

Thèse

INSTITUT DE
RECHERCHE
MATHÉMATIQUE
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

présentée pour obtenir le grade de docteur de
l'Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Amaury Bittmann

**Classification analytique de germes de champs de
vecteurs tridimensionnels doublement résonants
et applications aux équations de Painlevé**

Soutenue le 10 Octobre 2016
devant la commission d'examen

Loïc Jean dit Teyssier, directeur de thèse
Daniel Panazzolo, co-directeur de thèse
Laurent Stolovitch, rapporteur
Peter De Maesschalck, rapporteur
Jean-Pierre Ramis, examinateur
Frank Loray, examinateur

www-irma.u-strasbg.fr



Classification analytique de germes de champs de vecteurs
tridimensionnels doublement résonants et applications aux
équations de Painlevé

Amaury BITTMANN
thèse sous la direction de Loïc Teyssier et Daniel Panazzolo

IRMA UMR 7501, Université de Strasbourg, 7 Rue René Descartes, 67000
Strasbourg
Ecole Doctorale MSII

Remerciements

Les quelques pages qui vont suivre vont certainement servir de « livre de chevet » à toutes les personnes « non-mathématiciennes » présentes à de la soutenance de cette thèse (voire même à certain(e)s mathématicien(ne)s). Il va donc falloir ne pas être trop bref. Ce n'est pas là non plus le seul objectif de la rédaction de ces remerciements. Il va s'agir, en cette après-midi de chaleur pendant laquelle l'inspiration d'écrire ces lignes m'est venue, de me remémorer les trois années de thèses qui sont sur le point de s'achever, et plus particulièrement des différentes personnes que j'aurai rencontrées et qui m'auront marquées d'une manière ou d'une autre.

Je commencerai de la façon la plus originale qui soit, en remerciant chaleureusement mes directeurs de thèse : Loïc et Daniel. Vous avez, chacun à votre façon, su me guider et me conseiller tout au long de cette thèse. Cela a été un réel plaisir pour moi d'apprendre à vos côtés, et, c'est très important, dans la bonne humeur. Vous avez en effet toujours été à la fois calmes et patients. Nos réunions hebdomadaires du lundi matin (ou du vendredi matin selon les années), suivies d'un bon repas japonais ou coréen, m'ont permis d'avancer dans mon travail sans jamais être perdu. Pour rentrer un peu dans la partie nostalgique, je me souviens encore du mémoire de troisième année de Licence que j'ai rédigé sous ta direction Loïc. C'est à ce moment précis que je me suis dit : « si un jour je ferai une thèse, ce sera sur les équations différentielles holomorphes ». Tu m'as par exemple fait découvrir la monodromie avec beaucoup de lucidité et de « ludicité » (un peu de néologisme ne fait jamais de mal). Plus tard, lors de mon stage de Master 2, Daniel, tu as pris le relais en m'introduisant la théorie des formes normales et des éclatements avec beaucoup de pédagogie. Finalement, la boucle est bouclée en vous ayant eu tous deux comme co-directeurs de thèse. Encore une fois, un énorme merci.

Je tiens ensuite à remercier Laurent Stolovitch et Peter De Maesschalck, pour avoir accepté de rapporter sur mon travail de thèse. J'ai toujours été d'une grande admiration pour les personnes effectuant une telle tâche. Merci en particuliers à Laurent pour m'avoir invité Nice et pour avoir porté un tel intérêt à mon travail : c'est un honneur pour moi.

Je voudrai également remercier les deux examinateurs de mon jury de thèse, à savoir Frank Loray et Jean-Pierre Ramis, pour m'avoir fait l'immense honneur de faire partie de ce jury. Lorsque que j'ai commencé à étudier les singularités des feuilletages holomorphes en lisant certains de vos écrits respectifs, je n'imaginais pas une seconde que vous seriez un jour membres de mon jury de thèse : cela me touche vraiment énormément. Je suis également ravi d'avoir pu croisé votre route durant ma thèse (pour Jean Pierre Ramis à Kyoto, et pour Frank Loray à Rennes). Merci encore de vous être intéressé à mon travail.

Pour conclure les remerciements des personnes du jury, je tiens à dire un grand merci à Reinhard, directeur officiel durant ma première année de thèse, qui a fait la jonction entre les enseignements de Loïc (en L3) et de Daniel (en M2), lors du cours sur les équations différentielles holomorphes en Master 1. Vous m'avez également, à de nombreuses reprises en début de thèse, apporté votre aide et vos conseils si pertinents sur les questions de sommabilité Gevrey des séries divergentes. En outre, grâce à vous, je n'oublierai jamais que si un jour j'ai un problème quelconque, je pourrai toujours essayer d'utiliser le théorème du point fixe pour m'en sortir !

Je vais poursuivre les remerciements des personnes mathématiciennes, en remerciant celle par qui tout a sûrement commencé en intégrant le Magistère de mathématiques de Strasbourg, à savoir Claudine Mitchi. Vous avez su transmettre le goût des mathématiques avec beaucoup d'aisance. Je me souviens encore du jour où nous sommes allés faire un Td d'Algèbre dans le jardin botanique, par un magnifique temps ensoleillé, avec toute la promotion des magistériens.

Je souhaiterais désormais remercier les membres de l'équipe « Analyse » (anciennement « Équations fonctionnelles ») que j'ai eu la chance de côtoyer lors des différents séminaires et autres repas d'équipes au *Ganesha* de ces dernières années : Loïc, Daniel, Reinhard, Claudine, Charlotte, Viktoria, Nalini, Raphaël, Augustin, Martin, Gaël, Mostafa, Guillaume, Alix, ... et j'en oublie certainement d'autres auprès desquels je tiens à m'excuser !

Enfin, je voudrai dire merci à la famille des « feuilleteurs » et des « Painlevéistes » à laquelle je pense maintenant appartenir, et en particuliers à l'ANR Iso-Galois, pour toutes les belles choses qui ont été organisées durant ces trois années (en particuliers la conférence au Japon qui a été une expérience hors du commun) : je ne pourrai citer tout le monde, mais merci entre autres à Guy, Yohann, Arnaud, Thomas, Oleg, Emmanuel, etc. (sans compter ceux que j'ai déjà remercié plus haut !)

Merci également à tout le personnel de l'UFR de Math-Info et de l'IRMA, dont les membres que j'ai pu solliciter à de maintes reprises ont toujours fait preuve d'une efficacité redoutable appariée à une extrême gentillesse.

Je tiens à présent à dire merci à certains de mes professeurs de Math et Physique-Chimie du lycée ainsi que de la classe préparatoire pour avoir été de tels exemples de réussite et pour avoir susciter tant d'intérêt dans vos enseignements respectifs : Aline et Eric Schuler, ainsi que Thierry Schwarz et Patrick Führ.

Mes remerciements suivants vont à l'école doctorale MSII et plus particulièrement aux membres de son conseil qui m'ont beaucoup appris sur un aspect (administratif) que je ne connaissais pas, lors des diverses réunions auxquelles j'ai pu participer en tant que représentant des doctorants. Je tiens à dire que les nombreux séminaires ED et autres formations transversales laisseront en moi un grand vide.

Il est à présent temps de remercier mes collègues et autres amis doctorants (et assimilés) de l'UFR de Math-Info. Il va sans dire que je n'arriverai pas à remercier tout le monde ici, donc ne soyez pas déçus si votre prénom n'apparaît pas dans les lignes qui suivent !

Par qui commencer ? Question d'une importance capitale... Les grands ? Les petits ? Les drôles ? Les moins drôles ? J'évite le problème en commençant par un grand : MERCI TOUT LE MONDE!¹

Mais trêve de plaisanterie. Merci en premier lieu à ceux qui ont eu la chance de partager leur quotidien de doctorant à mes côtés ...euh pardon... merci à ceux qui m'ont donné la chance de partager mon quotidien de doctorant à leurs côtés (voilà qui est plus correct). Merci Flo, Nicolas, DJeremy et plus récemment Kien et Alexander. Tant de choses se sont passées dans ce bureau, et comme par hasard, surtout quand DJeremy était présent (ce n'était, étonnement, pas les heures les plus productives d'un point de vue mathématique). Ces moments de franche rigolade ont, je pense, été tout simplement indispensables au bon déroulement de cette thèse. Que serait la rédaction d'un article sans écouter un morceau d'un rappeur a « des photos d'tasses » avec un bon café du matin ?

1. ça, c'est fait...

Merci ensuite à tous les membres actifs (ou anciennement actifs) du groupe de travail happy hours : Djeremy, Flo (encore eux!), Claire, Steph, Elodie, Vince, Leila de Vince, Leila pas de Vince, Nico de Leila pas de Vince, Schatzi, Jeanne, Ranine, Patrick, Mohamad, Charlotte, Claire Fac, Philippe Fac, Nicolas Fac, Agathe, Guillaume, Guillaume (qui est qui ? attention, l'ordre est important), Elise (ceci n'est pas indice sur l'ordre précédent), Arthur, Olivier (doctorant de renommée internationale), Alicia, Romain, Emilie, Auguste (!!!), Pierre, Cécile, Gaël (et son Ricard à 3€50), Céline, et plus récemment Laura. Toutes ces soirées « détentes » (pour rester sobre et soft... quoique...) ont toujours été placées sous le signe de la bonne humeur et de la convivialité.

Merci à présents aux autres doctorants plus absents du groupe de travail précédent, mais qui ont été de joyeux camarades de BU, de pauses déjeuner, pauses café, soirées BBQ et autres soirées en tout genre : JVB, Marie-Lise, Lauriane, Antoine, Amandine, Audrey, Alix, Elena, JB, Romain, Clément, Thomas, Anderson, Anna ou encore Frédéric.

Le moment est venu de remercier mes amis non-doctorants, strasbourgeois ou non, mais qui ont été, tout au long de cette thèse et souvent depuis bien avant, des personnes très importantes dans ma vie, pour des raisons d'hiver² et variées. Tout d'abord, merci à Arnaud Youp, mon meilleur ami/confident/témoin, pour les nombreux déplacements strasbourgeois que tu as fait ces dernières années, et qui m'ont permis, notamment, de réussir à faire un score de 210 au bowling à force d'entraînements intensifs. Merci à Yvan et Kev-1 pour votre hébergement, lors de mes déplacements à Rennes, digne des plus grands palaces! Merci à mes « couples d'amis fans de chats » préférés : Marin, Nicouli, Chill et Popo. Merci à Marjo pour tout ce que tu as fait pour le mariage, qui a rendu la vie plus belle durant cette thèse (et notamment le super courrier mensuel!). Merci à Touktouk, Elo, Pink-Lady, Nico et Vince (encore lui...) pour les soirées jeux endiablés! Merci aux amis basketteurs de Suaps : Pegah, Gautier, Pejman, Melissa, Nico, Lala, Robin, Simon, Emilie et tous les autres! Merci à mes amis qui n'habitent plus à Strasbourg, mais que j'ai la chance de revoir lors de leurs visites à Strasbourg : Anouchka et Pierre. Merci à Flo et Max pour les soirées crêpes! Et enfin, merci aux amis internes (et assimilés) (et conjoint(e)s) pour votre bonne humeur et pour êtres des amis si importants au quotidien pour ma petite Alex : Jess, Rourou, Marie, FX, Mélanie, Quentin, Emna, Wael, Amélie, Rosa, Kiri, et les autres!

Arrive maintenant le moment « émotions » des remerciements : la famille! Je vais bien évidemment commencer par remercier mes parents, pas seulement pour leur accompagnement durant cette thèse, mais pour tout ce qu'ils ont fait depuis 27ans et qui fait que je suis qui je suis. Merci Papa et Maman! Merci aussi à mon frère Thibaut et ma belle-sœur Méné (et à Indy et Ivaka) pour les dimanches après-midis « jeux de société » et les réunions Thermomix du samedi matin! Merci à mes grands-mères, Mamema et Mamé, et à mes défunts grands-pères, Papepa et Papé, auxquels je dédie cette thèse, pour l'amour qu'ils m'ont tous donné depuis toujours. Merci plus généralement à toute ma famille, à mes oncles et tantes, cousins et cousines, pour les repas de familles toujours aussi agréables : merci aux familles Bittmann, Wehrel, Jung, Durst et Saun. Merci à ma belle-famille, qui est maintenant aussi ma famille, d'être aussi gentille et attentionnée, et de m'avoir accepté si facilement parmi vous. C'est un véritable honneur de vous compter à mes côtés, et je vous remercie pour tout ce que vous avez fait pour Alex et moi durant ces années : merci à Joconde, Serge, Francis, Laurette, Gabie, Nick, Laureen, Patrick, Thierry, Laurent, Audrey, Hector, et aux familles Vorburger, Koehler, Lopez (au sens (très) large!) et Frozio (au sens large également!).

Pour finir ces remerciements, je remercie du fond du cœur celle qui partage désormais ma vie, ma femme, mon amour : Alex. Ces années de thèses communes auront parfois été difficiles, mais

2. ou d'été

le plus beau est maintenant à venir. Tu as toujours été un modèle pour moi dans ta réussite, tu m'as toujours soutenu durant mes études, et maintenant le début de la suite de notre vie va commencer. Grâce à toi, j'ai appris à être quelqu'un de passionné par les animaux, avec Pacha, Raichu, Smoothie, Meiko et Arya : tous ces petits bouts de chou m'ont rendu et me rendent la vie bien meilleure ! Je suis fier de ce que nous avons accompli ensemble durant toutes ces années, et en particuliers d'avoir su organiser ce magnifique mariage malgré nos thèses inachevées. J'espère que rien ne changera, que les soirées « pop » et #ADLP continueront, et je te remercie encore une fois pour être la personne que tu es : je t'aime de tout mon cœur !

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	xi
Index des notations	xxiii
 I Classification formelle	 1
1 Résultats	3
1.1 Définitions	3
1.2 Classification formelle fibrée	4
1.3 Classification formelle (non-fibrée)	5
1.4 Classification formelle orbitale	6
 2 Champs de vecteurs formels	 9
2.1 Champs de vecteurs	9
2.2 Difféomorphismes	12
2.3 Exponentielle	15
2.4 Poincaré-Dulac	17
2.5 Formes différentielles	20
2.6 Structure symplectique transverse	22
 3 Classification formelle fibrée	 27
3.1 Existence d'une forme normale formelle (fibrée)	27
3.2 Unicité de la forme normale (fibrée) : preuve du théorème A	30
3.3 Isotropies fibrées formelles de la forme normale et classification fibrée : preuve du théorème B	34
 4 Classification formelle	 37
4.1 Classification par conjugaison	37
4.1.1 Forme normale formelle (non fibrée)	37
4.1.2 Unicité de la forme normale (non-fibrée) : preuve du théorème du théorème 1.8	39
4.1.3 Isotropies formelles de la forme normale (non-fibrée) et classification formelle	43
4.2 Classification orbitale	44
4.2.1 Forme normale formelle orbitale	44
4.2.2 Unicité de la forme formelle orbitale et classification orbitale : preuve du théorème 1.11	46

II	Normalisation sectorielle	51
5	Résultats	53
6	Développements asymptotiques	57
6.1	Germes	58
6.2	Sommabilité	62
6.2.1	Développements asymptotiques 1-Gevrey	62
6.2.2	Transformée de Borel et séries 1-Gevrey	63
6.2.3	Sommabilité directionnelle et sommation de Borel-Laplace	64
6.2.4	Théorème de Ramis-Sibuya et composition de séries 1-sommables	66
6.3	Faible 1-sommabilité	68
6.4	Faible 1-sommabilité <i>vs.</i> 1-sommabilité	70
6.5	Équations différentielles	72
7	Préparation 1-sommable	77
7.1	Normalisation analytique sur l'hypersurface invariante $\{x = 0\}$	78
7.1.1	Le cas transversalement symplectique	78
7.1.2	Cas général	79
7.2	Simplification sommable de la partie affine en les variables « dépendantes »	80
7.2.1	Lemmes techniques	81
7.2.2	Preuve de la proposition 7.9	84
7.3	Redressement 1-sommable de deux hypersurfaces invariantes	84
7.4	Normalisation sommable à l'ordre $O(x^N)$, $\forall N \geq 1$	91
7.5	Preuve de la proposition 7.1	95
8	Normalisation sectorielle	97
8.1	Preuve de l'existence de normalisations sectorielles : preuve de la proposition 8.1 . . .	99
8.2	Utilisation de l'équation homologique : preuve des propositions 8.3 et 8.5	100
8.3	Germes de difféomorphismes sectoriels : preuve du lemme 8.7	101
8.4	Résolution sectorielle de l'équation homologique : preuve du lemme 8.6	103
8.4.1	Domaines de stabilité et chemins asymptotiques	103
8.4.2	Construction d'une solution sectorielle à l'équation homologique	110
9	Unicité et faible 1-sommabilité	115
9.1	Unicité des normalisations sectorielles : isotropies de la forme normale dans de « grands » secteurs	115
9.2	Faible 1-sommabilité des normalisations sectorielles	118
9.3	Preuve du théorème 5.5	121
III	Classification analytique	123
10	Résultats	125
11	Classification fibrée et sommabilité	129
11.1	Un important résultat de réalisation de « cocycles » de Martinet-Ramis	129
11.2	Preuve du théorème 10.5 : 1-sommabilité de la normalisation sectorielle	131
11.3	Invariants analytiques : preuve des théorèmes 10.6 et 10.10	132
11.3.1	Preuve du théorème 10.6	133
11.3.2	Preuve du théorème 10.10	135

12 Isotropies Id–plates et espace des feuilles	137
12.1 Intégrales premières sectorielles et espace des feuilles	137
12.2 Isotropies sectorielles dans l'espace des feuilles	138
12.3 Action sur le monôme résonant dans l'espace des feuilles	141
12.4 Action sur le monôme résonant	143
12.5 Développement en séries des isotropies dans l'espace des feuilles	147
12.6 Preuve de la proposition	149
12.7 Description de l'espace des modules dans l'espace des feuilles	151
12.7.1 Une description en termes de séries entières de l'espace des modules . . .	151
12.7.2 Variétés invariantes analytiques et nœud-cols en dimension deux : invariants de Martinet-Ramis	152
12.7.3 Cas transversalement symplectique	153
13 Classification	155
13.1 Classification fibrée (non tangente à l'identité)	155
13.2 Classification analytique (non fibrée)	158
IV Applications aux équations de Painlevé	163
14 Équation de Painlevé (P_I)	165
14.1 La première équation de Painlevé	165
14.2 Symétries et compactification à poids	166
14.3 Nœud-col 2-résonant transversalement symplectique	167
15 Invariants formels	171
15.1 Périodes du hamiltonien sur $\{x = 0\}$	171
15.2 Exemple : le cas de la première équation de Painlevé	175
16 Phénomènes de Stokes quasi-linéaires	177
Perspectives	183
16.1 Généralisation de la classification formelle en dimension quelconque	183
16.2 Invariants de Stokes pour les équations de Painlevé	185
16.3 Version à paramètre et déploiement	185
16.4 Le cas non « div-intégrable »	185
Bibliographie	185

Introduction

On s'intéresse à des germes de champs de vecteurs holomorphes de $(\mathbb{C}^3, 0)$, possédant une singularité isolée à l'origine, qui peuvent s'écrire dans un système de coordonnées analytiques $(x, \mathbf{y}) := (x, y_1, y_2)$ adapté sous la forme

$$Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\lambda y_1 + F_1(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_1} + \left(\lambda y_2 + F_2(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_2} \quad , \quad (0.0.1)$$

où $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et F_1, F_2 sont des germes de fonctions analytiques s'annulant à l'ordre au moins 2 en l'origine. On peut également penser à un tel champ de vecteurs comme à un système différentiel bidimensionnel avec une singularité irrégulière en l'origine, et avec deux valeurs propres non-nulles opposées :

$$\begin{cases} x^2 \frac{dy_1(x)}{dx} = -\lambda y_1(x) + F_1(x, \mathbf{y}(x)) \\ x^2 \frac{dy_2(x)}{dx} = \lambda y_2(x) + F_2(x, \mathbf{y}(x)) \end{cases} \quad .$$

L'intérêt de l'étude de ces de champs de vecteurs est double.

1. Ils possèdent deux *relations de résonance* (*i.e.* des relations de dépendance à coefficients dans $\mathbb{N}$) *indépendantes* entre les valeurs propres (ici 0, $-\lambda$ et λ) : la présence du terme « x^2 » explique la dénomination *nœud-col*, et on généralise ainsi les champs de vecteurs étudiés dans [MR82]. Cette étude s'inscrit dans la démarche plus générale visant à comprendre les singularités de champs de vecteurs analytiques de $\mathbb{C}^3$. En effet, en utilisant un théorème de résolution des singularités des champs de vecteurs en dimension inférieure à 3 (*cf.* [MP⁺13]), on obtient une liste de modèles « finaux » pour ces singularités (dites *simples* ou *log-canoniques*). Parmi ces singularités finales obtenues en dimension 3, figurent en particulier des singularités 2-résonantes comme celles que nous étudions. En dimension 2, ces modèles finaux ont été systématiquement étudiés (notamment par Martinet, Ramis, Ecalle, Ilyashenko, ...) du point de vue de la classification formelle et analytique (même si plusieurs questions importantes restent encore sans réponse). En dimension 3, une telle étude systématique est encore largement ouverte et d'importantes nouvelles difficultés sont dues à l'existence de modèles finaux ayant deux relations de résonance indépendantes.
2. Il s'agit du type de champs de vecteurs singuliers qui apparaît à l'infini après compactification à poids de l'espace tridimensionnel des équations de Painlevé (P_j) , $j = I, \dots, V$, pour des valeurs génériques des paramètres (*cf.* [Yos85]). Les équations de Painlevé ont été découvertes par Paul Painlevé [Pai02] car elles possèdent la propriété remarquable que les singularités mobiles des solutions ne sont que des pôles : il n'y a pas de singularité mobile ramifiée ou essentielle. C'est ce qu'on appelle *la propriété de Painlevé*. Leur étude est devenue un domaine très riche de la recherche mathématique, en particulier depuis les importants travaux d'Okamoto [Oka77]. Beaucoup d'études ont été menées sur les singularités irrégulières fixes à l'infini de ces équations :

comportement asymptotique de type elliptique, solutions *tronquées* et *tri-tronquées*, *formules de connexion*, *phénomènes de Stokes quasi-linéaires* et *non-linéaires*, etc. nous renvoyons par exemple à la liste non-exhaustive suivante pour des travaux sur ces sujets [Bou13, JK92, Kap04, KK93, JK01, CM82, LL87, CHT14, CCH15, DGK09, BG08]. Bien que les coefficients de Stokes quasi-linéaires (obtenus par exemple par Kapaev pour (P_I) dans [Kap04]) soient des invariants analytiques, ils ne forment pas un ensemble complet d'invariants (pour la classification analytique).

Notre travail a donc pour objectif d'apporter des outils supplémentaires pour comprendre ces singularités irrégulières à l'infini des équations de Painlevé (d'un point de vue de classification analytique). Plus précisément, notre but est de donner une classification analytique d'une sous-famille des champs de vecteurs du type (0.0.1) (décrite plus loin, et dont font partie les équations de Painlevé), sous l'action de germes de changements de coordonnées analytiques fixant l'origine de $\mathbb{C}^3$. A notre connaissance, il n'existe pas de classification analytique générale pour ce type de champs de vecteurs 2-résonants. Martinet et Ramis ont permis de classier les champs 1-résonants de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dans [MR82, MR83]. Ces résultats ont ensuite été généralisés par Stolovitch dans [Sto96], qui a fourni une classification plus généralement pour les champs 1-résonants de $(\mathbb{C}^n, 0)$ en dimension quelconque.

Démarche générale

L'idée générale pour aboutir à un résultat de classification analytique est la suivante. On se base sur les travaux de Martinet-Ramis [MR82] et Stolovitch [Sto96]. Puisque deux champs de vecteurs analytiquement conjugués sont aussi formellement conjugués, la première étape est déjà de donner un résultat de classification formelle, *i.e.* sous l'action de changements de variables formels (sans tenir compte des questions de convergence). Pour ce faire, on exhibe dans chaque classe de conjugaison formelle un représentant privilégié, qui sera appelée *forme normale formelle*, noté Y_{norm} , qui sera un champ de vecteurs sous forme de *Poincaré-Dulac*. Plus précisément, on montre qu'il existe une unique transformation formelle qui conjugue un champ Y du type considéré à sa forme normale formelle : on la note $\hat{\Phi}$, et on l'appelle *la normalisation formelle* de Y . Dans un second temps, on prouve un théorème de normalisation sectorielle analogue à celui de Hikuhara-Kimura-Matuda [HKM61] pour les nœud-cols de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Le but est de recouvrir un voisinage de l'origine par deux domaines (qui seront sectoriels en la variable x), notés S_+ et S_- , suffisamment grands pour avoir unicité d'une normalisation sur chacun de ces domaines. On note alors Φ_+ (*resp.* Φ_-) *la normalisation sectorielle* du champ considéré associée au domaine S_+ (*resp.* S_-). Autrement dit, $\Phi_{\pm}$ est l'unique application holomorphe (et bornée) sur $S_{\pm}$ qui conjugue le champ Y à sa forme normale Y_{norm} (sur $S_{\pm}$). L'intersection $S_+ \cap S_-$ étant composée de deux composantes connexes notées S_{λ} et $S_{-\lambda}$, on étudie ensuite les applications de transitions, notées Φ_{λ} et $\Phi_{-\lambda}$, définies par

$$\begin{cases} \Phi_{\lambda} := \Phi_+ \circ (\Phi_-)^{-1}_{|S_{\lambda}} \\ \Phi_{-\lambda} := \Phi_- \circ (\Phi_+)^{-1}_{|S_{-\lambda}} \end{cases} .$$

Il s'agit, par construction, d'isotropies (sectorielles) de la forme normale Y_{norm} , *i.e.* $\Phi_{\pm\lambda}$ conjugue Y_{norm} à lui-même. Ces applications sectorielles Φ_{λ} et $\Phi_{-\lambda}$ seront appelées les **difféomorphismes de Stokes** du champ Y de départ. On montre enfin que $(\Phi_{\lambda}, \Phi_{-\lambda})$ est le bon invariant de classification analytique. Afin d'obtenir un résultat de « réalisation », une des étapes clés sera de prouver que les applications $(\Phi_{\lambda}, \Phi_{-\lambda})$ sont exponentiellement proches de l'identité. On arrivera enfin à prouver grâce à cela que la normalisation formelle $\hat{\Phi}$ est un fait 1-sommable (au sens de la sommation 1-Gevrey de Borel-Laplace), et que les normalisations sectorielles Φ_+ et Φ_- ne

sont rien d'autres que les 1-sommes de Borel-Laplace de $\hat{\Phi}$ sur les domaines sectoriels $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$ respectivement.

Quelques définitions usuelles

Quand nous parlerons de *difféomorphisme*, nous sous-entendrons un (germe de) difféomorphisme de $(\mathbb{C}^3, 0)$ (formel ou analytique) fixant l'origine. Nous dirons que deux champs de vecteurs (formels ou analytiques) Y et Y' sont (formellement ou analytiquement) *conjugués* s'il existe un difféomorphisme (formel ou analytique) ϕ tel que :

$$\phi_*(Y) = Y' \quad \left(\Longleftrightarrow \quad (D\phi \cdot Y) \circ \phi^{-1} = Y' \right) .$$

On dit que Y et Y' sont *orbitalement équivalents* (formellement ou analytiquement) s'il existe une série (formelle ou analytique en l'origine) $U(x, \mathbf{y})$ avec $U(0, \mathbf{0}) \neq 0$ telle que Y et $U.Y'$ soient conjugués. Dans ce cas, on dit aussi que les *feuilletages engendrés par* Y et Y' sont équivalents.

Si deux champs de vecteurs sont conjugués par un élément d'un groupe $\mathcal{G}$, on dira qu'ils sont $\mathcal{G}$ -*conjugués*. Nous dirons qu'un difféomorphisme ϕ (formel ou analytique) est *tangent à l'identité* si sa partie linéaire est l'identité, *i.e.* $D_0\phi = \text{Id}$. Nous dirons également qu'un difféomorphisme (formel ou analytique) ϕ est *fibré* (sous-entendu en la variable x) s'il est de la forme

$$\phi : (x, \mathbf{y}) \mapsto (x, \phi_1(x, \mathbf{y}), \phi_2(x, \mathbf{y})) .$$

On notera dorénavant $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ (*resp.* $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$) le groupe formé des difféomorphismes analytiques (*resp.* formels) fibrés et tangents à l'identité. Dans toute cette introduction, nous détaillerons seulement le cas de transformations fibrées et tangentes à l'identité pour plus de clarté et de concision.

(Des études plus générales où l'on considère l'action de difféomorphismes en toute généralités seront menées plus tard dans ce texte. Ce n'est cependant pas là que sont concentrés les difficultés principales.)

On dira qu'un champ de vecteurs X de $(\mathbb{C}^2, 0)$ (formel ou analytique) est *orbitalement linéaire* s'il est de la forme

$$X = U(\mathbf{y}) \left(\lambda_1 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) ,$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, et U une série (formelle ou analytique en l'origine) avec $U(0, 0) \neq 0$ (une telle série est dite *invertible* ou est aussi appelée *unité*). On dira que X est formellement / analytiquement *orbitalement linéarisable* s'il est formellement / analytiquement conjugué à un champ orbitalement linéaire.

Les objets étudiés : les nœud-cols 2-résonants

On dira qu'un champ de vecteur Y (formel ou analytique) est un **nœud-col 2-résonant diagonal** s'il est de la forme

$$Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\lambda y_1 + F_1(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_1} + \left(\lambda y_2 + F_2(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_2} , \quad (0.0.2)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et F_1, F_2 des séries (formelles ou analytiques en l'origine) d'ordre au moins 2. On peut également décrire la classe d'équivalence orbitale d'un nœud-col 2-résonant diagonal (*i.e.* la classe d'équivalence du feuilletage associé) de manière plus géométrique. Un champ de vecteur Y singulier de $(\mathbb{C}^3, 0)$ est orbitalement équivalent à un nœud-col 2-résonant diagonal si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\text{Spec}(D_0 Y) = \{0, -\lambda, \lambda\}$ avec $\lambda \neq 0$;
2. il existe un germe d'hypersurface irréductible holomorphe $\mathcal{H}_0 = \{S = 0\}$, transverse à l'espace propre E_0 (associée à la valeur propre nulle) en l'origine, et qui soit stable par le flot de Y ;
3. $\mathcal{L}_Y(S) = U.S^2$, où $\mathcal{L}_Y$ est la dérivée de Lie de Y et U est une unité.

Comme expliqué plus haut, on peut associer à un tel champ de vecteurs comme en (0.0.2) le système différentiel

$$x^2 \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \alpha(x) + \mathbf{A}(x) \mathbf{y}(x) + \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \quad , \quad (0.0.3)$$

où $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, et avec :

- $\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \end{pmatrix}$, et α_1, α_2 sont des séries (formelles ou analytiques en l'origine) d'ordre au moins 2 ;
- $\mathbf{A}(x) \in \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{C}[[x]])$ (ou $\mathbf{A}(x) \in \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{C}\{x\})$) et $\mathbf{A}(0) = \text{diag}(-\lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$;
- $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \mathbf{y}) \\ f_2(x, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$, avec f_1, f_2 des séries (formelles ou analytiques en l'origine) d'ordre au moins 2 par rapport à $\mathbf{y}$.

Avec ces notations, on peut définir le **résidu**, noté $\text{res}(Y)$, du champ Y de la façon suivante :

$$\text{res}(Y) := \text{Tr} \left(\frac{d\mathbf{A}(x)}{dx} \right)_{|x=0} .$$

On vérifie sans peine que $\text{res}(Y)$ est un invariant de la classe de conjugaison formelle de Y . Nous dirons qu'un champ Y comme ci-dessus est **non dégénéré** (*resp.* **strictement non dégénéré**) si $\text{res}(Y) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{\leq 0}$ (*resp.* si $\Re(\text{res}(Y)) > 0$). Enfin, nous dirons que Y est **div-intégrable** si la restriction $Y|_{\{x=0\}}$ est un champ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ orbitalement linéarisable. La dénomination « div » provient du fait que le champ de vecteurs possède un unique germe d'hypersurface analytique irréductible transverse à l'espace propre E_0 (correspondant à la valeur propre nulle) en l'origine, qui soit invariante par le flot du champ de vecteurs. Cette hypersurface sera appelé le **diviseur** du champ de vecteurs : dans nos coordonnées, ce diviseur est $\{x = 0\}$. La dénomination « intégrable » est due au fait que si la restriction $Y|_{\{x=0\}}$ est orbitalement linéarisable, alors le champ $Y|_{\{x=0\}}$ est explicitement intégrable. Il est à noter que si Y est analytique en l'origine, alors Y est analytiquement div-intégrable si et seulement s'il l'est formellement (d'après un résultat de Brjuno : *cf.* [Mar81]). On notera :

- $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}}$ l'ensemble de tous les nœud-cols 2-résonant diagonaux *formels* non dégénérés ;
- $\mathcal{SN}_{\text{diag,0}}$ l'ensemble de tous les nœud-cols 2-résonant diagonaux *analytiques* strictement non dégénérés et div-intégrable.

Équations de Painlevé : le cas transversalement symplectiques

Dans [Yos85] Yoshida montre qu'après compactification à poids de l'espace tridimensionnel des équations de Painlevé (P_j) , $j = I, \dots, V$, pour des valeurs génériques des paramètres, on

obtient, dans un système adapté de coordonnées, des nœud-cols 2-résonant diagonaux analytiques strictement non dégénérés et div-intégrables. En fait, ces champs de vecteurs possèdent une propriété supplémentaire, à savoir le fait d'être ce que nous appelons **transversalement hamiltoniens**. Pour définir cela, illustrons brièvement la situation par la première équation de Painlevé notée (P_I) (une étude plus détaillée sera effectuée en partie IV) :

$$(P_I) \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = 6z_1^2 + t \quad .$$

Comme on le sait depuis Okamoto [Oka80], (P_I) peut être vue comme un système hamiltonien bidimensionnel non-autonome :

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} = -\frac{\partial H_I}{\partial z_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} = \frac{\partial H_I}{\partial z_1} \end{cases}$$

avec le hamiltonien

$$H_I(t, z_1, z_2) := 2z_1^3 + tz_1 - \frac{z_2^2}{2}.$$

Plus précisément, en considérant la forme symplectique standard $\omega_{st} := dz_1 \wedge dz_2$ et le champ de vecteurs

$$Z_I := \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial H_I}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial H_I}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_2}$$

induit dans $(\mathbb{C}^3, 0)$, la dérivée de Lie

$$\mathcal{L}_{Z_I}(\omega_{st}) = \left(\frac{\partial^2 H_I}{\partial t \partial z_1} dz_1 + \frac{\partial^2 H_I}{\partial t \partial z_2} dz_2 \right) \wedge dt = dz_1 \wedge dt$$

appartient à l'idéal $\langle dt \rangle$ dans l'algèbre extérieure $\Omega^*(\mathbb{C}^3)$ des formes différentielles en les variables (t, z_1, z_2) . Autrement dit, pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$, le flot de Z_I au temps $(t_2 - t_1)$ agit comme un symplectomorphisme entre les fibres $\{t = t_1\}$ et $\{t = t_2\}$.

La compactification à poids proposée par Boutroux [Bou13] (voir également [Chi16]), basée sur des symétries de l'équation originale, définit une carte près de $\{t = \infty\}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} z_2 = u_2 x^{-\frac{3}{5}} \\ z_1 = u_1 x^{-\frac{2}{5}} \\ t = x^{-\frac{4}{5}} \end{cases} .$$

Le champ Z_I est transformé, modulo la translation $u_1 \mapsto v_1 := u_1 - \zeta$ avec $\zeta = \frac{i}{\sqrt{6}}$, en le champ de vecteurs

$$\tilde{V} = -\frac{5}{4x^{\frac{1}{5}}} V \quad (0.0.4)$$

où

$$V := x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{2\zeta}{5} x - \frac{4}{5} v_2 + \frac{2}{5} x v_1 \right) \frac{\partial}{\partial v_1} + \left(-\frac{48\zeta}{5} v_1 + \frac{3}{5} x v_2 - \frac{24}{5} v_1^2 \right) \frac{\partial}{\partial v_2} . \quad (0.0.5)$$

Ce champ de vecteurs possède deux valeurs propres opposées non-nulles, à savoir $\pm \lambda := \pm \frac{8\sqrt{3}\zeta}{5}$. Quitte à diagonaliser la partie linéaire du champ, on voit qu'on obtient exactement un nœud-col 2-résonant diagonal (strictement non dégénéré, car de résidu égal à 1, et div-intégrable). De plus, on a :

$$\begin{cases} dt &= -\frac{4}{5} 5^{\frac{4}{5}} x^{-\frac{9}{5}} dx \\ dz_1 \wedge dz_2 &= \frac{1}{x} (dv_1 \wedge dv_2) + \langle dx \rangle \end{cases} ,$$

où $\langle dx \rangle$ dénote l'idéal engendré par dx . On obtient alors :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_V \left(\frac{dv_1 \wedge dv_2}{x} \right) \in \langle dx \rangle \\ \mathcal{L}_V (dx) = 2x dx \end{cases} .$$

Cela motive la définition suivante. On considère la 1-forme

$$\omega := \frac{dy_1 \wedge dy_2}{x} .$$

On dira qu'un champ de vecteurs Y de $(\mathbb{C}^3, 0)$ (formel ou analytique) est **transversalement hamiltonien** (par rapport à ω et dx) si

$$\mathcal{L}_Y (dx) \in \langle dx \rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_Y (\omega) \in \langle dx \rangle .$$

On dira qu'un difféomorphisme (formel ou analytique) de $(\mathbb{C}^3, 0)$ est **transversalement symplectique** (par rapport à ω et dx) si

$$\Phi^* (x) = x \quad \text{et} \quad \Phi^* (\omega) = \omega + \langle dx \rangle .$$

(Ici $\Phi^* (\omega)$ dénote le *pull-back* de ω par Φ .)

On notera $\text{Diff}_\omega (\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ (*resp.* $\widehat{\text{Diff}}_\omega (\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$) le groupe des difféomorphismes analytiques (*resp.* formels) de $(\mathbb{C}^3, 0)$ transversalement symplectiques. Remarquons que le flot d'un champ transversalement hamiltonien X induit une application entre les fibres $\{x = x_1\}$ et $\{x = x_2\}$ qui envoie $\omega|_{x=x_1}$ sur $\omega|_{x=x_2}$, puisque

$$(\exp(X))^* (\omega) \in \omega + \langle dx \rangle .$$

On notera également $\mathcal{SN}_{\text{diag}, \omega}$ (*resp.* $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag}, \omega}$) l'ensemble des noeud-cols 2-résonant diagonaux transversalement hamiltoniens analytiques (*resp.* formels). Remarquons qu'un noeud-col 2-résonant diagonal transversalement hamiltonien est toujours à la fois strictement non dégénéré et div-intégrable.

Travaux et résultats connus

Dans [Yos84], Yoshida montre que les champs ainsi obtenus peuvent être conjugués à un champ du type

$$\begin{aligned} Z = & \quad x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(-(1 + \gamma y_1 y_2) + a_1 x \right) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + \left(1 + \gamma y_1 y_2 + a_2 x \right) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} , \end{aligned} \quad (0.0.6)$$

avec $\gamma \in \mathbb{C}^*$ et $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $a_1 + a_2 = 1$ (en fait $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ dans le cas des équations de Painlevé). Il est à noter que cette « *conjugaison* » ne correspond pas à ce que l'on appelle traditionnellement (en particulier dans ce texte) *conjugaison*, puisque la transformation de Yoshida $\Psi(x, \mathbf{y}) = (x, \psi_1(x, \mathbf{y}), \psi_2(x, \mathbf{y}))$ a la forme suivante :

$$\psi_i(x, \mathbf{y}) = y_i \left(1 + \sum_{\substack{(k_0, k_1, k_2) \in \mathbb{N}^3 \\ k_1 + k_2 \geq 1}} \frac{q_{i, \mathbf{k}}(x)}{x^{k_0}} y_1^{k_1 + k_0} y_2^{k_1 + k_0} \right) , \quad (0.0.7)$$

où chaque $q_{i,\mathbf{k}}$ est une série formelle, alors que x apparaît avec des exposants négatifs. Ce développement pourrait même ne pas être une série de Laurent. Il s'agit cependant du développement asymptotique le long de $\{x = 0\}$ d'une fonction analytique sur un domaine du type

$$\left\{ (x, \mathbf{z}) \in S \times \mathbf{D}(0, \mathbf{r}) \mid |z_1 z_2| < \nu |x| \right\}$$

où $\nu > 0$ est « petit », S est un secteur d'ouverture strictement plus petite que π en l'origine et $\mathbf{D}(0, \mathbf{r})$ est un polydisque. De plus, les $(q_{i,\mathbf{k}}(x))_{i,\mathbf{k}}$ sont en fait des séries formelles 1-Gevrey. L'inconvénient ici est que les transformations effectuées sont convergentes dans des domaines trop restreints pour que leur réunion recouvre un voisinage entier de l'origine dans $\mathbb{C}^3$. Une classification analytique *à la* Martinet-Ramis basée sur l'étude des difféomorphismes de Stokes est alors impossible en utilisant cette normalisation.

Plusieurs auteurs ont étudié le problème de la convergence de transformations formelles conjuguant un champ de vecteur du type (0.0.1) à une « forme normale ». Shimomura, améliorant un résultat d'Iwano [Iwa80], montre dans [Shi83] qu'un nœud-col 2-résonant diagonal analytique strictement non dégénéré Y , tel que $Y|_{\{x=0\}}$ soit linéaire, est conjugué (formellement et sur des domaines sectoriels) à un champ de la forme

$$x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

via un difféomorphisme dont les coefficients ont des développements asymptotiques quand $x \rightarrow 0$ dans des secteurs d'ouvertures $> \pi$.

Stolovitch a ensuite généralisé ce résultat en dimension quelconque dans [Sto96]. Plus précisément, du travail de Stolovitch résulte en fait une classification analytique de champs de vecteurs de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ correspondant à des systèmes différentiels à singularité irrégulière de $(\mathbb{C}^n, 0)$, sans hypothèse additionnelle sur les éventuelles résonances entre les valeurs propres (il y a néanmoins quelques hypothèses techniques correspondant à notre hypothèse de *stricte non-dégénérescence*). Tout comme Iwano et Shimomura, il a dû imposer d'autres conditions, parmi lesquelles le fait que la restriction $Y|_{\{x=0\}}$ du champ considéré à l'hypersurface invariante $\{x = 0\}$ soit un champ linéaire. Dans [BDM08], les auteurs obtiennent une « forme normale » 1-Gevrey sommable, bien que n'étant pas aussi simple que celle de Stolovitch et malheureusement pas unique *a priori*, mais valable pour une classe plus générale de champs de vecteurs ayant une valeur propre nulle. Toutefois, la même hypothèse concernant la restriction du champ à l'hypersurface $\{x = 0\}$ est demandée. Malheureusement, on sait depuis [Yos85] que cette dernière hypothèse n'est pas satisfaite dans le cas des équations de Painlevé (P_j) , $j = I, \dots, V$ ($\gamma \neq 0$ dans (0.0.6)).

En comparaison, nous imposons seulement au champ de vecteurs que sa restriction à $\{x = 0\}$ soit orbitalement linéarisable. Cette condition est quant à elle vérifiée dans le cas des équations de Painlevé mentionnées.

Plan et présentation des principaux résultats

Partie I : résultats de classification formelle

Les résultats présentés maintenant sont issus de [Bit16a], et sont établis dans la partie I de cette thèse.

Nous considérons des champs de vecteurs formels de type nœud-cols doublement résonants, avec l'hypothèse (générique) supplémentaire d'être **non dégénérés**. On étudie l'action par conjugaison du groupe des difféomorphismes formels (fixant l'origine) sur notre famille de champs de vecteurs. Le résultat principal de cette partie est celui de l'existence et de l'unicité d'une normalisation formelle.

Théorème A. *Soit $Y \in \widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}}$ un nœud-col doublement résonant diagonal non dégénéré (formel). Alors, il existe un unique difféomorphisme formel $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ fibré en x et tangent à l'identité tel que :*

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_*(Y) &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x + c_1(y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x + c_2(y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} , \\ &=: Y_{\text{norm}} \end{aligned} \quad (0.0.8)$$

où $\lambda \neq 0$, $c_1, c_2 \in v\mathbb{C}[[v]]$ sont des séries formelles en $v := y_1 y_2$, et $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ sont tels que $\text{res}(Y) = a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$.

Si Y est, de plus, div-intégrable, alors $c_1 + c_2 = 0$.

Si de plus Y est transversalement hamiltonien, alors $\text{res}(Y) = a_1 + a_2 = 1$, $c_1 + c_2 = 0$, et $\hat{\Phi}$ est transversalement symplectique, i.e. $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$.

Le champ de vecteurs Y_{norm} obtenu en (0.0.8) dans le théorème ci-dessus est appelé **forme normale formelle fibrée** de Y . L'application $\hat{\Phi}$ est appelée la **normalisation formelle** du champ Y .

La condition de *non-dégénérescence* est nécessaire pour obtenir un théorème fournissant des formes normales formelles fibrées (uniques) de la forme ci-dessus. Par exemple, pour tous $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tels que $a_1 + a_2 = -\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_{\leq 0}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, le champ de vecteurs

$$Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x + x^{p+1}(y_1 y_2)^q) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} ,$$

est un nœud-col 2-résonant diagonal avec pour résidu $\text{res}(Y) = -\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_{\leq 0}$: ce champ de vecteurs n'est pas $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ -conjugué à une forme normale fibrée de la forme (0.0.8). En effet, le terme résonant $x^{p+1}(y_1 y_2)^q$ ne peut pas être éliminé sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$.

Remarquons également que le résultat ci-dessus n'est pas une conséquence immédiate de la théorie des formes normales de Poincaré-Dulac. En fait, une forme normale de Poincaré-Dulac (au sens usuel) pourrait contenir d'autres termes résonants de la forme $(x^k (y_1 y_2)^l)_{k,l \in \mathbb{N}}$, et est donc loin d'être unique.

Introduisons les ensembles d'invariants formels $\mathcal{P}_{\text{fib}}$ et $\mathcal{P}_{\omega}$ suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{fib}} &:= \left\{ \mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c_1, c_2) \in \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^2 \setminus \Delta) \times (v\mathbb{C}[[v]])^2 \right\} \\ \mathcal{P}_{\omega} &:= \mathbb{C}^* \times \left\{ (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \mid a_1 + a_2 = 1 \right\} \times (v\mathbb{C}[[v]]) \end{aligned}$$

où

$$\Delta := \left\{ (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \mid a_1 + a_2 \in \mathbb{Q}_{\leq 0} \right\} .$$

On a alors le résultat de classification suivant :

Théorème B. *On a les bijections suivantes (les quotients sont effectués modulo l'action par conjugaison des groupes de difféomorphismes considérés) :*

1.

$$\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}} / \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) \simeq \mathcal{P}_{\text{fib}}$$

2.

$$\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag},\omega} / \widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) \simeq \mathcal{P}_{\omega}.$$

On donnera également d'autres résultats de classification formelle, où l'on étudiera les actions de difféomorphismes non nécessairement tangents à l'identité et / ou fibrés (cf. corollaires 1.10 et 1.13).

Partie II : résultats de normalisation sectorielle

Les résultats principaux de cette partie sont issus de [Bit16b], et sont présentés dans la partie II de cette thèse.

Nous donnons un résultat de mise sous forme normale dans des domaines sectoriels (avec ouverture angulaire suffisamment grande), pour des éléments de $\mathcal{SN}_{\text{diag},0}$, appelés plus tôt noeud-cols 2-résonant diagonaux analytiques strictement non dégénérés et div-intégrables (analytiques au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^3$). Par rapport à la forme normale formelle obtenue en (0.0.8), le fait pour un noeud-col doublement résonant diagonal Y d'être *strictement non dégénéré* correspond au fait que $\Re(\text{res}(Y)) > 0$. Le fait que Y soit *div-intégrable* correspond au fait que $c_2(v) = -c_1(v) =: c(v)$ et que $c(v)$ soit une série convergente au voisinage de l'origine.

On note également $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\theta,\eta}; \text{Id})$ le groupe des germes de difféomorphismes sectoriels fibrés et tangent à l'identité dans des domaines sectoriels de la forme $S(r, \theta - \frac{\eta}{2} - \epsilon, \theta + \frac{\eta}{2} + \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$, où $S(r, \theta - \frac{\eta}{2} - \epsilon, \theta + \frac{\eta}{2} + \epsilon)$ est un secteur ouvert de sommet l'origine, de bissectrice $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$ et d'ouverture $\eta + 2\epsilon$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\eta, \epsilon > 0$ tels que $\eta + 2\epsilon \leq 2\pi$. Nous aurons besoin de la notion de (faible) sommabilité de type 1-Gevrey, rappelée en début de partie II.

Théorème C. *Soit $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag},0}$, $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ sa normalisation formelle et Y_{norm} sa forme normale formelle (voir théorème A) :*

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_*(Y) &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x - c(y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x + c(y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ &=: Y_{\text{norm}}, \end{aligned}$$

où $\lambda \neq 0$, $c \in v\mathbb{C}[[v]]$ sont des séries formelles en $v := y_1 y_2$, et $\Re(a_1 + a_2) > 0$. Alors :

1. la forme normale Y_{norm} est analytique en l'origine (i.e. $c \in \mathbb{C}\{v\}$);
2. il existe un unique couple (Φ_+, Φ_-) de germes sectoriels de difféomorphismes fibrés, tangents à l'identité et analytiques sur des domaines sectoriels de la forme $S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et $S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)$ respectivement, où

$$\begin{aligned} S_+ &:= \left\{ x \in \mathbb{C} \mid 0 < |x| < r \text{ et } \left| \arg\left(\frac{x}{i\lambda}\right) \right| < \frac{\pi}{2} + \epsilon \right\} \\ S_- &:= \left\{ x \in \mathbb{C} \mid 0 < |x| < r \text{ et } \left| \arg\left(\frac{-x}{i\lambda}\right) \right| < \frac{\pi}{2} + \epsilon \right\} \end{aligned}$$

(pour tout $\epsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $r > 0$ assez petit), qui y conjuguent Y à Y_{norm} ;

3. la normalisation formelle $\hat{\Phi}$ est faiblement 1-sommable dans toute direction $\theta \neq \arg(\pm\lambda)$ et $\Phi_{\pm}$ est la 1-somme faible de $\hat{\Phi}$ sur $S_{\pm} \times (\mathbb{C}^2, 0)$; en particuliers, $\hat{\Phi}|_{\{x=0\}}$ est analytique.

