomology of a group extension. arXiv :1103.4052v2 [math.GR], 2012.
- [EGM06] Kurusch Ebrahimi-Fard , Li Guo, Dominique Manchon. Birkhoff Type Decompositions and the Baker–Campbell–Hausdorff Recursion. *Communications in mathematical physics*, Volume 267, Issue 3, pp 821-845, 2006.

- [FL12] Carlos Florentino and Sean Lawton. Singularities of free group character varieties. *Pacific Journal of Mathematics*, 260(1) :149–179, 2012.
- [FLR15] Carlos Florentino, Sean Lawton and Daniel Ramras. Homotopy Groups of Free Group Character Varieties. arXiv :1412.0272v2 [math.AT], 2015. to appear in *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze*.
- [GAP] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.3*; 2016, (<http://www.gap-system.org>).
- [Gol] William Goldman. The symplectic nature of fundamental groups of surfaces. *Adv. in Math.*, 54,200-225, 1984.
- [FM11] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class group*. Princeton Mathematical Series, 2011.
- [JM87] Dennis Johnson and John James Millson. Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds. In *Progress in Mathematics*, volume 67, 1987.
- [Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian Groups*. University of Chicago Press, 1992.
- [Kos65] Jean-Louis Koszul. *Lectures on groups of transformations*. Tata Institute of Fundamental Research, 1965.
- [Kna02] Anthony William Kna. *Lie Groups : Beyond an Introduction*. Second Edition, Progress in Mathematics, Vol. 140, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [Li93] Jun Li. The space of surface group representations. In *Manuscripta Math.* , volume 78(3) : 223–243, 1993.
- [LM85] Alexander Lubotzky and Andy R. Magid. Varieties of representations of finitely generated groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, (336), 1985.
- [LS12] Roger Conant Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial group theory*. Classics in mathematics. Springer, 2012.
- [M-T86] Rached Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction aux groupes de Lie classiques*. Méthodes, Hermann, 1986.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre. *Linear representations of finite groups*. Graduate texts in mathematics, Springer, 1977.
- [Sik12] Adam S. Sikora. Character varieties. *Trans. of Amer. Math. Soc.*, 364(10) :5173–5208, 2012.

- [Thu80] William Thurston. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton lecture notes, 1980.
- [Wal64] Charles Terence Clegg Wall. Quadratic forms on finite groups, and related topics. *Topology*, Vol. 2 :281-298, 1964.
- [Wei64] Andre Weil. Remarks on the Cohomology of Groups. *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 80, No. 1, pp. 149-157, 1964.

Clément GUERIN

Singularités orbifoldes de la variété des caractères

Résumé :

Dans cette thèse, nous nous intéressons à des singularités particulières dans les variétés de caractères. Dans le premier chapitre, on justifie que les caractères de représentations irréductibles d'un groupe fuchsien vers un groupe de Lie complexe semi-simple forment une orbifolde. Le lieu orbifold (i.e. l'ensemble des points dont l'isotropie n'est pas triviale) est constitué des caractères de représentations exceptionnelles. Dans le second chapitre, nous décrivons précisément le lieu orbifold quand le groupe de Lie est $PSL(p, \mathbb{C})$ avec p premier. Dans le troisième et le quatrième chapitre nous cherchons à classifier les groupes d'isotropies possibles à conjugaison près apparaissant quand le groupe de Lie est respectivement un quotient de $SL(n, \mathbb{C})$ dans le troisième chapitre et un quotient de $Spin(n, \mathbb{C})$ dans le quatrième chapitre.

Mots-clés :

variété des caractères, représentations irréductibles, groupes fuchiens, singularités orbifoldes, modules alternés.

Summary :

In this thesis, we want to understand some singularities in the character variety. In a first chapter, we justify that the characters of irreducible representations from a Fuchsian group to a complex semi-simple Lie group is an orbifold. The orbifold locus is, then, the characters of bad representations. In the second chapter, we focus on the case where the Lie group is $PSL(p, \mathbb{C})$ with p a prime number. In particular we give an explicit description of this locus. In the third and fourth chapter, we describe the isotropy groups (i.e. the centralizers of bad subgroups) arising in the cases when the Lie group is a quotient $SL(n, \mathbb{C})$ (third chapter) and when the Lie group is a quotient of $Spin(n, \mathbb{C})$ in the fourth chapter.

Keywords :

character variety, irreducible representations, Fuchsian groups, orbifold, orbifold singularities, alternate modules.