4. si $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, \omega}$ est transversalement hamiltonien, alors Φ_+ et Φ_- sont transversalement symplectiques.

La principale difficulté dans ce résultat est de prouver l'existence des « **normalisations sectorielles** » $\Phi_{\pm}$. L'outil clé pour cela est un lemme de « résolution d'une *équation homologique* » associée au champ de vecteurs considéré sur des domaines sectoriels (cf. lemme 8.6), dont une solution est construite en intégrant une forme temps bien choisie le long de *chemins asymptotiques* (idées similaire à celles de [Tey03, Tey04b]).

Partie III : résultats de classification analytique

Les résultats principaux de cette partie sont issus de [Bit16c], et sont présentés dans la partie III de cette thèse.

Puisque deux champs de vecteurs analytiquement conjugués sont aussi formellement conjugués, on fixe une forme normale de $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ donnée par le théorème A :

$$Y_{\text{norm}} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x - c(v)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x + c(v)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} , \quad (0.0.9)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\Re(a_1 + a_2) > 0$ et $c(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$.

On définit $[Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$ comme l'ensemble des éléments de $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ qui sont $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ -conjugués à Y_{norm} . On note également $[Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}} / \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ l'ensemble des orbites de $[Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$ sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$. Considérons un élément $Y \in [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$, ainsi que ses normalisations sectorielles $\Phi_{\pm}$, données par le théorème C. Dans la construction faite de Φ_+ et Φ_- , on remarque que l'on peut étendre analytiquement $\Phi_{\pm}$ à des domaines de la forme $S_{\pm} \times (\mathbb{C}^2, 0)$, où $S_{\pm}$ est un secteur asymptotique de direction $\arg(\pm i\lambda)$ et d'ouverture 2π (voir définition 6.3). Considérons deux tels secteurs asymptotiques (S_+, S_-) et leurs intersections

$$S_{\pm\lambda} := S_+ \cap S_- \cap \left\{ x \in \mathbb{C} \mid \Re\left(\pm \frac{x}{\lambda}\right) > 0 \right\} .$$

On définit alors les deux germes de difféomorphismes sectoriels

$$\Phi_{\pm\lambda} := (\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1})|_{S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)} .$$

Par construction, il s'agit de germes d'isotropies (sectorielles) de Y_{norm} (i.e. Φ_{λ} et $\Phi_{-\lambda}$ vérifient $(\Phi_{\pm})_*(Y_{\text{norm}}) = Y_{\text{norm}}$), qui sont fibrées, tangentes à l'identité, et qui admettent l'identité comme développement asymptotiques 1-Gevrey faible dans des domaines $S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$, d'après le théorème C. Les deux germes d'isotropies sectorielles Φ_{λ} et $\Phi_{-\lambda}$ définis ci-dessus sont appelés **difféomorphismes de Stokes** de $Y \in [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$.

Avec les notations ci-dessus, on définit $\Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}})$ (resp. $\Lambda_{\pm\lambda}(Y_{\text{norm}})$) comme le groupes des germes d'isotropies sectorielles fibrées de Y_{norm} , tangentes à l'identité, et qui admettent l'identité comme développement asymptotiques 1-Gevrey **faible** (resp. au sens classique « classique ») dans des domaines de la forme $S_{\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$ (resp. $S_{-\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$), où $S_{\pm\lambda}$ est un secteur asymptotique de direction $\arg(\pm\lambda)$ et d'ouverture π .

La principale difficulté technique de cette partie est de prouver la proposition suivante.

Proposition D. *Soit Y_{norm} une forme normale de $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ comme ci-dessus. Tout élément $\psi \in \Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}})$ admet l'identité comme développement asymptotiques 1-Gevrey. Autrement dit, on a l'égalité :*

$$\Lambda_{\pm\lambda}(Y_{\text{norm}}) = \Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}}) .$$

Cette proposition va avoir plusieurs conséquences importantes. La première d'entre elles est le théorème suivant, qui nous dit que la normalisation sectorielle du théorème C est en fait 1-sommable quand le champ de départ est élément de $\mathcal{SN}_{\text{diag},0}$.

Théorème E. *Soient $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ avec $D_0 Y = \text{diag}(0, -\lambda, \lambda)$ et $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ la normalisation formelle associée (donnée par le théorème C). Alors, $\hat{\Phi}$ est 1-sommable dans toute direction $\theta \neq \arg(\pm\lambda) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et les normalisations sectorielles Φ_+, Φ_- du théorème C sont les 1-sommes de $\hat{\Phi}$ dans les directions $\arg(i\lambda), \arg(-i\lambda)$ respectivement.*

Le théorème ci-dessous est la seconde conséquence principale de la proposition D.

Théorème F. *L'application*

$$\begin{aligned} [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}} / \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) &\longrightarrow \Lambda_{\lambda}(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ Y &\longmapsto (\Phi_{\lambda}, \Phi_{-\lambda}) \end{aligned}$$

est bien définie et bijective.

Ce résultat signifie que les difféomorphismes de Stokes encodent entièrement la classe de Y dans le quotient $[Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}} / \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$.

En conséquence de ce théorème, on peut alors décrire l'espace de module de $\mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ sous l'action de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$, noté $\mathcal{M}_{\text{fib}, \text{Id}}$.

Corollaire G. *On a la bijection suivante :*

$$\mathcal{M}_{\text{fib}, \text{Id}} := \mathcal{SN}_{\text{diag},0} / \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) \simeq \{Y_{\text{norm}}, (\Phi_{\lambda}, \Phi_{-\lambda})\},$$

où :

- Y_{norm} décrit l'ensemble des formes normales avec paramètre $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, -c, c) \in \mathcal{P}_{\text{fib}}$,
- $(\Phi_{\lambda}, \Phi_{-\lambda})$ décrit $\Lambda_{\lambda}(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}})$.

On donnera également une version de ce résultat dans le cas « transversalement symplectique » (cf. théorème 10.10 et son corollaire 10.11), ainsi que des résultats analogues pour décrire plus généralement les actions de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ de $\text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0)$ (cf. théorèmes 13.4 et 13.11). De plus, on donnera une description « explicite » de l'espace des difféomorphismes de Stokes $\Lambda_{\lambda}(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}})$ en termes de séries entières dans « l'espace des feuilles » (cf. proposition 12.18). Celles-ci représenteront des automorphismes de l'espace des feuilles de la forme $\Psi_{\pm\lambda} = (\Psi_{1,\pm}, \Psi_{2,\pm})$, avec pour $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \Psi_{j,+}(h_1, h_2) &= h_j + \sum_{n \geq N(j,+)+1} \Psi_{j,+,n}(h_1 h_2) h_1^n \\ \Psi_{j,-}(h_1, h_2) &= h_j + \sum_{n \geq N(j,-)+1} \Psi_{j,-,n}(h_1 h_2) h_2^n, \end{aligned} \tag{0.0.10}$$

où

$$\begin{cases} N(1, +) := N(2, -) := 1 \\ N(1, -) := N(2, +) := -1 \end{cases},$$

et où $(\Psi_{j,\pm,n})_n$ est une suite de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, satisfaisant des conditions de contrôle de leur module (cf. sous-section 12.7.1).

Partie IV : applications à la première équation de Painlevé

Il s'agit du contenu de la partie IV de cette thèse. Nous donnons des exemples de calculs de certains de ces invariants pour la première équation de Painlevé (P_I) (des résultats analogues devraient pouvoir être donnés pour les équations (P_j), $j = II, \dots, V$).

Après diagonalisation transversalement symplectique de la partie linéaire du champ V obtenu en (0.0.5), on obtient le champ :

$$\begin{aligned} Y = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\lambda y_1 + \frac{1}{2} x y_1 + \frac{1}{25\lambda} x y_2 - \frac{\lambda}{96} x^2 - \frac{48}{25\lambda} \left(y_1 - \frac{2}{5\lambda} y_2 \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + \left(\lambda y_2 + \frac{1}{2} x y_2 + \frac{\lambda}{4} x y_1 - \frac{5\lambda^2}{192} x^2 - \frac{24}{5} \left(y_1 - \frac{2}{5\lambda} y_2 \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial y_2} . \end{aligned} \quad (0.0.11)$$

En se basant sur des calculs de périodes du hamiltonien associé à $Y|_{\{x=0\}}$, on est capable de calculer le développement de l'invariant $c(v)$. En étudiant les symétries du champ Y ci-dessus, et en utilisant les calculs des coefficients de Stokes quasi-linéaires faits par Kapaev dans [Kap04], on donnera également la valeur des coefficients constants de la représentation en série entière des difféomorphismes de Stokes du champ Y ci-dessus.

Proposition H. *Avec les notations du théorème 5.5, on a :*

$$— a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{8\sqrt{3}\zeta}{5} = \frac{4 \cdot 2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{5} e^{\frac{i\pi}{4}} \text{ et}$$

$$\begin{aligned} c(v) = & v + \left(\frac{47 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}}{96} e^{\frac{3i\pi}{4}} \right) v^2 \\ & + \left(-\frac{7717}{6912} i\sqrt{6} \right) v^3 + O(v^4) . \end{aligned}$$

— en notant $(\Psi_\lambda, \Psi_{-\lambda})$ les automorphismes de la forme (0.0.10) associés aux difféomorphismes de Stokes de Y , on a :

$$\Psi_{2,\lambda,0}(0) = i \cdot \Psi_{1,-\lambda,0}(0) = \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{3}{8}} 3^{\frac{1}{8}} .$$

Index des notations

Les variables et leurs domaines d'appartenance (les « multivariabiles » seront toujours notées en gras)

$\Im(x)$	la partie imaginaire de $x \in \mathbb{C}$.
$\Re(x)$	la partie réelle de $x \in \mathbb{C}$.
$\arg(x)$	l'argument de $x \in \mathbb{C}$ (dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).
$(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}^{n+1}$	$x \in \mathbb{C}$ est la variable <i>indépendante</i> , et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ est la variable <i>dépendante</i> .
$(\mathbb{C}^n, 0)$	un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^n$.
$v := y_1 y_2$	le monôme résonant.
ζ	$\zeta := \frac{i}{\sqrt{6}}$: un paramètre important dans l'équation de Painlevé (P_I) à l'infini.
$\lambda_{\pm\zeta}$	$\lambda_{\pm\zeta} = \frac{8\sqrt{-3(\pm\zeta)}}{5}$: les valeurs propres du champ à l'infini de (P_I) .
Δ	$\Delta := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \mid a_1 + a_2 \in \mathbb{Q}_{\leq 0}\}$
$\omega = \frac{dy_1 \wedge dy_2}{x}$	la forme symplectique transverse « à l'infini » dans les équations de Painlevé.
$\mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$	le polydisque centré en l'origine de $\mathbb{C}^n$, de « poly-rayon » $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$.
$S(r, \alpha, \beta)$	le secteur ouvert de sommet l'origine, de rayon $r > 0$ et délimités par les demi-droites $\mathbb{R}_+ \cdot e^{i\alpha}$ et $\mathbb{R}_+ \cdot e^{i\beta}$, avec $\alpha < \beta$.
$\mathcal{S}_{\theta, \eta}$	l'ensemble des $(x-)$ voisinages sectoriels attachés à l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$, de direction θ et d'ouverture η .
$\mathcal{AS}_{\theta, \eta}$	l'ensemble des secteurs asymptotiques à l'origine de $\mathbb{C}$ dans la direction θ et d'ouverture η .

$\mathcal{A}_{\theta,\delta}^\infty$	le secteur infini de direction θ et d'ouverture δ : $\{t \in \mathbb{C}^* \mid \arg(t) - \theta < \frac{\delta}{2}\}.$
$\Delta_{\theta,\delta,\rho}$	le domaine composé de la réunion $\mathcal{A}_{\theta,\delta} \cup D(0, \rho).$

Espaces fonctionnels

$\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$	l'algèbre des séries formelles en les variables x et $\mathbf{y}$.
$\langle f_1, \dots, f_m \rangle$	l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_m$ dans $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$.
$\mathfrak{m}$	l'idéal maximal de $\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$: c'est l'ensemble des séries formelles sans terme constant.
$\text{ord}(f)$	l'ordre de $f = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$; par définition $\text{ord}(f) = \min \{ \mathbf{k} \geq 0 \mid f_{\mathbf{k}} \neq 0\}.$
J_k	l'espace des k -jets : $J_k := \mathbb{C}[[\mathbf{x}]] / \mathfrak{m}^{k+1}$
$\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]^\times$	le groupe des éléments inversibles (=unités) de $\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$: c'est l'ensemble des séries formelles avec un terme constant non-nul.
$\mathbb{C}\{x, \mathbf{y}\}$	l'algèbre des séries convergentes au voisinage de $(0, \mathbf{0}) \in \mathbb{C}^{n+1}$; c'est aussi l'espace des germes en l'origine d'applications holomorphes en les variables x et $\mathbf{y}$.
$\mathbb{C}\{x, \mathbf{y}\}^\times$	le groupe des éléments inversibles (=unités) de $\mathbb{C}\{x, \mathbf{y}\}$: c'est l'ensemble des germes de fonctions holomorphes en $(0, \mathbf{0}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ non-nulles en l'origine.
$\mathcal{O}(\Omega)$	l'algèbre des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.
$\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$	l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels de $\mathbb{C}^n$ en l'origine : c'est aussi l'algèbre des dérivations de $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$.
$\text{Der}_k(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$	l'ensemble des champs de vecteurs d'ordre au moins $k \in \mathbb{N}$.
$\chi(\mathbb{C}^n, 0)$	l'algèbre de Lie des germes de champs de vecteurs holomorphes singuliers en l'origine de $\mathbb{C}^n$, <i>i.e.</i> d'ordre ≥ 1 .
$\hat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$	l'algèbre de Lie des germes de champs de vecteurs formels singuliers en l'origine de $\mathbb{C}^n$, <i>i.e.</i> d'ordre ≥ 1 .
$\hat{\chi}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$	l'ensemble des champs de vecteurs singuliers transversalement hamiltoniens. (<i>cf.</i> page xvi).

$\widehat{\Omega}^1(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ (ou $\widehat{\Omega}^1$)	le $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ -module des 1-formes formelles : c'est le dual en tant que $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ -module de $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$.
$\widehat{\Omega}^p(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ (ou $\widehat{\Omega}^p$)	le $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ -module des p -formes formelles : c'est la $p^{\text{ème}}$ puissance extérieure de $\widehat{\Omega}^1$.
$\widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ (ou $\widehat{\Omega}$)	l'algèbre extérieure des formes formelles de $\mathbb{C}^n$: c'est la somme directe infinie $\bigoplus_{p=0}^{+\infty} \widehat{\Omega}^p$.

Champs de vecteurs

$\mathcal{L}_Y(F)$	la dérivée de Lie de $F \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ par rapport au champ $Y \in \text{Der}(\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]])$.
$[X, Y]$	le crochet de Lie de deux champs de vecteurs (analytiques ou formels).
$\text{ord}(X)$	l'ordre du champ X : si $X = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors $\text{ord}(X) = \min_i \{\text{ord}(\alpha_i)\}$.
$\Phi_*(Y)$	le <i>push-forward</i> du champ de vecteurs (analytique ou formel) Y par le difféomorphisme (analytique ou formel) Φ : $\Phi_*(Y) = (D\Phi.Y) \circ \Phi^{-1}$.
$S(\lambda)$	le champ linéaire $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$.
$\mathcal{R}$	le champ bidimensionnel radial : $\mathcal{R} := y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$.
$\mathcal{C}$	le champ bidimensionnel tangentiel : $\mathcal{C} := -y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$.
$\Phi_X^t = \exp(tX)$	le flot du champ X (analytique ou formel) évalué au temps t .
T_H	$T_H : a \mapsto \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_a} \tau_Y$: l'application <i>période</i> d'un champ hamiltonien Y de $\mathbb{C}^2$ associé au hamiltonien H , avec γ_a un cycle générateur de l'homologie de la feuille $\{H = a\}$, et τ_{Y_0} une forme temps de Y , <i>i.e.</i> $\tau_Y \cdot Y = 1$.

Groupes de difféomorphismes

$\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$	le groupe des germes de difféomorphismes fixant l'origine de $\mathbb{C}^n$.
$\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0; \text{Id})$	le sous-groupe de $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ des éléments tangents à l'identité.
$\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$	le sous-groupe $\text{Diff}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ des éléments fibrés (en x), où $\mathbb{C}^{n+1} = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n\}$.
$\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0; \text{Id})$	le sous-groupe de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ des éléments tangents à l'identité.
$\text{Diff}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0)$	le sous-groupe de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ des éléments transversalement symplectiques (<i>cf.</i> page xvi).
$\text{Diff}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$	le sous-groupe de $\text{Diff}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0)$ des éléments tangents à l'identité.
$\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$	le groupe des difféomorphismes formels en l'origine de $\mathbb{C}^n$.
$\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0; \text{Id})$	le sous-groupe de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ des éléments tangents à l'identité.
$\mathcal{G}_{\text{Id}}^{(k)}$	le sous-groupe de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ des éléments tangents à l'identité à l'ordre $k \in \mathbb{N}$.
$\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$	le sous-groupe $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ des éléments fibrés (en x).
$\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0; \text{Id})$	le sous-groupe de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ des éléments tangents à l'identité.
$\widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0)$	le sous-groupe de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ des éléments transversalement symplectiques (<i>cf.</i> page xvi).
$\widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$	le sous-groupe de $\widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0)$ des éléments tangents à l'identité.
$\widehat{\text{Isot}}(Y)$	le groupe des isotopies formelles d'un champ $Y \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$: c'est l'ensemble des $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ tels que $\Phi_*(Y) = Y$.
$\widehat{\text{Isot}}_{\text{fib}}(Y)$	le sous-groupe des isotopies formelles fibrées d'un champ $Y \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$: c'est l'intersection $\widehat{\text{Isot}}(Y) \cap \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^n, 0)$.
$\mathcal{L}$	le groupe des transformations linéaire de $\mathbb{C}^3$ de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\mu_1 \mu_2 \neq 0$.

Germes d'applications sectorielles

$\mathcal{O}(\mathcal{S}_{\theta,\eta})$	l'algèbre des germes d'application holomorphes sectorielles dans la direction θ avec ouverture η .
$\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}; \text{Id})$	le groupe des difféomorphismes fibrés sectoriels sur $\mathcal{S}$ et tangent à l'identité.
$\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\theta,\eta}; \text{Id})$	le groupe des germes de difféomorphismes sectoriels fibrés dans la direction θ et avec ouverture η , tangents à l'identité.
$\text{Isot}_{\text{fib}}(Y; \mathcal{S}_{\theta,\eta}; \text{Id})$	le sous-groupe de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\theta,\eta}; \text{Id})$ formé des germes d'isotropies sectorielles de Y dans la direction θ et avec ouverture η .

Sommation de Borel-Laplace

$\mathcal{B}(\hat{f})$	la transformée de Borel (par rapport à x) de la série formelle $\hat{f} = \sum_k \hat{f}_k(\mathbf{y}) x^k$, définie par $\mathcal{B}(\hat{f})(t) = \sum_k \frac{\hat{f}_k(\mathbf{y})}{k!} t^k$.
$\tilde{\mathcal{B}}(\hat{f})$	une variante de la transformée de Borel pour des séries $\hat{f} = \sum_k \hat{f}_k(\mathbf{y}) x^k$: $\tilde{\mathcal{B}}(\hat{f})(t) = \sum_k \frac{\hat{f}_{k+1}(\mathbf{y})}{k!} t^k$.
$\mathcal{L}_\theta(g)$	la transformée de Laplace dans la direction θ d'une fonction g holomorphe et à croissance « contrôlée exponentiellement » dans un domaine approprié : $\mathcal{L}_\theta(g)(x, \mathbf{y}) := \int_{e^{i\theta}\mathbb{R}_{>0}} g(t, \mathbf{y}) \exp\left(-\frac{t}{x}\right) \frac{dt}{x}.$
$\tilde{\mathcal{L}}_\theta(g)$	une variante de la transformée de Laplace dans la direction θ : $\tilde{\mathcal{L}}_\theta(g)(x, \mathbf{y}) := \int_{e^{i\theta}\mathbb{R}_{>0}} g(t, \mathbf{y}) \exp\left(-\frac{t}{x}\right) dt.$
f_θ	la somme (1-Gevrey) dans la direction θ de la série (éventuellement vectorielle) formelle 1-sommable $\hat{f}$: $f_\theta = \mathcal{L}_\theta(\mathcal{B}(\hat{f})).$
$\ \hat{f}\ _{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}$	norme sur l'espace des séries formelles 1-sommables dans la direction θ avec paramètre de croissance $\lambda > 0$: $\ \hat{f}\ _{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}} := \sup_{(t,\mathbf{y}) \in \Delta_{\theta,\delta,\rho} \times \mathbf{D}(\mathbf{0},\mathbf{r})} \left \mathcal{B}(\hat{f})(t, \mathbf{y}) \exp(-\lambda t) \right .$

$\ \hat{f}\ _{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}}$	variante d'une norme sur l'espace des séries formelles 1-sommables dans la direction θ avec paramètre de croissance $\lambda > 0$: $\ \hat{f}\ _{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}} := \sup_{(t,\mathbf{y}) \in \Delta_{\theta,\delta,\rho} \times \mathbf{D}(\mathbf{0},\mathbf{r})} \left \mathcal{B}(\hat{f})(t,\mathbf{y})(1 + \lambda t^2) \exp(-\lambda t) \right .$
Σ_θ	l'algèbre différentielle des séries formelles 1-sommables dans la direction $\theta \in \mathbb{R}$.
$\Sigma_\theta^{(\text{faible})}$	l'algèbre différentielle des séries formelles faiblement 1-sommables dans la direction $\theta \in \mathbb{R}$.

Nœud-cols 2-résonants

$\text{res}(Y) := a$	le résidu d'un nœud-col 2-résonant orbital : $a := a_1 + a_2$.
$\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag}}$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants diagonaux (formels).
$\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}}$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants diagonaux non dégénérés (formels), <i>i.e.</i> avec résidu $\text{res}(Y) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$.
$\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{fib,nd}}$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants fibrés non dégénérés (formels), <i>i.e.</i> $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{fib,nd}} = \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)_* \left(\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}} \right)$.
$\widehat{\mathcal{SN}}_*$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants non dégénérés div-intégrables (formels).
$\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{orb},*}$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants orbitaux non dégénérés div-intégrables (formels).
$\widehat{\mathcal{SN}}_\omega$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants transversalement hamiltoniens (formels).
$\mathcal{SN}_{\text{diag}}$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants diagonaux (analytiques).
$\mathcal{SN}_{\text{diag,nd}}$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants diagonaux non dégénérés (analytiques), <i>i.e.</i> avec résidu $\text{res}(Y) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$.
$\mathcal{SN}_{\text{diag},0}$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants diagonaux strictement non dégénérés (<i>i.e.</i> avec $\Re(\text{res}(Y)) > 0$) et div-intégrables (analytiques).
$\mathcal{SN}_{\text{diag},\omega}$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants diagonaux transversalement hamiltoniens (analytiques).

$\mathcal{SN}_{\text{fib},0}$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants fibrés strictement non dégénérés (<i>i.e.</i> avec $\Re(\text{res}(Y)) > 0$) et div-intégrables (analytiques) : $\mathcal{SN}_{\text{fib},0} := \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)_* (\mathcal{SN}_{\text{diag},0})$.
$\mathcal{SN}_{\text{Id},0}$	$\mathcal{SN}_{\text{Id},0} := \text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})_* (\mathcal{SN}_{\text{diag},0})$.
$\mathcal{SN}_0$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants strictement non dégénérés (<i>i.e.</i> avec $\Re(\text{res}(Y)) > 0$) div-intégrables (analytiques) : $\mathcal{SN}_0 := \text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0)_* (\mathcal{SN}_{\text{diag},0})$.
$\mathcal{SN}_\omega$	l'ensemble des nœud-cols 2-résonants transversalement hamiltoniens (analytiques) : $\mathcal{SN}_\omega := \text{Diff}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)_* (\mathcal{SN}_{\text{diag},\omega})$.
$[Y_{\text{norm}}]_{\text{fib},\text{Id}}$	l'ensemble des éléments de $\mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ qui sont $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ –conjugués à $Y_{\text{norm}} \in \mathcal{SN}_{\text{diag},0}$.
$[Y_{\text{norm}}]_{\omega,\text{Id}}$	l'ensemble des éléments de $\mathcal{SN}_\omega$ qui sont $\widehat{\text{Diff}}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$ –conjugués à $Y_{\text{norm}} \in \mathcal{SN}_{\text{diag},\omega}$.

Ensembles de paramètres des classifications formelles

$\mathcal{P}_{\text{fib}}$	$\mathcal{P}_{\text{fib}} := \left\{ \mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c_1, c_2) \in \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^2 \setminus \Delta) \times (v\mathbb{C}[[v]])^2 \right\}$
$\mathcal{P}_\omega$	$\mathcal{P}_\omega := \left\{ \mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c) \in \mathbb{C}^* \times \{(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \mid a_1 + a_2 = 1\} \times (v\mathbb{C}[[v]]) \right\}$
$\mathcal{P}_0$	$\mathcal{P}_0 := \{ \mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, -c, c) \in \mathcal{P}_{\text{fib}} \mid \Re(a_1 + a_2) > 0 \text{ et } c(v) \in v\mathbb{C}\{v\} \}$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P} := \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c) \in \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^2 \setminus \Delta) \times (v\mathbb{C}[[v]]) \text{ tel que :} \\ \text{si } m := \frac{1}{a_1 + a_2} \in \mathbb{N} \text{ et si } k_0 := \text{ord}(c), \text{ alors } c_{k_0+m} = 0 \end{array} \right\}$
$\mathcal{P}_{\text{orb}}$	$\mathcal{P}_{\text{orb}} := \left\{ \mathbf{p} = (a_1, a_2, \eta) \in (\mathbb{C}^2 \setminus \Delta) \times \{0, 1\} \mid \begin{array}{l} \text{si } m := \frac{1}{a_1 + a_2} \notin \mathbb{N}, \\ \text{alors } \eta = 0 \end{array} \right\}$

Applications de normalisation et difféomorphismes de Stokes

$\hat{\Phi}$	L'unique normalisation formelle (fibrée et tangente à l'identité) d'un élément de $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{nd}}$.
$\Phi_{\pm}$	L'unique germe de normalisation sectorielle (fibrée et tangente à l'identité) sur $\mathcal{S}_{\pm} \in \mathcal{S}_{\arg(\pm i\lambda), \pi}$ d'un élément $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ avec $D_0 Y = \text{diag}(0, -\lambda, \lambda)$.
$(\Phi_{\lambda}, \Phi_{-\lambda})$	Les difféomorphismes de Stokes d'un élément $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ avec $D_0 Y = \text{diag}(0, -\lambda, \lambda)$.
$\Lambda_{\pm\lambda}(Y_{\text{norm}})$	Le groupes des germes d'isotropies sectorielles fibrées de Y_{norm} , tangentes à l'identité, et qui admettent l'identité comme développement asymptotiques 1-Gevrey, dans des domaines de la forme $S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$, avec $S_{\pm\lambda} \in \mathcal{AS}_{\arg(\pm\lambda), \pi}$.
$\Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}})$	Le groupes des germes d'isotropies sectorielles fibrées de Y_{norm} , tangentes à l'identité, et qui admettent l'identité comme développement asymptotiques 1-Gevrey faible, dans des domaines de la forme $S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$, avec $S_{\pm\lambda} \in \mathcal{AS}_{\arg(\pm\lambda), \pi}$.

Espaces des feuilles

m	$m := \frac{1}{a} = \frac{1}{\text{res}(Y_{\text{norm}})}$.
$\tilde{c}(v)$	$\tilde{c}(v) := m \sum_{k \neq m} \frac{c_k}{k-m} v^k$, si $c(v) = \sum_{k \geq 1} c_k v^k$.
$f_1(x, w)$ (à partir de la partie III)	$f_1(x, w) := \exp\left(\frac{\lambda}{x} - c_m w^m \log(x) - \frac{\tilde{c}(wx^a)}{x}\right) x^{a_1}$
$f_2(x, w)$ (à partir de la partie III)	$f_2(x, w) := \exp\left(-\frac{\lambda}{x} + c_m(w)^m \log(x) + \frac{\tilde{c}(wx^a)}{x}\right) x^{a_2}$
$w(x, \mathbf{y})$	$w(x, \mathbf{y}) := \frac{y_1 y_2}{x^a}$: une intégrale première de $Y_{\text{norm}} \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$
$h_1(x, \mathbf{y})$ (à partir de la partie III)	$h_1(x, \mathbf{y}) := \frac{y_1}{f_1(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})}$: une intégrale première (sectorielle) de $Y_{\text{norm}} \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$.
$h_2(x, \mathbf{y})$ (à partir de la partie III)	$h_2(x, \mathbf{y}) := \frac{y_1}{f_2(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})}$: une intégrale première (sectorielle) de $Y_{\text{norm}} \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$.

$\mathcal{H}_{\pm}$	l'application donnant les intégrales premières h_1 et h_2 sur un domaine sectoriel $S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$: $\mathcal{H}_{\pm}(x, \mathbf{y}) := (x, h_1(x, \mathbf{y}), h_2(x, \mathbf{y}))$.
$\Gamma_{\pm\lambda}$	l'espace des feuilles associé au secteur $S_{\pm\lambda}$, noté $\Gamma_{\pm\lambda}$, est défini par : la relation $\mathcal{H}_{\pm}(S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)) =: S_{\pm\lambda} \times \Gamma_{\pm\lambda}$.
$\Gamma_{\pm\lambda}(x, \tilde{\mathbf{r}})$	$\Gamma_{\pm\lambda}(x, \tilde{\mathbf{r}}) :=$ $\left\{ (h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } h_j \leq \frac{\tilde{r}_j}{ f_j(x, h_1 h_2) } , j \in \{1, 2\} \right\}$.
$\Gamma_{\pm\lambda}(\tilde{\mathbf{r}})$	$\Gamma_{\pm\lambda}(\tilde{\mathbf{r}}) := \bigcup_{x \in S_{\pm\lambda}} \Gamma_{\pm\lambda}(x, \tilde{\mathbf{r}})$.
$\mathcal{E}_{j,\pm}(Y_{\text{norm}})$	le sous-ensemble de $\mathcal{O}(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ décrit dans la définition 12.17.

Espaces des modules

$\mathcal{M}_{\text{fib}, \text{Id}}$	l'espace des modules de $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ sous l'action de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ par conjugaison.
$\mathcal{M}_{\text{fib}}$	l'espace des modules de $\mathcal{SN}_{\text{fib}, 0}$ sous l'action de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ par conjugaison.
$\mathcal{M}_{\text{Id}}$	l'espace des modules de $\mathcal{SN}_{\text{Id}, 0}$ sous l'action de $\text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ par conjugaison.
$\mathcal{M}_{\omega}$	l'espace des modules de $\mathcal{SN}_{\omega}$ sous l'action de $\text{Diff}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0)$.
$\mathcal{M}$	l'espace des modules de $\mathcal{SN}_0$ sous l'action de $\text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0)$ par conjugaison.

Première partie

Classification formelle des nœud-cols 2-résonants non dégénérés

Chapitre 1

Présentation des résultats

Dans cette première partie nous allons étudier le problème de la classification formelle des noeud-cols 2-résonants de $(\mathbb{C}^3, 0)$. Toutes les notions nécessaires sur les champs de vecteurs formels et les difféomorphismes formels se trouvent dans le chapitre 2. Les résultats principaux sont issus de [Bit16a].

1.1 Définitions

Commençons par quelques définitions et notations.

Définition 1.1. Soit $Y \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$ un champ de vecteurs singulier.

— Y est un **noeud-col 2-résonant diagonal** si Y est de la forme :

$$Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda y_1 + F_1(x, y_1, y_2)) \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda y_2 + F_2(x, y_1, y_2)) \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad (1.1.1)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et $F_\nu(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ d'ordre au moins 2, pour $\nu = 1, 2$. On note $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag}}$ l'ensemble de ces champs de vecteurs.

— Le **résidu** de Y comme en (1.1.1) est :

$$\text{res}(Y) := F_{1,(1,1,0)} + F_{2,(1,0,1)},$$

où l'on a écrit $F_\nu = \sum_{\mathbf{k}=(k_0,k_1,k_2)} F_{\nu,\mathbf{k}} x^{k_0} y_1^{k_1} y_2^{k_2}$, pour $\nu = 1, 2$.

- Un noeud-col 2-résonant diagonal Y est **non dégénéré** si $\text{res}(Y) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{\leq 0}$. On note $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}}$ l'ensemble des noeud-cols 2-résonants diagonaux non dégénérés.
- Un noeud-col 2-résonant diagonal Y est **div-intégrable** (par rapport à x) si son diviseur $\{x=0\}$ est invariant par le flot de Y et si $Y|_{\{x=0\}}$ est *orbitalement linéarisable*. Si $Y \in \widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag}}$, ceci équivaut à dire que $Y|_{\{x=0\}}$ est un champ hamiltonien (par rapport à la forme symplectique standard $dy_1 \wedge dy_2$), ou encore intégrable.

Il est important de noter que le résidu d'un champ $Y \in \widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag}}$, ainsi que le fait d'être div-intégrable, sont invariants sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0) \ltimes \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]^\times$ par équivalence orbitale. On peut donc donner les définitions suivantes :

Définition 1.2. Soit $Y \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$ un champ de vecteurs singulier.

- Y est un **nœud-col 2-résonant fibré (non dégénéré, resp. div-intégrable)** si Y est $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ –conjugué à un élément de $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag}}$ (non dégénéré, resp. div-intégrable).
On note

$$\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{fib,nd}} := \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)_* \left(\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}} \right) .$$

- Y est un **nœud-col 2-résonant (non dégénéré, resp. div-intégrable)** si Y est $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ –conjugué à un élément de $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag}}$ (non dégénéré, resp. div-intégrable).
- Y est un **nœud-col 2-résonant orbital (non dégénéré, resp. div-intégrable)** si Y est *orbitalement équivalent* à un élément de $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag}}$ (non dégénéré, resp. div-intégrable).

On note $\widehat{\mathcal{SN}}_*$ (resp. $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{orb},*}$) l'ensemble des nœud-cols 2-résonants (resp. nœud-cols 2-résonants orbitaux) non dégénérés et div-intégrables.

Venons-en à la dernière définition dont nous aurons besoin ici.

Définition 1.3. — Un champ de vecteurs $Y \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$ est **transversalement hamiltonien** (par rapport à x et $\omega = \frac{dy_1 \wedge dy_2}{x}$) si $\mathcal{L}_Y(dx) \in \langle dx \rangle$ et $\mathcal{L}_Y(\omega) \in \langle dx \rangle$ ($\mathcal{L}_Y$ désigne la dérivée de Lie associée à Y).

- Un difféomorphisme $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ est **transversalement symplectique** (par rapport à x et $\omega = \frac{dy_1 \wedge dy_2}{x}$) si $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ et $\Phi^*(\omega) \in \omega + \langle dx \rangle$. On note $\widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0)$ le groupe formé de ces éléments.
- On note $\widehat{\mathcal{SN}}_{\omega}$ l'ensemble des champs de vecteurs transversalement hamiltoniens qui sont $\widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0)$ –conjugés à des éléments de $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag}}$.

Remarque 1.4.

1. Il est à noter que les éléments de $\widehat{\mathcal{SN}}_{\omega}$ sont nécessairement à la fois non dégénérés (car de résidu égal à 1 : cf. corollaire 2.52) et div-intégrables.
2. Les groupes $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$, $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$, $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ et $\widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0)$ agissent respectivement sur $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}}$, $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{fib,nd}}$, $\widehat{\mathcal{SN}}_*$ et $\widehat{\mathcal{SN}}_{\omega}$ par conjugaison.
3. Le groupe $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0) \ltimes \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]^{\times}$ agit sur $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{orb},*}$ par équivalence orbitale.

Le but de cette partie est de décrire complètement l'espace des orbites pour chacune de ces actions.

1.2 Classification formelle fibrée

Dans le chapitre 3, nous effectuerons la classification de $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}}$ (resp. $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{fib,nd}}$, $\widehat{\mathcal{SN}}_{\omega}$) sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ (resp. $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$, $\widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0)$) par conjugaison.

Théorème 1.5. (Théorème A) Soit $Y \in \widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}}$ un nœud-col 2-résonant non dégénéré diagonal tel que $DY_0 = \text{diag}(0, -\lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors, il existe un unique difféomorphisme fibré $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ tangent à l'identité tel que :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_*(Y) &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x + c_1(y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x + c_2(y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ &=: Y_{\text{norm}} , \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

où c_1, c_2 dans $\langle v \rangle = v\mathbb{C}[[v]]$ sont deux séries formelles sans terme constant et $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ sont tels que $\text{res}(Y) = a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$.

Si de plus Y est div-intégrable, alors $c_1 + c_2 = 0$.

Si de plus Y est transversalement hamiltonien, alors $\text{res}(Y) = a_1 + a_2 = 1$, $c_1 + c_2 = 0$, et $\hat{\Phi}$ est transversalement symplectique, i.e. $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$.

Donnons des conséquences immédiates de ce théorème. Introduisons les ensembles d'invariants formels $\mathcal{P}_{\text{fib}}$ et $\mathcal{P}_\omega$ suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{fib}} &:= \left\{ \mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c_1, c_2) \in \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^2 \setminus \Delta) \times (v\mathbb{C}[[v]])^2 \right\} \\ \mathcal{P}_\omega &:= \mathbb{C}^* \times \{(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \mid a_1 + a_2 = 1\} \times (v\mathbb{C}[[v]])\end{aligned}$$

où

$$\Delta := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \mid a_1 + a_2 \in \mathbb{Q}_{\leq 0}\}.$$

Définition 1.6. Le champ de vecteurs Y_{norm} dans (1.2.1) est appelé **forme normale (formelle) fibrée** (*resp.* **symplectique**) de $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}}$ (*resp.* de $\widehat{\mathcal{SN}}_\omega$), de paramètre $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c_1, c_2) \in \mathcal{P}_{\text{fib}}$ (*resp.* $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c) \in \mathcal{P}_\omega$, si $c_2 = -c_1 = c$).

$\mathcal{P}_\omega$ est vu comme le sous-ensemble de $\mathcal{P}_{\text{fib}}$ formé des paramètres $\mathbf{p}$ avec $a_1 + a_2 = 1$ et $c_2 = -c_1 = c$. On munit $\mathcal{P}_{\text{fib}}$ de l'action par $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ suivante : pour $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c_1, c_2) \in \mathcal{P}_{\text{fib}}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\epsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\lambda, a_1, a_2, c_1, c_2) &= (\lambda, a_1, a_2, c_1 \circ \varphi_\alpha, c_2 \circ \varphi_\alpha) \\ \epsilon \cdot (\lambda, a_1, a_2, c_1, c_2) &= \begin{cases} (\lambda, a_1, a_2, c_1, c_2) & , \text{ si } \epsilon = 0 \\ (-\lambda, a_2, a_1, c_2, c_1) & , \text{ si } \epsilon = 1 \end{cases},\end{aligned}$$

où φ_α est l'homothétie $v \mapsto \alpha v$. On notera l'espace des orbites sous cette action $\mathcal{P}_{\text{fib}} / (\mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. En élargissant l'action par conjugaison par des difféomorphismes fibrés non-nécessairement tangents à l'identité, on obtient la résultat de classification suivant.

Théorème 1.7. *On a les bijections suivantes (les quotients sont effectués modulo action par conjugaison des groupes de difféomorphismes considérés) :*

1.

$$\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}} / \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) \simeq \mathcal{P}_{\text{fib}}$$

2.

$$\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{fib,nd}} / \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0) \simeq \mathcal{P}_{\text{fib}} / (\mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

3.

$$\widehat{\mathcal{SN}}_\omega / \widehat{\text{Diff}}_\omega(\mathbb{C}^3, 0) \simeq \mathcal{P}_\omega$$

Les points 1. et 3. sont donnés par le théorème B.

1.3 Classification formelle (non-fibrée)

Nous nous intéresserons ensuite, dans le chapitre 4, à la classification de $\widehat{\mathcal{SN}}_*$ sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ par conjugaison.

Théorème 1.8. *Soit $Y \in \widehat{\mathcal{SN}}_*$ un nœud-col 2-résonant non dégénéré et div-intégrable. Alors, Y est formellement conjugué à un champ de la forme :*

$$\begin{aligned}Y_{\text{norm}} &:= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda - c(y_1 y_2) + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &\quad + (\lambda + c(y_1 y_2) + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2},\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

où :

- $\lambda \in \mathbb{C}^*$
- $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ sont tels que $\text{res}(Y) = a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$
- $c(v) = \sum_{k \geq 1} c_k v^k \in v\mathbb{C}[[v]]$ est tel que si $m := \frac{1}{a_1 + a_2} \in \mathbb{N}$, et si l'on note $k_0 := \text{ord}(c)$, alors $c_{k_0+m} = 0$.

De plus, deux champs Y_{norm} et Y'_{norm} comme ci-dessus, avec pour paramètres (λ, a_1, a_2, c) et $(\lambda', a'_1, a'_2, c')$ respectivement, sont formellement conjugués si et seulement s'il existe une homothétie $\varphi_\alpha : v \mapsto \alpha v$ de rapport $\alpha \in \mathbb{C}^*$ telle que :

$$\begin{aligned} (\lambda, a_1, a_2, c) &= (\lambda', a'_1, a'_2, c' \circ \varphi_\alpha) \\ \text{ou} \quad (\lambda, a_1, a_2, c) &= (-\lambda', a'_2, a'_1, -c' \circ \varphi_\alpha) \end{aligned} .$$

Définissons donc l'ensemble $\mathcal{P}$ suivant :

$$\mathcal{P} := \left\{ \mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c) \in \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^2 \setminus \Delta) \times (v\mathbb{C}[[v]]) \left| \begin{array}{l} \text{si } m := \frac{1}{a_1 + a_2} \in \mathbb{N} \text{ et si} \\ k_0 := \text{ord}(c), \text{ alors } c_{k_0+m} = 0 \end{array} \right. \right\}$$

que l'on munit de l'action de $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ suivante : pour $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c) \in \mathcal{P}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\epsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\lambda, a_1, a_2, c) &= (\lambda, a_1, a_2, c \circ \varphi_\alpha) \\ \epsilon \cdot (\lambda, a_1, a_2, c) &= \begin{cases} (\lambda, a_1, a_2, c) & , \text{ si } \epsilon = 0 \\ (-\lambda, a_2, a_1, -c) & , \text{ si } \epsilon = 1 \end{cases} , \end{aligned}$$

où φ_α est l'homothétie $v \mapsto \alpha v$. On notera l'espace des orbites sous cette action $\mathcal{P} / (\mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Définition 1.9. Le champ de vecteurs dans (1.3.1) est appelé **forme normale (formelle)** de $\widehat{\mathcal{SN}}_*$, de paramètre $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c) \in \mathcal{P}$.

On a alors immédiatement le résultat de classification suivant.

Corollaire 1.10. On a la bijection suivante :

$$\widehat{\mathcal{SN}}_* / \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0) \simeq \mathcal{P} / (\mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) .$$

1.4 Classification formelle orbitale

Nous terminerons le chapitre 4 par la classification orbitale (*i.e.* classification des feuilletages induits) des nœud-cols 2-résonants orbitaux non dégénérés et div-intégrables. Nous montrerons le théorème suivant.

Théorème 1.11. Soit $Y \in \widehat{\mathcal{SN}}_*$ un nœud-col 2-résonant non dégénéré et div-intégrable sous forme normale :

$$\begin{aligned} Y &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda - c(y_1 y_2) + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &\quad + (\lambda + c(y_1 y_2) + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} , \end{aligned}$$

avec

- $\lambda \in \mathbb{C}^*$
- $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ sont tels que $\text{res}(Y) = a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$
- $c(v) = \sum_{k \geq 1} c_k v^k \in v\mathbb{C}[[v]]$ est tel que si $m := \frac{1}{a_1 + a_2} \in \mathbb{N}_{>0}$, et si l'on note $k_0 := \text{ord}(c)$, alors $c_{k_0+m} = 0$.

Alors, Y est formellement orbitalement équivalent à un champ de la forme :

$$\begin{aligned} Z = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-1 - \eta(y_1 y_2)^m + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + (1 + \eta(y_1 y_2)^m + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}, \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

où $\eta \in \{0, 1\}$, et $\eta = 1$ si et seulement si $m \in \mathbb{N}_{>0}$ et $c_m \neq 0$.

De plus, deux champs Z et Z' comme ci-dessus, avec pour paramètres (a_1, a_2, η) et (a'_1, a'_2, η') respectivement, sont formellement orbitalement équivalents si et seulement si

$$\eta = \eta' \text{ et } [(a_1, a_2) = (a'_1, a'_2) \text{ ou } (a'_2, a'_1)].$$

Définissons donc l'ensemble $\mathcal{P}_{\text{orb}}$ suivant :

$$\mathcal{P}_{\text{orb}} := \left\{ \mathbf{p} = (a_1, a_2, \eta) \in (\mathbb{C}^2 \setminus \Delta) \times \{0, 1\} \left| \begin{array}{l} \text{si } m := \frac{1}{a_1 + a_2} \notin \mathbb{N}, \\ \text{alors } \eta = 0 \end{array} \right. \right\},$$

muni de l'action par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui agit non-trivialement en inversant a_1 et a_2 .

Définition 1.12. Le champ de vecteurs dans (1.4.1) est appelé **forme normale (formelle) orbitale** de $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{orb},*}$, de paramètre $\mathbf{p} = (a_1, a_2, \eta) \in \mathcal{P}_{\text{orb}}$.

On peut énoncer le résultat de classification suivant :

Corollaire 1.13. On a la bijection suivante :

$$\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{orb},*} / \left(\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0) \ltimes \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]^\times \right) \simeq \mathcal{P}_{\text{orb}} / (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

On voit ici que la paire $\{a_1, a_2\}$ (et non pas le couple ordonné (a_1, a_2)) est un invariant par équivalence orbitale ; en particulier, il en est de même du résidu $\text{res}(Y) = a_1 + a_2$. Ceci démontre la remarque faite en introduction affirmant que le fait d'être non dégénéré (*i.e.* $\text{res}(Y) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$) est bien défini pour le feuilletage associé à un nœud-col 2-résonant.

Chapitre 2

Prérequis sur les champs de vecteurs formels

Nous allons rappeler dans ce chapitre les notions de champs de vecteurs et de difféomorphismes formels, en nous basant principalement sur les présentations faites dans [IY08, Mar81, Sto08].

2.1 Champs de vecteurs formels

Nous désignerons par $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ l'algèbre des séries formelles en $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Pour tout $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, nous noterons

$$|\mathbf{k}| := k_1 + \dots + k_n$$

la *longueur* du multi-indice $\mathbf{k}$, et par définition, nous écrirons :

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} := x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} .$$

Nous noterons ainsi une série formelle $f \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ sous la forme :

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} f_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} ,$$

où pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n$, $f_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$. Pour des séries formelles $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, on notera $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ l'idéal engendré par ces éléments. En tant qu'anneau, $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ est un anneau local dont l'(unique) idéal maximal, noté $\mathfrak{m}$, est formé des séries formelles sans terme constant. L'*ordre* $\text{ord}(f)$ d'une série formelle $f \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ est le plus grand élément $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tel que $f \in \mathfrak{m}^k$, avec la convention $\text{ord}(0) = +\infty$. Si

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} f_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]] ,$$

on aura alors :

$$\text{ord}(f) = \min \{ |\mathbf{k}| \geq 0 \mid f_{\mathbf{k}} \neq 0 \} .$$

Le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ pour la multiplication (le produit de Cauchy) est exactement l'ensemble des séries formelles d'ordre 0, et est noté $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]^\times$: ces éléments sont aussi appelés *unités*.

Pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$, nous noterons $J_k := \mathbb{C}[[\mathbf{x}]] / \mathfrak{m}^{k+1}$ l'espace des k -jets et

$$j_k : \mathbb{C}[[\mathbf{x}]] \rightarrow J_k$$

l'application de passage au quotient. Si $f \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ est une série formelle, on appelle $j_k(f)$ le k -jet de f .

Chaque application $\mathbb{C}$ -linéaire $F : \mathbb{C}[[\mathbf{x}]] \rightarrow \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ telle que $F(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ et $F(\mathfrak{m}^2) \subset \mathfrak{m}^2$ définit un endomorphisme linéaire de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, appelé la *partie linéaire* de F , et notée D_0F .

L'application

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{C}[[\mathbf{x}]] \times \mathbb{C}[[\mathbf{x}]] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto 2^{-\text{ord}(f-g)} \end{aligned}$$

munit $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ d'une structure d'espace ultra-métrique complet. La topologie induite est appelée classiquement *topologie de Krull*.

Proposition 2.1. *Une suite $(f_n)_n \subset \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ est convergente pour cette topologie si et seulement si pour tout $k \geq 0$, $(j_k(f_n))_n \subset J_k$ est convergente dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie J_k . Dans ce cas, si l'on dénote par $f^{(k)}$ (resp. f) la limite de $(j_k(f_n))_n$ dans J_k pour tout $k \geq 0$ (resp. de $(f_n)_n$ dans $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$), alors pour tout $k \geq 0$:*

$$j_k(f) = f^{(k)} \quad .$$

Remarque 2.2.

1. Comme la distance introduite sur $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ est ultra-métrique et que $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ est complet pour cette distance, une série à termes dans $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ est convergente si et seulement si son terme général tend vers 0.
2. Toute puissance de l'idéal maximal $\mathfrak{m}^k$, $k \geq 0$, est un fermé de $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$.

Définition 2.3. Un *champ de vecteurs formel* X de $\mathbb{C}^n$ en l'origine est un élément de $(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]^n)^n$: dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, il s'écrit sous la forme

$$X = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n} , \quad (2.1.1)$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$. On identifie classiquement (de manière bijective) tout champ de vecteurs X à une *dérivation* de $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, i.e. à un endomorphisme $\mathbb{C}$ -linéaire $\mathcal{L}_X$ de $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ vérifiant la formule de Leibniz

$$\forall f, g \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]] , \mathcal{L}_X(fg) = \mathcal{L}_X(f)g + f\mathcal{L}_X(g) .$$

On appelle $\mathcal{L}_X$ la *dérivée de Lie* définie par X . Pour tout série formelle $f \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ l'action de X sur f est donnée par :

$$\mathcal{L}_X(f) := \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = Df.X , \quad (2.1.2)$$

où Df désigne la matrice (uni-ligne) des dérivées partielles formelles de f , et X le vecteur (uni-colonne) avec pour composantes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

L'ensemble des champs de vecteurs sera noté $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$: il est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ -module. C'est également une algèbre de Lie, pour laquelle le crochet de Lie $[X, Y]$ de deux champs de vecteurs $X, Y \in \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ est défini par :

$$\mathcal{L}_{[X, Y]}(f) = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(f)) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(f))$$

pour tout $f \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$. Ces deux structures interagissent *via* la formule :

$$\mathcal{L}_{[X, fY]} = (\mathcal{L}_X(f))\mathcal{L}_Y + f\mathcal{L}_{[X, Y]}$$

pour tout $X, Y \in \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ et $f \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$. En coordonnées, si

$$X = \sum_{i=1, \dots, n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad Y = \sum_{j=1, \dots, n} \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

avec $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$, alors :

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(\alpha_i \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} - \beta_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Venons-en à présent à la notion d'ordre pour un champ de vecteurs.

Définition 2.4. L'ordre $\text{ord}(X)$ d'un champ de vecteurs formel $X \in \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ est le plus grand élément $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tel que $\mathcal{L}_X(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}^k$; de façon équivalente :

$$\text{ord}(X) = \min_{f \in \mathfrak{m}} (\text{ord}(\mathcal{L}_X(f))) \quad .$$

Par convention, on pose $\text{ord}(0) = +\infty$. Avec la notation de (2.1.1), on a :

$$\text{ord}(X) = \min_{i=1, \dots, n} (\text{ord}(\alpha_i)) \quad .$$

L'ensemble des champs de vecteurs d'ordre au moins k est un sous-module noté $\text{Der}_k(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]) \subset \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$. Celui-ci correspond exactement aux champs de vecteurs X écrits comme dans (2.1.1) lorsque les composantes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont toutes dans $\mathfrak{m}^k$.

Définition 2.5. Un champ de vecteurs formel est *singulier* (en l'origine) s'il est d'ordre au moins un. L'ensemble des champs de vecteurs singuliers en l'origine est noté $\widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$.

Remarquons que $\widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0) = \text{Der}_1(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$. En termes de coordonnées, un champ de vecteurs X comme dans (2.1.1) est singulier si et seulement si $\alpha_i \in \mathfrak{m}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Dans ce cas, X définit un endomorphisme linéaire $\mathcal{L}_X$ de $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ tel que $\mathcal{L}_X(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ et $\mathcal{L}_X(\mathfrak{m}^2) \subset \mathfrak{m}^2$. Sa partie linéaire est donc l'application induite :

$$D_0 X : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

qui est définie, dans la base $(x_1, \dots, x_n)$, par sa matrice Jacobienne

$$D_0 X = \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} (0, \dots, 0) \right)_{i,j} \quad .$$

Plus généralement, $\mathcal{L}_X(\mathfrak{m}^{k+1}) \subset \mathfrak{m}^{k+1}$ pour tout $k \geq 0$, X définit un endomorphisme linéaire

$$j_k(X) : J_k \rightarrow J_k$$

appelé le k -jet de X . En particulier, on a facilement le résultat suivant.

Proposition 2.6. Pour tout $X \in \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$, l'application $\mathcal{L}_X : \mathbb{C}[[\mathbf{x}]] \rightarrow \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ est continue (pour la topologie de Krull).

Le lemme suivant explique comment se comporte l'ordre du crochet de Lie de deux champs de vecteurs singuliers.

Lemme 2.7. Soient $X, Y \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$ deux champs de vecteurs singuliers. Alors :

$$\text{ord}([X, Y]) \geq \text{ord}(X) + \text{ord}(Y) - 1 \quad .$$

Démonstration. Notons k et l les ordres respectifs de X et Y . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_X(\mathfrak{m}^n) \subset \mathfrak{m}^{n+k-1} \\ \mathcal{L}_Y(\mathfrak{m}^n) \subset \mathfrak{m}^{n+l-1} \end{cases}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[X,Y]}(\mathfrak{m}) &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(\mathfrak{m})) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(\mathfrak{m})) \\ &\subset \mathcal{L}_X(\mathfrak{m}^l) - \mathcal{L}_Y(\mathfrak{m}^k) \\ &\subset \mathfrak{m}^{k+l-1}. \end{aligned}$$

□

La topologie de Krull induit une topologie sur $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$, via son identification avec $(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])^n$: $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ est ainsi munie d'une structure d'espace métrique complet, tout comme $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$. De façon équivalente, la topologie de Krull sur l'ensemble des champs de vecteurs formels est définie par la distance ultra-métrique complète :

$$\begin{aligned} \Delta : \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]) \times \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \sup_{f \in \mathfrak{m}} (\delta(\mathcal{L}_X(f), \mathcal{L}_Y(f))) \end{aligned}.$$

Remarquons que pour tout $X, Y \in \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$, on a :

$$\Delta(X, Y) = 2^{-\text{ord}(X-Y)}.$$

Proposition 2.8. *Une suite $(X_n)_n \subset \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ est convergente pour cette topologie si et seulement si pour tout $k \geq 0$, la suite $(j_k(X_n))_n \subset \text{End}_{\mathbb{C}}(J_k)$ est convergente dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $\text{End}_{\mathbb{C}}(J_k)$ des endomorphismes $\mathbb{C}$ -linéaires de J_k . Dans ce cas, si l'on note $X^{(k)}$ (resp. X) la limite de $(j_k(X_n))_n$ dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(J_k)$ pour tout $k \geq 0$ (resp. de $(X_n)_n$ dans $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$), alors, pour tout $k \geq 0$:*

$$j_k(X) = X^{(k)}.$$

Remarque 2.9.

1. Comme pour $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, la distance introduite sur $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ étant ultra-métrique et rendant cet espace complet, une série à termes dans $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ est convergente si et seulement si son terme général tend vers 0.
2. Par définition de la topologie de Krull sur $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ par son identification avec $(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])^n$, si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ convergente, de limite $X \in \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$, alors en particulier, pour toute série formelle $f \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, la suite $(\mathcal{L}_{X_n}(f))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ converge vers $\mathcal{L}_X(f) \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$.
3. La sous-algèbre de Lie des champs singuliers $\widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0) \subset \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ est fermée pour la topologie de Krull. Plus généralement, pour tout $k \geq 0$, la sous-algèbre $\text{Der}_k(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ des champs d'ordre au moins k est un fermé de $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ pour la topologie de Krull.

2.2 Difféomorphismes formels

L'ensemble des automorphismes d'algèbre de $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ est noté $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$. Chaque élément $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ est uniquement déterminé par les images

$$\phi_1 = \Phi(x_1), \dots, \phi_n = \Phi(x_n)$$

des coordonnées $x_1, \dots, x_n$. Ici les séries formelles $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ (d'ordre un) sont telles que la partie linéaire $D_0\Phi$ de Φ soit un automorphisme de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, dont la matrice Jacobienne dans la base $(x_1, \dots, x_n)$ est :

$$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} (0, \dots, 0) \right)_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) .$$

Étant donnée une série formelle

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]] ,$$

on définit le *pull-back* de f par $\Phi \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ par

$$\Phi^*(f) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\mathbf{k}} \phi_1^{k_1} \cdots \phi_n^{k_n} \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]] . \quad (2.2.1)$$

L'ensemble $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ est muni d'une structure de groupe évidente. Afin de garder une analogie avec la géométrie, nous appellerons les éléments de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ *difféomorphismes formels* (de $(\mathbb{C}^n, 0)$).

Remarque 2.10. On peut en particulier considérer $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ comme un sous-ensemble de $(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])^n$ dont les éléments ont des termes constants nuls.

Définition 2.11. Si les coordonnées de $\mathbb{C}^{n+1}$ sont notées $(x, \mathbf{y}) = (x, y_1, \dots, y_n)$, on appelle *difféomorphisme formel fibré* (par rapport à x) tout élément $\Phi \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ tel que $\Phi^*(x) = x$. On note $\widehat{\mathrm{Diff}}_{\mathrm{fib}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ le sous-groupe des difféomorphismes formels fibrés.

On dénote par $\mathcal{G}_{\mathrm{Id}}^{(k)} \subset \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ le sous-groupe distingué formé des automorphismes Φ tels que

$$\Phi(x_i) - x_i \in \mathfrak{m}^{k+1}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. Un élément de $\mathcal{G}_{\mathrm{Id}}^{(k)}$ est appelé difféomorphisme (formel) *tangent à l'identité à l'ordre k* . On utilisera plus particulièrement les éléments de $\mathcal{G}_{\mathrm{Id}}^{(1)}$, que l'on appellera plus simplement *difféomorphismes (formels) tangents à l'identité*, et on notera :

$$\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0; \mathrm{Id}) := \mathcal{G}_{\mathrm{Id}}^{(1)} .$$

On notera également $\widehat{\mathrm{Diff}}_{\mathrm{fib}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0; \mathrm{Id})$ le sous-groupe formé des difféomorphismes fibrés et tangents à l'identité.

Un difféomorphisme formel $\Phi \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ satisfait $\Phi^*(\mathfrak{m}^{k+1}) \subset \mathfrak{m}^{k+1}$ pour tout $k \geq 0$, et induit donc un endomorphisme linéaire

$$j_k(\Phi) : J_k \rightarrow J_k$$

appelé le k -jet de Φ . Cet endomorphisme est en fait inversible : c'est donc un automorphisme linéaire de J_k pour tout $k \geq 0$.

La proposition suivante est élémentaire et affirme que le pull-back par un difféomorphisme est une opération continue :

Proposition 2.12. *Tout élément $\Phi \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ est continue (pour la topologie de Krull).*

Comme pour les champs de vecteurs, la topologie de Krull sur $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ induit une topologie (aussi appelée topologie de Krull) sur $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$, vu comme sous-ensemble de $(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])^n$. De manière équivalente, cette topologie est donnée par la métrique

$$\begin{aligned} \mathbf{D} : \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0) \times \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\phi, \psi) &\mapsto \sup_{f \in \mathfrak{m}} (\delta(\phi^*(f), \psi^*(f))) \end{aligned}$$

qui munit $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ d'une structure d'espace ultra-métrique complet.

Proposition 2.13. *Une suite $(\Phi_n)_n \subset \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ est convergente si et seulement si pour tout $k \geq 0$, la suite $(j_k(\Phi_n))_n \subset \text{End}_{\mathbb{C}}(J_k)$ est convergente dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $\text{End}_{\mathbb{C}}(J_k)$. Dans ce cas, si l'on dénote par $\Phi^{(k)}$ (resp. Φ) la limite de $(j_k(\Phi_n))_n$ dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(J_k)$ pour tout $k \geq 0$ (resp. de $(\Phi_n)_n$ dans $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$), alors pour tout $k \geq 0$:*

$$j_k(\Phi) = \Phi^{(k)} \quad .$$

Remarque 2.14.

1. Par définition de la topologie de Krull, si $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ est une suite convergente, de limite $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$, alors en particulier, pour toute série formelle $f \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, la suite $(\Phi_n^*(f))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ converge vers $\Phi^*(f)$ dans $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$.
2. Pour tout $k \geq 0$, le sous-groupe $\mathcal{G}_{\text{Id}}^{(k)} \subset \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ des difféomorphismes tangents à l'identité à l'ordre k est un fermé de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ pour la topologie de Krull.
3. De même, les sous-groupes $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^n, 0)$ et $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^n, 0; \text{Id})$ sont des fermés de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$.

Le lemme suivant sera important dans la preuve du théorème sur l'existence d'une normalisation formelle pour les noeud-cols 2-résonants non dégénérés (théorème 1.5).

Lemme 2.15. *Soit $(d_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{N}_{>0}$ une suite strictement croissante, et $(\Phi_n)_{n \geq 0} \subset \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ une suite de difféomorphismes formels. Supposons que pour tout $n \geq 0$,*

$$\Phi_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + P_{d_n}(\mathbf{x}) \pmod{\mathfrak{m}^{d_n+1}} \quad ,$$

où $P_{d_n}(\mathbf{x})$ est un vecteur dont les composantes sont des polynômes homogènes de degré d_n . Alors, la suite $(\Phi^{[n]})_{n \geq 0}$ définie par $\Phi^{[n]} = \Phi_n \circ \dots \circ \Phi_0$ pour tout $n \geq 0$, est convergente, de limite $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$.

De plus, si pour tout $n \geq 0$, Φ_n est fibré, alors Φ est également fibré.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\Phi_n \circ \dots \circ \Phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + P_{d_0}(\mathbf{x}) + \dots + P_{d_n}(\mathbf{x}) \pmod{\mathfrak{m}^{d_n+1}}$$

(la preuve est immédiate par récurrence). On conclut ensuite grâce à la proposition 2.13, car la suite $(d_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{N}_{>0}$ est strictement croissante. La dernière affirmation concernant le cas des difféomorphismes fibrés peut également être prouvée de façon élémentaire par récurrence. $\square$

Rappelons à présent la notion de conjugaison de deux champs de vecteurs par un difféomorphisme.

Définition 2.16. Étant donné un sous-groupe $\mathcal{G} \subset \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$, nous dirons que deux champs de vecteurs formels Y_1, Y_2 dans $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ sont $\mathcal{G}$ -conjugués s'il existe $\Phi \in \mathcal{G}$ tel que :

$$\mathcal{L}_{Y_1} \circ \Phi = \Phi \circ \mathcal{L}_{Y_2} \quad .$$

On écrit classiquement $\Phi_*(Y_1) = Y_2$, et Y_2 est alors appelé le *push-forward* de Y_1 par Φ .

En termes de coordonnées, si

$$\begin{cases} \Phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})) \\ Y_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1, \dots, n} \alpha_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ Y_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1, \dots, n} \beta_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \end{cases}$$

le fait que $\Phi_*(Y_1) = Y_2$ est équivalent au fait d'avoir pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\beta_i(\Phi(\mathbf{x})) = \sum_{j=1, \dots, n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \alpha_j(\mathbf{x}) ,$$

ce qui s'écrit aussi souvent de manière plus concise

$$D\Phi.Y_1 = Y_2 \circ \Phi ,$$

où Y_1 , Y_2 et Φ sont vus comme des vecteurs de taille n dont les composantes sont des séries formelles, les composantes de $Y_2 \circ \Phi$ étant les $\beta_i(\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x}))$, $i = 1, \dots, n$, et $D\Phi$ étant la matrice des dérivées partielles (formelles) de Φ . La proposition suivante est immédiate, et stipule que l'opération push-forward par un difféomorphisme est continue sur $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$.

Proposition 2.17. *Pour tout $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$, l'application induite par le push-forward $\Phi_* : \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]) \rightarrow \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$, $X \mapsto \Phi_*(X)$ est continue pour la topologie de Krull.*

Rappelons enfin la définition de l'équivalence orbitale de deux champs de vecteurs.

Définition 2.18. Deux champs de vecteurs Y_1 et Y_2 sont orbitalement équivalents s'il existe un difféomorphisme formel $\phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ et une unité $U \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]^\times$ tels que :

$$\phi_*(Y_1) = U.Y_2 ;$$

on dit aussi dans ce cas que Y_1 et Y_2 engendrent le même feuilletage (formel).

On a donc une action de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0) \ltimes \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]^\times$ sur $\widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$.

2.3 Exponentielle et logarithme

Étant donné un champ de vecteurs formel singulier $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$ et une série formelle $f \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, on définit

$$\begin{cases} \mathcal{L}_X^{\circ 0}(f) = f \\ \mathcal{L}_X^{\circ(k+1)}(f) := \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X^{\circ k}(f)) \end{cases} , \text{ pour tout } k \geq 0$$

de sorte que l'on puisse définir l'homomorphisme d'algèbres $\exp(tX)$, donné pour tout $t \in \mathbb{C}$ par :

$$\exp(tX)^*(f) := \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \mathcal{L}_X^{\circ k}(f) . \quad (2.3.1)$$

Proposition 2.19. *La série ci-dessus converge pour la topologie de Krull et définit un difféomorphisme formel, appelé classiquement le flot formel de X au temps $t \in \mathbb{C}$, ou encore l'exponentielle de X . On notera également $\Phi_X^t := \exp(tX)$, donné en coordonnées par :*

$$\Phi_X^t(\mathbf{x}) = \left(\exp(tX)^*(x_1), \dots, \exp(tX)^*(x_n) \right), \quad (2.3.2)$$

Les composantes de $\Phi_X^t(\mathbf{x})$ sont des séries formelles en $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, dont les coefficients sont des séries entières en $t \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Voir par exemple la section 3 du chapitre 1 de [IY08]. $\square$

Pour tout champ singulier $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$, on considère également l'application adjointe

$$\begin{aligned} \text{ad}_X : \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0) &\rightarrow \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0) \\ Y &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

et on définit

$$\begin{cases} (\text{ad}_X)^{\circ 0} := \text{Id} \\ (\text{ad}_X)^{\circ(k+1)} := \text{ad}_X \circ (\text{ad}_X)^{\circ k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On aura besoin de la formule classique suivante (voir [Mar81]).

Proposition 2.20. *Étant donné $X, Y \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$ et $t \in \mathbb{C}$:*

$$\exp(tX)_*(Y) = \exp(\text{ad}_{tX})(Y),$$

où

$$\exp(\text{ad}_{tX})(Y) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} (\text{ad}_X)^{\circ k}(Y) = Y + \frac{t}{1!} [X, Y] + \frac{t^2}{2!} [X, [X, Y]] + \dots$$

En particulier, la série ci-dessus est convergente pour la topologie de Krull, pour tout $t \in \mathbb{C}$.

Rappelons l'existence d'un *logarithme* pour tout difféomorphisme formel tangent à l'identité (voir [IY08], chapitre 1, section 3).

Proposition 2.21. *Pour tout difféomorphisme formel $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$, il existe un unique champ de vecteurs $F \in \text{Der}_2(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ tel que $\Phi = \varphi \circ \exp(F)$, où $\varphi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ est le changement linéaire de coordonnées donné par $D_0\Phi$. De plus, pour tout $k \geq 2$, l'exponentielle induit une bijection entre $\text{Der}_k(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ et $\mathcal{G}_{\text{Id}}^{(k-1)}$.*

En d'autres termes, pour tout difféomorphisme $\Phi \in \mathcal{G}_{\text{Id}}^{(k-1)}$ tangent à l'identité à l'ordre $k-1$, il existe un unique champ de vecteurs singulier $F \in \text{Der}_k(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ d'ordre au moins k tel que $\exp(F) = \Phi$.

Donnons enfin un dernier outil important. Pour tout $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$ et tout $\tau \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, on peut définir Φ_X^τ , le flot formel de X au « temps » formel τ , où l'on a formellement remplacé $t \in \mathbb{C}$ dans (2.3.2) par la série formelle τ . On vérifie aisément que l'on obtient encore un élément de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$. Nous utiliserons plus tard le lemme suivant, démontré par exemple dans [Tey04b, Tey04a] pour des champs de vecteurs de $\mathbb{C}^2$ (la même preuve fonctionne en fait en toute dimension).

Lemme 2.22 ([Tey04b, Tey04a]). *Soient $X, Y \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$ tels que $[X, Y] = 0$. Alors, pour tout $\tau \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, $\Phi_Y^\tau \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$, et :*

$$(\Phi_Y^\tau)^*(X) = X - \frac{\mathcal{L}_X(\tau)}{1 + \mathcal{L}_Y(\tau)} Y.$$

Remarque 2.23. Dans l'écriture ci-dessus, $\varphi := \Phi_Y^\tau$ est le difféomorphisme défini comme agissant sur $f \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ par :

$$(\Phi_Y^\tau)^*(f)(\mathbf{x}) := \sum_{k \geq 0} \frac{(\tau(\mathbf{x}))^k}{k!} \mathcal{L}_X^{\circ k}(f)(\mathbf{x}) \quad .$$

Remarquons que le difféomorphisme $\varphi := \Phi_Y^\tau$ agit sur X par *pull-back*, i.e. par définition :

$$\varphi^*(X) := (\varphi^{-1})_*(X) \quad .$$

2.4 Décomposition de Jordan et formes normales de Poincaré-Dulac

D'après [Mar81], tout champ de vecteurs singulier $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$ admet une unique *décomposition de Jordan* :

$$X = X_S + X_N, \text{ avec } X_S, X_N \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0) \text{ et } [X_S, X_N] = 0 \quad , \quad (2.4.1)$$

où la restriction de X_S (*resp.* X_N) à chacun des espaces des k -jets J_k (de dimension finie) est un endomorphisme semi-simple (*resp.* nilpotent). Cette décomposition est compatible avec la troncature (k -jets) et la conjugaison : si $X = X_S + X_N$ est la décomposition de Jordan de X , alors :

1. pour tout $k \geq 0$, $j_k(X) = j_k(X_S) + j_k(X_N)$ est la décomposition de Jordan de $j_k(X)$;
2. pour tout $\varphi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$, $\varphi_*(X) = \varphi_*(X_S) + \varphi_*(X_N)$ est la décomposition de Jordan de $\varphi_*(X)$.

Définition 2.24. On dit que qu'un champ $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$ est sous *forme normale de Poincaré-Dulac* si sa décomposition de Jordan $X = X_S + X_N$ est telle que X_S est sous forme diagonale, i.e. $X_S = S(\lambda)$, où $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et

$$S(\lambda) := \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad . \quad (2.4.2)$$

D'après la théorie désormais classique de Poincaré-Dulac, tout champ de vecteurs (formel) singulier est formellement conjugué à un champ sous forme normale de Poincaré-Dulac, bien qu'une telle forme normale soit loin d'être unique.

Définition 2.25. Un champ de vecteurs *monomial* est un élément de $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ de la forme $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu)$, avec $\mathbf{k} \in \mathcal{I}$, où $\mathcal{I}$ est l'ensemble d'indices suivant :

$$\mathcal{I} := \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq -1})^n \mid \text{au plus un des } k_j \text{ est } -1\} \quad ,$$

et avec $\mu \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mu = (0, \dots, 0, \mu_i, 0, \dots, 0)$ si $k_i = -1$.

↑
 i

Si l'on fixe $\lambda \in \mathbb{C}^n$, tout champ de vecteurs monomial $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu)$ est un vecteur propre pour l'opérateur $\text{ad}_{\mathcal{L}(\lambda)}$ associé à la valeur propre

$$\langle \lambda, \mathbf{k} \rangle := \lambda_1 k_1 + \dots + \lambda_n k_n \quad .$$

Ceci est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.26. *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^n$ et $\mathbf{l}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$:*

$$[\mathbf{x}^{\mathbf{l}} S(\lambda), \mathbf{x}^{\mathbf{m}} S(\mu)] = \mathbf{x}^{\mathbf{l}+\mathbf{m}} (\langle \lambda, \mathbf{m} \rangle S(\mu) - \langle \mu, \mathbf{l} \rangle S(\lambda)) .$$

Démonstration. On calcule directement par bilinéarité :

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}^{\mathbf{l}} S(\lambda), \mathbf{x}^{\mathbf{m}} S(\mu)] &= \sum_{i,j=1,\dots,n} \lambda_i \mu_j \mathbf{x}^{\mathbf{l}} \cdot x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{x}^{\mathbf{m}} x_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &\quad - \sum_{i,j=1,\dots,n} \lambda_i \mu_j \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \cdot x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{x}^{\mathbf{l}} x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} . \end{aligned}$$

On a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{x}^{\mathbf{m}} x_j) = \begin{cases} m_i \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \cdot \frac{x_j}{x_i} & , \text{ si } i \neq j \\ (1 + m_j) \mathbf{x}^{\mathbf{m}} & , \text{ si } i = j \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{x}^{\mathbf{l}} x_i) = \begin{cases} l_j \mathbf{x}^{\mathbf{l}} \cdot \frac{x_i}{x_j} & , \text{ si } i \neq j \\ (1 + l_i) \mathbf{x}^{\mathbf{l}} & , \text{ si } i = j \end{cases} .$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}^{\mathbf{l}} S(\lambda), \mathbf{x}^{\mathbf{m}} S(\mu)] &= \sum_{i,j=1,\dots,n} \lambda_i \mu_j \mathbf{x}^{\mathbf{l}+\mathbf{m}} m_i x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1,\dots,n} \lambda_i \mu_j \mathbf{x}^{\mathbf{m}+\mathbf{l}} l_j x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \mathbf{x}^{\mathbf{l}+\mathbf{m}} (\langle \lambda, \mathbf{m} \rangle S(\mu) - \langle \mu, \mathbf{l} \rangle S(\lambda)) . \end{aligned}$$

□

Remarque 2.27. Il est à noter que tout champ de vecteurs $X \in \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ peut être écrit de manière unique comme une somme (infinie) de champs de vecteurs monomiaux

$$X = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{I}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu_{\mathbf{k}}) ,$$

qui est une série convergente pour la topologie de Krull de $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$. On appelle cette écriture *développement monomial* de X .

Supposons à présent que $X = S(\lambda) + X_N$ soit sous forme normale de Poincaré-Dulac, et considérons le développement monomial de X_N :

$$X_N = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{I}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu_{\mathbf{k}}) .$$

La condition $[X_S, X_N] = 0$ est équivalente à :

$$\forall \mathbf{k} \in \mathcal{I}, \langle \mathbf{k}, \lambda \rangle \neq 0 \implies \mu_{\mathbf{k}} = 0 .$$

Autrement dit, chaque $\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$ dans le développement monomial de X_N est ce qu'on appelle classiquement un *monôme résonant*.

Proposition 2.28. [Bry73, Théorème 2 p.155] Considérons deux champs de vecteurs $X, Y \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$ sous forme normale de Poincaré-Dulac avec la même partie semi-simple $S(\mu)$, avec $\mu \in \mathbb{C}^n$, et avec des parties nilpotentes dans $\text{Der}_2(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$:

$$\begin{cases} X = S(\mu) + X_N & , \text{ avec } X_N \in \text{Der}_2(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]) , \text{ nilpotent, et } [S(\mu), X_N] = 0 \\ Y = S(\mu) + Y_N & , \text{ avec } Y_N \in \text{Der}_2(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]) , \text{ nilpotent, et } [S(\mu), Y_N] = 0. \end{cases}$$

Supposons que X et Y sont conjugués par un difféomorphisme formel Φ tel que $D_0\Phi = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$. Si l'on écrit $\Phi = \varphi \circ \exp(F)$ avec $F \in \text{Der}_2(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ et $\varphi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$ la transformation linéaire associée à $D_0\Phi = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (voir proposition 2.21), alors nécessairement :

$$[S(\mu), F] = 0 \quad .$$

Remarque 2.29. On rappelle que la condition $[S(\mu), F] = 0$ signifie que si l'on écrit

$$F = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{I}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\lambda_{\mathbf{k}}) \quad ,$$

alors $\langle \mu, \mathbf{k} \rangle \neq 0 \implies \lambda_{\mathbf{k}} = 0$.

Démonstration. Tout d'abord, nous pouvons supposer sans perte de généralité que Φ est tangent à l'identité. En effet, posons $P(\mathbf{x}) := (D_0\Phi)^{-1} \cdot \mathbf{x}$, se sorte que $P \circ \Phi$ soit tangent à l'identité et conjugue X à $\tilde{Y} := DP \cdot (Y \circ P^{-1})$. Comme DP est diagonale, les hypothèses faites sur Y sont aussi satisfaites par $\tilde{Y}$. De plus, il est clair que la propriété à démontrer est vraie pour Φ si et seulement si elle l'est pour $P \circ \Phi$.

Supposons donc désormais que Φ est tangent à l'identité. D'après la proposition 2.21, il existe $F \in \text{Der}_2(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ tel que $\exp(F) = \Phi$. En appliquant la proposition 2.20, on a :

$$\exp(F)_*(S(\mu)) = S(\mu) + [F, S(\mu)] + \frac{1}{2!} [F, [F, S(\mu)]] + \dots \quad (2.4.3)$$

Comme $\exp(F)_*(S(\mu)) = S(\mu)$, par unicité de la décomposition de Jordan, on obtient par identification :

$$[F, S(\mu)] + \frac{1}{2!} [F, [F, S(\mu)]] + \dots = 0 \quad . \quad (2.4.4)$$

Ceci implique que $[F, S(\mu)] = 0$. En effet, si ce n'était pas le cas, alors $\text{ord}([F, S(\mu)]) = q_1 \geq 1$. Par conséquent, puisque $\text{ord}(F) \geq 2$, on aurait alors

$$\text{ord}\left((\text{ad}_F)^{\circ j}(S(\mu))\right) \geq q_1 + 1 \quad ,$$

pour tout $j \geq 2$, d'après le lemme 2.7. On en déduit, en utilisant l'équation (2.4.4) que

$$q_1 = \text{ord}([F, S(\mu)]) = \text{ord}\left(\frac{1}{2!} [F, [F, S(\mu)]] + \dots\right) \geq q_1 + 1 \quad .$$

On aboutit donc à une contradiction. □

Remarque 2.30. L'hypothèse que $D_0\Phi$ est diagonale est nécessairement vraie si $\mu_i \neq \mu_j$, pour tout $i \neq j$.

2.5 Formes différentielles formelles

Nous allons rappeler les notions de base dont nous aurons besoin concernant les formes différentielles formelles.

Définition 2.31. Nous noterons $\widehat{\Omega}^1(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ (ou simplement $\widehat{\Omega}^1$) l'ensemble des *1-formes formelles* de $\mathbb{C}^n$. Il s'agit du dual de $\text{Der}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ en tant que $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ -module.

En considérant la base duale $(dx_1, \dots, dx_n)$ de $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, l'ensemble $\widehat{\Omega}^1(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ est un $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ -module libre de rang n , engendré par $dx_1, \dots, dx_n$.

Définition 2.32. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit la $p^{\text{ème}}$ *puissance extérieure* de $\widehat{\Omega}^1(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ par

$$\widehat{\Omega}^p(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]) := \bigwedge^p \widehat{\Omega}^1(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$$

(on écrira aussi simplement $\widehat{\Omega}^p$). Ses éléments sont appelées p -formes formelles.

L'ensemble des 0-formes formelles est l'ensemble des séries formelles : $\widehat{\Omega}^0(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]) := \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$.

Remarque 2.33. On peut définir de manière naturelle une topologie (dite de Krull) sur chaque $\widehat{\Omega}^p$, provenant de la topologie de Krull sur $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, consistant à étudier les éléments de $\widehat{\Omega}^p$ par degré homogène croissant, en utilisant la notion naturelle d'ordre des séries formelles $f(\mathbf{x})$ apparaissant en facteur d'un élément de la forme $f(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, $i_1 < \dots < i_p$, et par conséquent la notion de k -jet d'une p -forme formelle.

Définition 2.34. On définit

$$\widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]) := \bigoplus_{p=0}^{+\infty} \widehat{\Omega}^p(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$$

(ou simplement $\widehat{\Omega}$), l'*algèbre extérieure* des formes formelles de $\mathbb{C}^n$, et on note d la *dérivée extérieure* sur $\widehat{\Omega}$.

Remarque 2.35. Comme précédemment, on peut définir de manière naturelle une topologie (dite de Krull) sur $\widehat{\Omega}$, provenant de la topologie de Krull sur $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, de sorte que la dérivée extérieure d et le produit extérieur $\wedge$ soient continus.

On peut définir une action de $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ par *pull-back* sur $\widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$, de manière unique par les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ -linéarité
2. pour tout $f \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, $\Phi^*(f)$ est définie comme en (2.2.1)
3. $\forall \alpha, \beta \in \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$, $\forall \Phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$, $\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = \Phi^*(\alpha) \wedge \Phi^*(\beta)$
4. $\forall \Phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$, $\Phi^* \circ d = d \circ \Phi^*$.

La proposition suivante affirme que le pull-back par un difféomorphisme est un opérateur continu sur $\widehat{\Omega}$.

Proposition 2.36. Pour tout $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$, l'application induite par pull-back $\Phi^* : \widehat{\Omega} \rightarrow \widehat{\Omega}$, $\alpha \mapsto \Phi^*(\alpha)$ est continue pour la topologie de Krull.

Pour tout $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$ et tout $\alpha \in \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$, on note $\mathcal{L}_X(\alpha)$ la *dérivée de Lie* de α selon le champ X . Rappelons que $\mathcal{L}_X$ est déterminée de manière unique par les propriétés suivantes :

1. pour tout $k \geq 0$, $\mathcal{L}_X : \widehat{\Omega}^k(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]) \rightarrow \widehat{\Omega}^k(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ est $\mathbb{C}$ -linéaire
2. pour tout $f \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ (i.e. f est une 0-forme), $\mathcal{L}_X(f)$ est définie comme en (2.1.2)

3. $\mathcal{L}_X$ est une dérivation de $\widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$, i.e. pour tout $\alpha, \beta \in \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$:

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta)$$

(formule de Leibniz)

4. $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$.

Le résultat suivant stipule que la dérivée de Lie selon un champ de vecteurs singulier est un opérateur continu sur $\widehat{\Omega}$.

Proposition 2.37. *Pour tout $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$, l'application induite $\mathcal{L}_X : \widehat{\Omega} \rightarrow \widehat{\Omega}$, $\alpha \mapsto \mathcal{L}_X(\alpha)$ est continue pour la topologie de Krull.*

Nous aurons besoin de la formule classique suivante, qui est une généralisation de (2.3.1).

Proposition 2.38. *Pour tout $\alpha \in \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$ et $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$:*

$$\exp(X)^*(\alpha) = \exp(\mathcal{L}_X)(\alpha) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \mathcal{L}_X^{\circ k}(\alpha) \quad .$$

Démonstration. (Idée)

La formule à démontrer est vraie pour les 0-formes. Il nous suffit de la démontrer pour les 1-formes, car il nous suffira ensuite d'utiliser le produit extérieur et la règle de Leibniz pour la généraliser à n'importe quelle p -forme par récurrence. Pour montrer cette formule pour les 1-formes, il suffit d'utiliser le fait que la dérivée extérieure d commute avec la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X$ et avec le pull-back $\exp(X)^*$. La convergence de la série en question se voit par récurrence (elle est vraie pour les 0-formes, et on utilise la continuité de d et de $\wedge$). $\square$

En utilisant le même type d'arguments, avec les formules $\Phi^* \circ d = d \circ \Phi^*$ et $\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = \Phi^*(\alpha) \wedge \Phi^*(\beta)$, on montre de manière analogue la proposition suivante.

Proposition 2.39. *Pour tout $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$, $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$ et $\theta \in \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])$, on a :*

$$\Phi^*(\mathcal{L}_{\Phi_*(X)}(\theta)) = \mathcal{L}_X(\Phi^*(\theta)) \quad .$$

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif pour tout $p \geq 0$:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Omega}^p & \xrightarrow{\Phi^*} & \widehat{\Omega}^p \\ \mathcal{L}_{\Phi_*(X)} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mathcal{L}_X \\ \widehat{\Omega}^p & \xrightarrow{\Phi^*} & \widehat{\Omega}^p \end{array} .$$

A partir de maintenant, travaillons dans $\mathbb{C}^{n+1}$, et notons $\mathbf{x} = (x, \mathbf{y}) = (x, y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

Définition 2.40. On définit $\langle dx \rangle$ comme l'idéal engendré par dx dans $\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]])$: c'est l'ensemble des formes $\theta \in \widehat{\Omega}$ avec $\theta = dx \wedge \eta$, où $\eta \in \widehat{\Omega}$.

Remarque 2.41. $\langle dx \rangle$ est un fermé de $\widehat{\Omega}$ pour la topologie de Krull.

Proposition 2.42. *Soient $\theta \in \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]])$, $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ et $\Phi := \exp(X) \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{L}_X(x) = 0$ et $\mathcal{L}_X(\theta) \in \langle dx \rangle$
2. $\Phi^*(x) = x$ et $\Phi^*(\theta) \in \theta + \langle dx \rangle$.

Démonstration. C'est une conséquence des propositions 2.38 et 2.20. $\square$

Enfin, le lemme suivante se démontre par récurrence, de manière similaire au lemme 2.15.

Lemme 2.43. *Dans la situation décrite dans le lemme 2.15, si l'on suppose de plus qu'il existe une forme formelle $\theta \in \widehat{\Omega}$ telle que $\Phi_n^*(\theta) \in \theta + \langle dx \rangle$, pour tout $n \geq 0$, alors $\Phi^*(\theta) \in \theta + \langle dx \rangle$.*

2.6 Champs transversalement hamiltoniens et difféomorphismes transversalement symplectiques

Nous travaillerons dans cette section dans $\mathbb{C}^3$, avec les coordonnées $(x, \mathbf{y}) := (x, y_1, y_2)$. En se basant sur l'étude des singularités irrégulière à l'infini des équations de Painlevé après compactification à poids, nous aurons à considérer des formes à coefficients rationnels. Plus précisément, considérons la forme

$$\omega := \frac{dy_1 \wedge dy_2}{x}.$$

Étant donné un champ de vecteurs formel $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$ tel que $\mathcal{L}_X(x) \in \langle x \rangle$ (l'idéal engendré par x), on peut étendre de manière naturelle l'action de la dérivée de Lie de X à l'ensemble $\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]])$ des formes méromorphes de la forme $\nu = \frac{1}{x}\theta$, $\theta \in \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]])$, par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \left(\frac{1}{x} \cdot \theta \right) &= -\frac{\mathcal{L}_X(x)}{x^2} \theta + \frac{1}{x} \mathcal{L}_X(\theta), \quad \theta \in \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]) \\ &\in \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]) \quad , \text{ car } \mathcal{L}_X(x) \in \langle x \rangle \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$x \mathcal{L}_X \left(\frac{1}{x} \cdot \theta \right) \in \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]) \quad .$$

Remarquons que si un champ formel X satisfait $\mathcal{L}_X(dx) \in \langle dx \rangle$, alors $\mathcal{L}_X(x) \in \langle x \rangle$. De façon analogue, on étend de manière naturelle l'action des difféomorphismes fibrés (en x) par pull-back sur les éléments de $\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]])$ par

$$\Phi^* \left(\frac{1}{x} \theta \right) = \frac{1}{x} \Phi^*(\theta), \quad \text{pour } (\Phi, \theta) \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0) \times \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]) ,$$

de sorte qu'on ait :

$$x \Phi^* \left(\frac{1}{x} \theta \right) = \Phi^*(\theta) \quad .$$

Remarque 2.44. On peut étendre la topologie de Krull de manière naturelle à $\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \widehat{\Omega}(\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]])$, et les opérations de pull-back et de dérivées de Lie restent continues. De même, l'idéal $\langle dx \rangle$ est encore un fermé pour cette topologie.

Définition 2.45. Nous dirons qu'un champ de vecteurs formel $Y \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$ est **transversalement hamiltonien** (par rapport à ω et dx) si

$$\mathcal{L}_Y(dx) \in \langle dx \rangle \quad \text{et} \quad x \mathcal{L}_Y(\omega) \in \langle dx \rangle \quad .$$

Nous dirons qu'un difféomorphisme formel $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ est **transversalement symplectique** (par rapport à ω et dx) si

$$\Phi^*(x) = x \text{ et } x \Phi^*(\omega) \in x\omega + \langle dx \rangle \quad .$$

Nous désignerons respectivement par $\widehat{\chi}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$ et $\widehat{\text{Diff}}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$ les ensembles formés des champs transversalement hamiltonien d'une part et des difféomorphismes transversalement symplectiques de l'autre.

Remarque 2.46.

- Le flot d'un champ transversalement hamiltonien X induit une application entre les fibres $\{x = x_1\}$ et $\{x = x_2\}$ qui envoie $\omega|_{x=x_1}$ sur $\omega|_{x=x_2}$, puisque

$$(\exp(X))^*(\omega) \in \omega + \langle dx \rangle .$$

- Un difféomorphisme transversalement symplectique $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$ est nécessairement un difféomorphisme fibré. Autrement dit :

$$\widehat{\text{Diff}}_\omega(\mathbb{C}^3, 0) \subset \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0) .$$

- Les deux ensembles $\widehat{\chi}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$ et $\widehat{\text{Diff}}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$ sont fermés pour la topologie de Krull.

Énonçons à présent un résultat analogue à la proposition 2.42.

Proposition 2.47. *Soit $F \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$ un champ de vecteurs singulier. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\exp(F)$ est un difféomorphisme transversalement symplectique, i.e. $\exp(F) \in \widehat{\text{Diff}}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$
2. $\mathcal{L}_F(x) = 0$ et F est transversalement hamiltonien, i.e. $F \in \widehat{\chi}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la proposition 2.42. $\square$

Le lemme ci-dessous affirme que le push-forward d'un champ transversalement hamiltonien par un difféomorphisme transversalement symplectique est encore transversalement hamiltonien.

Lemme 2.48. *Soit $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$ et $X \in \widehat{\chi}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$. Alors, $\Phi_*(X) \in \widehat{\chi}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$.*

Démonstration. Cela provient de la proposition 2.39 qui affirme que

$$\Phi^*(\mathcal{L}_{\Phi_*(X)}(\omega)) = \mathcal{L}_X(\Phi^*(\omega))$$

et du fait que $\widehat{\text{Diff}}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$ est un groupe, et donc $\Phi^{-1} \in \widehat{\text{Diff}}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} x\mathcal{L}_{\Phi_*(X)}(\omega) &= x(\Phi^{-1})^*\mathcal{L}_X(\Phi^*(\omega)) \\ &= x(\Phi^{-1})^*\mathcal{L}_X(\omega + \langle dx \rangle) \\ &= x(\Phi^{-1})^*(\mathcal{L}_X(\omega)) + x(\Phi^{-1})^*(\mathcal{L}_X(\langle dx \rangle)) \\ &= x(\Phi^{-1})^*(\langle dx \rangle) + x(\Phi^{-1})^*(\langle dx \rangle) \\ &\in \langle dx \rangle . \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 2.49. En d'autres mots, nous avons une action du groupe $\widehat{\text{Diff}}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$ sur $\widehat{\chi}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$.

Nous allons à présent donner une caractérisation du fait d'être transversalement hamiltonien, pour un champ $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$, en terme de son développement monomial (voir remarque 2.27). Considérons tout d'abord un champ monomial :

$$X = x^{k_0}y_1^{k_1}y_2^{k_2}S(\mu) ,$$

avec $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, tel que $\mathcal{L}_X(x) \in \langle x \rangle$. Nécessairement, on doit avoir $\mu_0 = 0$ ou $k_0 \geq 0$. Regardons l'action de la dérivée de Lie de X sur ω :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\omega) &= -\frac{\mathcal{L}_X(x)}{x^2}dy_1 \wedge dy_2 + \frac{1}{x}d(\mathcal{L}_X(y_1)) \wedge dy_2 + \frac{1}{x}dy_1 \wedge d(\mathcal{L}_X(y_2)) \\ &= -\mu_0 x^{k_0-1}y_1^{k_1}y_2^{k_2}dy_1 \wedge dy_2 + \frac{\mu_1}{x}d(x^{k_0}y_1^{k_1+1}y_2^{k_2}) \wedge dy_2 \\ &\quad + \frac{\mu_2}{x}dy_1 \wedge d(x^{k_0}y_1^{k_1}y_2^{k_2+1}) \\ &= (\mu_1(k_1+1) + \mu_2(k_2+1) - \mu_0)x^{k_0-1}y_1^{k_1}y_2^{k_2}dy_1 \wedge dy_2 + \langle dx \rangle . \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_X(dx) &= d(\mathcal{L}_X(x)) \\
 &= d\left(\mu_0 x^{k_0+1} y_1^{k_1} y_2^{k_2}\right) \\
 &= \mu_0 \left((k_0+1) x^{k_0} y_1^{k_1} y_2^{k_2} dx + k_1 x^{k_0+1} y_1^{k_1-1} y_2^{k_2} dy_1 \right. \\
 &\quad \left. + k_2 x^{k_0+1} y_1^{k_1} y_2^{k_2-1} dy_2 \right).
 \end{aligned}$$

En conclusion, on a le lemme suivant :

Lemme 2.50. *Soit $\mathbf{k} = (k_0, k_1, k_2) \in \mathcal{I}$. Le champ de vecteurs monomial $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu_0, \mu_1, \mu_2)$ est transversalement hamiltonien si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\mu_1(k_1+1) + \mu_2(k_2+1) = \mu_0$
2. $\mu_0 = 0$ ou bien $k_1 = k_2 = 0$.

En conséquence, on a la proposition suivante.

Proposition 2.51. *Soit $X \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$ un champ de vecteurs singulier et soit*

$$X = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{I}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu_{\mathbf{k}})$$

son développement monomial. Alors, X est transversalement hamiltonien si et seulement si pour tout $\mathbf{k} \in \mathcal{I}$, $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu_{\mathbf{k}})$ est transversalement hamiltonien.

Démonstration. Clairement, si $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu_{\mathbf{k}})$ est transversalement hamiltonien pour tout $\mathbf{k} \in \mathcal{I}$, alors X est transversalement hamiltonien. En effet, par convergence dans la topologie de Krull :

$$\mathcal{L}_X(\omega) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{I}} \mathcal{L}_{\mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu_{\mathbf{k}})}(\omega) \in \langle dx \rangle$$

et

$$\mathcal{L}_X(dx) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{I}} \mathcal{L}_{\mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu_{\mathbf{k}})}(dx) \in \langle dx \rangle,$$

car $\langle dx \rangle$ est fermé.

Réciproquement, supposons que X soit transversalement hamiltonien. Par l'absurde, s'il existe $\mathbf{k}$ avec $|\mathbf{k}|$ minimum tel que

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu_0, \mu_1, \mu_2)}(dx) \notin \langle dx \rangle,$$

alors on ne peut pas avoir $\mathcal{L}_X(dx) \in \langle dx \rangle$. En effet, d'après les calculs ci-dessus, les termes d'ordre minimum de $\mathcal{L}_X(dx)$ qui n'appartiennent pas à l'idéal $\langle dx \rangle$ sont

$$\begin{aligned}
 &\mu_0 \left(k_1 x^{k_0+1} y_1^{k_1-1} y_2^{k_2} dy_1 + k_2 x^{k_0+1} y_1^{k_1} y_2^{k_2-1} dy_2 \right) \neq 0 \\
 &\quad \text{(la condition 2. du lemme 2.50 n'est pas satisfaite)}.
 \end{aligned}$$

D'où, pour tout $\mathbf{k} \in \mathcal{I}$, on a

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu_0, \mu_1, \mu_2)}(dx) \in \langle dx \rangle.$$

De manière analogue, s'il existait $\mathbf{k}$ avec $|\mathbf{k}|$ minimum tel que

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu_{\mathbf{k}})}(\omega) \notin \langle dx \rangle,$$

alors on ne pourrait pas avoir $\mathcal{L}_X(\omega) \in \langle dx \rangle$. En effet, d'après les calculs ci-dessus, les termes d'ordre minimum de $\mathcal{L}_X(\omega)$ qui n'appartiennent pas à l'idéal $\langle dx \rangle$ sont

$$(\mu_1(k_1 + 1) + \mu_2(k_2 + 1) - \mu_0) x^{k_0-1} y_1^{k_1} y_2^{k_2} dy_1 \wedge dy_2 \neq 0$$

(la condition 1. du lemme 2.50 n'est pas satisfaite).

Par conséquent, pour tout $\mathbf{k} \in \mathcal{I}$, on a $\mathcal{L}_{\mathbf{x}^{\mathbf{k}}S(\mu_{0,\mathbf{k}}, \mu_{1,\mathbf{k}}, \mu_{2,\mathbf{k}})}(\omega) \in \langle \omega \rangle$ et $\mathbf{x}^{\mathbf{k}}S(\mu_{\mathbf{k}})$ est transversalement hamiltonien. $\square$

Voici enfin un corollaire sur la valeur du résidu dans le cas transversalement hamiltonien.

Corollaire 2.52. *Si X est un nœud-col 2-résonant transversalement hamiltonien, alors $\text{res}(X) = 1$. En particulier, X est non dégénéré.*

Démonstration. On considère le développement monomial de X :

$$X = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{I}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} S(\mu_{0,\mathbf{k}}, \mu_{1,\mathbf{k}}, \mu_{2,\mathbf{k}}) .$$

Le résidu de X est alors :

$$\text{res}(X) = \mu_{1,(1,0,0)} + \mu_{2,(1,0,0)} .$$

D'après le lemme 2.50, puisque X est transversalement hamiltonien, on a :

$$\mu_{1,(1,0,0)} + \mu_{2,(1,0,0)} = \mu_{0,(1,0,0)} = 1 .$$

$\square$

Chapitre 3

Classification formelle fibrée

Dans ce chapitre, nous étudierons le problème de la classification de $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{fib,nd}}$ (*resp.* $\widehat{\mathcal{SN}}_\omega$) modulo l'action par conjugaison de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ (*resp.* $\widehat{\text{Diff}}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$). Pour cela, nous allons prouver le théorème 1.5. Nous commencerons par démontrer la partie « existence » en première section, puis nous montrerons la partie « unicité », grâce à la proposition 3.3. Celle-ci permettra également d'obtenir immédiatement le corollaire 1.7. Nous donnerons également en dernière section les isotopies fibrées de la forme normale obtenue.

3.1 Existence d'une forme normale formelle (fibrée)

Considérons un nœud-col 2-résonant diagonal non dégénéré

$$\begin{aligned} Y = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda y_1 + F_1(x, y_1, y_2)) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + (\lambda y_2 + F_2(x, y_1, y_2)) \frac{\partial}{\partial y_2} , \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $F_\nu(x, \mathbf{y}) \in \mathfrak{m}^2$, pour $\nu = 1, 2$ ($\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de $\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$). Nous pouvons donc écrire le développement monomial de Y sous la forme :

$$Y = \lambda S(0, -1, 1) + x S(1, 0, 0) + \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathcal{I} \\ |\mathbf{k}| \geq 1}} x^{k_0} y_1^{k_1} y_2^{k_2} S(0, \mu_{1,\mathbf{k}}, \mu_{2,\mathbf{k}}) , \quad (3.1.2)$$

où

$$\mathcal{I} := \left\{ \mathbf{k} = (k_0, k_1, k_2) \in (\mathbb{Z}_{\geq -1})^3 \mid \text{au plus un des } (k_j)_{j=0,1,2} \text{ est égal à } -1 \right\} .$$

Comme Y est non dégénéré, on a :

$$\mu_{1,(1,0,0)} + \mu_{2,(1,0,0)} = \text{res}(Y) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{\leq 0} .$$

Si Y est transversalement symplectique, alors chaque terme de la somme

$$\sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathcal{I} \\ |\mathbf{k}| \geq 1}} x^{k_0} y_1^{k_1} y_2^{k_2} S(0, \mu_{1,\mathbf{k}}, \mu_{2,\mathbf{k}})$$

doit satisfaire

$$\mu_{1,\mathbf{k}}(k_1 + 1) + \mu_{2,\mathbf{k}}(k_2 + 1) = 0 , \text{ si } \mathbf{k} \neq (1, 0, 0) ,$$

et $\mu_{1,(1,0,0)} + \mu_{2,(1,0,0)} = 1$ sinon.

Si Y est div-intégrable, alors, quitte à effectuer une transformation de la forme

$$(x, y_1, y_2) \mapsto \left(x, y_1 + O\left(\|y\|^2\right), y_2 + O\left(\|y\|^2\right) \right),$$

on peut supposer que $Y|_{\{x=0\}}$ est orbitalement linéaire, *i.e.* pour $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(0, k_1, k_2) \in \mathcal{I}$, on a :

$$\mu_{1,(0,k_1,k_2)} + \mu_{2,(0,k_1,k_2)} = 0.$$

Pour démontrer la partie existence du théorème 1.5, l'idée générale est d'utiliser successivement des difféomorphismes (une infinité si besoin est) de la forme

$$\exp\left(x^{j_0} y_1^{j_1} y_2^{j_2} S(0, \mu_{1,j}, \mu_{2,j})\right)$$

pour des choix judicieux de $j, \mu_{1,j}, \mu_{2,j}$, afin d'éliminer tous les termes que l'on souhaite. On utilisera bien évidemment fortement la proposition 2.20.

Dans le lemme suivant, on montre que l'on peut formellement éliminer tous les monômes non-résonants, tout en préservant la « forme » du champ de vecteurs. On notera en particulier que l'hypothèse de non-dégénérescence n'est pas nécessaire ici.

Lemme 3.1. *Considérons le champ*

$$Y = \lambda S(0, -1, 1) + xS(1, 0, 0) + \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathcal{I} \\ |\mathbf{k}| \geq 1}} x^{k_0} y_1^{k_1} y_2^{k_2} S(0, \mu_{1,\mathbf{k}}, \mu_{2,\mathbf{k}}) \quad ,$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors, il existe un difféomorphisme formel fibré et tangent à l'identité $\hat{\Phi}_1 \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ tel que

$$\left(\hat{\Phi}_1\right)_*(Y) =: Y_1$$

soit de la forme :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \lambda S(0, -1, 1) + xS(1, a_1, a_2) \\ &+ \sum_{\substack{k_0+k \geq 1 \\ (k_0,k) \neq (1,0)}} x^{k_0} y_1^k y_2^k S\left(0, \mu'_{1,(k_0,k,k)}, \mu'_{2,(k_0,k,k)}\right), \end{aligned}$$

avec $\text{res}(Y) = \text{res}(Y_1) = a_1 + a_2$.

Si, de plus, Y est asymptotiquement orbitalement linéaire, alors Y_1 l'est aussi.

*Si, de plus, Y est transversalement hamiltonien, alors $\text{res}(Y) = a_1 + a_2 = 1$, et on peut prendre Φ_1 transversalement symplectique, *i.e.* $\Phi_1 \in \widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$, et dans ce cas Y_1 est aussi transversalement hamiltonien.*

Démonstration. Le but est d'éliminer successivement tous les monômes non-résonants, *i.e.* ceux de la forme :

$$x^{k_0} y_1^{k_1} y_2^{k_2} S(0, \mu_{1,\mathbf{k}}, \mu_{2,\mathbf{k}}), \text{ avec } \mathbf{k} \in \mathcal{I}, |\mathbf{k}| \geq 1 \text{ et } k_1 \neq k_2.$$

Pour cela, nous allons utiliser des difféomorphismes de la forme

$$\exp\left(x^{i_0} y_1^{i_1} y_2^{i_2} S(0, \eta_{1,i}, \eta_{2,i})\right),$$

avec $\mathbf{i} = (i_0, i_1, i_2) \in \mathcal{I}$, $|\mathbf{i}| \geq 1$, $i_1 \neq i_2$ et $\eta_{1,i}, \eta_{2,i}$ à déterminer. Grâce à la proposition 2.20, on a :

$$\left(\exp\left(x^{i_0} y_1^{i_1} y_2^{i_2} S(0, \eta_{1,i}, \eta_{2,i})\right)\right)_*(Y) = Y + [x^{i_0} y_1^{i_1} y_2^{i_2} S(0, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}), Y] + \dots,$$

où le symbole $(\dots)$ désigne des termes calculés *via* des crochets successifs, et qui sont d'ordre au moins $|\mathbf{i}| + 1$. Calculons le premier crochet :

$$\begin{aligned} & \left[x^{i_0} y_1^{i_1} y_2^{i_2} S(0, \eta_{1,\mathbf{i}}, \eta_{2,\mathbf{i}}), Y \right] \\ = & \lambda (i_1 - i_2) x^{i_0} y_1^{i_1} y_2^{i_2} S(0, \eta_{1,\mathbf{i}}, \eta_{2,\mathbf{i}}) - i_0 x^{i_0+1} y_1^{i_1} y_2^{i_2} S(0, \eta_{1,\mathbf{i}}, \eta_{2,\mathbf{i}}) \\ & + \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathcal{I} \\ |\mathbf{k}| \geq 1}} x^{i_0+k_0} y_1^{i_1+k_1} y_2^{i_2+k_2} (k_1 \eta_{1,\mathbf{i}} + k_2 \eta_{2,\mathbf{i}}) S(0, \mu_{1,\mathbf{k}}, \mu_{2,\mathbf{k}}) \\ & - \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathcal{I} \\ |\mathbf{k}| \geq 1}} x^{i_0+k_0} y_1^{i_1+k_1} y_2^{i_2+k_2} (i_1 \mu_{1,\mathbf{k}} + i_2 \mu_{2,\mathbf{k}}) S(0, \eta_{1,\mathbf{i}}, \eta_{2,\mathbf{i}}) . \end{aligned}$$

On voit donc que l'on va pouvoir éliminer tous les termes de la forme $x^{i_0} y_1^{i_1} y_2^{i_2} S(0, \mu_{1,\mathbf{i}}, \mu_{2,\mathbf{i}})$ avec $|\mathbf{i}| \geq 1$ et $i_1 \neq i_2$, par récurrence sur $|\mathbf{i}| \geq 1$. En utilisant le lemme 2.15, on voit que l'on définit ainsi un élément $\Phi_1 \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ de sorte que $Y_1 := (\Phi_1)_*(Y)$ soit de la forme (3.1.2), mais sans monôme non-résonant.

Si Y est transversalement hamiltonien, d'après la proposition 2.51, les termes $x^{i_0} y_1^{i_1} y_2^{i_2} S(0, \eta_{1,\mathbf{i}}, \eta_{2,\mathbf{i}})$ à éliminer satisfont

$$\eta_{1,\mathbf{i}}(i_1 + 1) + \eta_{2,\mathbf{i}}(i_2 + 1) = 0 ,$$

et dans ce cas, Φ_1 est transversalement symplectique d'après la proposition 2.47 et le lemme 2.43. Le fait que $\text{res}(Y)=1$ a été prouvé dans le corollaire 2.52.

Si Y est asymptotiquement linéaire, alors les termes de la forme $y_1^{i_1} y_2^{i_2} S(0, \eta_{1,(0,i_1,i_2)}, \eta_{2,(0,i_1,i_2)})$ à éliminer satisfont

$$\eta_{1,(0,i_1,i_2)} + \eta_{2,(0,i_1,i_2)} = 0 .$$

Dans ce cas, on voit que l'on garde à chaque étape un champ asymptotiquement linéaire. $\square$

Dans le second lemme qui suit, on utilise l'hypothèse de non-dégénérescence du champ pour éliminer un certain type de monômes résonants.

Lemme 3.2. *Considérons le champ*

$$\begin{aligned} Y_1 &= \lambda \mathcal{L}(0, -1, 1) + x S(1, a_1, a_2) \\ &+ \sum_{\substack{k_0+k \geq 1 \\ (k_0,k) \neq (1,0)}} x^{k_0} y_1^k y_2^k S(0, \mu'_{1,\mathbf{k}}, \mu'_{2,\mathbf{k}}) , \end{aligned}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et supposons que Y_1 soit non dégénéré, i.e. $\text{res}(Y_1) := a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$. Alors, il existe un difféomorphisme formel fibré et tangent à l'identité $\hat{\Phi}_2 \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ tel que

$$(\hat{\Phi}_2)_*(Y_1) =: Y_2$$

soit de la forme :

$$Y_2 = \lambda S(0, -1, 1) + x S(1, a_1, a_2) + \sum_{k \geq 1} (y_1 y_2)^k S(0, \mu''_{1,\mathbf{k}}, \mu''_{2,\mathbf{k}}) .$$

Si, de plus, Y_1 est asymptotiquement linéaire, alors Y_2 l'est aussi.

Si, de plus, Y_1 est transversalement hamiltonien, alors on peut prendre Φ_2 transversalement symplectique, i.e. $\Phi_2 \in \widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$, et dans ce cas Y_2 est aussi transversalement hamiltonien.

Démonstration. Le but est cette fois-ci d'éliminer successivement tous les termes de la forme

$$x^{i_0} (y_1 y_2)^i S(0, \eta_{1,\mathbf{i}}, \eta_{2,\mathbf{i}}), (i_0, i) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\} ,$$

sauf pour $(i_0, i) = (1, 0)$ et $i_0 = 0$. Pour cela, nous utiliserons des difféomorphismes de la forme

$$\exp \left(x^{i_0} (y_1 y_2)^i S(0, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) \right) ,$$

avec $i_0 + i \geq 1$, et $\eta_{1,i}, \eta_{2,i}$ à déterminer. Grâce à la proposition 2.20, nous avons :

$$\left(\exp \left(x^{i_0} (y_1 y_2)^i S(0, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) \right) \right)_* (Y_1) = Y_1 + \left[x^{i_0} (y_1 y_2)^i S(0, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}), Y_1 \right] + \dots ,$$

où le symbole $(\dots)$ désigne des termes calculés *via* des crochets successifs, et qui sont d'ordre strictement plus grand que le premier crochet. Calculons celui-ci :

$$\begin{aligned} & \left[x^{i_0} (y_1 y_2)^i S(0, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}), Y_1 \right] \\ &= - (i_0 + i(a_1 + a_2)) x^{i_0+1} (y_1 y_2)^i S(0, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) \\ &+ \sum_{\substack{k_0+2k \geq 1 \\ (k_0, k) \neq (1,0)}} x^{i_0+k_0} (y_1 y_2)^{i+k} k (\eta_{1,i} + \eta_{2,i}) S(0, \mu'_{1,k}, \mu'_{2,k}) \\ &- \sum_{\substack{k_0+2k \geq 1 \\ (k_0, k) \neq (1,0)}} x^{i_0+k_0} (y_1 y_2)^{i+k} i (\mu'_{1,k} + \mu'_{2,k}) S(0, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) . \end{aligned}$$

On voit alors que l'on va pouvoir éliminer successivement tous les termes de la forme

$$x^{i_0} (y_1 y_2)^i S(0, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) ,$$

sauf pour $(i_0, i) = (1, 0)$ et $i_0 = 0$, et, c'est important, sans créer de nouveau termes non-résonants. Tout ceci est possible car $(a_1 + a_2) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$. Raisonnons par récurrence sur $I := i_0 + i \geq 1$, et pour chaque $I \geq 1$ fixé, éliminons les termes successivement avec i croissant et i_0 décroissant (ceci ne comporte qu'un nombre fini d'étape). Remarquons qu'en procédant de la sorte, on ne crée pas de terme déjà éliminé plus tôt dans le processus. Grâce au lemme 2.15, on voit que tout ce processus nous permet de définir un élément $\Phi_2 \in \overline{\text{Diff}}_{\text{fb}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ tel que $Y_2 := (\Phi_2)_*(Y_1)$ soit de la forme :

$$Y_2 = \lambda S(0, -1, 1) + x S(1, a_1, a_2) + \sum_{k \geq 1} (y_1 y_2)^k S(0, \mu''_{1,k}, \mu''_{2,k}) .$$

Si Y_1 est transversalement hamiltonien, les termes $x^{i_0} (y_1 y_2)^i S(0, \eta_{1,i}, \eta_{2,i})$ à éliminer satisfont nécessairement $(\eta_{1,i} + \eta_{2,i}) = 0$ d'après la proposition 2.51. Il s'en suit que Φ_2 est transversalement symplectique d'après la proposition 2.47 et le lemme 2.43.

Enfin, on remarque dans le processus de récurrence que si Y_1 est asymptotiquement linéaire, alors Y_2 l'est aussi. $\square$

Nous avons à présent tous les ingrédients pour prouver la partie existence du théorème 1.5.

Démonstration. (Partie « existence » du théorème 1.5)

C'est immédiat : il suffit d'utiliser successivement les deux lemmes précédents. $\square$

3.2 Unicité de la forme normale (fibrée) : preuve du théorème A

Dans cette section, nous allons prouver la partie « unicité » du théorème A. Plus précisément, nous allons montrer la proposition plus générale suivante.

Proposition 3.3. Soient $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}^*$, $a_1, a_2, a'_1, a'_2 \in \mathbb{C}$ tels que $a_1 + a_2, a'_1 + a'_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{\leq 0}$, et $c_1, c_2, c'_1, c'_2 \in v\mathbb{C}[[v]]$, et considérons les deux champs suivants :

$$\begin{cases} Y = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x + c_1 (y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + (\lambda + a_2 x + c_2 (y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ Y' = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda' + a'_1 x + c'_1 (y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + (\lambda' + a'_2 x + c'_2 (y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} . \end{cases}$$

Alors, il existe $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ tel que $\Phi_*(Y) = Y'$ si et seulement si

$$\Phi(x, y_1, y_2) = \begin{cases} (x, \theta_1 y_1, \theta_2 y_2) \\ \text{ou} \\ (x, \theta_1 y_2, \theta_2 y_1) \end{cases}$$

avec $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{C}^*$, et

$$(\lambda, a_1, a_2, c_1(v), c_2(v)) = \begin{cases} (\lambda', a'_1, a'_2, c'_1(\theta_1 \theta_2 v), c'_2(\theta_1 \theta_2 v)) \\ \text{ou (respectivement)} \\ (-\lambda', a'_2, a'_1, c'_2(\theta_1 \theta_2 v), c'_1(\theta_1 \theta_2 v)) \end{cases}$$

Démonstration. L'implication indirecte est triviale.

Supposons donc que Y soit conjugué à Y' via $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$. En étudiant les termes linéaires par rapport à $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, on voit immédiatement qu'on a nécessairement :

$$(\lambda, a_1, a_2) = \begin{cases} (\lambda', a'_1, a'_2) \\ \text{ou} \\ (-\lambda', a'_2, a'_1) . \end{cases}$$

Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées qui échange y_1 et y_2 , on peut supposer que $(\lambda, a_1, a_2) = (\lambda', a'_1, a'_2)$. Dans la suite de cette preuve, et par commodité d'écriture, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{cases} Y = Y_{(c,r)} := xS(1, a_1, a_2) + (\lambda + c(v))S(0, -1, 1) + r(v)S(0, a_1, a_2) \\ Y' = Y_{(c',r')} := xS(1, a_1, a_2) + (\lambda + c'(v))S(0, -1, 1) + r'(v)S(0, a_1, a_2) \end{cases} ,$$

avec

$$\begin{cases} v = y_1 y_2 \\ c_1 = -c + r \quad , \quad c_2 = c + r \\ c'_1 = -c' + r' \quad , \quad c'_2 = c' + r' . \end{cases}$$

En particulier, $\text{ord}(c) \geq 1$ et $\text{ord}(r) \geq 1$. Montrons que $(c, r) = (c', r')$. Par hypothèse, il existe $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ tel que

$$\Phi_*(Y_{(c,r)}) = Y_{(c',r')} .$$

D'après la remarque 2.30, $D_0\Phi = \text{diag}(1, \theta_1, \theta_2)$ est diagonale. Si l'on note $\Psi := (D_0\Phi)^{-1} \circ \Phi$, $\varphi : v \mapsto (\theta_1 \theta_2) v$, et $(\tilde{c}, \tilde{r}) := (c' \circ \varphi, r' \circ \varphi)$, alors on a :

$$\Psi_*(Y_{(c,r)}) = Y_{(\tilde{c}, \tilde{r})} ,$$

avec $\Psi \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ (tangent à l'identité). Nous allons montrer que $\Psi = \text{Id}$. D'après la proposition 2.28, il existe $G \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$ d'ordre au moins deux tel que $\Psi = \exp(G)$ et

$$G = g_0(x, v) \frac{\partial}{\partial x} + g_1(x, v) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + g_2(x, v) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} ,$$

avec $v = y_1 y_2$, $g_i \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[[x, v]]$ pour $i = 1, 2$ et $g_0 \in \mathfrak{m}^2 \subset \mathbb{C}[[x, v]]$. Comme Ψ est fibré, $g_0 = 0$. En utilisant la notation (2.4.2), on écrit :

$$G = A(x, v) S(0, -1, 1) + B(x, v) S(0, a_1, a_2) ,$$

avec :

$$\begin{cases} A = A_{i,j} x^i v^j \\ B = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \geq 1}} B_{i,j} x^i v^j \end{cases} .$$

Montrons que $A = B = 0$ (et donc $G = 0$), de sorte que $\Psi = \text{Id}$. Considérons la décomposition de Jordan de $Y = Y_{(c,r)}$ et $\tilde{Y} := Y_{(\tilde{c}, \tilde{r})}$:

$$\begin{cases} Y = Y_S + Y_N & , Y_S \text{ semi-simple, } Y_N \text{ nilpotent, } [Y_S, Y_N] = 0 \\ \tilde{Y} = \tilde{Y}_S + \tilde{Y}_N & , \tilde{Y}_S \text{ semi-simple, } \tilde{Y}_N \text{ nilpotent, } [\tilde{Y}_S, \tilde{Y}_N] = 0 \end{cases} .$$

Par unicité de la décomposition, on a

$$\begin{cases} Y_S = \tilde{Y}_S = S(0, -\lambda, \lambda) \\ Y_N = xS(1, a_1, a_2) + c(v)S(0, -1, 1) + r(v)S(0, a_1, a_2) \\ \tilde{Y}_N = xS(1, a_1, a_2) + \tilde{c}(v)S(0, -1, 1) + \tilde{r}(v)S(0, a_1, a_2) \end{cases} ,$$

et on sait également que :

$$\Psi_*(Y) = \tilde{Y} \Rightarrow \begin{cases} \Psi_*(Y_S) = \tilde{Y}_S \\ \Psi_*(Y_N) = \tilde{Y}_N \end{cases} .$$

Considérons les champs de vecteurs bidimensionnels associés aux monômes résonants (x, v) . Dans les coordonnées (x, v) le champ de vecteurs G est associé au champ

$$F = B(x, v) S(0, a) ,$$

avec $a = a_1 + a_2$. Dans ces coordonnées, Y et $\tilde{Y}$ correspondent respectivement à :

$$\begin{aligned} Z &:= xS(1, a) + r(v)S(0, a) , \\ \tilde{Z} &:= xS(1, a) + \tilde{r}(v)S(0, a) . \end{aligned}$$

On en déduit que $\exp(F)_*(Z) = \tilde{Z}$. D'après la proposition 2.20 :

$$\exp(F)_*(Z) = Z + [F, Z] + \frac{1}{2!} [F, [F, Z]] + \dots$$

et donc

$$r(v)S(0, a) + [F, Z] + \frac{1}{2!} [F, [F, Z]] + \dots = \tilde{r}(v)S(0, a) . \quad (3.2.1)$$

Après calcul, on obtient :

$$[F, Z] = \{-x(\mathcal{L}_{S(1,a)}(B)) + B(\mathcal{L}_{S(0,a)}(r)) - r(\mathcal{L}_{S(0,a)}(B))\} S(0, a) .$$

Si l'on définit

$$\begin{aligned} C^{(1)}(x, v) &:= -x(\mathcal{L}_{S(1,a)}(B)) + B(\mathcal{L}_{S(0,a)}(r)) \\ &\quad - r(\mathcal{L}_{S(0,a)}(B)) , \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

alors on a au final :

$$[F, Z] = C^{(1)}(x, v) S(0, a) .$$

A présent, on voit facilement que pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\text{ad}_F^{ol}(Z)$ peut s'écrire :

$$\text{ad}_F^{ol}(Z) = C^{(l)}(x, v) S(0, a) ,$$

où $C^{(l)}$ est déterminé par la relation de récurrence

$$C^{(l+1)}(x, v) = B(x, v) \left(\mathcal{L}_{S(0, a)} \left(C^{(l)} \right) \right) - C^{(l)}(x, v) \left(\mathcal{L}_{S(0, a)}(B) \right) .$$

En particulier, pour tout $l \geq 2$, $C^{(l)}(x, 0) = 0$. L'équation (3.2.1) s'écrit à présent :

$$r(v) + C^{(1)}(x, v) + \sum_{l \geq 2} C^{(l)}(x, v) = \tilde{r}(v) . \quad (3.2.3)$$

Écrivons $r(v) = \sum_{k \geq 1} r_k v^k$ et $\tilde{r}(v) = \sum_{k \geq 1} \tilde{r}_k v^k$. En étudiant les termes indépendant de v dans (3.2.3) (*i.e.* en faisant $v = 0$), on voit que $C^{(1)}(x, 0) = 0$. En revenant à l'expression (3.2.2), on en déduit que $\frac{\partial B(x, 0)}{\partial x} = 0$. Comme $\text{ord}(B) \geq 1$, on a nécessairement $B(x, 0) = 0$. Montrons à présent par récurrence sur $j \geq 0$ que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $k \leq j$, $B_{i, k} = 0$ et $r_k = \tilde{r}_k$.

- $j = 0$: cela correspond au cas décrit ci-dessus ; $B_{i, 0} = 0$ pour tout $i \geq 0$ (et $r_0 = \tilde{r}_0 = 0$).
- Supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang $j \geq 0$. Considérons pour tout $i \geq 0$ les termes de degré homogène $(i + 1, j + 1)$ dans (3.2.3) : on obtient

$$(i + a(j + 1)) B_{i, j+1} = 0$$

par hypothèse de récurrence, et car $C^{(l)}(x, 0) = 0$, pour tout $l \geq 2$. Comme $a \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$, on a $B_{i, j+1} = 0$. D'un autre côté, si l'on regarde les termes de degré homogène $(0, j + 1)$, on obtient : $r_{j+1} = \tilde{r}_{j+1}$. On conclut que $B = 0$, et donc $F = 0$ et $r = \tilde{r}$.

Finalement, on a :

$$G = A(x, v) S(0, -1, 1) .$$

Si l'on en revient à l'équation $\exp(G)_*(Y_N) = \tilde{Y}_N$, on a

$$Y_N + [G, Y_N] + \frac{1}{2!} [G, [G, Y_N]] + \dots = \tilde{Y}_N$$

si et seulement si

$$c(v) S(0, -1, 1) + [G, Y_N] + \frac{1}{2!} [G, [G, Y_N]] + \dots = \tilde{c}(v) S(0, -1, 1) .$$

Calculons le crochet $[G, Y_N]$:

$$[G, Y_N] = - \left\{ x \mathcal{L}_{S(1, a_1, a_2)}(A) + r(v) \mathcal{L}_{S(0, a_1, a_2)}(A) \right\} S(0, -1, 1) .$$

Tous les autres crochets sont nuls. Il reste donc :

$$c(v) - x \mathcal{L}_{S(1, a_1, a_2)}(A) - r(v) \mathcal{L}_{S(0, a_1, a_2)}(A) = \tilde{c}(v) .$$

En identifiant les termes de même degré, cette dernière égalité se traduit par :

$$\begin{cases} c_j - \sum_{k=0}^{j-k_1} a k A_{0, k} r_{j-k} = \tilde{c}_j & , j \geq 0 \\ (i + a j) A_{i, j} + \sum_{k=0}^{j-k_1} a k A_{i+1, k} r_{j-k} = 0 & , i \geq 0, j \geq 0 . \end{cases}$$

À nouveau, on montre par récurrence sur $j \geq 0$ que pour tout $i \geq 0$ et tout $0 \leq k \leq j$, $A_{i,k} = 0$ et $c_k = \tilde{c}_k$. On a donc $A = 0$ et $c = \tilde{c}$.

En conclusion, $\Psi = \text{Id}$, $(c, r) = (\tilde{c}, \tilde{r})$, donc $\Phi = \text{diag}(1, \theta_1, \theta_2)$ et $(c, r) := (c' \circ \varphi, r' \circ \varphi)$, avec $\varphi : v \mapsto (\theta_1 \theta_2) v$. $\square$

Nous pouvons à présent achever la preuve du théorème A.

Démonstration. (du théorème A.)

Nous avons démontré dans la section précédente l'existence d'une normalisation fibrée et tangente à l'identité. La proposition ci-dessus nous montre l'unicité à la fois de la forme normale obtenue mais aussi de la normalisation formelle fibrée et tangente à l'identité. $\square$

3.3 Isotropies fibrées formelles de la forme normale et classification fibrée : preuve du théorème B

En conséquence de la proposition 3.3, nous avons en particulier la liste de toutes les isotropies formelles fibrées de la forme normale obtenue. Pour un champ de vecteurs $Y \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$, l'ensemble des isotropies fibrées est par définition :

$$\widehat{\text{Isot}}_{\text{fib}}(Y) := \left\{ \Phi \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0) \mid \Phi_*(Y) = Y \right\}.$$

Corollaire 3.4. Soit $Y \in \widehat{\mathcal{SN}}_{\text{fib,nd}}$ une forme normale fibrée de paramètre $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c_1, c_2) \in \mathcal{P}_{\text{fib}}$:

$$\begin{aligned} Y &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x + c_1 (y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &\quad + (\lambda + a_2 x + c_2 (y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\widehat{\text{Isot}}_{\text{fib}}(Y) = \left\{ \text{diag}(1, \theta_1, \theta_2), (\theta_1, \theta_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid (c_1, c_2)(\theta_1 \theta_2 v) = (c_1, c_2)(v) \right\}.$$

Remarque 3.5. Si $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, la condition $c_i(\theta_1 \theta_2 v) = c_i(v)$ pour chaque $i \in \{1, 2\}$, est équivalente à imposer que chaque c_i soit dans $\mathbb{C}[[v^q]]$, pour un certain $q \in \mathbb{N}_{>0}$ et que $\theta_1 \theta_2$ soit une racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité.

Si Y est transversalement hamiltonien, on définit le groupe des isotropies symplectiques de Y :

$$\widehat{\text{Isot}}_{\omega}(Y) := \left\{ \Phi \in \widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0) \mid \Phi_*(Y) = Y \right\}.$$

On a alors :

Corollaire 3.6. Soit $Y \in \widehat{\mathcal{SN}}_{\omega}$ une forme normale symplectique de paramètre $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c) \in \mathcal{P}_{\omega}$:

$$\begin{aligned} Y &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x - c(y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &\quad + (\lambda + a_2 x + c(y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\widehat{\text{Isot}}_{\omega}(Y) = \left\{ \text{diag}\left(1, \alpha, \frac{1}{\alpha}\right), \alpha \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

En conclusion, le théorème B est simplement un résumé de ce qui a été montré dans ce chapitre.

Démonstration. (du théorème B)

La bijection

$$\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}} / \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) \simeq \mathcal{P}_{\text{fib}}$$

est simplement une reformulation du théorème 1.5. Les bijections

$$\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{fib,nd}} / \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0) \simeq \mathcal{P}_{\text{fib}} / (\mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

et

$$\widehat{\mathcal{SN}}_{\omega} / \widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0) \simeq \mathcal{P}_{\omega}$$

sont des conséquences directes du théorème 1.5, de la proposition 3.3, ainsi que des corollaires 3.4 et 3.6 respectivement. $\square$

Chapitre 4

Classification formelle (non-fibrée) dans le cas div-intégrable

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord démontrer le théorème 1.8 et son corollaire 1.10 qui donnera la classification formelle complète de $\widehat{\mathcal{SN}}_*$ sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ par conjugaison. Ensuite, nous étudierons la classification orbitale, *i.e.* que nous étudierons complètement l'action de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0) \ltimes \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]^\times$ sur $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{orb},*}$ par équivalence orbitale. Pour cela, nous prouverons le théorème 1.11, ainsi que son corollaire 1.13.

4.1 Classification par conjugaison

Dans cette première section nous allons démontrer le théorème 1.8 et son corollaire 1.10.

4.1.1 Forme normale formelle (non fibrée)

Nous allons démontrer ici la première partie du théorème 1.8.

Démonstration. (partie « existence » du théorème 1.8.)

Soit $Y \in \widehat{\mathcal{SN}}_*$ un nœud-col 2-résonant non dégénéré et div-intégrable. Par définition, il existe $Y_0 \in \widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}}$ (div-intégrable) tel que Y soit $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ –conjugué à Y_0 . D'après le théorème 1.5, on sait que Y_0 est $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ –conjugué à un champ (div-intégrable) de la forme

$$\begin{aligned} Y_{\text{norm}} = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda - c(y_1 y_2) + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + (\lambda + c(y_1 y_2) + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} , \end{aligned}$$

où :

- $\lambda \in \mathbb{C}^*$,
- $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ sont tels que $\text{res}(Y_{\text{norm}}) := a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$,
- $c(v) = \sum_{k \geq 1} c_k v^k \in v\mathbb{C}[[v]]$.

Notons $m := \frac{1}{a_1 + a_2}$ et $k_0 := \text{ord}(c)$. Montrons qu'il existe $\tilde{c} = \sum_{k \geq k_0} \tilde{c}_k v^k \in v^{k_0} \mathbb{C}[[v]]$ avec $\text{ord}(\tilde{c}) = k_0$ et $\tilde{c}_{k_0+m} = 0$ si $m \in \mathbb{N}_{>0}$, ainsi que $\Psi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$, tel que

$$\begin{aligned} \Psi_*(Y_{\text{norm}}) &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (- (\lambda + \tilde{c}(v)) + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &\quad + (\lambda + \tilde{c}(v) + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} . \end{aligned}$$

Si $m \notin \mathbb{N}_{>0}$, ou si $c_{k_0+m} = 0$, il n'y a rien à faire. On suppose donc que $m \in \mathbb{N}_{>0}$, $k_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ et $c_{k_0+m} \neq 0$. Posons

$$F := -\frac{m}{k_0} \cdot \frac{c_{k_0+m}}{c_{k_0}} v^m S(1, a_1, a_2)$$

et $\Psi := \exp(F)$. D'après la proposition 2.20 :

$$\Psi_*(Y_{\text{norm}}) = Y_{\text{norm}} + [F, Y_{\text{norm}}] + \sum_{l \geq 2} \frac{1}{l!} \text{ad}_F^{\circ l}(Y_{\text{norm}}) .$$

On peut écrire :

$$Y_{\text{norm}} = xS(1, a_1, a_2) + (\lambda + c(v))S(0, -1, 1)$$

de sorte qu'en utilisant le lemme 2.26 :

$$[F, Y_{\text{norm}}] = \left\{ -c_{k_0+m} v^{k_0+m} - \frac{c_{k_0+m}}{k_0 c_{k_0}} v^m \sum_{k \geq k_0+1} k c_k v^k \right\} S(0, -1, 1) .$$

D'après le lemme 2.7, on voit que pour tout $l \geq 0$

$$\text{ord}(\text{ad}_F^{\circ(l+1)}(Y_{\text{norm}})) \geq \text{ord}(\text{ad}_F^{\circ l}(Y_{\text{norm}})) + m ,$$

et donc :

$$\text{ord}(\text{ad}_F^{\circ l}(Y_{\text{norm}})) \geq lm + k_0 + 1 .$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \Psi_*(X) &= X + [F, X] + \sum_{l \geq 2} \frac{1}{l!} \text{ad}_F^{\circ l}(Y_{\text{norm}}) \\ &= xS(1, a_1, a_2) + \left\{ \lambda + \left(\sum_{k=k_0}^{k_0+m-1} c_k v^k \right) + \left(\sum_{k \geq k_0+m+1} \tilde{c}_k v^k \right) \right\} S(0, -1, 1) , \end{aligned}$$

où pour tout $k \geq k_0 + m + 1$, $\tilde{c}_k \in \mathbb{C}$. Le résultat est donc montré en définissant

$$\tilde{c}(v) := \left(\sum_{k=k_0}^{k_0+m-1} c_k v^k \right) + \left(\sum_{k \geq k_0+m+1} \tilde{c}_k v^k \right) .$$

□

4.1.2 Unicité de la forme normale (non-fibrée) : preuve du théorème du théorème 1.8

Nous allons démontrer ici la partie « unicité » du théorème 1.8. Pour cela, nous montrerons plus précisément la proposition suivante :

Proposition 4.1. *Soient $(\lambda, \lambda', a_1, a_2, a'_1, a'_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C}^4$ tels que $a_1 + a_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{\leq 0}$ et $a'_1 + a'_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{\leq 0}$, avec $m := \frac{1}{a_1 + a_2}$ et $m' := \frac{1}{a'_1 + a'_2}$. Soit également $(c, c') \in (v\mathbb{C}[[v]])^2$ avec $\text{ord}(c) = k_0 \geq 1$, $\text{ord}(c') = k'_0 \geq 1$,*

$$\begin{cases} c(v) = \sum_{k \geq k_0} c_k v^k \\ c'(v) = \sum_{k \geq k'_0} c'_k v^k \end{cases}$$

et $c_{k_0+m} = 0$ (resp. $c'_{k'_0+m'} = 0$) si $m \in \mathbb{N}_{>0}$ (resp. $m' \in \mathbb{N}_{>0}$), et considérons les deux champs suivants :

$$\begin{cases} Z = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda - c(y_1 y_2) + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \quad + (\lambda + c(y_1 y_2) + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ Z' = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda' - c'(y_1 y_2) + a'_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \quad + (\lambda' + c'(y_1 y_2) + a'_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} . \end{cases}$$

Alors, il existe $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ tel que $\Phi_(Z) = Z'$ si et seulement si*

$$\Phi(x, y_1, y_2) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_2 \end{pmatrix} \circ \exp(\alpha Z + \beta v^m S(1, a_1, a_2)) \\ \text{ou} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 \\ 0 & \theta_2 & 0 \end{pmatrix} \circ \exp(\alpha Z + \beta v^m S(1, a_1, a_2)) \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{C}^$, ($\beta = 0$ si $m \notin \mathbb{N}_{>0}$ ou $c \neq 0$) et :*

$$(\lambda, a_1, a_2, c_1(v), c_2(v)) = \begin{cases} (\lambda', a'_1, a'_2, c'(\theta_1 \theta_2 v)) \\ \text{ou (respectivement)} \\ (-\lambda', a'_2, a'_1, -c'(\theta_1 \theta_2 v)) . \end{cases}$$

Démonstration. Nous allons procéder d'une manière similaire à la preuve de la proposition 3.3. La réciproque se vérifie immédiatement par un calcul rapide.

Supposons donc qu'il existe $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ tel que $\Phi_*(Z) = Z'$. En étudiant les termes linéaires en $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, on voit que nécessairement $(\lambda, a_1, a_2) = (\lambda', a'_1, a'_2)$, ou $(\lambda, a_1, a_2) = (-\lambda', a'_2, a'_1)$. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées qui échange y_1 et y_2 , on va désormais supposer que $(\lambda, a_1, a_2) = (\lambda', a'_1, a'_2)$. D'après la remarque 2.30, $D_0 \Phi = \text{diag}(1, \omega_1, \omega_2)$, avec $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{C}^*$. Considérons $\Psi := (D_0 \Phi)^{-1} \circ \Phi$, $\varphi : v \mapsto (\theta_1 \theta_2) v$, et $\tilde{c} := c' \circ \varphi$, de sorte que

$$\begin{aligned} \Psi_*(Z) = \tilde{Z} = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda - \tilde{c}(y_1 y_2) + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + (\lambda + \tilde{c}(y_1 y_2) + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} . \end{aligned}$$

Montrons tout d'abord que $Z = \tilde{Z}$, i.e. $c = \tilde{c}$. D'après la proposition 2.28, il existe $G \in \hat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$ tel que $\Psi = \exp(G)$ et :

$$G = g_0(x, v) \frac{\partial}{\partial x} + g_1(x, v) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + g_2(x, v) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} ,$$

avec $g_i \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[[x, v]]$ pour $i = 1, 2$, et $g_0 \in \mathfrak{m}^2 \subset \mathbb{C}[[x, v]]$. Écrivons :

$$G = A(x, v) S(0, -1, 1) + B(x, v) S(0, a_1, a_2) + C(x, v) S(1, 0, 0) ,$$

où

$$\begin{cases} A = \sum_{i,j \geq 0, i+j \geq 1} A_{i,j} x^i v^j \\ B = \sum_{i,j \geq 0, i+j \geq 1} B_{i,j} x^i v^j \\ C = \sum_{i \geq -1, j \geq 0, i+j \geq 1} C_{i,j} x^i v^j \end{cases} .$$

Considérons les décompositions de Jordan de Z et $\tilde{Z}$:

$$\begin{cases} Z = Z_S + Z_N \quad , \quad Z_S \text{ semi-simple, } Z_N \text{ nilpotent, } [Z_S, Z_N] = 0 \\ \tilde{Z} = \tilde{Z}_S + \tilde{Z}_N \quad , \quad \tilde{Z}_S \text{ semi-simple, } \tilde{Z}_N \text{ nilpotent, } [\tilde{Z}_S, \tilde{Z}_N] = 0 \end{cases} .$$

Par unicité de la décomposition on a :

$$\begin{cases} Z_S = \tilde{Z}_S = S(0, -\lambda, \lambda) \\ Z_N = x S(1, a_1, a_2) + c(v) S(0, -1, 1) \\ \tilde{Z}_N = x S(1, a_1, a_2) + \tilde{c}(v) S(0, -1, 1) \end{cases} ,$$

et on sait également que

$$\Psi_*(Z) = \tilde{Z} \implies \begin{cases} \Psi_*(Z_S) = \tilde{Z}_S \\ \Psi_*(Z_N) = \tilde{Z}_N \end{cases} .$$

Considérons à présent les champs bidimensionnels induits dans les variables (x, v) . G correspond dans les variables (x, v) à

$$F = B(x, v) S\left(0, \frac{1}{m}\right) + C(x, v) S(1, 0) ,$$

avec $m = \frac{1}{a_1 + a_2}$. Z et $\tilde{Z}$ correspondent tous deux à

$$X := x S\left(1, \frac{1}{m}\right) .$$

On a donc $\exp(F)_*(X) = X$. D'après la proposition 2.20 :

$$\exp(F)_*(X) = X + [F, X] + \frac{1}{2!} [F, [F, X]] + \dots$$

et donc

$$[F, X] + \frac{1}{2!} [F, [F, X]] + \dots = 0 . \tag{4.1.1}$$

On a le crochet suivant :

$$[F, X] = x \left(C - \mathcal{L}_{S(1, \frac{1}{m})}(C) \right) S(1, 0) + x \left(C - \mathcal{L}_{S(1, \frac{1}{m})}(B) \right) S\left(0, \frac{1}{m}\right) .$$

Comme $\text{ord}(F) \geq 2$, d'après le lemme 2.7, pour tout $l \geq 0$ on a :

$$\text{ord} \left(\text{ad}_F^{\circ(l+1)}(X) \right) \geq \text{ord} \left(\text{ad}_F^{\circ l}(X) \right) + 1 ,$$

et donc l'égalité (4.1.1) implique que $[F, Y] = 0$. On en déduit :

$$\begin{cases} C - \mathcal{L}_{S(1, \frac{1}{m})}(C) = 0 \\ C - \mathcal{L}_{S(1, \frac{1}{m})}(B) = 0 \end{cases} .$$

En identifiant les termes de même degré homogène, on obtient :

$$\begin{cases} C_{i,j} \left(1 - i - \frac{j}{m} \right) = 0 & , i \geq -1, j \geq 0, i+j \geq 1 \\ C_{i,j} - B_{i,j} \left(i + \frac{j}{m} \right) = 0 & , i, j \geq 0, i+j \geq 1 \\ C_{-1,j} = 0 & , j \geq 2 , \end{cases} \quad (4.1.2)$$

et donc, pour $i + \frac{j}{m} \neq 1$, on a $C_{i,j} = 0$. De plus, le système (4.1.2) montre que $B = C$. En conclusion, on a :

$$F = (\alpha x + \beta v^m) S\left(1, \frac{1}{m}\right) ,$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $\beta = 0$ si $m \notin \mathbb{N}$. D'où :

$$G = A(x, v) S(0, -1, 1) + (\alpha x + \beta v^m) S(1, a_1, a_2) .$$

A présent, remarquons que l'hyperplan $\{x=0\}$ est stable par Z_N , $\tilde{Z}_N$ et G . En particulier, l'équation $\exp(G)_*(Z_N) = \tilde{Z}_N$ peut être restreinte à $\{x=0\}$, *i.e.*

$$\exp(G|_{\{x=0\}})_* \left((Z_N)|_{\{x=0\}} \right) = \left(\tilde{Z}_N \right)|_{\{x=0\}} ,$$

qui est équivalent à

$$(Z_N)|_{\{x=0\}} + \left[G, (Z_N)|_{\{x=0\}} \right] + \frac{1}{2!} \left[G, \left[G, (Z_N)|_{\{x=0\}} \right] \right] + \dots = \left(\tilde{Z}_N \right)|_{\{x=0\}} ,$$

ou encore :

$$\begin{aligned} & c(v) S(0, -1, 1) + \left[G|_{\{x=0\}}, (Z_N)|_{\{x=0\}} \right] + \frac{1}{2!} \left[G|_{\{x=0\}}, \left[G|_{\{x=0\}}, (Z_N)|_{\{x=0\}} \right] \right] + \dots \\ &= \tilde{c}(v) S(0, -1, 1) . \end{aligned}$$

Calculons le crochet :

$$\left[G|_{\{x=0\}}, (Z_N)|_{\{x=0\}} \right] = \frac{\beta}{m} \left\{ \sum_{k \geq k_0} k c_k v^{k+m} \right\} S(0, -1, 1) .$$

On voit par récurrence que pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} & (\text{ad}_{G|_{\{x=0\}}})^{\circ n} \left((Z_N)_{|_{\{x=0\}}} \right) \\ &= \frac{\beta^n}{m^n} \left\{ \sum_{k \geq k_0} k(k+m) \dots (k+(n-1)m) c_k v^{k+nm} \right\} S(0, -1, 1) . \end{aligned}$$

En identifiant les termes de degré homogène $(0, k, k)$, pour tout $k < k_0 + m$, on obtient :

$$\forall k < k_0 + m, c_k = \tilde{c}_k .$$

En particulier, $k_0 = k'_0$. Si $m \in \mathbb{N}$ et si $k_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ (i.e. $c \neq 0$ et $\tilde{c} \neq 0$), pour $k = k_0 + m$, on a :

$$0 = \tilde{c}_{k_0+m} = c_{k_0+m} + \frac{\beta}{m} k_0 c_{k_0} = \frac{\beta}{m} k_0 c_{k_0} ,$$

et donc $\beta = 0$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \tilde{c}_k$, et donc $c = \tilde{c}$.

Pour l'instant, nous avons montré que $\Psi = \exp(G)$, avec

$$G = A(x, v) S(0, -1, 1) + (\alpha x + \beta v^m) S(1, a_1, a_2) ,$$

où $A = \sum_{i,j \geq 0, i+j \geq 1} A_{i,j} x^i v^j$, et $\beta = 0$ si $m \notin \mathbb{N}_{>0}$ ou si $c \neq 0$. Montrons que $A(x, v) = \alpha c(v) \in \mathbb{C}[[v]]$.

Comme on sait à présent que $c = \tilde{c}$, et donc $Z = \tilde{Z}$, le problème revient à déterminer $A(x, v)$ tel que $\exp(G)_*(Z_N) = Z_N$, i.e.

$$[G, Z_N] + \frac{1}{2!} [G, [G, Z_N]] + \dots = 0 .$$

D'après le lemme 2.7, comme $\text{ord}(G) \geq 2$, on a alors :

$$[G, Z_N] = 0 .$$

Puisque

$$[G, Z_N] = \left((\alpha x + \beta v^m) \mathcal{L}_{S(1, a_1, a_2)}(c) - x \mathcal{L}_{S(1, a_1, a_2)}(A) \right) S(0, -1, 1) ,$$

on doit alors nécessairement avoir :

$$(\alpha x + \beta v^m) \mathcal{L}_{S(1, a_1, a_2)}(c) - x \mathcal{L}_{S(1, a_1, a_2)}(A) = 0 . \quad (4.1.3)$$

— Si $c \neq 0$, on a vu que $\beta = 0$. Dans ce cas, l'égalité (4.1.3) se réduit à :

$$\alpha \frac{v}{m} \frac{dc}{dv} = x \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{v}{m} \frac{\partial A}{\partial v} .$$

Ceci détermine $A(x, v) = \sum_{i,j \geq 0, i+j \geq 1} A_{i,j} x^i v^j$ de manière unique :

$$\begin{cases} A_{0,j} = \alpha c_j & , j \geq 0 \\ A_{i,j} = 0 & , i \geq 1, j \geq 0 . \end{cases}$$

En conclusion, on a

$$A(x, v) = \alpha c(v) \in \mathbb{C}[[v]] ,$$

et donc :

$$G = \alpha Z_N = \alpha (x S(1, a_1, a_2) + c(v) S(0, -1, 1)) .$$

- Si $c = 0$ et $m \in \mathbb{N}_{>0}$, alors pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\left(i + \frac{j}{m}\right) A_{i,j} = 0$, et comme $m \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$, $A = 0 = \alpha c$. Dans ce cas :

$$G = (\alpha x + \beta v^m) S(1, a_1, a_2) .$$

- Si $c = 0$ et $m \notin \mathbb{N}_{>0}$, alors $\beta = 0$, et comme ci-dessus, $A = 0 = \alpha c$. Dans ce cas :

$$G = \alpha x S(1, a_1, a_2) .$$

On en déduit le résultat attendu en se rappelant que $\Psi = \exp(G) = (D_0 \Phi)^{-1} \circ \Phi$. □

Nous sommes à présent en mesure d'achever la preuve du théorème 1.8.

Démonstration. (Théorème 1.8.)

On a déjà prouvé la partie « existence » dans la sous-section précédente. Il suffit d'appliquer la proposition précédente afin d'obtenir la partie « unicité » du théorème. □

4.1.3 Isotropies formelles de la forme normale (non-fibrée) et classification formelle

La proposition démontrée dans la sous-section précédente a comme conséquence immédiate le corollaire suivant, donnant les isotropies formelles d'une forme normale (non-fibrée) de $\widehat{\mathcal{SN}}_*$. On rappelle que pour un champ de vecteurs $Y \in \widehat{\chi}(\mathbb{C}^3, 0)$, l'ensemble des isotropies est par définition :

$$\widehat{\text{Isot}}(Y) := \left\{ \Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0) \mid \Phi_*(Y) = Y \right\} .$$

Corollaire 4.2. Soit $Y \in \widehat{\mathcal{SN}}_*$ une forme normale de paramètre $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, c) \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} Y = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x - c(y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + (\lambda + a_2 x + c(y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} , \end{aligned}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tels que $a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$ et $c(v) = \sum_{k \geq k_0} c_k v^k \in v^{k_0} \mathbb{C}[[v]]$, $k_0 = \text{ord}(c)$, tel

que si $m := \frac{1}{a_1 + a_2} \in \mathbb{N}_{>0}$, alors $c_{k_0+m} = 0$.

Alors :

- si $c \neq 0$ ou si $m \notin \mathbb{N}_{>0}$:

$$\widehat{\text{Isot}}(Y) = \left\{ \text{diag}(1, \theta_1, \theta_2) \circ \exp(\alpha Y) \mid \begin{array}{l} (\alpha, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^*)^2 , \\ c(\theta_1 \theta_2 v) = c(v) \end{array} \right\} ;$$

- si $c = 0$ et $m \in \mathbb{N}_{>0}$:

$$\widehat{\text{Isot}}(Y) = \left\{ \text{diag}(1, \theta_1, \theta_2) \circ \exp(\alpha Y + \beta v^m S(1, a_1, a_2)) , \right. \\ \left. (\alpha, \beta, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2 \right\} .$$

Remarque 4.3. Si $c \neq 0$, la condition $c(\theta_1 \theta_2 v) = c(v)$ est équivalente à imposer que c soit dans $\mathbb{C}[[v^q]]$, pour un certain $q \in \mathbb{N}_{>0}$ et que $\theta_1 \theta_2$ soit une racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité.

4.2 Classification orbitale

Dans cette seconde section nous allons démontrer le théorème 1.11 et son corollaire 1.13.

4.2.1 Forme normale formelle orbitale

Nous allons démontrer ici la première partie du théorème 1.11. Commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme 4.4. *Soit $c = \sum_{k \geq 1} c_k v^k \in v\mathbb{C}[[v]]$, avec $k_0 = \text{ord}(c)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tels que $a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$. Notons $m := \frac{1}{a_1 + a_2}$. Il existe alors $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ tel que :*

$$\Phi_* \left(S(0, -1, 1) + \frac{x}{\lambda + c(v)} S(1, a_1, a_2) \right) = S(0, -1, 1) + \frac{x}{\lambda + c_m v^m} S(1, a_1, a_2) ,$$

où $c_m := 0$ si $m \notin \mathbb{N}_{>0}$.

Démonstration. Commençons par considérer le champ de vecteurs bidimensionnel induit dans les coordonnées (x, v) :

$$\begin{aligned} X &:= \frac{x}{\lambda + c(v)} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{m} \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= \frac{x}{\lambda + c(v)} S \left(1, \frac{1}{m} \right) . \end{aligned}$$

Lemme 4.5. *Il existe un difféomorphisme $\Psi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$ de la forme $\Psi(x, v) = (xg(v), h(v))$, avec $g(v) \in \mathbb{C}[[v]]^\times$ et $h(v) \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$, tels que :*

$$\Psi_*(X) = \frac{x}{\lambda + c_m v^m} S \left(1, \frac{1}{m} \right) .$$

Admettons un instant ce lemme. Ensuite, on choisit $g_1(v)$ et $g_2(v)$ avec $vg_1(v)g_2(v) = h(v)$ tels que le difféomorphisme défini par

$$\Phi : (x, y_1, y_2) \mapsto (xg(y_1y_2), y_1g_1(y_1y_2), y_2g_2(y_1y_2)) ,$$

conjugue le champ

$$S(0, -1, 1) + \frac{x}{\lambda + c(v)} S(1, a_1, a_2)$$

à

$$S(0, -1, 1) + \frac{x}{\lambda + c_m v^m} S(1, a_1, a_2)$$

(l'existence de g_1 et g_2 se voit facilement par un calcul élémentaire). $\square$

Démontrons le lemme ci-dessus :

Démonstration. (du lemme 4.5.)

- Commençons par traiter le cas où $m \in \mathbb{N}_{>0}$. On s'intéresse au champ unidimensionnel suivant :

$$V := \frac{v^{m+1}}{\lambda + c(v)} \frac{\partial}{\partial v}.$$

On considère le champ ci-dessus car la quantité $\frac{v^m}{x}$ est une intégrale première (formelle) de X . D'après la classification des champs singuliers en dimension un (voir par exemple [MR83]), il existe $\psi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ tel que :

$$\psi_*(V) = \frac{v^{m+1}}{\lambda + c_m v^m} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (4.2.1)$$

Ensuite, on définit

$$\Psi : (x, v) \mapsto (\Psi_1(x, v), \Psi_2(x, v)) = \left(\frac{x\psi(v)^m}{v^m}, \psi(v) \right).$$

On vérifie alors facilement que :

$$\Psi_*(X) = \frac{x}{\lambda + c_m v^m} S\left(1, \frac{1}{m}\right).$$

- Intéressons nous à présent au cas où $m \notin \mathbb{N}_{>0}$. Il suffit d'appliquer la théorie classique de Poincaré-Dulac, car le champ $S(1, \frac{1}{m})$ a dans cas deux valeurs propres linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$. Ré-expliquons cela. Le champ X peut se ré-écrire sous la forme

$$X = x \left(\frac{1}{\lambda} + \tilde{c}(v) \right) S\left(1, \frac{1}{m}\right)$$

où $\tilde{c} = \sum_{k \geq 1} \tilde{c}_k v^k \in v\mathbb{C}[[v]]$. Alors, en utilisant la même technique que pour la preuve du lemme 3.1, on voit qu'en utilisant successivement des difféomorphismes de la forme $\exp(\alpha_l v^l S(1, \frac{1}{m}))$, $l \geq 0$, on va pouvoir éliminer tous les termes de $\tilde{c}$. En effet, cela vient du calcul suivant :

$$\begin{aligned} & \left[X, \alpha_l v^l S\left(1, \frac{1}{m}\right) \right] \\ &= \left(\left(\frac{l}{m} - 1 \right) \frac{\alpha_l}{\lambda} x v^l + \sum_{k \geq 1} \tilde{c}_k x v^{l+k} \left(\frac{l-k}{m} - 1 \right) \right) S\left(1, \frac{1}{m}\right). \end{aligned}$$

En utilisant les propositions 2.20 et 2.13, on voit donc qu'on pourra éliminer successivement tous les termes $\tilde{c}_l$ en choisissant α_l judicieusement, car $\frac{l}{m} - 1 \neq 0$ pour tout $l \geq 1$, puisque $m \notin \mathbb{N}_{>0}$. Le difféomorphisme $\Psi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$ ainsi obtenu (par compositions « infinie » à la limite), est bien de la forme annoncée. $\square$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer la partie « existence » du théorème 1.11.

Démonstration. (Partie « existence » du théorème 1.11.)

Considérons un champ $Y \in \widehat{\mathcal{SN}}_{\text{orb},*}$. Par définition, Y est orbitalement équivalent à un élément de $\widehat{\mathcal{SN}}_{\text{diag,nd}}$, qui lui-même est $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ –conjugué (d'après le théorème 1.5) à un champ de la forme :

$$\begin{aligned} Y_{\text{norm}} &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (- (\lambda + c(v)) + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &\quad + (\lambda + c(v) + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}, \end{aligned}$$

avec $c = \sum_{k \geq 1} c_k v^k \in v\mathbb{C}[[v]]$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tels que $a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$, et notons $m := \frac{1}{a_1 + a_2}$. Factorisons alors le champ Y_{norm} par la série formelle inversible $(\lambda + c(v)) \in \mathbb{C}[[v]]^\times$. Ensuite, on applique le lemme 4.4 au champ $\frac{1}{\lambda + c(v)} Y_{\text{norm}}$ qui est de la bonne forme. On factorise ensuite le champ obtenu, à savoir

$$S(0, -1, 1) + \frac{x}{\lambda + c_m v^m} S(1, a_1, a_2)$$

par $\left(\frac{1}{\lambda + c_m v^m}\right)$. Finalement, on divise le champ résultant par λ , puis on applique l'homothétie $x \mapsto \frac{x}{\lambda}$, suivie de $(y_1, y_2) \mapsto \frac{1}{\left(\frac{c_m}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2m}}} (y_1, y_2)$ si $c_m \neq 0$. On obtient au final la forme voulue. $\square$

4.2.2 Unicité de la forme formelle orbitale et classification orbitale : preuve du théorème 1.11

Nous allons démontrer ici la partie « unicité » du théorème 1.11. Commençons par un premier lemme.

Lemme 4.6. *Soit $Z \in \widehat{\mathcal{SN}}_{\text{orb},*}$ une forme normale orbitale :*

$$\begin{aligned} Z = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-1 - \eta(y_1 y_2)^m + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + (1 + \eta(y_1 y_2)^m + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} , \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

où $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ sont tels que $a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$, et $\eta \in \{0, 1\}$, avec $\eta = 0$ si $m := \frac{1}{a_1 + a_2} \notin \mathbb{N}_{>0}$.

Alors, pour tout $g(x, \mathbf{y}) \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$, il existe $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$, $\delta \in \mathbb{C}$ et $f(v) \in \mathbb{C}[[v]]$ tels que :

$$\Phi_*((1 + g(x, \mathbf{y})) Z) = (1 + \delta x + f(y_1 y_2)) Z .$$

Démonstration. Notons $G = 1 + g(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$. Appliquons le lemme 2.22, avec $X = Y = GZ$: pour tout $\tau \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$, on a :

$$(\Phi_{GZ}^\tau)^*(GZ) = \frac{1}{1 + \mathcal{L}_{GZ}(\tau)} GZ .$$

Nous voulons montrer qu'il existe $F = (1 + \delta x + f(v)) \in \mathbb{C}[[x, v]]$, et $\tau \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ tels que :

$$(\Phi_{GZ}^\tau)^*(GZ) = FZ ,$$

i.e.

$$\mathcal{L}_Z(\tau) = \frac{1}{F} - \frac{1}{G} . \quad (4.2.3)$$

Montrons pour d'abord cela le lemme suivant :

Lemme 4.7. Pour tout $H = \sum_{(j_0, \mathbf{j}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^2} H_{j_0, \mathbf{j}} x^{j_0} \mathbf{z}^{\mathbf{j}} \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$, l'équation homologique

$$\mathcal{L}_Z(\tau) = H \quad (4.2.4)$$

admet une solution formelle

$$\tau = \sum_{(j_0, \mathbf{j}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^2} \tau_{j_0, \mathbf{j}} x^{j_0} \mathbf{y}^{\mathbf{j}} \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$$

si et seulement si :

$$\begin{cases} H_{0,j,j} = 0 & , \forall j \in \mathbb{N} \\ H_{1,0,0} = 0 \end{cases}.$$

Démonstration. (du lemme 4.7.) En identifiant les termes de même degré homogène de l'équation, on obtient :

$$\begin{cases} H_{0,j,j} = 0, \forall j \in \mathbb{N} \\ H_{1,0,0} = 0 \\ \tau_{j_0, j_1, j_2} = \frac{1}{j_2 - j_1} (H_{j_0, j_1, j_2} - \lambda(j_2 - j_1) \tau_{j_0, j_1-m, j_2-m} - (j_0 - 1 + a_1 j_1 + a_2 j_2) \tau_{j_0-1, j_1, j_2}), \\ \quad \forall (j_0, j_1, j_2) \in \mathbb{N}^3 \text{ avec } j_0 \geq 1 \text{ et } j_1 \neq j_2 \\ \tau_{0, j_1, j_2} = \frac{1}{j_2 - j_1} (H_{0, j_1, j_2} - \lambda(j_2 - j_1) \tau_{1, j_1-m, j_2-m}), \forall (j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2, j_1 \neq j_2 \\ \tau_{j_0, j, j} = \frac{1}{j_0 + \frac{j}{m}} H_{j_0+1, j, j}, \forall (j_0, j) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\} \end{cases}$$

où $\tau_{k_0, k_1, k_2} = 0$ si $(k_0, k_1, k_2) \notin \mathbb{N}^3$. Ceci est possible car $\frac{1}{m} \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$. Le terme constant de τ étant libre, on peut le choisir nul. $\square$

Revenons-en à présent à (4.2.3). Pour $G = 1 + g \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$, si l'on définit

$$F(x, v) := 1 + g_{1,0,0}x + \sum_{j \geq 1} g_{0,j,j} v^j$$

et $H := \frac{1}{F} - \frac{1}{G}$, alors on voit que

$$\begin{cases} H_{0,j,j} = 0 & , \forall j \in \mathbb{N} \\ H_{1,0,0} = 0 \end{cases},$$

et donc l'équation (4.2.3) admet bien une solution formelle $\tau \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$. En conclusion : $(\Phi_{GZ}^\tau)^*(GZ) = FZ$. $\square$

Donnons maintenant un autre lemme, qui nous permettra alors de terminer la preuve du théorème 1.11.

Lemme 4.8. Soit $Z, Z' \in \widehat{\mathcal{SN}}_{\text{orb},*}$ deux formes normales orbitales :

$$\begin{cases} Z = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-1 - \eta(y_1 y_2)^m + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \quad + (1 + \eta(y_1 y_2)^m + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}, \\ Z' = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-1 - \eta'(y_1 y_2)^m + a'_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \quad + (1 + \eta'(y_1 y_2)^m + a'_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}, \end{cases}$$

où $a_1, a_2, a'_1, a'_2 \in \mathbb{C}$ sont tels que $a_1 + a_2, a'_1 + a'_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$, et $\eta, \eta' \in \{0, 1\}$, avec $\eta = 0$ (resp. $\eta' = 0$) si $m := \frac{1}{a_1 + a_2} \notin \mathbb{N}_{>0}$ (resp. $m' := \frac{1}{a'_1 + a'_2} \notin \mathbb{N}_{>0}$). Supposons qu'il existe $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $f \in v\mathbb{C}[[v]]$, et $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2) \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ tels que :

$$\Phi_*(Z) = (\gamma + \delta x + f(y_1 y_2)) Z' . \quad (4.2.5)$$

Alors, $\delta = 0$,

$$(\gamma, a_1, a_2, \eta) = \begin{cases} (1, a'_1, a'_2, \eta') \\ \text{ou} \\ (-1, a'_2, a'_1, \eta) \end{cases}$$

et :

$$1 + f \circ (\Phi_1 \Phi_2)(0, v) = \frac{1 + \eta v^m}{1 + \eta ((\Phi_1 \Phi_2)(0, v))^m} .$$

Démonstration. Tout d'abord, on voit que $D_0 \Phi$ est soit diagonale, soit échange les rôles de y_1 et y_2 (avec des constantes multiplicatives...). Quitte à composer par $(D_0 \Phi)^{-1}$, on peut supposer que $D_0 \Phi$ est diagonale. D'après la proposition 2.28, $\Phi_0 = \Phi_0(x, v) \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[[x, v]]$, et $\Phi_i = y_i \phi_i(x, v)$, où $\phi_i \in \mathbb{C}[[x, v]]^\times$, pour $i \in \{1, 2\}$. L'égalité 4.2.5 se traduit en le système suivant en coordonnées :

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + (-1 - \eta' v^{m'} + a'_1 x) y_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} + (1 + \eta' v^{m'} + a'_2 x) y_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_2} \\ = (\gamma + \delta \Phi_0 + f(\Phi_1 \Phi_2)) \Phi_0^2 \\ x^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + (-1 - \eta' v^{m'} + a'_1 x) y_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} + (1 + \eta' v^{m'} + a'_2 x) y_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} \\ = (\gamma + \delta \Phi_0 + f(\Phi_1 \Phi_2)) (-1 - \eta (\Phi_1 \Phi_2)^m + a_1 \Phi_0) \Phi_1 \\ x^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + (-1 - \eta' v^{m'} + a'_1 x) y_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} + (1 + \eta' v^{m'} + a'_2 x) y_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} \\ = (\gamma + \delta \Phi_0 + f(\Phi_1 \Phi_2)) (1 + \eta (\Phi_1 \Phi_2)^m + a_2 \Phi_0) \Phi_2 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \frac{xv}{m'} \frac{\partial \Phi_0}{\partial v} = (\gamma + \delta \Phi_0 + f(v \phi_1 \phi_2)) \Phi_0^2 \\ x^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + (-1 - \eta' v^{m'} + a'_1 x) \phi_1 + \frac{xv}{m'} \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ = (\gamma + \delta \Phi_0 + f(v \phi_1 \phi_2)) (-1 - \eta v^m (\phi_1 \phi_2)^m + a_1 \Phi_0) \phi_1 \\ x^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + (1 + \eta' v^{m'} + a'_2 x) \phi_2 + \frac{xv}{m'} \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \\ = (\gamma + \delta \Phi_0 + f(v \phi_1 \phi_2)) (1 + \eta v^m (\phi_1 \phi_2)^m + a_2 \Phi_0) \phi_2 \end{cases} .$$

En étudiant la première équation pour $x = 0$, on voit que $\Phi_0(x, v) = x \phi_0(x, v)$, avec $\phi_0 \in \mathbb{C}[[x, v]]^\times$. Le système devient donc :

$$\begin{cases} \phi_0 + x \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{v}{m'} \frac{\partial \phi_0}{\partial v} = (\gamma + \delta x \phi_0 + f(v \phi_1 \phi_2)) \phi_0^2 \\ x^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + (-1 - \eta' v^{m'} + a'_1 x) \phi_1 + \frac{xv}{m'} \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ = (\gamma + \delta x \phi_0 + f(v \phi_1 \phi_2)) (-1 - \eta v^m (\phi_1 \phi_2)^m + a_1 x \phi_0) \phi_1 \\ x^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + (1 + \eta' v^{m'} + a'_2 x) \phi_2 + \frac{xv}{m'} \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \\ = (\gamma + \delta x \phi_0 + f(v \phi_1 \phi_2)) (1 + \eta v^m (\phi_1 \phi_2)^m + a_2 x \phi_0) \phi_2 \end{cases} .$$

Posons $\phi_i = \sum_{j,k} \phi_{i,(j,k)} x^j v^k$, pour $i \in \{0, 1, 2\}$.

En étudiant les termes constants dans chaque équation, on voit que $\gamma = 1$ et $\phi_{0,(0,0)} = 1$.

En observant les termes de degré homogène $(1, 0)$ dans la première équation, on voit que $\delta = 0$.

En observant les termes de degré homogène $(1, 0)$ dans les deux dernières équations, on voit que $a'_1 = a_1$ et $a'_2 = a_2$, et en particulier $m = m'$.

En étudiant enfin les deux dernières équations pour $x = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \eta' v^m &= f(v\phi_1(0, v)\phi_2(0, v)) + \eta(v\phi_1(0, v)\phi_2(0, v))^m \\ &\quad + \eta(v\phi_1(0, v)\phi_2(0, v))^m f(v\phi_1(0, v)\phi_2(0, v)) , \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

et donc

$$\begin{cases} \text{ord}(f) \geq m \\ \eta' = (f_m + \eta)(\phi_{1,(0,0)}\phi_{2,(0,0)})^m \end{cases} . \quad (4.2.7)$$

Si $m = m'$ est un entier strictement positif, en regardant la première équation pour $x = 0$, on voit par récurrence que pour tout $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $\phi_{0,(0,k)} = 0$. En effet, on a $\phi_{0,(0,0)} = 1$, et pour tout $k \leq m-1$:

$$\phi_{0,(0,k)} \left(1 + \frac{k}{m}\right) = \sum_{i=0}^k \phi_{0,(0,i)} \phi_{0,(0,k-i)} .$$

De plus, pour $k = m$, on a :

$$f_m(\phi_{1,(0,0)}\phi_{2,(0,0)})^m = 0 ,$$

et donc, d'après (4.2.7), $\eta = \eta'$. En revenant à (4.2.6), on a bien :

$$1 + f \circ (\Phi_1 \Phi_2)(0, v) = \frac{1 + \eta v^m}{1 + \eta((\Phi_1 \Phi_2)(0, v))^m} .$$

Pour achever la preuve, il reste à voir que si $D_0 \Phi$ n'est pas diagonale, il suffit d'échanger les rôles de a_1 et a_2 , auquel cas on aurait plutôt $(a'_1, a'_2) = (a_2, a_1)$ et $\gamma = -1$. $\square$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer la partie « unicité » du théorème 1.11, et donc d'achever la preuve de ce théorème.

Démonstration. (du théorème 1.11.)

Nous avons déjà prouvé la première partie de ce théorème dans la sous-section précédente.

Pour achever la preuve du théorème, il suffit d'appliquer successivement les lemmes ci-dessus. Soient $Z, Z' \in \widehat{\mathcal{SN}}_{\text{orb},*}$ deux formes normales orbitales :

$$\begin{cases} Z = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-1 - \eta(y_1 y_2)^m + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \quad + (1 + \eta(y_1 y_2)^m + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} , \\ Z' = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-1 - \eta'(y_1 y_2)^m + a'_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \quad + (1 + \eta'(y_1 y_2)^m + a'_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} , \end{cases}$$

où $a_1, a_2, a'_1, a'_2 \in \mathbb{C}$ sont tels que $a_1 + a_2, a'_1 + a'_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$, et $\eta, \eta' \in \{0, 1\}$, avec $\eta = 0$ (*resp.* $\eta' = 0$) si $m := \frac{1}{a_1 + a_2} \notin \mathbb{N}_{>0}$ (*resp.* $m' := \frac{1}{a'_1 + a'_2} \notin \mathbb{N}_{>0}$). Supposons qu'il existe $G \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]^\times$ et $\Phi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ tels que :

$$\Phi_*(Z) = GZ' .$$

En appliquant le lemme 4.6 à GZ' , il existe $(\gamma, \delta, f(v)) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times v\mathbb{C}[[v]]$ et $\Psi \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ tel que :

$$\Psi_*(GZ') = (\gamma + \delta x + f(y_1 y_2)) Z' .$$

D'où :

$$(\Psi \circ \Phi)_*(Z) = (\gamma + \delta x + f(y_1 y_2)) Z' .$$

En appliquant à présent le lemme 4.8, on en déduit que $(\{a'_1, a'_2\}, \eta') = (\{a_1, a_2\}, \eta)$. L'implication réciproque est évidente. $\square$

Deuxième partie

Normalisation sectorielle analytique des nœud-cols 2-résonants strictement non dégénérés et div-intégrables

Chapitre 5

Présentation des résultats

Dans cette seconde partie, nous allons démontrer le premier ingrédient de la classification analytique des champs considérés, à savoir l'existence de normalisations sectorielles analytiques sur des secteurs avec une ouverture assez large, *i.e.* strictement supérieure à π . Les résultats principaux sont issus de [Bit16b]. Pour énoncer le principal résultat de cette partie, donnons quelques définitions, qui sont les analogues des définitions de la section 1.1 dans le cas analytique.

Définition 5.1. Un germe de champ de vecteurs singulier $Y \in \chi(\mathbb{C}^3, 0)$ est un **nœud-col 2-résonant diagonal** s'il est de la forme :

$$Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda y_1 + F_1(x, y_1, y_2)) \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda y_2 + F_2(x, y_1, y_2)) \frac{\partial}{\partial y_2} , \quad (5.0.1)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et $F_\nu(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}\{x, \mathbf{y}\}$ d'ordre au moins 2, pour $\nu = 1, 2$. On note $\mathcal{SN}_{\text{diag}}$ l'ensemble de ces germes de champs de vecteurs.

Définition 5.2. En se référant à la définition 1.1, nous noterons $\mathcal{SN}_{\text{diag,nd}}$ l'ensemble des éléments de $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}}$ qui sont **non dégénérés**, *i.e.* les champs Y comme ci-dessus pour lesquels :

$$\text{res}(Y) := F_{1,(1,1,0)} + F_{2,(1,0,1)} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{\leq 0} ,$$

où l'on a noté $F_\nu(x, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k}=(k_0, k_1, k_2)} F_{\nu, \mathbf{k}} x^{k_0} y_1^{k_1} y_2^{k_2}$, $\nu = 1, 2$.

Nous dirons qu'un élément $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag,nd}}$ est **strictement non dégénéré** si :

$$\Re(\text{res}(Y)) > 0 .$$

En se référant à la définition 1.2, nous noterons $\mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ l'ensemble des **nœud-cols 2-résonants diagonaux (analytiques) strictement non dégénérés et div-intégrables**.

Définition 5.3. Considérons la 1-forme méromorphe

$$\omega := \frac{dy_1 \wedge dy_2}{x} .$$

On dit qu'un germe de champ de vecteurs analytique Y est **transversalement hamiltonien** (par rapport à ω et dx) si

$$\mathcal{L}_Y(dx) \in \langle dx \rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_Y(\omega) \in \langle dx \rangle .$$

Pour tout secteur $S \subset \mathbb{C}^*$, on dit qu'un germe de difféomorphisme sectoriel fibré Φ sur $S \times (\mathbb{C}^2, 0)$ est **transversalement symplectique** (par rapport à ω et dx) si

$$\Phi^*(\omega) \in \omega + \langle dx \rangle .$$

On note $\text{Diff}_\omega(\mathbb{C}^3, 0)$ (*resp.* $\text{Diff}_\omega(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$) le groupe des germes de difféomorphismes transversalement symplectiques (*resp.* qui sont de plus tangents à l'identité).

On note $\mathcal{SN}_{\text{diag}, \omega}$ l'ensemble des nœud-cols 2-résonants diagonaux transversalement hamiltoniens.

Remarque 5.4. Si $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, \omega}$ alors, nécessairement, $\text{res}(Y) = 1$ et Y est div-intégrable. Autrement dit, $\mathcal{SN}_{\text{diag}, \omega} \subset \mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$.

Énonçons à présent le principal résultat de cette partie : nous renvoyons au chapitre 6 pour la définition de la *1-sommabilité faible* (voir section 6.3) et de *germes de difféomorphismes sectoriels* (voir section 6.1).

Théorème 5.5. (*Théorème C*) Soit $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ un nœud-col 2-résonant diagonal (analytique) strictement non dégénéré et div-intégrable. Alors, pour $\eta \in]\pi, 2\pi[$, il existe un unique couple (Φ_+, Φ_-) de germes de difféomorphismes sectoriels fibrés et tangents à l'identité

$$\begin{cases} \Phi_+ \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(i\lambda), \eta}; \text{Id}) \\ \Phi_- \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(-i\lambda), \eta}; \text{Id}) \end{cases}$$

tels que

$$\begin{aligned} (\Phi_\pm)_*(Y) &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x - c(y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x + c(y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ &=: Y_{\text{norm}} , \end{aligned}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\Re(a_1 + a_2) > 0$, et $c(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$ est le germe d'une fonction analytique en $v := y_1 y_2$ nulle à l'origine. De plus, Φ_+ (*resp.* Φ_-) est la 1-somme faible dans la direction $\arg(i\lambda)$ (*resp.* $\arg(-i\lambda)$) de la normalisation formelle $\hat{\Phi}$ donnée par le théorème 1.5.

Si $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, \omega}$ est transversalement hamiltonien, alors Φ_+ et Φ_- sont transversalement symplectiques.

Pour $\lambda \neq 0$ fixé, l'existence de normalisations sectorielles Φ_+ et Φ_- dans des domaines de la forme $\mathcal{S}_+ \in \mathcal{S}_{\arg(i\lambda), \eta}$ et $\mathcal{S}_- \in \mathcal{S}_{\arg(-i\lambda), \eta}$ pour tout $\eta \in]\pi, 2\pi[$, est équivalente à l'existence de normalisations sectorielles Φ_θ dans des domaines $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_{\theta, \pi}$, pour tout $\theta \neq \arg(\pm\lambda)$. Ceci implique en particulier le corollaire suivant.

Corollaire 5.6. Soit $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$. Alors, l'unique normalisation formelle $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ donnée par le théorème 1.5 est faiblement 1-sommable dans toutes les directions $\theta \neq \arg(\pm\lambda)$.

Dans le chapitre 6, nous commencerons par rappeler les notions classiques de développements asymptotiques 1-Gevrey et de 1-sommabilité au sens de Borel-Laplace. Ensuite, dans le chapitre 7, nous démontrerons un premier résultat intermédiaire de « pré-normalisation » 1-sommable (et pas seulement *faiblement* 1-sommable) : ce sera l'objet de la proposition 7.1. Ensuite, nous démontrerons l'existence de normalisations sectorielles analytiques dans le chapitre 8 grâce à la proposition 8.1. Enfin, nous démontrerons dans le chapitre 9 à la fois l'unicité et la faible 1-sommabilité des normalisations sectorielles obtenues précédemment.

Remarque 5.7. Dans cette partie II, on démontre un théorème de normalisation sectorielle analogue à celui de Hukuhara-Kimura-Matuda [HKM61] pour les nœud-cols de $(\mathbb{C}^2, 0)$, généralisé par Stolovitch en plus grande dimension dans [Sto96]. Contrairement à la méthode basée sur un

théorème de point fixe utilisée par ces auteurs, nous utilisons une approche géométrique (en suivant les travaux de Teyssier [Tey03, Tey04b]) basée sur la résolution d'une équation homologique, en intégrant une 1-forme méromorphe bien choisie le long de chemins tangents asymptotiques. Cette approche s'est avérée efficace pour traiter le cas où le champ restreint $Y|_{\{x=0\}}$ n'est pas nécessairement linéaire. En effet, lorsque l'on essaie d'adapter la méthode de point fixe utilisée dans [Sto96], un des nouveaux phénomènes (qui est aussi une nouvelle difficulté) que l'on observe est la présence de termes non-linéaires non-divisibles par la variable temporelle. Cela complique considérablement les estimations faites plus loin dans le travail cité, nécessaires pour l'utilisation du théorème de point fixe. Un autre nouveau phénomène (amenant d'autres difficultés, et dû au fait que $Y|_{\{x=0\}}$ n'est pas nécessairement linéaire) sera discuté dans la remarque 10.12.

Chapitre 6

Prérequis sur les développements asymptotiques et la sommabilité 1-Gevrey

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les notions dont nous aurons besoin dans la suite concernant les développements asymptotiques (au sens de Gérard-Sibuya, de Poincaré, et de type 1-Gevrey), et la sommabilité 1-Gevrey dans des domaines sectoriels adaptés. Pour une introduction détaillée à ces notions, nous renvoyons le lecteur à [MR82, Mal95, RS93, BDM08] (voir également [Sto96] pour une discussion très intéressante sur ces concepts), où l'on trouvera notamment les preuves des résultats classiques que nous ne redémontrons pas ici, mais que nous nous contenterons de rappeler et d'énoncer en nos termes. Nous appellerons $x \in \mathbb{C}$ la variable *indépendante* et $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, la (les) variable(s) dépendante(s). On rappelle les notations usuelles $\mathbf{y}^{\mathbf{k}} := y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}$ pour $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, ainsi que $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_n$. Les notions de développement asymptotique, de série formelle 1-Gevrey et de sommabilité 1-Gevrey présentées ici sont toujours considérées par rapport à la variable indépendante x vivant en générale dans des secteurs, les variables dépendantes $\mathbf{y}$ appartenant à des polydisques

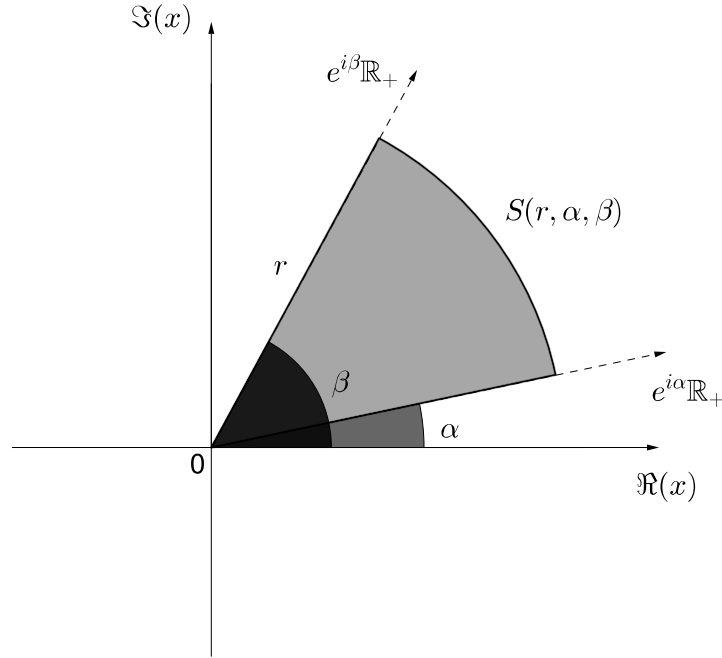
$$\mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r}) := \{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n \mid |y_1| < r_1, \dots, |y_n| < r_n\} \ ,$$

de poly-rayon $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$. Étant donné un ensemble ouvert

$$\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^{n+1} = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n\} \ ,$$

nous noterons $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'algèbre des germes de séries entières en m variables $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_m)$ convergentes au voisinage de l'origine sera notée $\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$. On notera également $\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}^\times$ le groupe des unités de $\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ pour la multiplication (= le produit de Cauchy) : ce sont les éléments non-nuls en l'origine.

Les résultats présentés ici sont valables aussi pour $n = 0$, qui est la situation « classique ». Les énoncés pour lesquels nous ne donnerons pas de preuve dans le cas général $n \in \mathbb{N}$ peuvent en fait être prouvés de manière analogue au cas $n = 0$, uniformément par rapport aux variables dépendantes $\mathbf{y}$. Enfin, pour des raisons de cohérence et d'homogénéité dans tout ce texte, nous présenterons certains résultats classiques importants non pas dans leur forme originale (et plus générale), mais plutôt dans des situations spécifiques auxquelles nous serons confrontés, et avec notre terminologie.

FIGURE 6.1.1 – Secteur en l'origine délimité par les directions α et β , de rayon r .

6.1 Germes sectoriels

Étant donnés $r \in \mathbb{R}_{>0}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$, nous noterons $S(r, \alpha, \beta)$ le *secteur* ouvert

$$S(r, \alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{C} \mid 0 < |x| < r \text{ et } \alpha < \arg(x) < \beta\}.$$

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Définition 6.1.

1. Un x -*voisinage sectoriel* (ou dorénavant simplement *voisinage sectoriel*) attaché à l'origine (dans $\mathbb{C}^{n+1}$) dans la direction θ et d'ouverture η est un sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ tel que il existe $r > 0$, $\mathbf{r} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ et $\epsilon > 0$ pour lesquels

$$\mathcal{S} \supset S\left(r, \theta - \frac{\eta}{2} - \epsilon, \theta + \frac{\eta}{2} + \epsilon\right) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r}).$$

On notera $(\mathcal{S}_{\theta, \eta}, \leq)$ l'ensemble ordonné de tous les tels sous-ensembles de $\mathbb{C}^{n+1}$, où la relation d'ordre est donnée par :

$$S_1 \leq S_2 \iff S_1 \supset S_2.$$

2. L'algèbre des *germes de fonctions holomorphes dans un voisinage sectoriel attaché à l'origine dans la direction θ et d'ouverture η* est la limite inductive

$$\mathcal{O}(\mathcal{S}_{\theta, \eta}) := \varinjlim \mathcal{O}(\mathcal{S})$$

par rapport au système inductif $\{\mathcal{O}(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \in \mathcal{S}_{\theta, \eta}\}$. On parlera aussi de *germes sectoriels de fonctions holomorphes dans la direction θ avec ouverture η* .

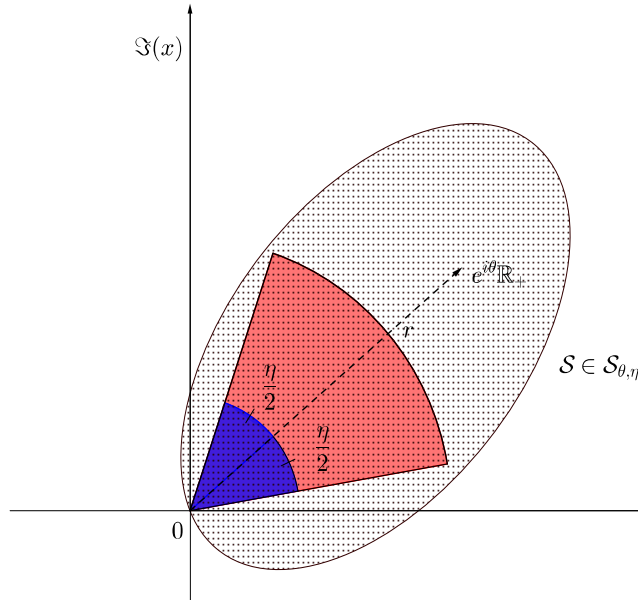


FIGURE 6.1.2 – Voisinage sectoriel attaché à l'origine dans $\mathbb{C}$, dans la direction θ avec ouverture η .

Nous donnons à présent la définition de (*germe de*) *difféomorphisme sectoriel*.

Définition 6.2. 1. Étant donné un élément $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_{\theta,\eta}$, nous noterons $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}; \text{Id})$ l'ensemble des difféomorphismes holomorphes (fibrés) de la forme

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{S} &\rightarrow \Phi(\mathcal{S}) \\ (x, \mathbf{y}) &\mapsto (x, \phi_1(x, \mathbf{y}), \phi_2(x, \mathbf{y})) \end{aligned}$$

tels que $\Phi(x, \mathbf{y}) - \text{Id}(x, \mathbf{y}) = O(\|x, \mathbf{y}\|^2)$, quand $(x, \mathbf{y}) \rightarrow (0, \mathbf{0})$ dans $\mathcal{S}$.¹

2. L'ensemble des *germes de difféomorphismes sectoriels (fibrés) dans la direction θ et d'ouverture η , tangents à l'identité*, est la limite inductive

$$\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\theta,\eta}; \text{Id}) := \varinjlim \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}; \text{Id})$$

par rapport au système inductif $\{\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}; \text{Id}) : \mathcal{S} \in \mathcal{S}_{\theta,\eta}\}$. On munit $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\theta,\eta}; \text{Id})$ d'une structure de groupe comme suit : étant donnés deux germes $\Phi, \Psi \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\theta,\eta}; \text{Id})$, on choisit deux représentants $\Phi_0 \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}, \text{Id})$ et $\Psi_0 \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{T}, \text{Id})$ avec $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{S}_{\theta,\eta}$ tels que $\mathcal{T} \subset \Phi_0(\mathcal{S})$ et on pose $\Psi \circ \Phi$ comme étant le germe défini par $\Psi_0 \circ \Phi_0$.²

Nous aurons également besoin de la notion de *secteur asymptotique*.

Définition 6.3. Un *secteur asymptotique (ouvert) en l'origine de direction θ et d'ouverture η* est un ouvert $S \subset \mathbb{C}$ tel que

$$S \in \bigcap_{0 \leq \eta' < \eta} \mathcal{S}_{\theta,\eta'}.$$

Nous noterons $\mathcal{AS}_{\theta,\eta}$ l'ensemble de tous les ouverts de ce type.

1. Cette condition implique en particulier que $\Phi(\mathcal{S}) \in \mathcal{S}_{\theta,\eta}$.

2. On peut montrer que cette définition ne dépend pas du choix des représentants.

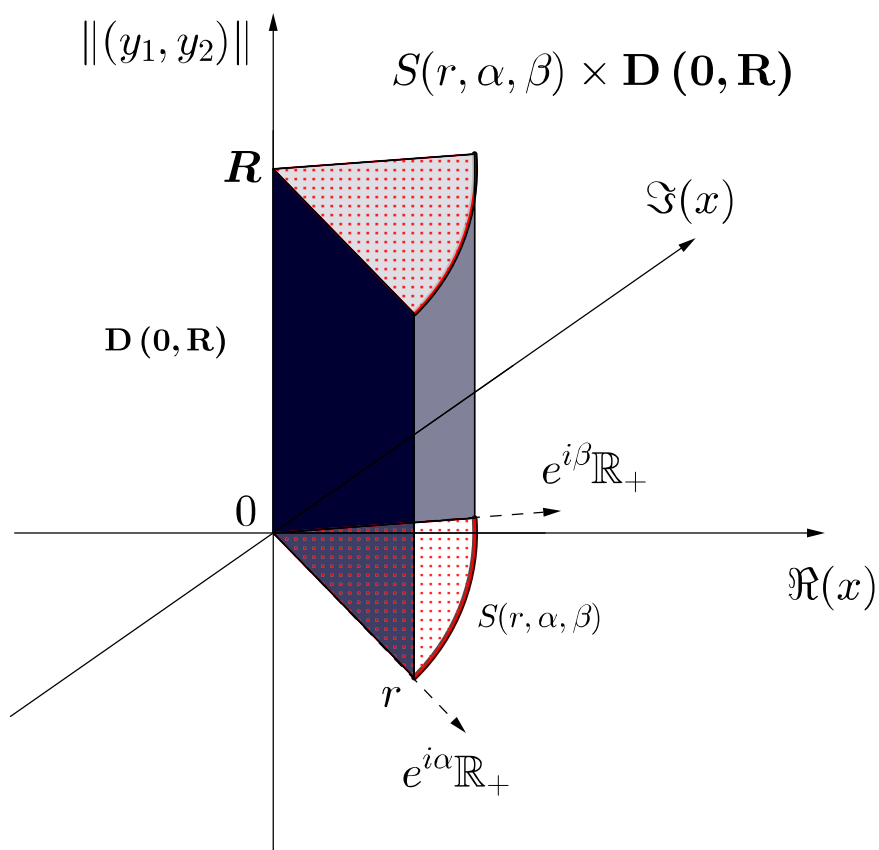
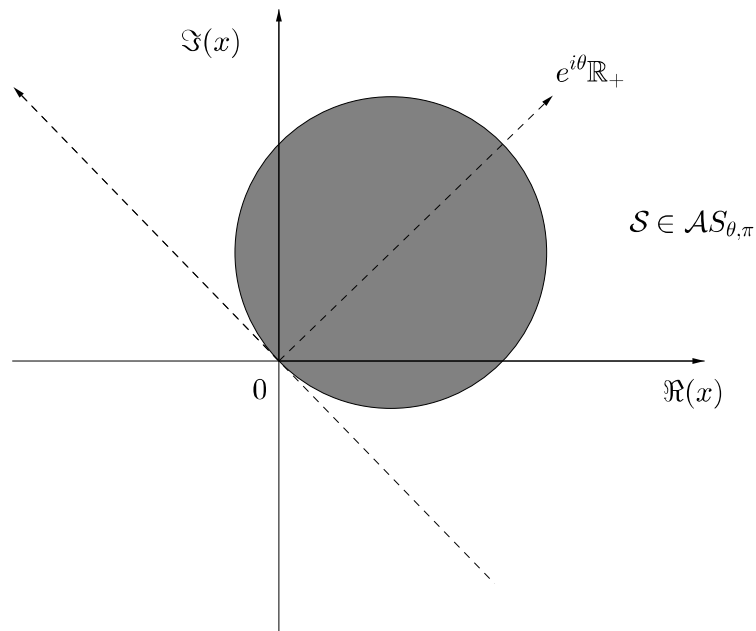
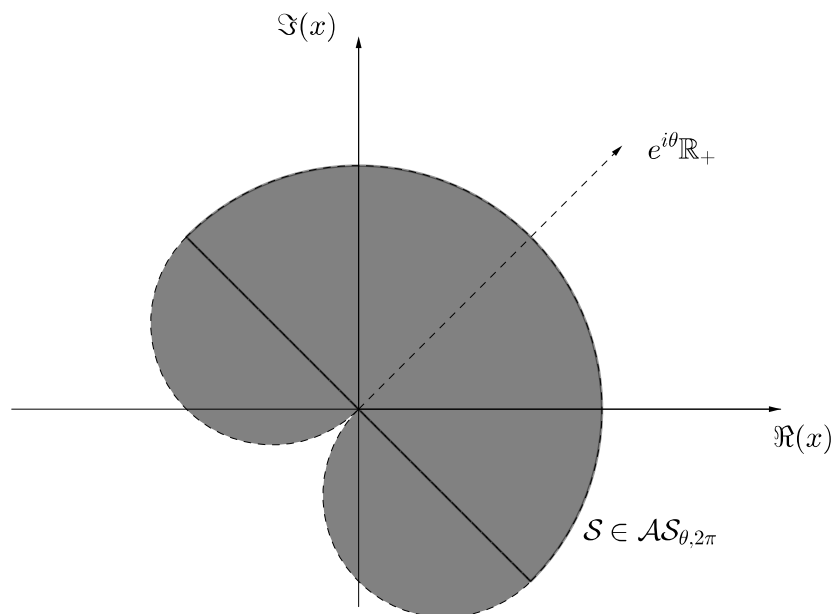


FIGURE 6.1.3 – Représentation d'un voisinage sectoriel attaché à l'origine dans $\mathbb{C}^3$, de type $S(r, \alpha, \beta) \times D(0, R)$, dans l'espace de dimension 3 réelle muni des coordonnées $(\Re(x), \Im(x), \|\mathbf{y}\|)$.

FIGURE 6.1.4 – Secteur asymptotique en l'origine de direction θ et d'ouverture π .FIGURE 6.1.5 – Secteur asymptotique en l'origine de direction θ et d'ouverture 2π .

6.2 Développements asymptotiques 1-Gevrey et 1-sommabilité

Dans cette section nous allons rappeler les différentes notions dont nous aurons besoin concernant les développements asymptotiques sectoriels, les séries 1-Gevrey et la sommabilité 1-Gevrey.

6.2.1 Développements asymptotiques 1-Gevrey

Fixons une série formelle que l'on va écrire sous deux formes différentes :

$$\hat{f}(x, \mathbf{y}) = \sum_{k \geq 0} f_k(\mathbf{y}) x^k = \sum_{(j_0, \mathbf{j}) \in \mathbb{N}^{n+1}} f_{j_0, \mathbf{j}} x^{j_0} \mathbf{y}^{\mathbf{j}} \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]] ,$$

en utilisant l'identification canonique $\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]] = \mathbb{C}[[x]] [[\mathbf{y}]] = \mathbb{C}[[\mathbf{y}]] [[x]]$. On fixe également une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$.

Définition 6.4.

- Une fonction f analytique sur un domaine $S(r, \alpha, \beta) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ admet $\hat{f}$ comme *développement asymptotique au sens de Gérard-Sibuya* dans ce domaine si pour tout sous-secteur fermé $S' \subset S(r, \alpha, \beta)$, tout compact $\mathbf{K} \subset \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_{S', K, N} > 0$ telle que :

$$\left| f(x, \mathbf{y}) - \sum_{0 \leq j_0 + \dots + j_n \leq N} f_{j_0, \mathbf{j}} x^{j_0} \mathbf{y}^{\mathbf{j}} \right| \leq C_{S', K, N} \|(x, \mathbf{y})\|^{N+1}$$

pour tout $(x, \mathbf{y}) \in S' \times \mathbf{K}$.

- Une fonction f analytique sur un domaine $S(r, \alpha, \beta) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ admet $\hat{f}$ comme *développement asymptotique (par rapport à x)* dans ce domaine si pour tout sous-secteur fermé $S' \subset S(r, \alpha, \beta)$, tout compact $\mathbf{K} \subset \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $A_{S', K, N} > 0$ telle que :

$$\left| f(x, \mathbf{y}) - \sum_{k \geq 0} f_k(\mathbf{y}) x^k \right| \leq A_{S', K, N} |x|^{N+1}$$

pour tout $(x, \mathbf{y}) \in S' \times \mathbf{K}$.

- Une fonction f analytique sur un domaine $S(r, \alpha, \beta) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ admet $\hat{f}$ comme *développement asymptotique 1-Gevrey asymptotique* dans ce domaine si pour tout sous-secteur fermé $S' \subset S(r, \alpha, \beta)$ et tout compact $\mathbf{K} \subset \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, il existe $A_{S', K}, C_{S', K} > 0$ tels que :

$$\left| f(x, \mathbf{y}) - \sum_{k=0}^{N-1} f_k(\mathbf{y}) x^k \right| \leq A_{S', K} C_{S', K}^N (N!) |x|^N$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $(x, \mathbf{y}) \in S' \times \mathbf{K}$.

Remarque 6.5.

1. Si une fonction analytique admet $\hat{f}$ comme développement asymptotique 1-Gevrey dans $S(r, \alpha, \beta) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, alors elle admet aussi $\hat{f}$ comme développement asymptotique (par rapport à x).
2. Si une fonction analytique admet $\hat{f}$ comme développement asymptotique dans $S(r, \alpha, \beta) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, alors elle admet aussi $\hat{f}$ comme développement asymptotique au sens de Gérard-Sibuya.

3. Un développement asymptotique (dans tous les sens décrits ci-dessus) est unique.

En conséquence de la formule de Stirling, on a la caractérisation suivante des fonctions admettant la série formelle nulle comme développement asymptotique 1-Gevrey dans un secteur.

Proposition 6.6. *L'ensemble des fonctions analytiques admettant 0 comme développement asymptotique 1-Gevrey dans un domaine sectoriel $S(r, \alpha, \beta) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ est exactement l'ensemble des fonctions analytiques f dans $S(r, \alpha, \beta) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ pour lesquelles pour tout sous-secteur fermé $S' \subset S(r, \alpha, \beta)$ et tout compact $\mathbf{K} \subset \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, il existe $A_{S', K}, B_{S', K} > 0$ tels que :*

$$|f(x, \mathbf{y})| \leq A_{S', K} \exp\left(-\frac{B_{S', K}}{|x|}\right).$$

On dit d'une telle fonction qu'elle est exponentiellement plate dans le domaine en question.

6.2.2 Transformée de Borel et séries 1-Gevrey

Définition 6.7. — On définit la transformée de Borel $\mathcal{B}(\hat{f})$ de $\hat{f}$ par :

$$\mathcal{B}(\hat{f})(t, \mathbf{y}) := \sum_{k \geq 0} \frac{f_k(\mathbf{y})}{k!} t^k.$$

— On dit que $\hat{f}$ est 1-Gevrey si $\mathcal{B}(\hat{f})$ est convergente dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Dans ce cas, les $f_k(\mathbf{y})$, $k \geq 0$, sont toutes analytiques dans un même polydisque $\mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ de poly-rayon $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$, de sorte que $\mathcal{B}(\hat{f})$ soit analytique dans $\mathbf{D}(0, \rho) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, pour un certain $\rho > 0$ assez petit. Quitte à réduire $\rho, r_1, \dots, r_n > 0$, on peut supposer que $\mathcal{B}(\hat{f})$ est bornée sur $\mathbf{D}(0, \rho) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$.

Remarque 6.8.

1. Si une fonction analytique f admet $\hat{f}$ comme développement 1-Gevrey dans un domaine sectoriel comme dans la définition 6.4, alors $\hat{f}$ est 1-Gevrey.
2. L'ensemble des séries formelles 1-Gevrey est une algèbre fermée pour les dérivations (partielles) $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$.

Par unicité d'un développement asymptotique, il existe une application $T : f \mapsto T(f) := \hat{f}$, qui associe à une fonction analytique possédant un développement asymptotique 1-Gevrey dans un domaine sectoriel, la série formelle 1-Gevrey que cette fonction possède comme développement asymptotique. En utilisant la proposition 6.6 et le classique lemme de Watson, il vient que l'application T ci-dessus est injective (mais non surjective) si le secteur considéré est d'ouverture $> \pi$ (et ne l'est pas si l'ouverture est $< \pi$, mais est dans ce cas surjective, d'après le classique théorème de Ritt « version Gevrey »). On peut donc s'intéresser à l'image de T dans le cas d'une ouverture $> \pi$: c'est l'objet de la 1-sommabilité.

Remarque 6.9. On sera amené pour des raisons techniques à considérer également une autre définition de la transformée de Borel :

$$\tilde{\mathcal{B}}(\hat{f})(t, \mathbf{y}) := \sum_{k \geq 0} f_{k+1}(\mathbf{y}) \frac{t^k}{k!}.$$

La première définition que nous avons donné a l'avantage d'être « directement » inversible (via la transformée de Laplace) pour toutes les séries formelles qui seront dites 1-sommables (voir

la section suivante), mais se comporte moins bien vis-à-vis du produit, alors que la seconde définition ne sera « directement » inversible que pour les séries formelles 1-sommables tels que $f_0 = 0$ (sinon il faudra exercer un contrôle au terme constant par rapport à x). L'avantage de la seconde transformée de Borel est de changer un produit en un produit de convolution :

$$\tilde{\mathcal{B}}(\hat{f}\hat{g}) = \left(\tilde{\mathcal{B}}(\hat{f}) * \tilde{\mathcal{B}}(\hat{g})\right) ,$$

où le produit de convolution de deux séries h_1, h_2 est défini par

$$(h_1 * h_2)(t, \mathbf{y}) := \int_0^t h_1(s) h_2(s-t) ds .$$

La définition d'être 1-Gevrey n'est pas altérée avec cette définition de la transformée de Borel.

6.2.3 Sommabilité directionnelle et sommation de Borel-Laplace

Définition 6.10. Étant donnés $\theta \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on définit le secteur infini de direction θ et d'ouverture δ comme l'ensemble :

$$\mathcal{A}_{\theta, \delta}^\infty := \left\{ t \in \mathbb{C}^* \mid |\arg(t) - \theta| < \frac{\delta}{2} \right\} .$$

On dit que $\hat{f}$ est *1-sommable dans la direction* $\theta \in \mathbb{R}$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\hat{f}$ est 1-Gevrey,
2. $\mathcal{B}(\hat{f})$ peut être prolongée analytiquement à un domaine de la forme $\mathcal{A}_{\theta, \delta}^\infty \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$,
3. il existe $\lambda > 0, M > 0$ tels que :

$$\forall (t, \mathbf{y}) \in \mathcal{A}_{\theta, \delta}^\infty \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r}), \quad \left| \mathcal{B}(\hat{f})(t, \mathbf{y}) \right| \leq M \exp(\lambda |t|) .$$

Dans ce cas, si l'on définit $\Delta_{\theta, \delta, \rho} := \mathcal{A}_{\theta, \delta}^\infty \cup \mathbf{D}(0, \rho)$, alors

$$\left\| \hat{f} \right\|_{\lambda, \theta, \delta, \rho, \mathbf{r}} := \sup_{(t, \mathbf{y}) \in \Delta_{\theta, \delta, \rho} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})} \left| \mathcal{B}(\hat{f})(t, \mathbf{y}) \exp(-\lambda |t|) \right| < +\infty .$$

S'il n'y a pas de confusion possible sur le domaine, on écrira simplement $\left\| \hat{f} \right\|_\lambda$.

Remarque 6.11.

1. Pour $(\lambda, \theta, \delta, \rho, \mathbf{r})$ fixés comme ci-dessus, l'ensemble $\mathfrak{B}_{\lambda, \theta, \delta, \rho, \mathbf{r}}$ des séries formelles $\hat{f}$ 1-sommables dans la direction θ et telles que $\left\| \hat{f} \right\|_{\lambda, \theta, \delta, \rho, \mathbf{r}} < +\infty$, est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{\lambda, \theta, \delta, \rho, \mathbf{r}}$. On écrira $(\mathfrak{B}_\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.
2. Nous serons également amenés à considérer une norme similaire pour la seconde transformée de Borel $\tilde{\mathcal{B}}$ (cf. remarque 6.9), à savoir :

$$\left\| \hat{f} \right\|_{\lambda, \theta, \delta, \rho, \mathbf{r}}^{\text{bis}} := \sup_{(t, \mathbf{y}) \in \Delta_{\theta, \delta, \rho} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})} \left| \mathcal{B}(\hat{f})(t, \mathbf{y}) \left(1 + \lambda^2 |t|^2\right) \exp(-\lambda |t|) \right| .$$

Cette norme aura l'avantage de bien se comporter vis-à-vis du produit. On notera alors $\mathfrak{B}_{\lambda, \theta, \delta, \rho, \mathbf{r}}^{\text{bis}}$ l'espace des séries formelles $\hat{f}$ 1-sommables dans la direction θ et telles que

$$\left\| \hat{f} \right\|_{\lambda, \theta, \delta, \rho, \mathbf{r}}^{\text{bis}} < +\infty .$$

3. Si $\lambda' \geq \lambda$, alors $\mathfrak{B}_{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}} \subset \mathfrak{B}_{\lambda',\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}$ et $\mathfrak{B}_{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}} \subset \mathfrak{B}_{\lambda',\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}}$.

Proposition 6.12 ([BDM08, Proposition 4.]). *Si $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont dans $\mathfrak{B}_{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}}$, alors $\hat{f}\hat{g} \in \mathfrak{B}_{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}}$ et :*

$$\|\hat{f}\hat{g}\|_{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}} \leq \frac{4\pi}{\lambda} \|\hat{f}\|_{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}} \|\hat{g}\|_{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}} .$$

Remarque 6.13. Si $\lambda \geq 4\pi$, alors $\|\cdot\|_{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}}$ est une *norme d'algèbre*, i.e.

$$\|\hat{f}\hat{g}\|_{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}} \leq \|\hat{f}\|_{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}} \|\hat{g}\|_{\lambda,\theta,\delta,\rho,\mathbf{r}}^{\text{bis}} .$$

Définition 6.14. Soit g une fonction analytique sur $\mathcal{A}_{\theta,\delta}^\infty$ et $\lambda > 0, M > 0$ tels que :

$$\forall (t, \mathbf{y}) \in \mathcal{A}_{\theta,\delta}^\infty \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r}), |g(t, \mathbf{y})| \leq M \exp(\lambda |t|) .$$

On définit la *transformée de Laplace* de g dans la direction θ par l'intégrale suivante :

$$\mathcal{L}_\theta(g)(x, \mathbf{y}) := \int_{e^{i\theta}\mathbb{R}_{>0}} g(t, \mathbf{y}) \exp\left(-\frac{t}{x}\right) \frac{dt}{x} ,$$

qui est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{C}$ avec $\Re\left(\frac{e^{i\theta}}{x}\right) > \lambda$, et qui est analytique par rapport à $(x, \mathbf{y})$, pour $\Re\left(\frac{e^{i\theta}}{x}\right) > \lambda$ et $\mathbf{y} \in \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$.

Remarque 6.15. Comme précédemment pour la transformée de Borel, il existe aussi une variante pour la transformée de Laplace, à savoir :

$$\tilde{\mathcal{L}}_\theta(g)(x, \mathbf{y}) := \int_{e^{i\theta}\mathbb{R}_{>0}} g(t, \mathbf{y}) \exp\left(-\frac{t}{x}\right) dt .$$

Proposition 6.16. *Une série formelle $\hat{f}$ est 1-sommable dans la direction $\theta \in \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un germe sectoriel de fonction holomorphe $f_\theta \in \mathcal{O}(\mathcal{S}_{\theta,\pi})$ qui admet $\hat{f}$ comme développement asymptotique 1-Gevrey dans un domaine $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_{\theta,\pi}$. De plus, f_θ est unique (comme germe dans $\mathcal{O}(\mathcal{S}_{\theta,\pi})$) et on a :*

$$f_\theta = \mathcal{L}_\theta\left(\mathcal{B}(\hat{f})\right) .$$

La fonction (le germe) f_θ est appelée la 1-somme de $\hat{f}$ dans la direction θ .

Remarque 6.17. Avec les variantes des définitions des transformée de Borel et Laplace données plus haut, on a une proposition similaire valable pour des séries $\hat{f}(x, \mathbf{y}) = \sum_k f_k(\mathbf{y}) x^k$ avec :

$$f_\theta = \tilde{\mathcal{L}}_\theta\left(\tilde{\mathcal{B}}\right)(\hat{f}) + \hat{f}(0, \mathbf{y}) .$$

Rappelons le résultat classique suivant.

Proposition 6.18. *L'ensemble $\Sigma_\theta \subset \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ des séries formelles 1-sommables dans la direction θ est une algèbre stable par dérivation (partielle). De plus, l'application*

$$\begin{aligned} \Sigma_\theta &\longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{S}_{\theta,\pi}) \\ \hat{f} &\longmapsto f_\theta \end{aligned}$$

est une morphisme injectif d'algèbres différentielles.

Définition 6.19. Une série formelle $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ est *1-sommable* si elle est 1-sommable dans toutes les direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, sauf un nombre fini, appelées *directions de Stokes*. Dans ce cas, si $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sont les éventuelles directions de Stokes, on dit que $\hat{f}$ est 1-sommable **sauf pour** $\theta_1, \dots, \theta_k$.

Plus généralement, on dit qu'un m -uplet $(f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]^m$ est 1-Gevrey (*resp.* 1-sommable dans la direction θ) si cette propriété est satisfaite pour les composantes $f_j, j = 1, \dots, m$. En particulier, un champ de vecteurs (ou difféomorphisme) formel est dit 1-Gevrey (*resp.* 1-sommable dans la direction θ) si chacune de ses composantes l'est.

6.2.4 Théorème de Ramis-Sibuya et composition de séries 1-sommables

Nous allons utiliser le résultat suivant qui est un cas particulier du désormais classique théorème de Ramis-Sibuya.

Théorème 6.20. (*Ramis-Sibuya*) Soient $S_+ \in \mathcal{S}_{\theta, \pi}, S_- \in \mathcal{S}_{\theta - \pi, \pi}$ et $(f_+, f_-) \in \mathcal{O}(S_+) \times \mathcal{O}(S_-)$. Supposons que pour tout compact $\mathbf{K} \subset \mathbb{C}^n$ et tout secteur $S \subset \mathbb{C}$ avec $S \times \mathbf{K} \subset S_+ \cap S_-$, il existe $A, B > 0$ tels que :

$$|f_+(x, \mathbf{y}) - f_-(x, \mathbf{y})| \leq A \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right)$$

pour tout $(x, \mathbf{y}) \in S \times \mathbf{K}$. Alors, il existe une série formelle (1-Gevrey) $\hat{f}(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ telle que f_+ (*resp.* f_-) admet $\hat{f}$ comme développement asymptotique 1-Gevrey dans S_+ (*resp.* S_-).

Remarque 6.21. En particulier, la série formelle $\hat{f}$ du théorème ci-dessus est 1-sommable dans les directions θ et $\theta - \pi$ et de 1-sommes f_+ et f_- respectivement dans ces directions.

Une conséquence de ce théorème est le résultat suivant, qui peut être prouvé directement avec des majorations techniques, mais dont la preuve est considérablement simplifiée grâce à ce dernier théorème.

Proposition 6.22. Soit $\hat{\Phi}(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ une série formelle 1-sommable dans les directions θ et $\theta - \pi$, et notons ses 1-sommes dans ces même directions $\Phi_+(x, \mathbf{y})$ et $\Phi_-(x, \mathbf{y})$ respectivement. Soient également $\hat{f}_1(x, \mathbf{z}), \dots, \hat{f}_n(x, \mathbf{z})$ des séries formelles 1-sommables dans les directions θ et $\theta - \pi$, de 1-sommes respectives $f_{1,+}, \dots, f_{n,+}$ et $f_{1,-}, \dots, f_{n,-}$. Supposons que :

$$\hat{f}_j(0, \mathbf{0}) = 0, \text{ pour tout } j = 1, \dots, n. \quad (6.2.1)$$

Alors :

$$\hat{\Psi}(x, \mathbf{z}) := \hat{\Phi}\left(x, \hat{f}_1(x, \mathbf{z}), \dots, \hat{f}_n(x, \mathbf{z})\right)$$

est 1-sommable dans les directions θ et $\theta - \pi$, et les 1-sommes dans les directions correspondantes sont données par :

$$\Psi_{\pm}(x, \mathbf{z}) = \Phi_{\pm}(x, f_{1,\pm}(x, \mathbf{z}), \dots, f_{n,\pm}(x, \mathbf{z})) .$$

Démonstration. Comme $\hat{f}_j(0, \mathbf{0}) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$, la série formelle

$$\hat{\Psi}(x, \mathbf{z}) := \hat{\Phi}\left(x, \hat{f}_1(x, \mathbf{z}), \dots, \hat{f}_n(x, \mathbf{z})\right)$$

est bien définie. Il existe également $S_+, S'_+ \in \mathcal{S}_{\theta, \pi}$ et $S_-, S'_- \in \mathcal{S}_{\theta - \pi, \pi}$ tels que :

- $f_{1,+}, \dots, f_{n,+}$ (*resp.* $f_{1,-}, \dots, f_{n,-}$) sont analytiques et admettent respectivement $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n$ comme développement asymptotique 1-Gevrey dans S_+ (*resp.* S_-);

— l'image de $\mathcal{S}_\pm$ par l'application

$$(x, \mathbf{z}) \mapsto (x, f_{1,\pm}(x, \mathbf{z}), \dots, f_{n,\pm}(x, \mathbf{z}))$$

est incluse dans $\mathcal{S}'_\pm$;

— Φ_+ (*resp.* Φ_-) est analytique et admet $\hat{\Phi}$ comme développement asymptotique 1-Gevrey dans $\mathcal{S}'_+$ (*resp.* $\mathcal{S}'_-$).

Par conséquent, l'application définie par

$$\Psi_\pm(x, \mathbf{z}) := \Phi_\pm(x, f_{1,\pm}(x, \mathbf{z}), \dots, f_{n,\pm}(x, \mathbf{z}))$$

est analytique dans $\mathcal{S}_\pm$. De plus, il est clair que $\Psi_\pm(x, \mathbf{z})$ admet $\hat{\Psi}(x, \mathbf{z})$ comme développement asymptotique quand $(x, \mathbf{z}) \rightarrow (0, \mathbf{0})$ dans $\mathcal{S}_\pm$ (au sens de Gérard-Sibuya). Il reste à montrer que $|\Psi_+ - \Psi_-|$ est exponentiellement petit dans tout sous-ensemble de $\mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_-$ de la forme $S \times \mathbf{K}$, où $S \subset \mathbb{C}$ est un secteur et $\mathbf{K} \subset \mathbb{C}^n$ un compact : ensuite, le théorème de Ramis-Sibuya permet de conclure.

Fixons donc un secteur $S \subset \mathbb{C}$ et un compact $\mathbf{K} \subset \mathbb{C}^n$ tels que $S \times \mathbf{K} \subset \mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_-$. Comme $f_{j,+}$ et $f_{j,-}$ sont des 1-sommes de la même série 1-Gevrey $\hat{f}$, il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $j = 1, \dots, n$ et tout $(x, \mathbf{z}) \in S \times \mathbf{K}$:

$$|f_{j,+}(x, \mathbf{z}) - f_{j,-}(x, \mathbf{z})| \leq A \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right).$$

L'image de $S \times \mathbf{K}$ par l'application

$$(x, \mathbf{z}) \mapsto (x, f_{1,\pm}(x, \mathbf{z}), \dots, f_{n,\pm}(x, \mathbf{z}))$$

est contenue dans un domaine de la forme $S \times \mathbf{K}' \subset \mathcal{S}'_+ \cap \mathcal{S}'_-$, pour un certain compact $\mathbf{K}' \subset \mathbb{C}^n$. Comme Φ_+ et Φ_- sont des 1-sommes de la même série 1-Gevrey $\hat{\Phi}$, il existe $A', B' > 0$ tels que pour tout $(x, \mathbf{y}) \in S \times \mathbf{K}'$:

$$|\Phi_+(x, \mathbf{y}) - \Phi_-(x, \mathbf{y})| \leq A' \exp\left(-\frac{B'}{|x|}\right),$$

Finalement, il existe $C > 0$ tel que pour tout $(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$ avec $((x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{y}')) \in S \times \mathbf{K}'$, on ait :

$$|\Phi_+(x, \mathbf{y}) - \Phi_+(x, \mathbf{y}')| \leq C \cdot \max_{j=1, \dots, n} (|y_j - y'_j|).$$

Par conséquent, pour tout $(x, \mathbf{z}) \in S \times \mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} & |\Psi_+(x, \mathbf{z}) - \Psi_-(x, \mathbf{z})| \\ &= |\Phi_+(x, f_{1,+}(x, \mathbf{z}), \dots, f_{n,+}(x, \mathbf{z})) - \Phi_-(x, f_{1,-}(x, \mathbf{z}), \dots, f_{n,-}(x, \mathbf{z}))| \\ &\leq |\Phi_+(x, f_{1,+}(x, \mathbf{z}), \dots, f_{n,+}(x, \mathbf{z})) - \Phi_+(x, f_{1,-}(x, \mathbf{z}), \dots, f_{n,-}(x, \mathbf{z}))| \\ &\quad + |\Phi_+(x, f_{1,-}(x, \mathbf{z}), \dots, f_{n,-}(x, \mathbf{z})) - \Phi_-(x, f_{1,-}(x, \mathbf{z}), \dots, f_{n,-}(x, \mathbf{z}))| \\ &\leq C \cdot \max_{j=1, \dots, n} (|f_{j,+}(x, \mathbf{z}) - f_{j,-}(x, \mathbf{z})|) + A' \exp\left(-\frac{B'}{|x|}\right) \\ &\leq C \cdot A \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right) + A' \exp\left(-\frac{B'}{|x|}\right) \\ &\leq A'' \cdot \exp\left(-\frac{B''}{|x|}\right) \end{aligned}$$

pour un choix convenable de $A'', B'' > 0$. □

Considérons un champ de vecteurs formel $\hat{Y} \in \hat{\chi}(\mathbb{C}^n, 0)$ singulier à l'origine et un difféomorphisme formel fibré $\hat{\varphi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^n, 0)$. Supposons que $\hat{Y}$ et $\hat{\varphi}$ sont tous deux 1-sommables dans les directions θ et $\theta - \pi$, $\theta \in \mathbb{R}$, et notons Y_+, Y_- (resp. φ_+, φ_-) les 1-somme respectives dans les directions θ et $\theta - \pi$. En conséquence de la proposition 6.22 et du lemme 6.18, on peut énoncer le résultat suivant.

Corollaire 6.23. *Sous les hypothèses ci-dessus, $\hat{\varphi}_*(\hat{Y})$ est 1-sommable dans les directions θ et $\theta - \pi$, et ses 1-sommes dans ces directions sont $\varphi_+(Y_+)$ et $\varphi_-(Y_-)$ respectivement.*

6.3 Développements asymptotiques 1-Gevrey faibles et faible 1-sommabilité

Nous présentons ici une notion plus faible de 1-sommabilité dont nous aurons besoin.

Toute fonction $(x, \mathbf{y}) \mapsto f(x, \mathbf{y})$ qui est holomorphe dans un domaine $U \times \mathbf{D}(0, \mathbf{r})$, où $U \subset \mathbb{C}$ est ouvert, et bornée dans tout domaine $U \times \overline{\mathbf{D}}(0, \mathbf{r}')$ avec $r'_1 < r_1, \dots, r'_n < r_n$, peut s'écrire

$$f(x, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} F_{\mathbf{j}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{j}}, \quad (6.3.1)$$

où pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$, $F_{\mathbf{j}}$ est analytique et bornée sur U , donnée par la formule de Cauchy :

$$F_{\mathbf{j}}(x) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|z_1|=r'_1} \cdots \int_{|z_n|=r'_n} \frac{f(x, \mathbf{z})}{(z_1)^{j_1+1} \cdots (z_n)^{j_n+1}} dz_n \cdots dz_1.$$

La convergence de la série de fonctions ci-dessus est uniforme sur tout compact.

De la même manière, fixons désormais une série formelle $\hat{f}(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ que l'on écrit sous la forme :

$$\hat{f}(x, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} \hat{F}_{\mathbf{j}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{j}}.$$

Définition 6.24.

- La série formelle $\hat{f}$ est dite **faiblement 1-Gevrey** si pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$, $\hat{F}_{\mathbf{j}}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ est une série formelle 1-Gevrey.
- Une fonction

$$f(x, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} F_{\mathbf{j}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{j}}$$

analytique sur un domaine $S(r, \alpha, \beta) \times \mathbf{D}(0, \mathbf{r})$, admet $\hat{f}$ comme **développement asymptotique faiblement 1-Gevrey** pour $x \in S(r, \alpha, \beta)$, si pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$, $F_{\mathbf{j}}$ admet $\hat{F}_{\mathbf{j}}$ comme développement asymptotique 1-Gevrey dans $S(r, \alpha, \beta)$.

- La série formelle $\hat{f}$ est dite **faiblement 1-sommable dans la direction** $\theta \in \mathbb{R}$, si les conditions suivantes sont vérifiées :
 - chaque $\hat{F}_{\mathbf{j}}$ est 1-sommable dans la direction θ , dont la 1-somme correspondante est notée $F_{\mathbf{j}, \theta}$;
 - la série de fonctions $f_{\theta}(x, \mathbf{y}) := \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} F_{\mathbf{j}, \theta}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{j}}$ définit un germe de fonction holomorphe dans un voisinage sectoriel attaché à l'origine de direction θ et d'ouverture au moins π .

Dans ce cas, $f_{\theta}(x, \mathbf{y})$ est appelé **1-somme faible de $\hat{f}$ dans la direction θ** .

Comme conséquence de la théorie classique des développements asymptotiques et de la sommabilité 1-Gevrey, on en déduit les résultats listés dans le lemme suivant.

- Lemme 6.25.** 1. Le développement asymptotique faiblement 1-Gevrey d'une fonction analytique dans un domaine $S(r, \alpha, \beta) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ est unique.
2. La 1-somme faible d'une série faiblement 1-sommable dans la direction θ est unique en tant que germe de $\mathcal{O}(\mathcal{S}_{\theta, \pi})$
3. L'ensemble $\Sigma_{\theta}^{(\text{faible})} \subset \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ des séries faiblement 1-sommables dans la direction θ est une algèbre stable par dérivation (partielle). De plus, l'application

$$\begin{aligned} \Sigma_{\theta}^{(\text{faible})} &\longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{S}_{\theta, \pi}) \\ \hat{f} &\longmapsto f_{\theta} \end{aligned}$$

est un morphisme injectif d'algèbres différentielles.

La proposition suivante est un analogue de la proposition 6.22 pour les séries formelles 1-sommables, avec une condition plus forte à la place de (6.2.1).

Proposition 6.26. Soient

$$\hat{\Phi}(x, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} \hat{\Phi}_{\mathbf{j}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{j}} \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$$

et

$$\hat{f}^{(k)}(x, \mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} \hat{F}_{\mathbf{j}}^{(k)}(x) \mathbf{z}^{\mathbf{j}} \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{z}]],$$

pour $k = 1, \dots, n$, des séries formelle faiblement 1-Gevrey dans les directions θ et $\theta - \pi$. Notons $\Phi_+, f_+^{(1)}, \dots, f_+^{(n)}$ (resp. $\Phi_-, f_-^{(1)}, \dots, f_-^{(n)}$) les 1-sommes faibles respectives dans la direction θ (resp. $\theta - \pi$). Supposons que $\hat{F}_{\mathbf{0}}^{(k)} = 0$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Alors,

$$\hat{\Psi}(x, \mathbf{z}) := \hat{\Phi}\left(x, \hat{f}^{(1)}(x, \mathbf{z}), \dots, \hat{f}^{(n)}(x, \mathbf{z})\right)$$

est faiblement 1-sommable dans les directions θ et $\theta - \pi$, de 1-somme faible

$$\Psi_{\pm}(x, \mathbf{z}) = \Phi_{\pm}\left(x, f_{\pm}^{(1)}(x, \mathbf{z}), \dots, f_{\pm}^{(n)}(x, \mathbf{z})\right),$$

qui est un germe de fonction holomorphe dans un voisinage sectoriel attaché à l'origine de direction θ (resp. $\theta - \pi$) et d'ouverture au moins π .

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que

$$\hat{\Psi}(x, \mathbf{z}) := \hat{\Phi}\left(x, \hat{f}^{(1)}(x, \mathbf{z}), \dots, \hat{f}^{(n)}(x, \mathbf{z})\right)$$

est bien définie en tant que série formelle, puisque pour tout $k = 1, \dots, n$, $\hat{F}_{\mathbf{0}}^{(k)} = 0$. Il est également clair que

$$\Psi_{\pm}(x, \mathbf{z}) := \Phi_{\pm}\left(x, f_{\pm}^{(1)}(x, \mathbf{z}), \dots, f_{\pm}^{(n)}(x, \mathbf{z})\right)$$

est analytique dans un domaine $S_+ \in \mathcal{S}_{\theta, \pi}$ (resp. $S_- \in \mathcal{S}_{\theta - \pi, \pi}$), puisque $f_{\pm}^{(k)}(x, \mathbf{0}) = 0$ pour tout $k = 1, \dots, n$. On vérifie alors que $\Psi_{\pm}$ admet $\hat{\Psi}$ comme développement asymptotique 1-Gevrey

dans $\mathcal{S}_\pm$. En effet :

$$\begin{aligned}
 \Psi_\pm(x, \mathbf{z}) &= \Phi_\pm\left(x, f_\pm^{(1)}(x, \mathbf{z}), \dots, f_\pm^{(n)}(x, \mathbf{z})\right) \\
 &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} (\Phi_{\mathbf{j}})_\pm(x) \left(f_\pm^{(1)}(x, \mathbf{z})\right)^{j_1} \dots \left(f_\pm^{(n)}(x, \mathbf{z})\right)^{j_n} \\
 &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} (\Phi_{\mathbf{j}})_\pm(x) \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geq 1} \left(F_1^{(1)}\right)_\pm(x) \mathbf{z}^{\mathbf{l}} \right)^{j_1} \dots \\
 &\quad \dots \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geq 1} \left(F_1^{(n)}\right)_\pm(x) \mathbf{z}^{\mathbf{l}} \right)^{j_n} \\
 &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} (\Psi_{\mathbf{j}})_\pm(x) \mathbf{z}^{\mathbf{j}}
 \end{aligned}$$

où pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$, $(\Psi_{\mathbf{j}})_\pm(x)$ est obtenue par un nombre fini d'additions et de multiplications des $(\Phi_{\mathbf{k}})_\pm, \left(F_{\mathbf{k}}^{(1)}\right)_\pm, \dots, \left(F_{\mathbf{k}}^{(n)}\right)_\pm$, $|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{j}|$. Le même calcul est valable avec les séries formelles associées, et permet de définir $\hat{\Psi}_{\mathbf{j}}(x)$, pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$. Par conséquent, $(\Psi_{\mathbf{j}})_\pm$ admet $\hat{\Psi}_{\mathbf{j}}$ comme développement asymptotique 1-Gevrey dans un secteur de direction θ (resp. $\theta - \pi$) et d'ouverture π : il s'agit donc de la 1-somme associée. $\square$

En conséquence de la proposition 6.26 et du lemme 6.25, nous obtenons un analogue du corollaire 6.23 dans le cas faiblement 1-sommable.

Corollaire 6.27. *Considérons un champ de vecteurs formel singulier $\hat{Y} \in \hat{\chi}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ et un difféomorphisme formel fibré $\hat{\varphi} : (x, \mathbf{y}) \mapsto (x, \hat{\varphi}(x, \mathbf{y}))$ tel que $\hat{\varphi}(x, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Supposons que $\hat{Y}$ et $\hat{\varphi}$ soient faiblement 1-sommables dans les directions θ et $\theta - \pi$, $\theta \in \mathbb{R}$, et notons Y_+, Y_- (resp. φ_+, φ_-) les faibles 1-sommes associées dans les directions θ et $\theta - \pi$ respectivement. Alors, $\hat{\varphi}_* (\hat{Y})$ est faiblement 1-sommable dans les directions θ et $\theta - \pi$, de 1-somme faible $(\varphi_+)_* (Y_+)$ et $(\varphi_-)_* (Y_-)$ respectivement.*

6.4 Faible 1-sommabilité versus 1-sommabilité

Comme dans la section précédente, fixons une série formelle $\hat{f}(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ que l'on écrit

$$\hat{f}(x, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} \hat{F}_{\mathbf{j}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{j}},$$

de sorte que sa transformée de Borel s'écrive

$$\mathcal{B}(\hat{f})(t, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} \mathcal{B}(\hat{F}_{\mathbf{j}})(t) \mathbf{y}^{\mathbf{j}}.$$

Le lemme suivant, bien qu'immédiat, va s'avérer très important.

Lemme 6.28.

1. La série $\mathcal{B}(\hat{f})(t, \mathbf{y})$ est convergente dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ si et seulement si les $\mathcal{B}(\hat{F}_{\mathbf{j}}), \mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$, sont toutes analytiques et bornées dans un même disque $D(0, \rho)$, $\rho > 0$, et s'il existe $B, L > 0$ tels que pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$:

$$\sup_{t \in D(0, \rho)} \left| \mathcal{B}(\hat{F}_{\mathbf{j}})(t) \right| \leq L.B^{|\mathbf{j}|}.$$

2. Si 1. est vérifié, $B\left(\hat{f}\right)$ peut être prolongée analytiquement à un domaine $\mathcal{A}_{\theta,\delta}^\infty \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ si et seulement si pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$, $\mathcal{B}\left(\hat{F}_{\mathbf{j}}\right)$ peut être prolongée analytiquement à $\mathcal{A}_{\theta,\delta}^\infty$ et si pour tout compact $K \subset \mathcal{A}_{\theta,\delta}^\infty$, il existe $B, L > 0$ tels que pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$:

$$\sup_{t \in K} \left| \mathcal{B}\left(\hat{F}_{\mathbf{j}}\right)(t) \right| \leq L.B^{|\mathbf{j}|}.$$

3. Si 1. et 2. sont vérifiés, il existe $\lambda > 0$ tels que

$$\forall (t, \mathbf{y}) \in \mathcal{A}_{\theta,\delta}^\infty \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r}), \left\| \hat{f} \right\|_{\lambda, \theta, \delta, \rho, \mathbf{r}} < +\infty$$

si et seulement s'il existe $\lambda, L, B > 0$ tels que pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$:

$$\forall t \in \mathcal{A}_{\theta,\delta}^\infty, \left| \mathcal{B}\left(\hat{F}_{\mathbf{j}}\right)(t) \right| \leq L.B^{|\mathbf{j}|} \exp(\lambda |t|).$$

Remarque 6.29. La condition 1. ci-dessus dit que la série formelle $\hat{f}$ est 1-Gevrey (au sens classique). Comme d'habitude, il existe un lemme similaire avec la transformée de Borel $\tilde{B}$ et la norme $\|\cdot\|_{\lambda, \theta, \delta, \pi, \mathbf{r}}^{\text{bis}}$.

Le corollaire suivant donne le lien entre « 1-sommabilité » et « 1-sommabilité faible » dans une direction θ donnée.

Corollaire 6.30. *Une série formelle*

$$\hat{f}(x, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} \hat{F}_{\mathbf{j}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{j}} \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$$

est 1-sommable dans la direction $\theta \in \mathbb{R}$, de 1-somme $f_\theta \in \mathcal{O}(S_{\theta, \pi})$, si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $\hat{f}$ est faiblement 1-sommable dans la direction θ ,
- il existe $\lambda, \delta, \rho > 0$ tels que pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$, $\left\| \hat{F}_{\mathbf{j}} \right\|_{\lambda, \theta, \delta, \rho} < +\infty$ et tels que la série

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n} \left\| \hat{F}_{\mathbf{j}} \right\|_{\lambda, \theta, \delta, \rho} \mathbf{y}^{\mathbf{j}} \text{ soit convergente sur un voisinage de l'origine dans } \mathbb{C}^2.$$

Démonstration. Il s'agit d'une reformulation du lemme 6.28. □

Remarque 6.31. On peut remplacer la norme $\|\cdot\|_{\lambda, \theta, \delta, \rho}$ par la norme $\|\cdot\|_{\lambda, \theta, \delta, \rho}^{\text{bis}}$ dans le second point du corollaire ci-dessus.

Il est à noter qu'il existe des séries formelles faiblement 1-sommables mais qui ne sont pas 1-Gevrey (au sens classique) : par exemple, la série

$$\hat{f} := \sum_j \hat{F}_j(x) y^j,$$

où pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\hat{F}_j(x)$ est tel que $\mathcal{B}\left(\hat{F}_j\right)(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{j}}$, est faiblement 1-sommable dans

la direction $0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, mais n'est pas 1-Gevrey (au sens classique), car $\mathcal{B}\left(\hat{F}_j\right)$ a un pôle en $-\frac{1}{j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$.

6.5 Sur la 1-sommabilité de solutions formelles d'équations différentielles linéaires singulières

Nous présentons deux résultats dont nous aurons besoin sur la 1-sommabilité de solutions formelles à certaines équations différentielles linéaires singulières de degré un. On précise (et généralise) en fait ici un énoncé obtenu dans [MR82] (Proposition p. 126) : les auteurs utilisent une norme $\|\cdot\|_\beta$, mais nous aurons besoin de la norme $\|\cdot\|_\beta^{\text{bis}}$ lors de la preuve de la proposition 7.14.

Proposition 6.32. *Soit $\hat{b}$ une série formelle 1-sommable dans la direction θ ; considérons un domaine associé $\Delta_{\theta,\delta,\rho}$, avec $\delta, \rho > 0$, comme dans la définition 6.10. Notons b_θ la 1-somme de $\hat{b}$ dans cette direction θ . Fixons également $\alpha, k \in \mathbb{C}$.*

1. *Supposons que $\|\hat{b}\|_\beta^{\text{bis}} < +\infty$. On suppose également que $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ soit tel que $d_k := \text{dist}(-k, \Delta_{\theta,\delta,\rho}) > 0$ et*

$$\beta d_k > C |\alpha k| ,$$

où $C > 0$ est une constante assez grande, indépendante des paramètres k, β, θ, ρ (on prend par exemple $C = \frac{2\exp(2)}{5} + 5$). Alors, l'équation différentielle à singularité irrégulière

$$x^2 \frac{da}{dx}(x) + (1 + \alpha x) ka(x) = \hat{b}(x) \quad (6.5.1)$$

admet une unique solution formelle $\hat{a}$ telle que $\hat{a}(0) = \frac{\hat{b}(0)}{k}$. De plus, $\hat{a}$ est 1-sommable dans la direction θ , et

$$\|\hat{a}\|_\beta^{\text{bis}} \leq \frac{\beta}{\beta d_k - C |\alpha k|} \|\hat{b}\|_\beta^{\text{bis}} . \quad (6.5.2)$$

La 1-somme a_θ de $\hat{a}$ dans la direction θ est l'unique solution (en tant que germe sectoriel) de l'équation

$$x^2 \frac{da_\theta}{dx}(x) + (1 + \alpha x) ka_\theta(x) = b_\theta(x)$$

qui soit bornée dans un domaine $S_{\theta,\pi} \in \mathcal{S}_{\theta,\pi}$.

2. *Supposons que $\|\hat{b}\|_\beta < +\infty$ et que $\Re(k) > 0$. Alors, l'équation différentielle à singularité régulière*

$$x \frac{da}{dx}(x) + ka(x) = \hat{b}(x) \quad (6.5.3)$$

admet une unique solution formelle $\hat{a}$ telle que $\hat{a}(0) = \frac{1}{k} \hat{b}(0)$. De plus, $\hat{a}$ est 1-sommable dans la direction θ . La 1-somme a_θ de $\hat{a}$ dans la direction θ est l'unique solution (en tant que germe sectoriel) de l'équation

$$x^2 \frac{da_\theta}{dx}(x) + ka_\theta(x) = b_\theta(x)$$

qui soit bornée dans un domaine $S_{\theta,\pi} \in \mathcal{S}_{\theta,\pi}$.

Démonstration.

1. Étant donné que $\hat{b}$ est 1-sommable dans la direction θ , on peut choisir $\rho > 0$ et $\delta > 0$ de sorte que $\tilde{B}(\hat{b})$ se prolonge analytiquement à n'importe quel domaine de la forme $\Delta_{\theta,\delta,\rho} \cap$

$\overline{D}(0, R)$, $R > 0$, et y soit bornée.

Appliquons la transformée de Borel au deux membres de l'équation (6.5.1) : on obtient

$$(t+k) \tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})(t) + \alpha k \int_0^t \tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})(s) ds = \tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})(t) . \quad (6.5.4)$$

En dérivant l'équation ci-dessus par rapport à t , on voit que $\tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})$ est solution d'une équation différentielle linéaire, avec une unique singularité fixe régulière en $t = -k$ (cette singularité n'est pas dans $\Delta_{\theta, \delta, \rho}$ par hypothèse) :

$$(t+k) \frac{d\tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})}{dt}(t) + (1+\alpha k) \tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})(t) = \frac{d\tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})}{dt}(t) .$$

Comme $\tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})$ se prolonge analytiquement à $\Delta_{\theta, \delta, \rho}$, il en va de même de $\frac{d\tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})}{dt}(t)$ et donc de $\tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})$. Puisque $\tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})(0) = \frac{\tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})(0)}{k} = \frac{\hat{b}'(0)}{k}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})(t) &= (t+k)^{-1-\alpha k} \left(\hat{b}'(0) \cdot k^{\alpha k} + \int_0^t \frac{d\tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})}{ds}(s) \cdot (s+k)^{\alpha k} ds \right) \\ &= (t+k)^{-1-\alpha k} \left(\hat{b}'(0) \cdot k^{\alpha k} + \tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})(t) \cdot (t+k)^{\alpha k} - \tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})(0) \cdot k^{\alpha k} \right. \\ &\quad \left. - \alpha k \int_0^t \tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})(s) \cdot (s+k)^{\alpha k-1} ds \right) \\ &= (t+k)^{-1-\alpha k} \left(\tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})(t) \cdot (t+k)^{\alpha k} \right. \\ &\quad \left. - \alpha k \int_0^t \tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})(s) \cdot (s+k)^{\alpha k-1} ds \right) \\ \tilde{\mathcal{B}}(\hat{a}) &= \frac{\tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})(t)}{(t+k)} - \alpha k \cdot (t+k)^{-1-\alpha k} \int_0^t \tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})(s) \cdot (s+k)^{\alpha k-1} ds . \end{aligned}$$

Le fait que $\tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})$ soit bornée dans tout domaine de la forme $\Delta_{\theta, \delta, \rho} \cap \overline{D}(0, R)$, $R > 0$, implique la même propriété pour $\tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})$.

Montrons enfin l'inégalité (6.5.2). Pour toute série formelle 1-Gevrey $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x, y]]$ telle que $\tilde{\mathcal{B}}(\hat{f})$ se prolonge analytiquement à $\Delta_{\theta, \delta, \rho}$, on pose pour tout $R > 0$:

$$\|\hat{f}\|_{\beta, R}^{\text{bis}} := \sup_{t \in \Delta_{\theta, \delta, \rho} \cap \overline{D}(0, R)} \left\{ \left| \tilde{\mathcal{B}}(\hat{f})(t) \left(1 + \beta^2 |t|^2 \right) \exp(-\beta |t|) \right| \right\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} .$$

Remarquons que $\|\hat{f}\|_{\beta}^{\text{bis}} = \sup_{R>0} \left\{ \|\hat{f}\|_{\beta, R}^{\text{bis}} \right\}$ pour toute série formelle $\hat{f}$ comme ci-dessus. Puisqu'ici $\tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})$ est bornée dans tout domaine du type $\Delta_{\theta, \delta, \rho} \cap \overline{D}(0, R)$, on a $\|\hat{a}\|_{\beta, R}^{\text{bis}} < +\infty$. Fixons $R > 0$, et soit $t \in \Delta_{\theta, \delta, \rho} \cap \overline{D}(0, R)$. Puisque $-k \notin \Delta_{\theta, \delta, \rho}$, on déduit de (6.5.3) :

$$\tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})(t) = \frac{1}{(t+k)} \left(\tilde{\mathcal{B}}(\hat{b})(t) - \alpha k \int_0^t \tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})(s) ds \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\mathcal{B}}(\hat{a})(t) \right| &\leq \frac{1}{|t+k|} \left[\left\| \hat{b} \right\|_{\beta}^{\text{bis}} \frac{\exp(\beta|t|)}{1+\beta^2|t|^2} + |\alpha k| \cdot \|\hat{a}\|_{\beta,R}^{\text{bis}} \int_0^{|t|} \frac{\exp(\beta u)}{1+\beta^2 u^2} du \right] \\ &\leq \frac{1}{d_k} \frac{\exp(\beta|t|)}{1+\beta^2|t|^2} \left[\left\| \hat{b} \right\|_{\beta}^{\text{bis}} + |\alpha k| \|\hat{a}\|_{\beta,R}^{\text{bis}} \frac{C}{\beta} \right], \end{aligned}$$

avec $C = \frac{2\exp(2)}{5} + 5$ (par exemple). On a utilisé ici le fait suivant :

Fait 6.33. *Il existe une constante $C > 0$ (par exemple $C = \frac{2\exp(2)}{5} + 5$), telle que pour tout $\beta > 0$, on ait :*

$$\forall t \geq 0, \int_0^t \frac{\exp(\beta u)}{1+\beta^2 u^2} du \leq \frac{C}{\beta} \frac{\exp(\beta t)}{1+\beta^2 t^2}.$$

Démonstration. Considérons la fonction $F : u \mapsto \frac{\exp(\beta u)}{1+\beta^2 u^2}$, pour $u \geq 0$. Si $t \in \left[0, \frac{2}{\beta}\right]$, on a :

$$\int_0^t F(u) du \leq \frac{\exp(2)}{5} \cdot \frac{2}{\beta},$$

car la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$F'(u) = \beta F(u) \cdot \frac{(1-\beta u)^2}{1+\beta^2 u^2} \geq 0.$$

De plus, pour tout $t \geq 0$, $F(t) \geq F(0) = 1$, donc on a pour tout $t \in \left[0, \frac{2}{\beta}\right]$:

$$\int_0^t F(u) du \leq \frac{\exp(2)}{5} \cdot \frac{2}{\beta} \cdot F(t).$$

Si $t \geq \frac{2}{\beta}$, alors :

$$\int_0^t F(u) du \leq \frac{\exp(2)}{5} \cdot \frac{2}{\beta} F(t) + \int_{\frac{2}{\beta}}^t F(u) du.$$

Or, si $u \geq \frac{\beta}{2}$, alors

$$\frac{(1-\beta u)^2}{1+\beta^2 u^2} \geq \frac{1}{5},$$

et donc :

$$F'(u) = \beta F(u) \cdot \frac{(1-\beta u)^2}{1+\beta^2 u^2} \geq \frac{\beta}{5} F(u).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^t F(u) du &\leq \int_0^{\frac{2}{\beta}} F(u) du + \int_{\frac{2}{\beta}}^t F(u) du. \\ &\leq \frac{\exp(2)}{5} \cdot \frac{2}{\beta} F(t) + \frac{5}{\beta} \int_{\frac{2}{\beta}}^t F'(u) du \\ &\leq \frac{F(t)}{5\beta} \cdot (2\exp(2) + 25). \end{aligned}$$

Conclusion : le fait est démontré avec $C = \frac{2\exp(2)}{5} + 5$. □

Revenons-en à la démonstration du lemme. Finalement, il vient

$$\|\hat{a}\|_{\beta,R}^{\text{bis}} \leq \frac{1}{d_k} \left[\|\hat{b}\|_{\beta}^{\text{bis}} + \frac{C \cdot |\alpha k| \cdot \|\hat{a}\|_{\beta,R}^{\text{bis}}}{\beta} \right],$$

d'où :

$$\|\hat{a}\|_{\beta,R}^{\text{bis}} \leq \frac{\beta}{\beta d_k - C |\alpha k|} \|\hat{b}\|_{\beta}^{\text{bis}}.$$

En conclusion, on a bien :

$$\|\hat{a}\|_{\beta}^{\text{bis}} \leq \frac{\beta}{\beta d_k - C |\alpha k|} \|\hat{b}\|_{\beta}^{\text{bis}}.$$

Au final, a_{θ} est la 1-somme de $\hat{a}$ dans la direction θ .

2. Écrivons $\hat{b}(x) = \sum_{j \geq 0} b_j x^j$. Un calcul direct montre que l'équation (6.5.3) admet une unique

solution formelle, à savoir $\hat{a}(x) = \sum_{j \geq 0} a_j x^j$ où pour tout $j \in \mathbb{N}$, $a_j = \frac{b_j}{j+k}$ (ceci provient du fait que $k \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, et donc $k+j \neq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$). En particulier, on voit également que $\hat{a}$ est 1-Gevrey, puisque $\hat{b}$ l'est. Autrement dit, la transformée de Borel $\mathcal{B}(\hat{a})$ est analytique dans un disque $D(0, \rho)$, $\rho > 0$. Dans ce disque $D(0, \rho)$, $\mathcal{B}(\hat{a})$ satisfait :

$$t \frac{d\mathcal{B}(\hat{a})}{dt}(t) + k\mathcal{B}(\hat{a})(t) = \mathcal{B}(\hat{b})(t).$$

La solution générale de cette équation proche de l'origine est donnée par

$$y(t) = \frac{c}{t^k} + \frac{1}{t^k} \int_0^t \mathcal{B}(\hat{b})(s) s^{k-1} ds, \quad c \in \mathbb{C}.$$

On voit alors que l'unique solution analytique dans $D(0, \rho)$ est celle correspondant à $c = 0$, *i.e.*

$$\mathcal{B}(\hat{a})(t) = \frac{1}{t^k} \int_0^t \mathcal{B}(\hat{b})(s) s^{k-1} ds.$$

Comme $\mathcal{B}(\hat{b})$ peut être prolongée analytiquement à un domaine infini $\Delta_{\theta, \delta, \rho}$ bissecté par la direction θ (car $\hat{b}$ est 1-sommable dans la direction θ), il en va de même pour $\mathcal{B}(\hat{a})$. De plus, il existe $\beta > 0$ tel que $\|\hat{b}\|_{\beta} < +\infty$, *i.e.* pour tout $t \in \Delta_{\theta, \delta, \rho}$:

$$|\mathcal{B}(\hat{b})(t)| \leq \|\hat{b}\|_{\beta} \exp(\beta |t|).$$

D'où, pour tout $t \in \Delta_{\theta, \delta, \rho}$:

$$\begin{aligned} |\exp(-\beta |t|) \mathcal{B}(\hat{a})(t)| &\leq \frac{1}{|t|^k} \int_0^{|t|} |\exp(-\beta |t|)| |\mathcal{B}(\hat{b})(se^{i \arg(t)})| |s^{k-1} e^{i(k-1) \arg(t)}| ds \\ &\leq \frac{1}{|t|^{\Re(k)}} \int_0^{|t|} |\exp(-\beta s)| |\mathcal{B}(\hat{b})(se^{i \arg(t)})| s^{\Re(k)-1} ds \\ &\leq \frac{\|\hat{b}\|_{\beta}}{|t|^{\Re(k)}} \int_0^{|t|} s^{\Re(k)-1} ds \\ &= \frac{\|\hat{b}\|_{\beta}}{\Re(k)}. \end{aligned}$$

En conclusion, $\hat{a}$ est 1-sommable dans la direction θ . □

Chapitre 7

Préparation 1-sommable

Le but de ce chapitre est de démontrer que l'on peut toujours conjuguer (de manière 1-sommable) un nœud-col 2-résonant diagonal strictement non dégénéré et div-intégrable (analytique) à une « *forme préparée* », qui correspond à la forme normale donnée par le théorème 1.5, modulo un reste qui est un terme 1-sommable d'ordre $O(x^N)$, pour $N > 0$ arbitrairement grand. Évidemment, les choses se compliquent lorsque l'on essaie de regarder ce qu'il se passe quand $N \rightarrow +\infty$. Ceci sera l'objet du chapitre suivant.

Proposition 7.1. *Soit $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag,nd}}$ un nœud-col 2-résonant diagonal (analytique) non dégénéré et div-intégrable, de partie linéaire $D_0 Y = \text{diag}(0, -\lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}_{>0}$, il existe un difféomorphisme formel $\Psi^{(N)} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ tangent à l'identité et 1-sommable sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, tel que*

$$\begin{aligned} \left(\Psi^{(N)}\right)_*(Y) &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(\left(-\left(\lambda + d^{(N)}(y_1 y_2) \right) + a_1 x \right) + x^N F_1^{(N)}(x, \mathbf{y}) \right) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &\quad + \left(\left(\left(\lambda + d^{(N)}(y_1 y_2) + a_2 x \right) + x^N F_2^{(N)}(x, \mathbf{y}) \right) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right. \\ &=: Y^{(N)}, \end{aligned}$$

où $(a_1 + a_2) =: \text{res}(Y) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{\leq 0}$, $d^{(N)}(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$, et $F_1^{(N)}, F_2^{(N)} \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, et d'ordre au moins 1 par rapport à $\mathbf{y}$. De plus, on peut choisir $d^{(2)} = \dots = d^{(N)}$ pour tout $N \geq 2$.

Définition 7.2. Un élément $Y^{(N)} \in \mathcal{SN}_{\text{diag,nd}}$ de la forme ci-dessus sera dit *normalisé à l'ordre $O(x^N)$* , $N > 0$, de manière 1-sommable.

Remarque 7.3.

1. Il est à noter que ce résultat n'exige pas l'hypothèse plus restrictive d'être strictement non dégénéré (*i.e.* $\Re(a_1 + a_2) > 0$).
2. En conséquence du corollaire 6.23, la 1-somme $\Psi_\theta^{(N)}$ de $\Psi^{(N)}$ dans la direction $\theta \neq \arg(\pm\lambda)$ est un germe de difféomorphisme sectoriel fibré et tangent à l'identité, *i.e.* $\Psi_\theta^{(N)} \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\theta, \pi}; \text{Id})$, qui conjugue Y à la 1-somme $Y_\theta^{(N)}$ de $Y^{(N)}$ dans la direction θ .

Dans le but de démontrer ce résultat, nous allons procéder en plusieurs étapes, en utilisant à chaque étape la proposition 6.22 et son corollaire 6.23 pour justifier la 1-sommabilité dans chaque direction $\theta \neq \arg(\pm\lambda)$ des différents objets. On commencera par normaliser (analytiquement) le champ de vecteurs restreint à l'hypersurface invariante $\{x = 0\}$. Ensuite, on redressera la *séparatrice formelle* (aussi appelée *variété centrale*) de manière 1-sommable en $\{y_1 = y_2 = 0\}$

dans de nouvelles coordonnées. Nous simplifierons ensuite les termes linéaires (d'ordre un) par rapport à $\mathbf{y}$. Après cela, nous redresserons (de façon 1-sommable toujours) deux hypersurfaces invariantes formelles en $\{y_1 = 0\}$ et $\{y_2 = 0\}$. Au final, on conjuguera (encore une fois de manière 1-sommable) le champ de vecteurs à sa forme normale modulo des termes résiduels d'ordre $O(x^N)$, avec $N > 0$ arbitrairement grand.

7.1 Normalisation analytique sur l'hypersurface invariante $\{x = 0\}$

7.1.1 Le cas transversalement symplectique

Commençons par prouver qu'un élément de $\mathcal{SN}_{\text{diag}}$ transversalement hamiltonien est nécessairement div-intégrable.

Proposition 7.4. *Si $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}}$ est transversalement hamiltonien, alors Y est div-intégrable.*

Démonstration. Considérons plus généralement un nœud-col 2-résonant diagonal $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}}$ tel que $Y|_{\{x=0\}}$ soit un champ de vecteurs hamiltonien par rapport à la forme symplectique standard $dy_1 \wedge dy_2$ (ce qui est le cas si Y est transversalement hamiltonien) : il existe un germe de fonction analytique $H(\mathbf{y}) = \lambda y_1 y_2 + O(\|\mathbf{y}\|^3) \in \mathbb{C}\{\mathbf{y}\}$ (appelé le *hamiltonien*), tel que

$$Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(\left(-\frac{\partial H}{\partial y_2} + x F_1(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_1} + \left(\frac{\partial H}{\partial y_1} + x F_2(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_2} \right),$$

avec $F_1, F_2 \in \mathbb{C}\{x, \mathbf{y}\}$ nuls en l'origine. Si l'on définit $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ et le gradient $\nabla H := {}^t(DH)$, alors $Y|_{\{x=0\}} = J\nabla H$. D'après le lemme de Morse pour les fonctions holomorphes, il existe un changement analytique de coordonnées tangent à l'identité $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0; \text{Id})$ tel que

$$\tilde{H}(\mathbf{y}) := H(\varphi^{-1}(\mathbf{y})) = y_1 y_2.$$

Rappelons le résultat élémentaire d'algèbre linéaire suivant.

Fait. *Soit $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, et $P \in M_2(\mathbb{C})$. Alors, $PJ^t P = \det(P) J$.*

En conséquence, on a :

Corollaire 7.5. *Soit $H \in \mathbb{C}\{\mathbf{y}\}$ un germe de fonction analytique en l'origine, et soit $Y_0 := J\nabla H$ le champ hamiltonien associé dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ (pour la forme symplectique standard $dy_1 \wedge dy_2$). Alors, pour tout $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$, on a :*

$$\varphi_*(Y_0) := (D\varphi \circ \varphi^{-1}) \cdot (Y_0 \circ \varphi^{-1}) = \det(D\varphi \circ \varphi^{-1}) J\nabla \tilde{H},$$

où $\tilde{H} := H \circ \varphi^{-1}$.

En appliquant ce corollaire, on voit alors que Y est div-intégrable, car le champ $J\nabla \tilde{H}$ est linéaire dans notre cas. $\square$

7.1.2 Cas général

Proposition 7.6. *Considérons un champ $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}}$ div-intégrable. Alors, il existe $\psi \in \text{Diff}_{\text{fb}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ de la forme*

$$\psi : (x, \mathbf{y}) \mapsto \left(x, y_1 + O\left(\|\mathbf{y}\|^2\right), y_2 + O\left(\|\mathbf{y}\|^2\right) \right)$$

tel que

$$\psi_*(Y) = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (- (\lambda + d(v)) y_1 + x T_1(x, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial y_1} + ((\lambda + d(v)) y_2 + x T_2(x, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial y_2} ,$$

avec $v := y_1 y_2$, $d(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$ et $T_1, T_2 \in \mathbb{C}\{x, \mathbf{y}\}$ nulles à l'origine.

Démonstration. Par hypothèse, et d'après un théorème de Brjuno (cf [Mar81]), quitte à effectuer une première transformation analytique au voisinage de l'origine, on peut supposer que

$$Y|_{\{x=0\}} = (\lambda + h(\mathbf{y})) \left(-y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) .$$

Il suffit ensuite d'appliquer le lemme suivant à $Y|_{\{x=0\}}$. □

Lemme 7.7. *Soit Y_0 germe de champ de vecteurs de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de la forme*

$$Y_0 = (\lambda + h(\mathbf{y})) \left(-y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) ,$$

avec $h(\mathbf{y}) \in \mathbb{C}\{\mathbf{y}\}$ nulle à l'origine de $\mathbb{C}^2$. Alors, il existe $\phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0, \text{Id})$ tel que

$$\phi_*(Y_0) = (\lambda + d(v)) \left(-y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) ,$$

avec $v := y_1 y_2$ et $d \in v\mathbb{C}\{v\}$.

Remarque 7.8. Autrement dit, nous avons éliminer tous les termes *non-résonants* de $h(\mathbf{y})$. On redémontre en fait ici un cas particuliers (avec un seul champ en dimension 2), du résultat principal de [Sto97], lui même inspiré des travaux de Vey.

Démonstration. Nous affirmons que ϕ peut être construit sous la forme

$$\phi(\mathbf{y}) = \left(y_1 e^{-\gamma(\mathbf{y})}, y_2 e^{\gamma(\mathbf{y})} \right) ,$$

avec $\gamma \in \mathbb{C}\{\mathbf{y}\}$ bien choisi. En effet, étudions comment un difféomorphisme agit sur Y_0 . Écrivons $U := (\lambda + h(v))$ et $L := \left(-y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right)$, de sorte que $Y_0 = UL$. Un rapide calcul donne

$$\begin{aligned} \phi_*(Y_0) &= \phi_*(UL) \\ &= ([U(1 - \mathcal{L}_L(\gamma))] \circ \phi^{-1}) L , \end{aligned}$$

où on rappelle que $\mathcal{L}_L$ est la dérivée de Lie associée à L . On cherche γ tel que l'unité

$$D := [U(1 - \mathcal{L}_L(\gamma))] \circ \phi^{-1}$$

soit sans termes *non-résonants*, i.e. soit de la forme

$$D = \lambda + d(y_1 y_2) = \lambda + \sum_{k \geq 1} d_k (y_1 y_2)^k .$$

Notons que si une unité $W = \sum_{k \geq 0} W_k (y_1 y_2)^k \in \mathbb{C}\{\mathbf{y}\}^\times$ n'a pas de termes non-résonants, alors :

$$\begin{cases} W \circ \phi^{-1} = W \\ \mathcal{L}_L(W) = 0 \end{cases} .$$

On va alors décomposer à la fois U et γ en parties “résonante” et une “non-résonante” :

$$\begin{cases} U = U_{\text{res}} + U_{\text{n-res}} \\ \gamma = \gamma_{\text{res}} + \gamma_{\text{n-res}} \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} U_{\text{n-res}} = \sum_{k_1 \neq k_2} U_{k_1, k_2} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \\ U_{\text{res}} = \sum_k U_{k, k} (y_1 y_2)^k \\ \gamma_{\text{n-res}} = \sum_{k_1 \neq k_2} \gamma_{k_1, k_2} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \\ \gamma_{\text{res}} = \sum_k \gamma_{k, k} (y_1 y_2)^k \end{cases} .$$

Les termes non-résonants de $U(1 - \mathcal{L}_L(\gamma))$ sont :

$$(U_{\text{n-res}} - (U_{\text{n-res}} + U_{\text{res}}) \mathcal{L}_L(\gamma_{\text{n-res}})) \circ \phi^{-1} .$$

Ainsi, on doit résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\mathcal{L}_L(\gamma) = \frac{U_{\text{n-res}}}{U_{\text{res}} + U_{\text{n-res}}} .$$

On voit aisément que cette équation admet une solution analytique en l'origine $\gamma \in \mathbb{C}\{\mathbf{y}\}$ (et même une infinité), puisque l'unité $U \in \mathbb{C}\{\mathbf{y}\}$ est analytique. $\square$

7.2 Simplification sommable de la partie affine en les variables « dépendantes »

Considérons un germe de champ de vecteurs analytique en l'origine de la forme

$$Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda y_1 + f_1(x, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda y_2 + f_2(x, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial y_2} , \quad (7.2.1)$$

avec

$$\begin{cases} f_1(x, \mathbf{y}) = -d(y_1 y_2) y_1 + x T_1(x, \mathbf{y}) \\ f_2(x, \mathbf{y}) = d(y_1 y_2) y_2 + x T_2(x, \mathbf{y}) \end{cases} ,$$

où $d(v) \in \mathbb{C}\{v\}$ et $T_1, T_2 \in \mathbb{C}\{x, \mathbf{y}\}$ sont nulles à l'origine.

Proposition 7.9. *Soit $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}}$ de la forme*

$$Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda y_1 + f_1(x, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda y_2 + f_2(x, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial y_2} ,$$

avec $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\{x, \mathbf{y}\}$ tels que $f_1(x, \mathbf{y}), f_2(x, \mathbf{y}) = O(\|(x, \mathbf{y})\|^2)$. Il existe alors des séries formelles $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in x^2 \mathbb{C}[[x]]$ et $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 \in x \mathbb{C}[[x]]$, 1-sommables dans toute direction $\theta \neq \arg(\pm \lambda)$, telles que le difféomorphisme formel fibré suivant

$$\hat{\Phi} : (x, y_1, y_2) \mapsto \left(x, \hat{y}_1(x) + (1 + \hat{\alpha}_1(x)) y_1 + \hat{\beta}_1(x) y_2, \hat{y}_2(x) + \hat{\alpha}_2(x) y_1 + (1 + \hat{\beta}_1(x)) y_2 \right) ,$$

(qui est tangent à l'identité et 1-sommable sauf pour $\arg(\pm\lambda)$) conjugué Y à

$$\hat{\Phi}_*(Y) = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left((-\lambda + a_1 x) y_1 + \hat{F}_1(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_1} + \left((\lambda + a_2 x) y_2 + \hat{F}_2(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_2} ,$$

où $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ et $\hat{F}_1, \hat{F}_2 \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ sont d'ordre au moins deux par rapport à $\mathbf{y}$, et sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$.

Remarque 7.10. Puisque $\hat{\Phi}|_{\{x=0\}} = \text{Id}$, on voit que $\hat{F}_i(0, \mathbf{y}) = f_i(0, \mathbf{y})$ pour $i = 1, 2$. De plus, le résidu de $\hat{\Phi}_*(Y)$ est $a_1 + a_2$.

On reporte la preuve de cette proposition à la sous-section 7.2.2. Celle-ci est basée sur les trois lemmes techniques suivants.

7.2.1 Lemmes techniques

Lemma 7.11. *Il existe un couple de séries formelles $(\hat{y}_1(x), \hat{y}_2(x)) \in (x^2\mathbb{C}[[x]])^2$ qui sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, de sorte que le difféomorphisme formel suivant*

$$\hat{\Phi}_1(x, y_1, y_2) = (x, y_1 - \hat{y}_1(x), y_2 - \hat{y}_2(x)),$$

(qui est tangent à l'identité et 1-sommable sauf pour $\arg(\pm\lambda)$) conjugué Y de (7.2.1) à

$$\hat{Y}_1(x, \mathbf{y}) = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda y_1 + \hat{g}_1(x, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda y_2 + \hat{g}_2(x, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial y_2} , \quad (7.2.2)$$

où $\hat{g}_1, \hat{g}_2$ sont des séries formelles d'ordre au moins 2 telles que $\hat{g}_1(x, \mathbf{0}) = \hat{g}_2(x, \mathbf{0}) = 0$, et qui sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$.

En d'autres termes, dans les nouvelles coordonnées, la courbe donnée par $(y_1, y_2) = (0, 0)$ est une courbe stable par le flot du champ de vecteurs et qui contient l'origine dans son adhérence : c'est une séparatrice (formelle, 1-sommable).

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate d'un important théorème de Ramis et Sibuya sur la sommabilité de solutions formelles de systèmes différentiels irréguliers [RS89]. Ce dernier assure l'existence et la 1-sommabilité sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, de $\hat{y}_1$ et $\hat{y}_2 : (\hat{y}_1(x), \hat{y}_2(x))$ est obtenu comme l'unique solution formelle du système

$$\begin{cases} x^2 \frac{dy_1}{dx} = -\lambda y_1(x) + f_1(x, y_1(x), y_2(x)) \\ x^2 \frac{dy_2}{dx} = \lambda y_2(x) + f_2(x, y_1(x), y_2(x)) \end{cases} ,$$

telle que $(\hat{y}_1(0), \hat{y}_2(0)) = (0, 0)$. On voit que $\hat{y}_1$ et $\hat{y}_2$ sont nécessairement d'ordre au moins 2 car f_1 et f_2 le sont aussi. La 1-sommabilité de $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_2$ provient de la proposition 6.22. $\square$

L'étape suivante a pour but de diagonaliser la partie linéaire en $\mathbf{y}$.

Lemma 7.12. *Il existe un couple de séries formelles $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) \in (\mathbb{C}[[x]])^2$ qui sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, de sorte que le difféomorphisme formel suivant*

$$\hat{\Phi}_2(x, y_1, y_2) = (x, y_1 + x\hat{p}_2(x)y_2, y_2 + x\hat{p}_1(x)y_1) ,$$

(qui est tangent à l'identité et 1-sommable sauf pour $\arg(\pm\lambda)$) conjugué $\hat{Y}_1$ de (7.2.2) à

$$\begin{aligned} \hat{Y}_2(x, \mathbf{y}) &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left((-\lambda + x\hat{a}_1(x)) y_1 + \hat{H}_1(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &\quad + \left((\lambda + x\hat{a}_2(x)) y_2 + \hat{H}_2(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_2} , \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

où $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{H}_1, \hat{H}_2$ sont des séries formelles qui sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, et $\hat{H}_1, \hat{H}_2$ sont d'ordre au moins 2 par rapport à $\mathbf{y}$.

Démonstration. Écrivons

$$\begin{cases} \hat{g}_1(x, \mathbf{z}) = x\hat{b}_1(x)z_1 + x\hat{c}_1(x)z_2 + \hat{G}_1(x, \mathbf{z}) \\ \hat{g}_2(x, \mathbf{z}) = x\hat{c}_2(x)z_1 + x\hat{b}_2(x)z_2 + \hat{G}_2(x, \mathbf{z}) \end{cases} ,$$

avec $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{G}_1, \hat{G}_2$ des séries formelles qui sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, telles que $\hat{G}_1$ et $\hat{G}_2$ soient d'ordre au moins deux par rapport à $\mathbf{z}$. Considérons le système différentiel irrégulier suivant, naturellement associé à $\hat{Y}_1$:

$$x^2 \frac{d\mathbf{z}}{dx}(x) = \hat{\mathbf{B}}(x) \mathbf{z}(x) + \hat{\mathbf{G}}(x, \mathbf{z}(x)) \quad , \quad (7.2.4)$$

où

$$\hat{\mathbf{B}}(x) = \begin{pmatrix} -\lambda + x\hat{b}_1(x) & x\hat{c}_1(x) \\ x\hat{c}_2(x) & \lambda + x\hat{b}_2(x) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{G}}(x, \mathbf{z}(x)) = \begin{pmatrix} \hat{G}_1(x, \mathbf{z}(x)) \\ \hat{G}_2(x, \mathbf{z}(x)) \end{pmatrix} .$$

On recherche

$$\hat{\mathbf{P}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x\hat{p}_2(x) \\ x\hat{p}_1(x) & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}[[x]]) ,$$

avec $\hat{p}_1, \hat{p}_2$ des séries formelles qui sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, telles que la transformation linéaire donnée par $\mathbf{z}(x) = \hat{\mathbf{P}}(x) \mathbf{y}(x)$, transforme le système (7.2.4) en

$$x^2 \frac{d\mathbf{y}}{dx}(x) = \hat{\mathbf{A}}(x) \mathbf{y}(x) + \hat{\mathbf{H}}(x, \mathbf{y}(x)) ,$$

avec

$$\hat{\mathbf{A}}(x) = \begin{pmatrix} -\lambda + x\hat{a}_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda + x\hat{a}_2(x) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{H}}(x, \mathbf{y}(x)) = \begin{pmatrix} \hat{H}_1(x, \mathbf{y}(x)) \\ \hat{H}_2(x, \mathbf{y}(x)) \end{pmatrix} ,$$

où $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{H}_1, \hat{H}_2$ sont des séries formelles qui sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$.

On a

$$x^2 \frac{d\mathbf{y}}{dx}(x) = \hat{\mathbf{P}}(x)^{-1} \left(\hat{\mathbf{B}}(x) \hat{\mathbf{P}}(x) - x^2 \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dx}(x) \right) \mathbf{y}(x) + \hat{\mathbf{P}}(x)^{-1} \hat{\mathbf{G}}(x, \hat{\mathbf{P}}(x) \mathbf{y}(x))$$

et on veut déterminer $\hat{\mathbf{A}}(x)$ et $\hat{\mathbf{P}}(x)$ comme ci-dessus de sorte qu'on ait

$$\hat{\mathbf{B}}(x) \hat{\mathbf{P}}(x) - x^2 \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dx}(x) = \hat{\mathbf{A}}(x) .$$

Ceci nous donne quatre équations :

$$\begin{cases} \hat{a}_1(x) = \hat{b}_1(x) + x\hat{c}_1(x)\hat{p}_1(x) \\ \hat{a}_2(x) = \hat{b}_2(x) + x\hat{c}_2(x)\hat{p}_2(x) \\ x^2 \frac{d\hat{p}_1}{dx}(x) = (2\lambda + x\hat{b}_2(x) - x - x\hat{b}_1(x))\hat{p}_1(x) + \hat{c}_2(x) - x^2\hat{c}_1(x)\hat{p}_1(x)^2 \\ x^2 \frac{d\hat{p}_2}{dx}(x) = (-2\lambda + x\hat{b}_1(x) - x - x\hat{b}_2(x))\hat{p}_2(x) + \hat{c}_1(x) - x^2\hat{c}_2(x)\hat{p}_2(x)^2 \end{cases} . \quad (7.2.5)$$

Grâce à nouveau au théorème de sommabilité des solutions de Ramis et Sibuya de [RS89], on obtient l'existence et la 1-sommabilité sauf pour $\arg(\pm\lambda)$ de $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2 : (\hat{p}_1(x), \hat{p}_2(x))$ est l'unique solution formelle du système

$$\begin{cases} x^2 \frac{d\hat{p}_1}{dx}(x) = \left(2\lambda + x\hat{b}_2(x) - x - x\hat{b}_1(x)\right) \hat{p}_1(x) + \hat{c}_2(x) - x^2 \hat{c}_1(x) \hat{p}_1(x)^2 \\ x^2 \frac{d\hat{p}_2}{dx}(x) = \left(-2\lambda + x\hat{b}_1(x) - x - x\hat{b}_2(x)\right) \hat{p}_2(x) + \hat{c}_1(x) - x^2 \hat{c}_2(x) \hat{p}_2(x)^2 \end{cases}$$

telle que

$$(\hat{p}_1(0), \hat{p}_2(0)) = \left(\frac{-\hat{c}_2(0)}{2\lambda}, \frac{\hat{c}_1(0)}{2\lambda}\right).$$

Remarquons que $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$ sont définis par les deux premières équations de (7.2.5). Au final, $\hat{\mathbf{H}}$ est défini par

$$\hat{\mathbf{H}}(x, \mathbf{y}) := \hat{\mathbf{P}}(x)^{-1} \hat{\mathbf{G}}\left(x, \hat{\mathbf{P}}(x) \mathbf{y}\right),$$

et est 1-sommable sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, d'après la proposition 6.22. $\square$

L'objectif du dernier lemme suivant est de transformer $\hat{a}_1(x)$ et $\hat{a}_2(x)$ de (7.2.3) en des termes constants.

Lemme 7.13. *Il existe un couple de séries formelles $(\hat{q}_1, \hat{q}_2) \in (\mathbb{C}[[x]])^2$ avec $\hat{q}_1(0) = \hat{q}_2(0) = 1$, qui sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, de sorte que le difféomorphisme formel suivant*

$$\hat{\Phi}_3(x, y_1, y_2) = (x, \hat{q}_1(x) y_1, \hat{q}_2(x) y_2),$$

(qui est tangent à l'identité et 1-sommable sauf pour $\arg(\pm\lambda)$) conjugue $\hat{Y}_2$ de (7.2.3) à

$$\begin{aligned} \hat{Y}_3(x, \mathbf{y}) &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left((- \lambda + a_1 x) y_1 + \hat{F}_1(x, \mathbf{y})\right) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &\quad + \left((\lambda + a_2 x) y_2 + \hat{F}_2(x, \mathbf{y})\right) \frac{\partial}{\partial y_2}, \end{aligned}$$

où $(a_1, a_2) = (\hat{a}_1(0), \hat{a}_2(0))$ et $\hat{F}_1, \hat{F}_2$ sont des séries formelles qui sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$ d'ordre au moins 2 par rapport à $\mathbf{y}$.

Démonstration. On peut associer à $\hat{Y}_2$ le système différentiel irrégulier suivant

$$x^2 \frac{d\mathbf{z}}{dx}(x) = \hat{\mathbf{A}}(x) \mathbf{z}(x) + \hat{\mathbf{H}}(x, \mathbf{z}(x)),$$

et on recherche un changement de coordonnées de la forme $\mathbf{z}(x) = \hat{\mathbf{Q}}(x) \mathbf{y}(x)$, avec

$$\hat{\mathbf{Q}}(x) = \begin{pmatrix} \hat{q}_1(x) & 0 \\ 0 & \hat{q}_2(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}[[x]])$$

avec $\hat{q}_1(0) = \hat{q}_2(0) = 1$, de sorte que le nouveau système soit

$$x^2 \frac{d\mathbf{y}}{dx}(x) = \mathbf{A}(x) \mathbf{y}(x) + \hat{\mathbf{F}}(x, \mathbf{y}(x)),$$

avec

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} -\lambda + a_1 x & 0 \\ 0 & \lambda + a_2 x \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}}(x, \mathbf{y}(x)) = \begin{pmatrix} \hat{F}_1(x, \mathbf{y}(x)) \\ \hat{F}_2(x, \mathbf{y}(x)) \end{pmatrix},$$

et $(a_1, a_2) = (\hat{a}_1(0), \hat{a}_2(0))$.

On a

$$x^2 \frac{d\mathbf{y}}{dx}(x) = \underbrace{\hat{\mathbf{Q}}(x)^{-1} \left(\hat{\mathbf{A}}(x) \hat{\mathbf{Q}}(x) - x^2 \frac{d\hat{\mathbf{Q}}}{dx}(x) \right)}_{= \begin{pmatrix} -\lambda + a_1 x & 0 \\ 0 & \lambda + a_2 x \end{pmatrix}} \mathbf{y}(x) + \hat{\mathbf{Q}}(x)^{-1} \hat{\mathbf{H}}(x, \hat{\mathbf{Q}}(x) \mathbf{y}(x))$$

si bien que

$$x^2 \frac{d\hat{\mathbf{Q}}}{dx}(x) = \hat{\mathbf{A}}(x) \hat{\mathbf{Q}}(x) - \hat{\mathbf{Q}}(x) \begin{pmatrix} -\lambda + a_1 x & 0 \\ 0 & \lambda + a_2 x \end{pmatrix},$$

et on obtient donc :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 \frac{d\hat{q}_1}{dx}(x) = x\hat{q}_1(x) (\hat{a}_1(x) - a_1) \\ x^2 \frac{d\hat{q}_2}{dx}(x) = x\hat{q}_2(x) (\hat{a}_2(x) - a_2) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \frac{d\hat{q}_1}{dx}(x) = \hat{q}_1(x) \left(\frac{\hat{a}_1(x) - a_1}{x} \right) \\ \frac{d\hat{q}_2}{dx}(x) = \hat{q}_2(x) \left(\frac{\hat{a}_2(x) - a_2}{x} \right) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \hat{q}_1(x) = \exp \left(\int_0^x \frac{\hat{a}_1(s) - a_1}{s} ds \right) \\ \hat{q}_2(x) = \exp \left(\int_0^x \frac{\hat{a}_2(s) - a_2}{s} ds \right) \end{cases}, \text{ si on a } \hat{q}_1(0) = \hat{q}_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Pour $j = 1, 2$, la quantité $\int_0^x \frac{\hat{a}_j(s) - a_j}{s} ds$ est l'unique primitive de $\frac{\hat{a}_j(s) - a_j}{s}$ sans terme constant. Puisque $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$ sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, il en va de même pour $\hat{q}_1$ et $\hat{q}_2$, et donc aussi pour $\hat{F}_1$ et $\hat{F}_2$ d'après la proposition 6.22. $\square$

7.2.2 Preuve de la proposition 7.9

Démonstration. On commence par utiliser le lemme 7.11 afin de redresser la variété centrale sur $\{y_1 = y_2 = 0\}$, i.e. d'éliminer les monômes indépendants de $\mathbf{y}$ dans les composantes selon $\frac{\partial}{\partial y_1}$ et $\frac{\partial}{\partial y_2}$. Ensuite, on applique le lemme 7.12 dans le but de mettre la partie linéaire par rapport $\mathbf{y}$ sous forme diagonale. Enfin, on utilise le lemme 7.13 pour obtenir la forme annoncée. Le corollaire 6.23 prouve la 1-sommabilité. $\square$

7.3 Redressement 1-sommable de deux hypersurfaces invariantes

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on rappelle que l'on note F_θ la 1-somme d'une série formelle $\hat{F}$ 1-sommable dans la direction θ .

Soit $\lambda \neq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \neq \arg(\pm\lambda) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et considérons un champ de vecteurs $\hat{Y}$, 1-sommable dans la direction θ , de la forme

$$\hat{Y} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(\lambda_1(x) y_1 + \hat{F}_1(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_1} + \left(\lambda_2(x) y_2 + \hat{F}_2(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad (7.3.1)$$

où :

- $\lambda_1(x) = -\lambda + a_1 x$
- $\lambda_2(x) = \lambda + a_2 x$
- $\lambda \neq 0$
- $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$
- pour $j = 1, 2$

$$\hat{F}_j(x, \mathbf{y}) = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2 \\ |\mathbf{n}| \geq 2}} \hat{F}_{\mathbf{n}}^{(j)}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$$

est 1-sommable dans la direction $\theta \neq \arg(\pm\lambda) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, de 1-somme

$$F_{j,\theta}(x, \mathbf{y}) = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2 \\ |\mathbf{n}| \geq 2}} F_{j,\mathbf{n},\theta}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{n}}.$$

En particulier, il existe $A, B, \mu > 0$ tels que pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$, $|\mathbf{n}| \geq 2$, pour $j = 1, 2$:

$$\forall t \in \Delta_{\theta, \epsilon, \rho}, \left| \tilde{\mathcal{B}}_x \left(\hat{F}_{j,\mathbf{n}} \right) (t) \right| \leq A.B^{|\mathbf{n}|} \frac{\exp(\mu|t|)}{1 + \mu^2|t|^2},$$

pour $\rho > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que $(\mathbb{R}.\lambda) \cap \mathcal{A}_{\theta,\delta}^\infty = \emptyset$ (voir définition 6.10 pour les notations). En particulier, $F_{j,\theta}$ est analytique et bornée dans un voisinage sectoriel attaché à l'origine $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_{\theta,\pi}$. Pour des raisons techniques, nous utilisons dans cette sous-section la variante de la transformée de Borel notée $\tilde{\mathcal{B}}$, avec la norme $\|\cdot\|_\mu^{\text{bis}}$ associée (voir remarques 6.9 et 6.11 et la proposition 6.12).

Proposition 7.14. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un couple de séries formelles $(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \in (\mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]])^2$ d'ordre au moins 2 par rapport à $\mathbf{y}$, qui sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, tel que le difféomorphisme formel fibré suivant*

$$\hat{\Phi}(x, \mathbf{y}) = \left(x, y_1 + \hat{\phi}_1(x, \mathbf{y}), y_2 + \hat{\phi}_2(x, \mathbf{y}) \right),$$

(qui est tangent à l'identité et est 1-sommable sauf pour $\arg(\pm\lambda)$) conjugue $\hat{Y}$ de (7.3.1) à

$$\hat{Y}_{\text{prep}} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left((-\lambda + a_1 x) + y_2 \hat{R}_1(x, \mathbf{y}) \right) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \left((\lambda + a_2 x) + y_1 \hat{R}_2(x, \mathbf{y}) \right) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2},$$

où $\hat{R}_1, \hat{R}_2 \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ sont 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$.

Démonstration. Nous allons suivre et adapter à notre contexte la preuve du redressement des séparatrices pour les cols résonants en dimension deux (voir par exemple [MM80]).

On cherche un changement de coordonnées de la forme

$$\hat{\Psi}(x, \mathbf{y}) = \left(x, y_1 + \hat{\psi}_1(x, \mathbf{y}), y_2 + \hat{\psi}_2(x, \mathbf{y}) \right),$$

avec $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ d'ordre au moins deux par rapport à $\mathbf{y}$, et $\hat{R}_1, \hat{R}_2$ comme dans l'énoncé de la proposition tels que :

$$\hat{\Psi}_* \left(\hat{Y}_{\text{prep}} \right) = \hat{Y},$$

i.e.

$$D\hat{\Psi} \cdot \hat{Y}_{\text{prep}} = \hat{Y} \circ \hat{\Psi} . \quad (7.3.2)$$

Ensuite, on prendra $\Phi := \Psi^{-1}$. Écrivons

$$\begin{aligned} \hat{T}_1 &:= y_1 y_2 \hat{R}_1 = \sum_{|\mathbf{n}| \geq 2} \hat{T}_{1,\mathbf{n}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \\ \hat{T}_2 &:= y_1 y_2 \hat{R}_2 = \sum_{|\mathbf{n}| \geq 2} \hat{T}_{2,\mathbf{n}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \\ \hat{\psi}_1 &= \sum_{|\mathbf{n}| \geq 2} \hat{\psi}_{1,\mathbf{n}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \\ \hat{\psi}_2 &= \sum_{|\mathbf{n}| \geq 2} \hat{\psi}_{2,\mathbf{n}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{n}} , \end{aligned}$$

de sorte que l'équation (7.3.2) se traduit par les deux équations

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial y_1}\right) \left(\lambda_1(x) y_1 + \hat{T}_1\right) + \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial y_2} \left(\lambda_2(x) y_2 + \hat{T}_2\right) \\ = \lambda_1(x) \left(y_1 + \hat{\psi}_1\right) + \hat{F}_1 \left(x, y_1 + \hat{\psi}_1, y_2 + \hat{\psi}_2\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial y_1} \left(\lambda_1(x) y_1 + \hat{T}_1\right) + \left(1 + \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial y_2}\right) \left(\lambda_2(x) y_2 + \hat{T}_2\right) \\ = \lambda_2(x) \left(y_2 + \hat{\psi}_2\right) + \hat{F}_2 \left(x, y_1 + \hat{\psi}_1, y_2 + \hat{\psi}_2\right) . \end{aligned}$$

Ces dernières peuvent se ré-écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{|\mathbf{n}| \geq 2} \left(\delta_{1,\mathbf{n}}(x) \hat{\psi}_{1,\mathbf{n}}(x) + x^2 \frac{d\hat{\psi}_{1,\mathbf{n}}}{dx}(x) + \hat{T}_{1,\mathbf{n}}(x) \right) \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \\ &= \hat{F}_1 \left(x, y_1 + \hat{\psi}_1(x, \mathbf{y}), y_2 + \hat{\psi}_2(x, \mathbf{y}) \right) - \hat{T}_1(x) \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial y_1}(x, \mathbf{y}) - \hat{T}_2(x) \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial y_2}(x, \mathbf{y}) \\ &=: \sum_{|\mathbf{n}| \geq 2} \zeta_{1,\mathbf{n}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \\ &\sum_{|\mathbf{n}| \geq 2} \left(\delta_{2,\mathbf{n}}(x) \hat{\psi}_{2,\mathbf{n}}(x) + x^2 \frac{d\hat{\psi}_{2,\mathbf{n}}}{dx}(x) + \hat{T}_{2,\mathbf{n}}(x) \right) \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \\ &= \hat{F}_2 \left(x, y_1 + \hat{\psi}_1(x, \mathbf{y}), y_2 + \hat{\psi}_2(x, \mathbf{y}) \right) - \hat{T}_1(x) \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial y_1}(x, \mathbf{y}) - \hat{T}_2(x) \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial y_2}(x, \mathbf{y}) \\ &=: \sum_{|\mathbf{n}| \geq 2} \zeta_{2,\mathbf{n}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \end{aligned} \right. \quad (7.3.3)$$

où $\delta_{j,\mathbf{n}}(x) = \lambda_1(x)n_1 + \lambda_2(x)n_2 - \lambda_j(x)$, $j = 1, 2$. On recherche $\hat{T}_1, \hat{T}_2$ tels que

$$\begin{cases} \hat{T}_{1,\mathbf{n}} = 0 & , \text{ si } n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0 \\ \hat{T}_{2,\mathbf{n}} = 0 & , \text{ si } n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0 \end{cases} ,$$

Remarquons que les $\zeta_{j,\mathbf{n}}$, pour $j = 1, 2$ et $|\mathbf{n}| \geq 2$, ne dépendent que des $\hat{\psi}_{i,\mathbf{k}}$ et des $\hat{F}_{i,\mathbf{k}}$, pour $i = 1, 2$ et $|\mathbf{k}| < \mathbf{n}$. On peut donc déterminer les coefficients $\hat{\psi}_{j,\mathbf{n}}$ et $\hat{T}_{j,\mathbf{n}}$, $j = 1, 2$, $|\mathbf{n}| \geq 2$, par

réurrence sur $|\mathbf{n}|$, en posant

$$\begin{cases} \hat{T}_{1,\mathbf{n}} = 0 & , \text{ si } n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0 \\ \hat{T}_{2,\mathbf{n}} = 0 & , \text{ si } n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0 \\ \hat{\psi}_{1,\mathbf{n}} = 0 & , \text{ si } n_1 \geq 1 \text{ et } n_2 \geq 1 \\ \hat{\psi}_{2,\mathbf{n}} = 0 & , \text{ si } n_2 \geq 1 \text{ et } n_2 \geq 2 , \end{cases}$$

et en résolvant pour tout $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ avec $|\mathbf{n}| \geq 2$, les équations

$$\begin{cases} \delta_{1,\mathbf{n}}(x) \hat{\psi}_{1,\mathbf{n}}(x) + x^2 \frac{d\hat{\psi}_{1,\mathbf{n}}}{dx}(x) = \zeta_{1,\mathbf{n}}(x) & , \text{ si } n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0 \\ \delta_{2,\mathbf{n}}(x) \hat{\psi}_{2,\mathbf{n}}(x) + x^2 \frac{d\hat{\psi}_{2,\mathbf{n}}}{dx}(x) = \zeta_{2,\mathbf{n}}(x) & , \text{ si } n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0 . \end{cases}$$

Lemme 7.15. *Il existe $\beta > 4\pi, M > 0$ tels que pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$ avec $|\mathbf{n}| \geq 2$, et pour tout $j = 1, 2$, on ait $\|\zeta_{j,\mathbf{n}}\|_{\beta}^{\text{bis}} < +\infty$ et*

$$\left\| \hat{\psi}_{j,\mathbf{n}} \right\|_{\beta}^{\text{bis}} \leq M \cdot \|\zeta_{j,\mathbf{n}}\|_{\beta}^{\text{bis}} ,$$

où la norme correspond au domaine $\Delta_{\theta,\epsilon,\rho}$ (voir définition 6.10).

Démonstration. Pour $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_1 + n_2 \geq 2$, on veut résoudre

$$\begin{cases} \delta_{1,\mathbf{n}}(x) = \lambda_1(x)(n_1 - 1) + \lambda_2(x)n_2 = \begin{cases} \lambda(n_2 + 1) + x(-a_1 + a_2n_2) & , \text{ si } n_1 = 0 \\ -\lambda(n_1 - 1) + a_1x(n_1 - 1) & , \text{ si } n_2 = 0 \end{cases} \\ \delta_{2,\mathbf{n}}(x) = \lambda_2(x)(n_2 - 1) + \lambda_1(x)n_1 = \begin{cases} \lambda(n_2 - 1) + a_2x(n_2 - 1) & , \text{ si } n_1 = 0 \\ -\lambda(n_1 + 1) + x(-a_2 + a_1n_1) & , \text{ si } n_2 = 0 . \end{cases} \end{cases}$$

Traisons le cas de $\delta_{1,\mathbf{n}}$ (le cas de $\delta_{2,\mathbf{n}}$ est similaire). On est exactement dans la situation de la proposition 6.32. En utilisant les notions de cette même proposition, on a respectivement :

$$\begin{cases} k = \lambda(n_2 + 1) , \alpha = \frac{(-a_1 + a_2n_2)}{\lambda(n_2 + 1)} , \\ d_k = \min \{ |\lambda(n_2 + 1)| - \rho , |\lambda(n_2 + 1)| |\sin(\theta + \epsilon)| , |\lambda(n_2 + 1)| |\sin(\theta - \epsilon)| \} \end{cases}$$

(si $n_1 = 0$)

et

$$\begin{cases} k = -\lambda(n_1 + 1) , \alpha = \frac{(-a_2 + a_1n_1)}{-\lambda(n_1 + 1)} , \\ d_k = \min \{ |\lambda(n_1 + 1)| - \rho , |\lambda(n_1 + 1)| |\sin(\theta + \epsilon)| , |\lambda(n_1 + 1)| |\sin(\theta - \epsilon)| \} \end{cases}$$

(si $n_2 = 0$).

On peut choisir le domaine $\Delta_{\theta,\epsilon,\rho}$ correspondant à la 1-sommabilité de $\hat{F}_1$ et $\hat{F}_2$ avec $0 < \rho < |\lambda|$, de sorte que $d_k > 0$, puisque $\epsilon > 0$ est tel que $(\mathbb{R}.\lambda) \cap \mathcal{A}_{\theta,\delta}^{\infty} = \emptyset$. Au final, on choisit

$$\beta > \frac{C(|a_1| + |a_2|)}{\min \{ |\lambda| - \rho , |\lambda \sin(\theta + \epsilon)| , |\lambda \sin(\theta - \epsilon)| \}} > 0 ,$$

(avec $C = \frac{2\exp(2)}{5} + 5$), de sorte que $\left\| \hat{F}_1 \right\|_{\beta}^{\text{bis}} < +\infty$. Ce choix de β implique que $\beta d_k > C|\alpha k|$ comme exigé dans la proposition 6.32, dans les deux situations considérées, à savoir $n_1 = 0$ ou

$n_2 = 0$. Puisque pour $j = 1, 2$ et $|\mathbf{n}| \geq 2$, $\zeta_{j,\mathbf{n}}$ ne dépend que des $\hat{\psi}_{i,\mathbf{k}}$ et des $\hat{F}_{i,\mathbf{k}}$, avec $i = 1, 2$ et $|\mathbf{k}| < \mathbf{n}$, on voit par récurrence que

$$\begin{cases} \|\zeta_{1,\mathbf{n}}\|_{\beta}^{\text{bis}} < +\infty & , \text{ si } n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0 \\ \|\zeta_{2,\mathbf{n}}\|_{\beta}^{\text{bis}} < +\infty & , \text{ si } n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0 \end{cases}$$

et donc, d'après la proposition 6.32 :

$$\|\hat{\psi}_{1,\mathbf{n}}\|_{\beta}^{\text{bis}} \leq \left(\frac{\beta}{\beta(|\lambda| - \rho) - C(|a_1| + |a_2|)} \right) \cdot \|\zeta_{1,\mathbf{n}}\|_{\beta}^{\text{bis}} .$$

Le lemme est donc prouvé, avec

$$M = \left(\frac{\beta}{\beta \min \{|\lambda| - \rho, |\lambda \sin(\theta + \epsilon)|, |\lambda \sin(\theta - \epsilon)|\} - C(|a_1| + |a_2|)} \right) .$$

□

Afin d'achever la preuve de la proposition 7.14, nous devons montrer que pour $j = 1, 2$, la série $\hat{\psi}_j := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2} \|\hat{\psi}_{j,\mathbf{n}}\|_{\beta} \mathbf{y}^{\mathbf{n}}$ est convergente dans un polydisque $\mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, avec $\mathbf{r} = (r_1, r_2) \in (\mathbb{R}_{>0})^2$ (ensuite le corollaire 6.30 permet de prouver la 1-sommabilité). Nous allons montrer cela à l'aide de la méthode des séries majorantes. Introduisons à cet effet quelques notations. Soit $(\mathfrak{B}, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach. Pour toute série formelle $f(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}} \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \in \mathfrak{B}[[\mathbf{y}]]$ à coefficients dans $\mathfrak{B}$, on pose $\bar{f} := \sum_{\mathbf{n}} \|f_{\mathbf{n}}\| \mathbf{y}^{\mathbf{n}}$, et $\bar{\bar{f}}(y) := \bar{f}(y, y)$. Si $g = \sum_{\mathbf{n}} g_{\mathbf{n}} \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \in \mathfrak{B}[[\mathbf{y}]]$, on écrit $\bar{f} \prec \bar{g}$ si pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$, on a $\|f_{\mathbf{n}}\| \leq \|g_{\mathbf{n}}\|$. Bien que classique, nous redémontrons le résultat suivant (voir par exemple [RR11]).

Lemme 7.16. *Pour $j = 1, 2$, soit $f_j = \sum_{|\mathbf{n}| \geq 2} f_{j,\mathbf{n}} \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \in \mathfrak{B}[[\mathbf{y}]]$ une série formelle d'ordre au moins 2, à coefficients dans un espace de Banach $(\mathfrak{B}, \|\cdot\|)$ comme ci-dessus. Considérons également deux autres séries formelles d'ordre au moins 2, notées $g_j = \sum_{|\mathbf{n}| \geq 2} g_{j,\mathbf{n}} \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \in \mathfrak{B}[[\mathbf{y}]]$, $j = 1, 2$, et qui sont convergentes sur un voisinage de l'origine. Supposons qu'il existe $\sigma > 0$ tel que pour $j = 1, 2$:*

$$\sigma \bar{f}_j \prec \bar{g}_j (y_1 + \bar{f}_1, y_2 + \bar{f}_2) .$$

Alors, f_1 et f_2 sont aussi convergentes au voisinage de l'origine.

Démonstration. L'inégalité ci-dessus implique

$$\bar{\bar{f}}_j \prec \frac{1}{\sigma} \bar{g}_j (y + \bar{f}_1 + \bar{f}_2, y + \bar{f}_1 + \bar{f}_2)$$

et donc

$$\begin{aligned} \bar{\bar{f}}_1 + \bar{\bar{f}}_2 &\prec \frac{1}{\sigma} \left(\bar{g}_1 (y + \bar{f}_1 + \bar{f}_2, y + \bar{f}_1 + \bar{f}_2) + \bar{g}_2 (y + \bar{f}_1 + \bar{f}_2, y + \bar{f}_1 + \bar{f}_2) \right) \\ &= \frac{1}{\sigma} \left(\bar{\bar{g}}_1 (y + \bar{f}_1 + \bar{f}_2) + \bar{\bar{g}}_2 (y + \bar{f}_1 + \bar{f}_2) \right) . \end{aligned}$$

Puisque $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ sont convergentes sur un voisinage de l'origine, et sont d'ordre au moins deux, il existe $A, B > 0$ tels que pour $j = 1, 2$ on ait

$$\frac{1}{\sigma} (\bar{\bar{g}}_1 + \bar{\bar{g}}_2) \prec \frac{Ay^2}{1 - By} ,$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} (\bar{f}_1 + \bar{f}_2) &\prec \frac{1}{y} \left(\frac{A (y + \bar{f}_1 + \bar{f}_2)^2}{1 - B (y + \bar{f}_1 + \bar{f}_2)} \right) \\ &\prec \frac{Ay \left(\frac{1}{y} (y + \bar{f}_1 + \bar{f}_2) \right)^2}{1 - By \left(\frac{1}{y} (y + \bar{f}_1 + \bar{f}_2) \right)} . \end{aligned}$$

Si l'on définit $u = \sum_{n \geq 1} u_n y^n := \frac{1}{y} (\bar{f}_1 + \bar{f}_2)$, il suffit de montrer que

$$u \prec \frac{Ay (1 + u)^2}{1 - By (1 + u)} . \quad (7.3.4)$$

L'idée est de comparer u avec la solution $v = \sum_{n \geq 1} v_n y^n$ de

$$v = \frac{Ay (1 + v)^2}{1 - By (1 + v)} .$$

On voit alors facilement que v est convergente sur un voisinage de l'origine, en tant que solution d'une équation polynomiale de degré deux :

$$-(A + B)v^2 + (1 - (2A + B)y)v - Ay = 0 .$$

De plus, $v_1 = A$, et pour tout $n > 1$, on a $v_n = P_n(v_1, \dots, v_{n-1})$, où

$$P_n(v_1, \dots, v_{n-1}) = (2A + B)v_{n-1} + (A + B) \sum_{k=1}^{n-1} v_k v_{n-k}$$

est un polynôme à coefficients positifs en les $n - 1$ variables $(v_1, \dots, v_{n-1})$. En choisissant A tel que $A > u_1$, on déduit de (7.3.4) que pour tout $n > 1$:

$$u_n \leq P_n(u_1, \dots, u_{n-1}) .$$

On voit ensuite par récurrence sur n (et en utilisant le fait que P_n a ses coefficients positifs) que :

$$u_n \leq P_n(u_1, \dots, u_{n-1}) \leq P_n(v_1, \dots, v_{n-1}) = v_n ,$$

et donc $u \prec v$. Puisque v est convergente au voisinage de l'origine, il en est de même pour u , et par conséquent pour $\bar{f}_1$ et $\bar{f}_2$ également. Le lemme est démontré. $\square$

En prenant $\beta > 4\pi$, d'après la proposition 6.12, on a pour tout $\hat{f}, \hat{g} \in \mathfrak{B}_\beta^{\text{bis}}$, on a :

$$\|\hat{f}\hat{g}\|_\beta^{\text{bis}} \leq \|\hat{f}\|_\beta^{\text{bis}} \|\hat{g}\|_\beta^{\text{bis}} .$$

Si l'on arrive à montrer qu'il existe $\sigma > 0$ tel que pour $j = 1, 2$ on ait

$$\sigma \widehat{\psi_j} \prec \widehat{F_j} \left(y_1 + \widehat{\psi_1}, y_2 + \widehat{\psi_2} \right) ,$$

alors le lemme précédent permettra de conclure. On a vu qu'il existe $M > 0$ tel que pour $j = 1, 2$:

$$\left\| \hat{\psi}_{j,\mathbf{n}} \right\|_{\beta}^{\text{bis}} \leq M \cdot \left\| \zeta_{j,\mathbf{n}} \right\|_{\beta}^{\text{bis}} ,$$

où

$$\begin{cases} \zeta_1 := \sum_{|\mathbf{n}| \geq 2} \zeta_{1,\mathbf{n}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \\ = \hat{F}_1 \left(x, y_1 + \hat{\psi}_1(x, \mathbf{y}), y_2 + \hat{\psi}_2(x, \mathbf{y}) \right) - \hat{T}_1(x) \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial y_1}(x, \mathbf{y}) - \hat{T}_2(x) \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial y_2}(x, \mathbf{y}) \\ \zeta_2 := \sum_{|\mathbf{n}| \geq 2} \zeta_{2,\mathbf{n}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \\ = \hat{F}_2 \left(x, y_1 + \hat{\psi}_1(x, \mathbf{y}), y_2 + \hat{\psi}_2(x, \mathbf{y}) \right) - \hat{T}_1(x) \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial y_1}(x, \mathbf{y}) - \hat{T}_2(x) \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial y_2}(x, \mathbf{y}) \end{cases} .$$

En posant $\sigma := \frac{1}{M}$, on a alors :

$$\begin{cases} \sigma \overline{\hat{\psi}_1} \prec \overline{\zeta_1} \prec \overline{\hat{F}_1} \left(x, y_1 + \overline{\hat{\psi}_1}(x, \mathbf{y}), y_2 + \overline{\hat{\psi}_2}(x, \mathbf{y}) \right) + \overline{\hat{T}_1}(x) \frac{\partial \overline{\hat{\psi}_1}}{\partial y_1}(x, \mathbf{y}) + \overline{\hat{T}_2}(x) \frac{\partial \overline{\hat{\psi}_1}}{\partial y_2}(x, \mathbf{y}) \\ \sigma \overline{\hat{\psi}_2} \prec \overline{\zeta_2} \prec \overline{\hat{F}_2} \left(x, y_1 + \overline{\hat{\psi}_1}(x, \mathbf{y}), y_2 + \overline{\hat{\psi}_2}(x, \mathbf{y}) \right) + \overline{\hat{T}_1}(x) \frac{\partial \overline{\hat{\psi}_2}}{\partial y_1}(x, \mathbf{y}) + \overline{\hat{T}_2}(x) \frac{\partial \overline{\hat{\psi}_2}}{\partial y_2}(x, \mathbf{y}) \end{cases} .$$

De plus, on rappelle que

$$\begin{cases} \hat{T}_{1,\mathbf{n}} = 0 & , \text{ si } n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0 \\ \hat{T}_{2,\mathbf{n}} = 0 & , \text{ si } n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0 \\ \hat{\psi}_{1,\mathbf{n}} = 0 & , \text{ si } n_1 \geq 1 \text{ et } n_2 \geq 1 \\ \hat{\psi}_{2,\mathbf{n}} = 0 & , \text{ si } n_1 \geq 1 \text{ et } n_2 \geq 1 \end{cases}$$

si bien qu'on a en fait des relations de majorations plus précises :

$$\begin{cases} \sigma \overline{\hat{\psi}_1} \prec \overline{\zeta_1} \prec \overline{\hat{F}_1} \left(x, y_1 + \overline{\hat{\psi}_1}(x, \mathbf{y}), y_2 + \overline{\hat{\psi}_2}(x, \mathbf{y}) \right) \\ \sigma \overline{\hat{\psi}_2} \prec \overline{\zeta_2} \prec \overline{\hat{F}_2} \left(x, y_1 + \overline{\hat{\psi}_1}(x, \mathbf{y}), y_2 + \overline{\hat{\psi}_2}(x, \mathbf{y}) \right) \end{cases} .$$

Il reste à appliquer le lemme précédent pour conclure. $\square$

Remarque 7.17. Dans la proposition que l'on vient de prouver, supposons que pour $j = 1, 2$,

$$\hat{F}_j(x, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2, |\mathbf{n}| \geq 2} \hat{F}_{\mathbf{n}}^{(j)}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{n}}$$

dans l'expression de $\hat{Y}$ satisfasse :

$$\begin{cases} \hat{F}_{\mathbf{n}}^{(1)}(0) = 0 & , \forall \mathbf{n} = (n_1, n_2) \mid n_1 + n_2 \geq 2 \text{ et } \left(n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0 \right) \\ \hat{F}_{\mathbf{n}}^{(2)}(0) = 0 & , \forall \mathbf{n} = (n_1, n_2) \mid n_1 + n_2 \geq 2 \text{ et } \left(n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0 \right) \end{cases} .$$

Alors, le difféomorphisme $\hat{\Phi}$ de la proposition peut être choisi pour être l'identité en restriction à $\{x = 0\}$, si bien que

$$\begin{cases} y_1 y_2 \hat{R}_1(x, \mathbf{y}) &= \hat{F}_1(0, \mathbf{y}) + x \hat{S}_1(x, \mathbf{y}) \\ y_1 y_2 \hat{R}_2(x, \mathbf{y}) &= \hat{F}_2(0, \mathbf{y}) + x \hat{S}_2(x, \mathbf{y}) , \end{cases}$$

avec $\hat{S}_1, \hat{S}_2$ 1-sommables dans la direction $\theta \neq \arg(\pm \lambda) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\hat{F}_1(0, \mathbf{y}), \hat{F}_2(0, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}\{\mathbf{y}\}$ convergentes au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$. En effet, on voit facilement par récurrence sur $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2 \geq 2$ que $\hat{\psi}_1$ et $\hat{\psi}_2$ peuvent être choisis "divisibles" par x , et que ζ_1, ζ_2 sont alors tels que $\zeta_{j,\mathbf{n}}(x)$ soit aussi "divisible" par x si $n_1 = 0$ ou si $n_2 = 0$.

7.4 Normalisation sommable à l'ordre $O(x^N)$, $\forall N \geq 1$

On considère à présent un noeud-col 2-résonant diagonal non dégénéré et div-intégrable, 1-sommable sauf pour $\arg(\pm\lambda)$, de la forme

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{\text{prep}} = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\lambda + a_1 x - d(y_1 y_2) + x \hat{S}_1(x, \mathbf{y}) \right) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + \left(\lambda + a_2 x + d(y_1 y_2) + x \hat{S}_2(x, \mathbf{y}) \right) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \quad ,\end{aligned}$$

où :

- $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- $\hat{S}_1, \hat{S}_2 \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ sont d'ordre au moins 1 par rapport à $\mathbf{y}$ et 1-sommables dans toute direction $\theta \neq \arg(\pm\lambda) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$;
- $\text{res}(\hat{Y}_{\text{prep}}) = a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$;
- $d(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$ est germe de fonction analytique nulle en l'origine.

On note $Y_{\text{prep}, \theta}, S_{1, \theta}, S_{2, \theta}$ les 1-sommes respectives de $\hat{Y}, \hat{S}_1, \hat{S}_2$ dans la direction θ . Introduisons quelques notations qui vont s'avérer utiles :

$$\hat{Y}_{\text{prep}} = Y_0 + DC + R\mathcal{R} \quad ,$$

où :

- $Y_0 := \lambda \mathcal{C} + x \left(x \frac{\partial}{\partial x} + a_1 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + a_2 y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right)$
- $\mathcal{C} := -y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$
- $\mathcal{R} := y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$
- $D(x, \mathbf{y}) = d(y_1 y_2) + x D^{(1)}(x, \mathbf{y}) = d(y_1 y_2) + x \left(\frac{\hat{S}_2 - \hat{S}_1}{2} \right)$ est 1-sommable dans la direction θ , de 1-somme D_θ dominée par $\|\mathbf{y}\| = \max(|y_1|, |y_2|)$ (D est d'ordre au moins 1 par rapport à $\mathbf{y}$) : D est appelée la “*composante tangentielle*” de $\hat{Y}_{\text{prep}}$.
- $R(x, \mathbf{y}) = x R^{(1)}(x, \mathbf{y}) = x \left(\frac{\hat{S}_2 + \hat{S}_1}{2} \right)$ est 1-sommable dans la direction θ , de 1-somme R_θ dominée par $\|\mathbf{y}\| = \max(|y_1|, |y_2|)$ (R est d'ordre au moins 1 par rapport à $\mathbf{y}$) : R est appelée la “*composante radiale*” de $\hat{Y}_{\text{prep}}$.

La proposition suivante fournit une transformation 1-sommable, qui normalise le champ $\hat{Y}_{\text{prep}}$ modulo des termes d'ordre $O(x^N)$, et ce pour $N > 0$ arbitrairement grand.

Proposition 7.18. *Soit*

$$\hat{Y}_{\text{prep}} = Y_0 + DC + R\mathcal{R}$$

comme ci-dessus.

Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}_{>0}$, il existe $d^{(N)}(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$ et $\Phi^{(N)} \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0, \text{Id})$ qui conjugue $\hat{Y}_{\text{prep}}$ (resp. sa 1-somme $Y_{\text{prep}, \theta}$ dans la direction $\theta \neq \arg(\pm\lambda) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) à

$$\begin{aligned}Y^{(N)} &= Y_0 + \left(d^{(N)}(y_1 y_2) + x^N D^{(N)}(x, \mathbf{y}) \right) \mathcal{C} + x^N R^{(N)}(x, \mathbf{y}) \mathcal{R} \\ \left(\text{resp. } Y_\theta^{(N)} \right) &= Y_0 + \left(d^{(N)}(y_1 y_2) + x^N D_\theta^{(N)}(x, \mathbf{y}) \right) \mathcal{C} + x^N R_\theta^{(N)}(x, \mathbf{y}) \mathcal{R} \quad ,\end{aligned}$$

où $D^{(N)}, R^{(N)}$ sont d'ordre au moins 1 par rapport à $\mathbf{y}$ et 1-sommables dans la direction θ , de 1-sommes respectives $D_\theta^{(N)}, R_\theta^{(N)}$. De plus, on peut choisir $d^{(2)} = \dots = d^{(N)}$ pour tout $N \geq 2$, et $d^{(1)} = d$.

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur N .

- Le cas $N = 1$ est la situation initiale, et on a donc $Y^{(1)} := \hat{Y}_{\text{prep}}$.
- Supposons le résultat vrai pour $N \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Commençons par la composante radiale. On écrit

$$R^{(N)}(x, \mathbf{y}) = \sum_{n_1+n_2 \geq 1} R_{n_1, n_2}^{(N)}(x) y_1^{n_1} y_2^{n_2}$$

et

$$R_{\text{res}}^{(N)}(0, u) = \sum_{k \geq 1} R_{k, k}^{(N)}(0) u^k \quad .$$

On cherche une solution analytique τ à l'équation homologique

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y^{(N)}}(\tau) &= -x^N R^{(N)} + \left(x^{N+1} \tilde{R}^{(N+1)}\right) \circ \Lambda_\tau \\ \left(\text{resp. } \mathcal{L}_{Y_\theta^{(N)}}(\tau) &= -x^N R_\theta^{(N)} + \left(x^{N+1} \tilde{R}_\theta^{(N+1)}\right) \circ \Lambda_\tau\right) \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

pour un bon choix de $\tilde{R}^{(N+1)}, \tilde{R}_\theta^{(N+1)}$, avec

$$\Lambda_\tau(x, \mathbf{y}) := \Phi_\tau^\tau(x, \mathbf{y}) = (x, y_1 \exp(\tau(x, \mathbf{y})), y_2 \exp(\tau(x, \mathbf{y}))) \quad ,$$

et

$$\tau(x, \mathbf{y}) = x^{N-1} \tau_0(y_1 y_2) + x^N \tau_1(\mathbf{y}) \quad ,$$

où $\tau_1(\mathbf{y}) = \sum_{j_1 \neq j_2} \tau_{1, j_1 j_2} y_1^{j_1} y_2^{j_2}$. Concrètement, Λ_τ est le flot de $\mathcal{R}$ évalué au « temps »

$\tau(x, \mathbf{y})$.

Admettons un instant qu'une telle solution analytique τ existe. Dans ce cas, $\Lambda_\tau \in \text{Diff}_{\text{fb}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ est un germe de difféomorphisme fibré analytique fixant l'origine et tangent à l'identité, et donc il en est de même de son inverse $\Lambda_\tau^{-1} \in \text{Diff}_{\text{fb}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$. Considérons alors $d^{(N)}$ et $\tilde{D}^{(N)}$ tels que

$$\begin{aligned} d^{(N+1)}(z_1 z_2) + x^N \tilde{D}^{(N)}(x, \mathbf{z}) &:= \left(d^{(N)}(y_1 y_2) + x^N D^{(N)}(x, \mathbf{y})\right) \circ \Lambda_\tau^{-1}(x, \mathbf{z}) \\ d^{(N+1)}(z_1 z_2) + x^N \tilde{D}_\theta^{(N)}(x, \mathbf{z}) &:= \left(d^{(N)}(y_1 y_2) + x^N D_\theta^{(N)}(x, \mathbf{y})\right) \circ \Lambda_\tau^{-1}(x, \mathbf{z}) \quad . \end{aligned}$$

Alors, on déduit de (7.4.1) :

$$\begin{aligned} (\Lambda_\tau)_* \left(Y^{(N)}\right) &= Y_0 + \left(d^{(N+1)}(z_1 z_2) + x^N \tilde{D}^{(N)}(x, \mathbf{z})\right) \mathcal{C} \\ &\quad + x^{N+1} \tilde{R}^{(N+1)}(x, \mathbf{z}) \mathcal{R} \\ \left((\Lambda_\tau)_* \left(Y_\theta^{(N)}\right) &= Y_0 + \left(d^{(N+1)}(z_1 z_2) + x^N \tilde{D}_\theta^{(N)}(x, \mathbf{z})\right) \mathcal{C} \right. \\ &\quad \left. + x^{N+1} \tilde{R}_\theta^{(N+1)}(x, \mathbf{z}) \mathcal{R} \right) . \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \text{D}\Lambda_\tau \cdot Y^{(N)} &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{Y^{(N)}}(x) \\ \mathcal{L}_{Y^{(N)}}(y_1 \exp(\tau(x, \mathbf{y}))) \\ \mathcal{L}_{Y^{(N)}}(y_2 \exp(\tau(x, \mathbf{y}))) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 \\ (\mathcal{L}_{Y^{(N)}}(y_1) + y_1 (\mathcal{L}_{Y^{(N)}}(\tau))) \exp(\tau(x, \mathbf{y})) \\ (\mathcal{L}_{Y^{(N)}}(y_2) + y_2 (\mathcal{L}_{Y^{(N)}}(\tau))) \exp(\tau(x, \mathbf{y})) \end{pmatrix} \\ &= \left(Y_0 + \left(d^{(N+1)} + x^N \tilde{D}^{(N)}\right) \mathcal{C} + x^{N+1} \tilde{R}^{(N+1)} \mathcal{R}\right) \circ \Lambda_\tau(x, \mathbf{y}) \quad . \end{aligned}$$

Ces calculs sont évidemment également valables avec les 1-sommes correspondantes, à savoir $Y_\theta^{(N)}, D_\theta^{(N)}, \tilde{D}_\theta^{(N)}, \tilde{R}_\theta^{(N+1)}$ au lieu de $Y^{(N)}, D^{(N)}, \tilde{D}^{(N)}, \tilde{R}^{(N+1)}$. On utilise la proposition 6.22 pour prouver la 1-sommabilité des objets obtenus par compositions. Démontrons à présent l'existence d'un germe de fonction analytique de la forme

$$\tau(x, \mathbf{y}) = x^{N-1} \tau_0(y_1 y_2) + x^N \tau_1(\mathbf{y}) \quad ,$$

d'ordre 1 par rapport à $\mathbf{y}$, avec

$$\tau_1(\mathbf{y}) = \sum_{j_1 \neq j_2} \tau_{1,j_1 j_2} y_1^{j_1} y_2^{j_2} \quad ,$$

solution de (7.4.1). Cette équation s'écrit aussi

$$\begin{aligned} & x^2 \frac{\partial \tau}{\partial x} + \left(-\lambda + a_1 x - d^{(N)}(y_1 y_2) - x^N D^{(N)}(x, \mathbf{y}) + x^N R^{(N)}(x, \mathbf{y}) \right) y_1 \frac{\partial \tau}{\partial y_1} \\ & + \left(\lambda + a_2 x + d^{(N)}(y_1 y_2) + x^N D^{(N)}(x, \mathbf{y}) + x^N R^{(N)}(x, \mathbf{y}) \right) y_2 \frac{\partial \tau}{\partial y_2} \\ & = -x^N R^{(N)} + \left(x^{N+1} \tilde{R}^{(N+1)} \right) \circ \Lambda_\tau \quad , \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} & x^2 \frac{\partial \tau}{\partial x} + a_1 x y_1 \frac{\partial \tau}{\partial y_1} + a_2 x y_2 \frac{\partial \tau}{\partial y_2} + \left(\lambda + d^{(N)}(y_1 y_2) + x^N D^{(N)}(x, \mathbf{y}) \right) \mathcal{L}_C(\tau) \\ & + \left(x^N R^{(N)}(x, \mathbf{y}) \right) \mathcal{L}_R(\tau) = -x^N R^{(N)} + \left(x^{N+1} \tilde{R}^{(N+1)} \right) \circ \Lambda_\tau \quad . \end{aligned}$$

Regardons les termes de degré N par rapport à x :

$$\begin{aligned} & (N-1) \tau_0(y_1 y_2) + \left(a_1 + a_2 + 2\delta_{N,1} R^{(N)}(0, \mathbf{y}) \right) y_1 y_2 \frac{\partial \tau_0}{\partial u}(y_1 y_2) \\ & + \left(\lambda + d^{(N)}(y_1 y_2) \right) \mathcal{L}_C(\tau_1) = -R^{(N)}(0, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

(ici $\delta_{N,1}$ est le symbole de Kronecker). On va utiliser le fait que la somme $\text{Im}(\mathcal{L}_C) \oplus \text{Ker}(\mathcal{L}_C)$ est directe, et que $\text{Ker}(\mathcal{L}_C)$ est formé des séries en le monôme $v = y_1 y_2$. En isolant le terme $\mathcal{L}_C(\tau_1)$ d'une part, et les autres termes d'autre part, la décomposition en somme directe ci-dessus nous donne :

$$\begin{cases} v \left(a_1 + a_2 + 2\delta_{N,1} R_{\text{res}}^{(N)}(0, v) \right) \frac{d\tau_0}{dv}(v) + (N-1) \tau_0(v) = -R_{\text{res}}^{(N)}(0, v) \\ \tau_0(0) = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{L}_C(\tau_1) = \frac{-1}{\lambda + d^{(N)}(y_1 y_2)} \left(\left(2\delta_{N,1} \left(R^{(N)}(0, \mathbf{y}) - R_{\text{res}}^{(N)}(0, v) \right) \right) y_1 y_2 \frac{d\tau_0}{du}(y_1 y_2) \right. \\ \quad \left. + R^{(N)}(0, \mathbf{y}) - R_{\text{res}}^{(N)}(0, v) \right) \\ \tau_1(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

Puisque $R^{(N)}$ est analytique par rapport à $\mathbf{y}$, on en déduit que $R_{\text{res}}^{(N)}(0, v)$ est analytique près de $v = 0$. De plus, comme $R_{\text{res}}^{(N)}(0, 0) = 0$ et $a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$, la première des deux équations ci-dessus admet une unique solution formelle τ_0 avec $\tau_0(0) = 0$: cette solution est en fait analytique au voisinage de l'origine. Maintenant que τ_0 est déterminé, il existe une unique solution formelle τ_1 à la seconde équation ci-dessus,

satisfaisant $\tau_1(\mathbf{y}) = \sum_{j_1 \neq j_2} \tau_{1,j_1 j_2} y_1^{j_1} y_2^{j_2}$: cette solution est en fait elle aussi analytique au voisinage de l'origine.

En conclusion, $\Lambda_\tau \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ et conjugue $Y^{(N)}$ (*resp.* $Y_\theta^{(N)}$) à $\tilde{Y}^{(N)} := (\Lambda_\tau)_* (Y^{(N)})$ (*resp.* $\tilde{Y}_\theta^{(N)} := (\Lambda_\tau)_* (Y_\theta^{(N)})$).

On déduit de (7.4.2) que $(\mathcal{L}_{Y^{(N)}}(\tau) + x^N R^{(N)})$ et $(\mathcal{L}_{Y_\theta^{(N)}}(\tau) + x^N R_\theta^{(N)})$ sont divisibles par x^{N+1} , de sorte que l'on puisse définir :

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{(N+1)}(x, \mathbf{z}) &:= \left(\frac{\mathcal{L}_{Y^{(N)}}(\tau) + x^N R^{(N)}}{x^{N+1}} \right) \circ \Lambda_\tau^{-1}(x, \mathbf{z}) \\ \left(\tilde{R}_\theta^{(N+1)}(x, \mathbf{z}) &:= \left(\frac{\mathcal{L}_{Y_\theta^{(N)}}(\tau) + x^N R_\theta^{(N)}}{x^{N+1}} \right) \circ \Lambda_\tau^{-1}(x, \mathbf{z}) \right) . \end{aligned}$$

D'après la proposition 6.22, $\tilde{R}^{(N+1)}$ (*resp.* $\tilde{D}^{(N)}$) est 1-sommable dans la direction θ , de 1-somme $\tilde{R}_\theta^{(N+1)}$ (*resp.* $\tilde{D}_\theta^{(N)}$).

Au final, en remarquant que $d^{(N+1)} \circ \Lambda_\tau(0, \mathbf{y}) = d^{(N)}(y_1, y_2)$, on voit que $\tau(0, \mathbf{y}) = 0$ et donc $\Lambda_\tau(0, \mathbf{y}) = (0, y_1, y_2)$ si $N > 1$, de sorte que $d^{(N+1)} = d^{(N)}$ quand $N > 1$.

2. Occupons nous à présent de la composante tangentielle. Écrivons

$$\tilde{D}^{(N)}(x, \mathbf{z}) = \sum_{n_1 + n_2 \geq 1} \tilde{D}_{n_1, n_2}^{(N)}(x) z_1^{n_1} z_2^{n_2}$$

et

$$\tilde{D}_{\text{res}}^{(N)}(0, v) = \sum_{k \geq 1} \tilde{D}_{k, k}^{(N)}(0) v^k .$$

Exactement comme dans le cas 1. qui traitait la partie radiale (les calculs ici sont même plus simples), on peut prouver l'existence d'un germe de fonction analytique σ solution de l'équation homologique :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{Y}^{(N)}}(\sigma) &= -x^N \tilde{D}^{(N)} + (x^{N+1} D^{(N+1)}) \circ \Gamma_\sigma \\ \left(\mathcal{L}_{\tilde{Y}_\theta^{(N)}}(\sigma) &= -x^N \tilde{D}_\theta^{(N)} + (x^{N+1} D_\theta^{(N+1)}) \circ \Gamma_\sigma \right) \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

pour un choix convenable de $D^{(N+1)}, D_\theta^{(N+1)}$, avec

$$\Gamma_\sigma(x, \mathbf{z}) := (x, y_1 \exp(-\sigma(x, \mathbf{z})), y_2 \exp(\sigma(x, \mathbf{z})))$$

et

$$\sigma(x, \mathbf{z}) = x^{N-1} \sigma_0(z_1 z_2) + x^N \sigma_1(\mathbf{z}) ,$$

où $\sigma_1(\mathbf{z}) = \sum_{j_1 \neq j_2} \sigma_{1,j_1 j_2} z_1^{j_1} z_2^{j_2}$. Remarquons que Γ_σ est le flot de $\mathcal{C}$ évalué au temps formel $\sigma(x, \mathbf{z})$.

A nouveau, comme dans le premier cas (de la partie radiale), on a $\Gamma_\sigma \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ et donc aussi $\Gamma_\sigma^{-1} \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$. Si l'on considère $R^{(N+1)}$ et $R_\theta^{(N+1)}$ tels que

$$\begin{aligned} R^{(N+1)}(x, \mathbf{y}) &:= \tilde{R}^{(N+1)} \circ \Gamma_\sigma^{-1}(x, \mathbf{y}) \\ R_\theta^{(N+1)}(x, \mathbf{z}) &:= \tilde{R}_\theta^{(N+1)} \circ \Gamma_\sigma^{-1}(x, \mathbf{y}) , \end{aligned}$$

alors on déduit de (7.4.3) :

$$\begin{aligned} (\Gamma_\sigma)_* \left(\tilde{Y}^{(N)} \right) &= Y_0 + \left(d^{(N+1)}(y_1 y_2) + x^{N+1} D^{(N+1)}(x, \mathbf{y}) \right) \mathcal{C} \\ &\quad + x^{N+1} R^{(N+1)}(x, \mathbf{y}) \mathcal{R} \\ (\Gamma_\sigma)_* \left(\tilde{Y}_\theta^{(N)} \right) &= Y_0 + \left(d^{(N+1)}(y_1 y_2) + x^{N+1} D_\theta^{(N+1)}(x, \mathbf{y}) \right) \mathcal{C} \\ &\quad + x^{N+1} R_\theta^{(N+1)}(x, \mathbf{y}) \mathcal{R} . \end{aligned}$$

En fait, on choisit :

$$\begin{aligned} D^{(N+1)}(x, \mathbf{y}) &:= \left(\frac{\mathcal{L}_{\tilde{Y}^{(N)}}(\sigma) + x^N \tilde{D}^{(N)}}{x^{N+1}} \right) \circ \Gamma_\sigma^{-1}(x, \mathbf{y}) \\ D_\theta^{(N+1)}(x, \mathbf{y}) &:= \left(\frac{\mathcal{L}_{\tilde{Y}_\theta^{(N)}}(\sigma) + x^N \tilde{D}_\theta^{(N)}}{x^{N+1}} \right) \circ \Gamma_\sigma^{-1}(x, \mathbf{y}) . \end{aligned}$$

D'après la proposition 6.22, les différents objets considérés sont 1-sommables dans la direction $\theta \neq \arg(\pm \lambda) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

□

7.5 Preuve de la proposition 7.1

Nous donnons à présent une preuve courte de la proposition 7.1, en appliquant les différents résultats de ce chapitre.

Démonstration. (de la proposition 7.1)

Il suffit d'appliquer successivement le lemme 7.7 (appliqué à $Y_0 := Y_{\{x=0\}}$), la proposition 7.9, la proposition 7.14 et finalement la proposition 7.18, en utilisant après chaque étape le corollaire 6.23 pour obtenir la 1-sommabilité annoncée. □

Chapitre 8

Normalisation sectorielle analytique

Dans ce chapitre nous allons démontrer l'existence de normalisations analytiques sectorielles données par le théorème 5.5. Nous commencerons avec un champ de vecteurs $Y^{(N)}$ normalisé à l'ordre $O(x^N)$, comme obtenu dans la proposition 7.1. L'ingrédient principal sera de démontrer l'existence de germes sectoriels de fonctions analytiques $\alpha_+ \in \mathcal{O}(\mathcal{S}_+)$, $\alpha_- \in \mathcal{O}(\mathcal{S}_-)$, solutions d'une équation homologique de la forme

$$\mathcal{L}_{Y^{(N)}}(\alpha_{\pm}) = x^{M+1} A_{\pm}(x, \mathbf{y}) \quad ,$$

où $M \in \mathbb{N}$ et $A_{\pm} \in \mathcal{O}(\mathcal{S}_{\pm})$ (voir lemme 8.6). Afin de construire de telles solutions, nous allons intégrer une 1-forme méromorphe de long de « chemins asymptotiques » tangents au feuilletage et qui accumulent la singularité à l'origine (voir section 8.4). Avec de telles solutions sectorielles $\alpha_{\pm}(x, \mathbf{y})$ à l'équation homologique ci-dessus, nous allons pouvoir construire les germes de difféomorphismes sectoriels recherchés comme les flots de champs de vecteurs linéaires évalués « au temps $\alpha_{\pm}(x, \mathbf{y})$ ».

Nous allons réutiliser les notations introduites dans la section 7.4, *i.e.* :

- $Y_0 := \lambda \mathcal{C} + x \left(x \frac{\partial}{\partial x} + a_1 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + a_2 y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right)$
- $\lambda \in \mathbb{C}^*$
- $a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$
- $\mathcal{C} := -y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$
- $\mathcal{R} := y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$.

Pour $\lambda \neq 0$ fixé, $\epsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $r > 0$, nous allons considérer deux secteurs privilégiés, à savoir

$$S_+(r, \epsilon) := S \left(r, \arg(i\lambda) - \frac{\pi}{2} - \epsilon, \arg(i\lambda) + \frac{\pi}{2} + \epsilon \right)$$

et

$$S_-(r, \epsilon) = S \left(r, \arg(-i\lambda) - \frac{\pi}{2} - \epsilon, \arg(-i\lambda) + \frac{\pi}{2} + \epsilon \right).$$

Considérons un nœud-col 2-résonant diagonal **strictement non dégénéré** et div-intégrable, normalisé à l'ordre $O(x^{N+2})$, $N > 0$:

$$\begin{aligned} Y^{(N+2)} &= Y_0 + \left(c(y_1 y_2) + x^{N+2} D^{(N+2)}(x, \mathbf{y}) \right) \mathcal{C} + x^{N+2} R^{(N+2)}(x, \mathbf{y}) \mathcal{R} \\ &\quad \text{(formel)} \\ Y_{\pm}^{(N+2)} &= Y_0 + \left(c(y_1 y_2) + x^{N+2} D_{\pm}^{(N+2)}(x, \mathbf{y}) \right) \mathcal{C} + x^{N+2} R_{\pm}^{(N+2)}(x, \mathbf{y}) \mathcal{R} \\ &\quad \text{(analytique dans } S_{\pm}(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})) \end{aligned}$$

où $D^{(N+2)}, R^{(N+2)}$ sont d'ordre au moins 1 par rapport à $\mathbf{y}$, et 1-sommables sauf pour $\arg(\pm\lambda)$: les 1-sommes respectives dans les directions $\arg(\pm i\lambda)$ sont notées $D_{\pm}^{(N+2)}, R_{\pm}^{(N+2)}$. Il est à noter que nous avons à présent fait l'hypothèse que le champ considéré est **strictement non dégénéré**, *i.e.*

$$\boxed{\Re(a_1 + a_2) > 0} ,$$

contrairement au chapitre précédent où nous avons seulement besoin de l'hypothèse de non-dégénérescence. Cette hypothèse va s'avérer importante dans la construction intégrale de solutions à l'équation homologique décrite plus haut.

Proposition 8.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, pour tout $\eta \in]\pi, 2\pi[$, il existe deux germes de difféomorphismes sectoriels fibrés et tangents à l'identité*

$$\begin{cases} \Psi_+ \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(i\lambda), \eta}; \text{Id}) \\ \Psi_- \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(-i\lambda), \eta}; \text{Id}) \end{cases}$$

de la forme

$$\Psi_{\pm} : (x, \mathbf{y}) \mapsto \left(x, \mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^2) \right) ,$$

qui conjuguent $Y_{\pm}^{(N+2)}$ à sa forme normale

$$Y_{\text{norm}} := x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x - c(y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x + c(y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} ,$$

où $c(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$ est le germe d'une fonction analytique en $v := y_1 y_2$ nulle à l'origine. De plus, on peut choisir $\Psi_{\pm}$ tel que

$$\Psi_{\pm}(x, \mathbf{y}) = \text{Id}(x, \mathbf{y}) + x^N \mathbf{P}_{\pm}^{(N)}(x, \mathbf{y}) ,$$

où $\mathbf{P}_{\pm}^{(N)} = (0, P_{1,\pm}, P_{2,\pm})$ est analytique dans $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ (pour $r > 0$ et $\epsilon > \frac{\eta}{2}$) et d'ordre au moins 2 par rapport à $\mathbf{y}$.

En conséquence de la proposition ci-dessus et de la proposition 7.1, on a immédiatement le résultat suivant, qui correspond à la partie « existence » du théorème 5.5.

Corollaire 8.2. *Soit $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ un nœud-col 2-résonant diagonal (analytique) strictement non dégénéré et div-intégrable. Alors, pour $\eta \in]\pi, 2\pi[$, il existe un couple (Φ_+, Φ_-) de germes de difféomorphismes sectoriels fibrés et tangent à l'identité*

$$\begin{cases} \Phi_+ \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(i\lambda), \eta}; \text{Id}) \\ \Phi_- \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(-i\lambda), \eta}; \text{Id}) \end{cases}$$

tels que

$$\begin{aligned} (\Phi_{\pm})_*(Y) &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x - c(y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x + c(y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ &=: Y_{\text{norm}} , \end{aligned}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\Re(a_1 + a_2) > 0$, et $c(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$ est le germe d'une fonction analytique en $v := y_1 y_2$ nulle à l'origine.

8.1 Preuve de l'existence de normalisations sectorielles : preuve de la proposition 8.1

Nous allons énoncer deux propositions successives qui vont permettre de démontrer la proposition 8.1 immédiatement. Nous utiliserons les notations introduites précédemment, en début de chapitre. Lorsque nous dirons qu'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est *dominée* par $g : U \rightarrow \mathbb{R}_+$, cela signifie qu'il existe une constante $L > 0$ telle que pour tout $u \in U$, on a $|f(u)| \leq L.g(u)$.

Proposition 8.3. Soit $Y_{\pm}^{(N+2)} = Y_0 + D_{\pm}\mathcal{C} + R_{\pm}\mathcal{R}$, avec

$$\begin{cases} D_{\pm}(x, \mathbf{y}) = c(y_1 y_2) + x^{N+2} D_{\pm}^{(N+2)}(x, \mathbf{y}) \\ R_{\pm}(x, \mathbf{y}) = x^{N+2} R_{\pm}^{(N+2)}(x, \mathbf{y}) \end{cases},$$

avec $N \in \mathbb{N}_{>0}$, $c(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$ et $D_{\pm}^{(N+2)}, R_{\pm}^{(N+2)}$ analytiques sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et dominés par $\|\mathbf{y}\|_{\infty}$. On suppose que $\Re(a_1 + a_2) > 0$.

Alors, quitte à réduire $r > 0$ ainsi que le voisinage $(\mathbb{C}^2, 0)$, il existe deux difféomorphismes sectoriels fibrés φ_+ et φ_- , analytiques et injectifs sur $S_+(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ sur $S_-(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ respectivement, qui conjuguent $Y_{\pm}^{(N+2)}$ à

$$Y_{\mathcal{C}, \pm} := Y_0 + C_{\pm}\mathcal{C},$$

où $C_{\pm}(x, \mathbf{y}) = D_{\pm} \circ \varphi_{\pm}^{-1}(x, \mathbf{z})$. De plus, on peut choisir

$$\varphi_{\pm}(x, \mathbf{y}) = (x, y_1 \exp(\rho_{\pm}(x, \mathbf{y})), y_2 \exp(\rho_{\pm}(x, \mathbf{y}))),$$

où $\rho_{\pm}(x, \mathbf{y}) = x^{N+1} \tilde{\rho}_{\pm}(x, \mathbf{y})$ est analytique sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et dominé par $\|\mathbf{y}\|_{\infty}$.

Remarque 8.4. Il est à noter que $\varphi_{\pm}^{-1}$ est de la forme

$$\varphi_{\pm}^{-1}(x, \mathbf{z}) = (x, z_1 (1 + x^{N+1} \vartheta(x, \mathbf{z})), z_2 (1 + x^{N+1} \vartheta(x, \mathbf{z}))),$$

où ϑ est analytique sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et dominé par $\|\mathbf{z}\|_{\infty}$. Par conséquent :

$$C_{\pm}(x, \mathbf{z}) = c(z_1 z_2) + x^{N+1} C_{\pm}^{(N+1)}(x, \mathbf{z}),$$

où $c(v)$ n'a pas changé, et $C_{\pm}$ est analytique sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et dominé par $\|\mathbf{z}\|_{\infty}$.

Proposition 8.5. Soit $Y_{\mathcal{C}, \pm} := Y_0 + C_{\pm}\mathcal{C}$, où

$$C_{\pm}(x, \mathbf{z}) = c(z_1 z_2) + x^{N+1} C_{\pm}^{(N+1)}(x, \mathbf{z}),$$

avec $N \in \mathbb{N}_{>0}$, $c(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$ et $C_{\pm}^{(N+1)}$ analytique sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et dominé par $\|\mathbf{z}\|_{\infty}$. On suppose que $\Re(a_1 + a_2) > 0$.

Alors, quitte à réduire $r > 0$ ainsi que le voisinage $(\mathbb{C}^2, 0)$, il existe deux difféomorphismes sectoriels fibrés ψ_+ et ψ_- , analytiques et injectifs sur $S_+(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ sur $S_-(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ respectivement, qui conjuguent $Y_{\mathcal{C}, \pm}$ à

$$Y_{\text{norm}} := Y_0 + c(v)\mathcal{C}.$$

De plus, on peut choisir

$$\psi_{\pm}(x, \mathbf{z}) = (x, z_1 \exp(-\chi_{\pm}(x, \mathbf{z})), z_2 \exp(\chi_{\pm}(x, \mathbf{z}))),$$

où $\chi_{\pm}(x, \mathbf{z}) = x^N \tilde{\chi}_{\pm}(x, \mathbf{z})$ est analytique sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et dominé par $\|\mathbf{z}\|_{\infty}$.

En admettant un instant les deux lemmes ci-dessus, nous sommes en mesure de prouver la proposition 8.1.

Démonstration. (Proposition 8.1)

Il s'agit d'une conséquence immédiate de l'utilisation successive des deux propositions précédentes dans cet ordre, en prenant $\Psi_{\pm} = \psi_{\pm} \circ \varphi_{\pm}$ avec les mêmes notations. $\square$

8.2 Utilisation de l'équation homologique : preuve des propositions 8.3 et 8.5

Afin de prouver les propositions 8.3 et 8.5, nous allons avoir besoin des deux lemmes suivants. Le premier donne l'existence de solutions sectorielles holomorphes à l'équation homologique que l'on cherche à résoudre.

Lemme 8.6. *Soit*

$$Z_{\pm} := Y_0 + C_{\pm}(x, \mathbf{y})\mathcal{C} + xR_{\pm}^{(1)}(x, \mathbf{y})\mathcal{R},$$

avec $C_{\pm}, R_{\pm}^{(1)}$ analytiques sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et dominés par $\|\mathbf{y}\|_{\infty}$, et considérons également $A_{\pm}(x, \mathbf{y})$ un germe sectoriel de fonction holomorphe sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et dominée par $\|\mathbf{y}\|_{\infty}$. Alors, pour tout $M \in \mathbb{N}_{>0}$, quitte à réduire $r > 0$ ainsi que le voisinage $(\mathbb{C}^2, 0)$, il existe une fonction $\alpha_{\pm}$ holomorphe sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ telle que

$$\mathcal{L}_{Z_{\pm}}(\alpha_{\pm}) = x^{M+1}A_{\pm}(x, \mathbf{y}) \quad , \quad (8.2.1)$$

avec $\alpha_{\pm}(x, \mathbf{y}) = x^M \tilde{\alpha}_{\pm}(x, \mathbf{y})$, où $\tilde{\alpha}_{\pm}$ est une fonction holomorphe sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et dominée par $\|\mathbf{y}\|_{\infty}$.

Nous allons démontrer ce lemme en section 8.4. Admettons-le un instant. Le lemme qui suit permet d'affirmer que les applications $\varphi_{\pm}$ et $\psi_{\pm}$ construites dans les propositions 8.3 et 8.5 sont bien des germes sectoriels de difféomorphismes (fibrés) analytiques et injectifs sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$.

Lemme 8.7. *Soit $f_{\pm}, g_{\pm}$ deux germes sectoriels de fonctions holomorphes $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$, qui tendent vers 0 lorsque $\mathbf{x} := (x, \mathbf{y})$ tend vers 0 dans $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$. Alors, l'application*

$$\phi_{\pm} : (x, \mathbf{y}) \mapsto (x, y_1 \exp(f_{\pm}(x, \mathbf{y})), y_2 \exp(g_{\pm}(x, \mathbf{y})))$$

définit un germe sectoriel de difféomorphisme (fibré), analytique et injectif sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ (quitte à réduire $r > 0$ ainsi que le voisinage $(\mathbb{C}^2, 0)$).

Expliquons à présent en quoi ces deux lemmes impliquent les propositions 8.3 et 8.5.

Démonstration. (Propositions 8.3 et 8.5)

Il suffit d'appliquer le lemme 8.6 avec $M = N+1$, $A_{\pm} = -R_{\pm}^{(N+2)}$, $\alpha_{\pm} = \rho_{\pm}$ et $Z_{\pm} = Y_{\pm}^{(N+2)}$ pour la proposition 8.3, et avec $M = N$, $A_{\pm} = -C_{\pm}^{(N+1)}$, $\alpha_{\pm} = \chi_{\pm}$ et $Z_{\pm} = Y_{\mathcal{C}, \pm}$ pour la proposition 8.5. Ensuite, on utilise le lemme 8.7 pour voir que $\varphi_{\pm}$ et $\psi_{\pm}$ sont bien des germes sectoriels de difféomorphismes (fibrés) analytiques et injectifs sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$. Finalement, on vérifie que $\varphi_{\pm}$ et $\psi_{\pm}$ sont bien les conjugaisons recherchées. Avec les notations de la section

précédente :

$$\begin{aligned}
D\varphi_{\pm} \cdot Y_{\pm}^{(N+2)} &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{Y_{\pm}^{(N+2)}}(x) \\ \mathcal{L}_{Y_{\pm}^{(N+2)}}(y_1 \exp(\rho_{\pm}(x, \mathbf{y}))) \\ \mathcal{L}_{Y_{\pm}^{(N+2)}}(y_2 \exp(\rho_{\pm}(x, \mathbf{y}))) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^2 \\ \left(\mathcal{L}_{Y_{\pm}^{(N+2)}}(y_1) + y_1 \left(\mathcal{L}_{Y_{\pm}^{(N+2)}}(\rho_{\pm}) \right) \right) \exp(\rho_{\pm}(x, \mathbf{y})) \\ \left(\mathcal{L}_{Y_{\pm}^{(N+2)}}(y_2) + y_2 \left(\mathcal{L}_{Y_{\pm}^{(N+2)}}(\rho_{\pm}) \right) \right) \exp(\rho_{\pm}(x, \mathbf{y})) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^2 \\ (-\lambda + a_1 x - D_{\pm}(x, \mathbf{y})) y_1 \exp(\rho_{\pm}(x, \mathbf{y})) \\ (\lambda + a_2 x + D_{\pm}(x, \mathbf{y})) y_2 \exp(\rho_{\pm}(x, \mathbf{y})) \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(on a utilisé ici le fait que } \mathcal{L}_{Y_{\pm}^{(N+2)}}(\rho_{\pm}) = -x^{N+2} R_{\pm}^{(N+2)}) \\
&= (Y_0 + C_{\pm} \mathcal{C}) \circ \varphi_{\pm}(x, \mathbf{y}) \\
&= Y_{C, \pm} \circ \varphi_{\pm}(x, \mathbf{y}) ,
\end{aligned}$$

si bien que $(\varphi_{\pm})_* (Y_{\pm}^{(N+2)}) = Y_{C, \pm}$, et par suite, on a aussi

$$\begin{aligned}
D\psi_{\pm} \cdot Y_{C, \pm} &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{Y_{C, \pm}}(x) \\ \mathcal{L}_{Y_{C, \pm}}(z_1 \exp(-\chi(x, \mathbf{z}))) \\ \mathcal{L}_{Y_{C, \pm}}(z_2 \exp(\chi(x, \mathbf{z}))) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^2 \\ \left(\mathcal{L}_{Y_{C, \pm}}(z_1) + z_1 \left(\mathcal{L}_{Y_{C, \pm}}(\chi) \right) \right) \exp(-\chi(x, \mathbf{z})) \\ \left(\mathcal{L}_{Y_{C, \pm}}(z_2) + z_2 \left(\mathcal{L}_{Y_{C, \pm}}(\chi) \right) \right) \exp(\chi(x, \mathbf{z})) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^2 \\ (-\lambda + a_1 x - c(z_1 z_2)) z_1 \exp(-\chi(x, \mathbf{z})) \\ (\lambda + a_2 x + c(z_1 z_2)) z_2 \exp(\chi(x, \mathbf{z})) \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(on a utilisé ici le fait que } \mathcal{L}_{Y_{C, \pm}}(\chi_{\pm}) = -x^{N+1} C_{\pm}^{(N+1)}) \\
&= (Y_0 + c(u) \mathcal{C}) \circ \psi_{\pm}(x, \mathbf{z}) \\
&= Y_{\text{norm}} \circ \psi_{\pm}(x, \mathbf{z}) ,
\end{aligned}$$

de sorte que $(\psi_{\pm})_* (Y_{C, \pm}) = Y_{\text{norm}}$. □

8.3 Germes de difféomorphismes sectoriels : preuve du lemme 8.7

Démontrons maintenant le lemme 8.7.

Démonstration. (du lemme 8.7)

On considère deux germes sectoriels $f_{\pm}, g_{\pm}$ de fonctions analytiques sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et dominées par $\|\mathbf{y}\|_{\infty}$. On définit

$$\phi_{\pm} : (x, \mathbf{y}) \mapsto (x, y_1 \exp(f_{\pm}(x, \mathbf{y})), y_2 \exp(g_{\pm}(x, \mathbf{y}))) .$$

Commençons par prouver que, quitte à réduire le domaine (*i.e.* $r > 0$ et $(\mathbb{C}^2, 0)$), $\phi_{\pm}$ est injective. Soit $\mathbf{x} = (x, y_1, y_2)$ et $\mathbf{x}' = (x', y'_1, y'_2)$ dans $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ tels que $\phi_{\pm}(\mathbf{x}) = \phi_{\pm}(\mathbf{x}')$. Puisque

$\phi_{\pm}$ est fibrée en x , on a $x = x'$. Supposons ensuite par l'absurde que $(y_1, y_2) \neq (y'_1, y'_2)$, de sorte que

$$\|(y_1 - y'_1, y_2 - y'_2)\|_{\infty} > 0.$$

Supposons par exemple qu'on ait $\|(y_1 - y'_1, y_2 - y'_2)\|_{\infty} = |y_1 - y'_1| > 0$. On note $D_{\mathbf{y}}$ l'opérateur de dérivée partielle par rapport à $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. D'après le théorème des accroissements finis :

$$\left| \frac{e^{f_{\pm}(\mathbf{x})} - e^{f_{\pm}(\mathbf{x}')}}{y_1 - y'_1} \right| \leq \sup_{(z_1, z_2) \in [(y_1, y_2), (y'_1, y'_2)]} \|D_{\mathbf{y}}(e^{f_{\pm}})(x, z_1, z_2)\|_{\infty}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 &= \left| y_1 e^{f_{\pm}(\mathbf{x})} - y'_1 e^{f_{\pm}(\mathbf{x}')} \right| \\ &= \left| e^{f_{\pm}(\mathbf{x})} \cdot |y_1 - y'_1| \cdot \left| 1 + \frac{y'_1}{e^{f_{\pm}(\mathbf{x})}} \cdot \frac{e^{f_{\pm}(\mathbf{x})} - e^{f_{\pm}(\mathbf{x}')}}{y_1 - y'_1} \right| \right| \\ &\geq \left| e^{f_{\pm}(\mathbf{x})} \right| \cdot |y_1 - y'_1| \cdot \left(1 - \left| \frac{y'_1}{e^{f_{\pm}(\mathbf{x})}} \right| \cdot \left| \frac{e^{f_{\pm}(\mathbf{x})} - e^{f_{\pm}(\mathbf{x}')}}{y_1 - y'_1} \right| \right) \\ &\geq \left| e^{f_{\pm}(\mathbf{x})} \right| \cdot |y_1 - y'_1| \cdot \left(1 - \left| \frac{y'_1}{e^{f_{\pm}(\mathbf{x})}} \right| \cdot \sup_{(z_1, z_2) \in [(y_1, y_2), (y'_1, y'_2)]} \|D_{\mathbf{y}}(e^{f_{\pm}})(x, z_1, z_2)\|_{\infty} \right) \end{aligned}$$

Prenons $(\mathbb{C}^2, 0) = \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ assez petit pour que $f_{\pm}$ soit analytique sur

$$S_{\pm}(r, \epsilon) \times D(0, 3r_1 + \delta) \times D(0, 3r_2 + \delta)$$

avec $\delta > 0$ petit. Sans perte de généralités, on peut supposer $r_1 = r_2$. On applique alors la formule intégrale de Cauchy à $z_1 \mapsto e^{f_{\pm}(x, z_1, z_2)}$, pour z_2 fixé, en intégrant sur un cercle de centre 0 et de rayon $3r_1 = 3r_2$. De la même manière, on applique aussi la formule intégrale de Cauchy à $z_2 \mapsto e^{f_{\pm}(x, z_1, z_2)}$, pour tout z_1 fixé, en intégrant sur un cercle de centre 0 et de rayon $3r_1 = 3r_2$. On obtient alors :

$$\sup_{(z_1, z_2) \in [(y_1, y_2), (y'_1, y'_2)]} \|D_{\mathbf{y}}(e^{f_{\pm}})(x, z_1, z_2)\|_{\infty} \leq \frac{3}{4r_1} \cdot \exp \left(\sup_{\mathbf{x} \in S_{\pm}(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})} (|f_{\pm}(\mathbf{x})|) \right),$$

et donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \left| y_1 e^{f_{\pm}(\mathbf{x})} - y'_1 e^{f_{\pm}(\mathbf{x}')} \right| \\ &\geq \left| e^{f_{\pm}(\mathbf{x})} \right| \cdot |y_1 - y'_1| \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \exp \left(\sup_{\mathbf{x} \in S_{\pm}(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})} (2|f_{\pm}(\mathbf{x})|) \right) \right). \end{aligned}$$

Puisque $f_{\pm}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} 0$, on peut choisir r, r_1 et r_2 assez proches de 0 pour que :

$$\exp \left(\sup_{\mathbf{x} \in S_{\pm}(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})} (2|f_{\pm}(\mathbf{x})|) \right) \leq \frac{5}{4} < \frac{4}{3}.$$

Au final, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \left| y_1 e^{f_{\pm}(\mathbf{x})} - y'_1 e^{f_{\pm}(\mathbf{x}')} \right| \\ &\geq \left| e^{f_{\pm}(\mathbf{x})} \right| \cdot \frac{|y_1 - y'_1|}{16} > 0, \end{aligned}$$

et donc, si $y_1 \neq y'_1$, $0 = |y_1 e^{\rho(\mathbf{x})} - y'_1 e^{\rho(\mathbf{x}')}| > 0$. C'est une contradiction.

En conclusion : $(y_1, y_2) = (y'_1, y'_2)$ et donc $\phi_{\pm}$ est injective sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$.

Puisque $\phi_{\pm}$ est injective et analytique sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$, il s'agit d'un biholomorphisme de $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ sur son image, qui est nécessairement ouverte (car une application holomorphe est ouverte). De plus, il est clair que l'image de $\phi_{\pm}(S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0))$ est aussi de la forme $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$. $\square$

8.4 Résolution sectorielle de l'équation homologique : preuve du lemme 8.6

Le but de cette section est de prouver le lemme 8.6 en étudiant l'existence de chemins asymptotiques à la singularité et tangents au feuilletage engendré par le champ de vecteurs considéré. On intégrera ensuite une forme temps bien choisie le long de tels chemins pour construire une solution sectorielle à l'équation homologique (8.2.1).

Remarque. Par commodité, et sans perte de généralité, on supposera dans cette section que $\lambda = 1$ (sinon, on se ramène à ce cas en divisant le champ par $\lambda \neq 0$, en effectuant le changement $x \mapsto \lambda x$, et en considérant au final le secteur $\exp(-i \arg(\lambda)) \cdot S_{\pm}(r, \epsilon)$ au lieu de $S_{\pm}(r, \epsilon)$: ces modifications ne changent pas a_1 et a_2).

8.4.1 Domaines de stabilité et chemins asymptotiques

On considère le champ

$$\begin{aligned} Z_{\pm} &= Y_0 + C_{\pm}(x, \mathbf{y}) \mathcal{C} + x R_{\pm}^{(1)}(x, \mathbf{y}) \mathcal{R} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 \\ y_1 \left(-(1 + C_{\pm}(x, \mathbf{y})) + a_1 x + x R_{\pm}^{(1)}(x, \mathbf{y}) \right) \\ y_2 \left(1 + C_{\pm}(x, \mathbf{y}) + a_2 x + x R_{\pm}^{(1)}(x, \mathbf{y}) \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $\Re(a_1 + a_2) > 0$, et $C_{\pm}, R_{\pm}^{(1)}$ analytiques sur $S_{\pm}(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ et dominés par $\|\mathbf{y}\|_{\infty}$. Intéressons-nous, au problème de Cauchy d'inconnue $\mathbf{x}(t) := (x(t), y_1(t), y_2(t))$, à temps réel positif $t \geq 0$, associé au champ :

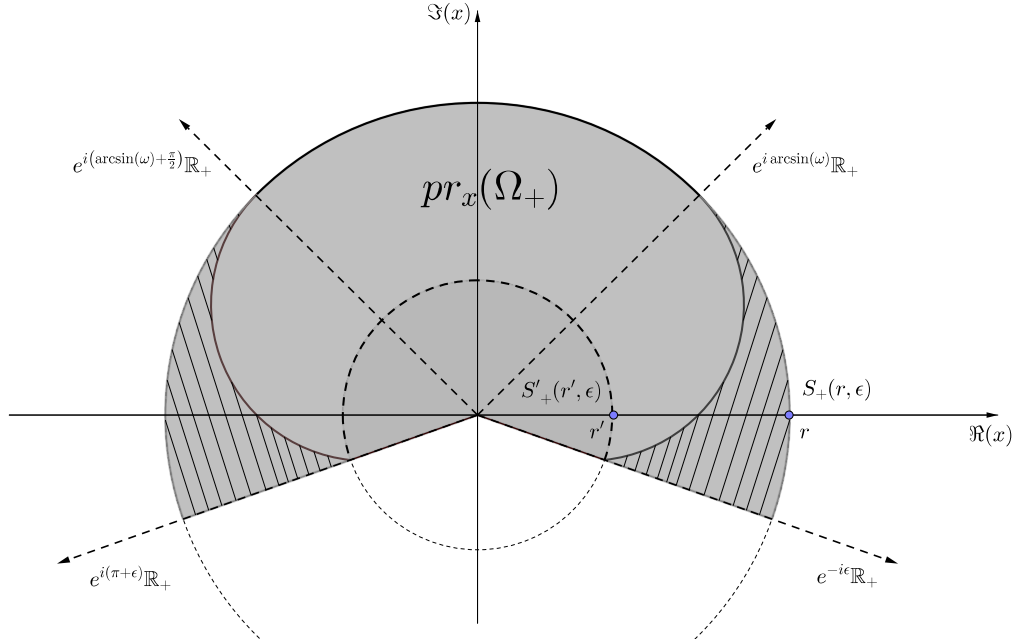
$$X_{\pm} := \frac{\pm i}{1 + \left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)x + C_{\pm}} Z_{\pm},$$

i.e.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\pm i x^2}{1 + \left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)x + C_{\pm}} \\ \frac{dy_1}{dt} = \frac{\pm i y_1}{1 + \left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)x + C_{\pm}} \left(-(1 + C_{\pm}(x, \mathbf{y})) + a_1 x + x R_{\pm}^{(1)}(x, \mathbf{y}) \right) \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{\pm i y_2}{1 + \left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)x + C_{\pm}} \left(1 + C_{\pm}(x, \mathbf{y}) + a_2 x + x R_{\pm}^{(1)}(x, \mathbf{y}) \right) \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 = (x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) \in S_{\pm}(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r}) \end{cases} \quad (8.4.1)$$

On note $(t, \mathbf{x}_0) \mapsto \Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0)$ le flot de $X_{\pm}$ au temps $t \geq 0$ et avec condition initiale $\mathbf{x}_0$: $\Phi_{X_{\pm}}^0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

Nous allons démontrer le résultat suivant.

FIGURE 8.4.1 – Représentation de la projection $pr_x(\Omega_+)$ du domaine stable sur l'espace des x .

Proposition 8.8. *Pour tout $\epsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$, il existe des secteurs $S_{\pm}(r, \epsilon), S_{\pm}(r', \epsilon)$ avec $r, r' > 0$ et un domaine ouvert $\Omega_{\pm}$ stable sous l'action de flot de (8.4.1) à temps croissant $t \geq 0$, tels que :*

$$S_{\pm}(r', \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, r') \subset \Omega_{\pm} \subset S_{\pm}(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, r) \quad ,$$

(cf. figure 8.4.1). De plus, si $\mathbf{x}_0 \in \Omega_{\pm}$, alors le solution de (8.4.1) associée, à savoir $t \mapsto \mathbf{x}(t) := \Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0)$, existe pour tout $t \geq 0$, et $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Remarque 8.9. La solution $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ de (8.4.1) existe donc pour tout $t \geq 0$ et tend vers l'origine quand $t \rightarrow +\infty$: cette trajectoire définit un chemin asymptotique à la singularité et tangent au feuilletage. De plus, il est à noter que le domaine $\Omega_{\pm}$ dépend du choix de r et r' .

Définition 8.10. On appelle *chemin asymptotique de base $\mathbf{x}_0 \in \Omega_{\pm}$ associé à $X_{\pm}$* le chemin

$$\gamma_{\pm, \mathbf{x}_0} := \left\{ \Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0), t \geq 0 \right\} \quad .$$

(cf. figure 15.0.1 page 172 pour un exemple de chemin asymptotique dans le cas de la première équation de Painlevé).

Par commodité d'écriture et sans perte de généralités, nous allons seulement détailler le cas “ $\pm = +$ ” (la situation où “ $\pm = -$ ” est similaire).

Notons $a := a_1 + a_2$ et $b := \frac{a_2 - a_1}{2}$. Dans le cas “ $\pm = +$ ”, on a alors :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{ix^2}{1 + bx + C_+} \\ \frac{dy_1}{dt} = iy_1 \left(-1 + \left(\frac{\frac{a}{2} + R_+^{(1)}(x, \mathbf{y})}{1 + bx + C_+(x, \mathbf{y})} \right) x \right) \\ \frac{dy_2}{dt} = iy_2 \left(1 + \left(\frac{\frac{a}{2} + R_+^{(1)}(x, \mathbf{y})}{1 + bx + C_+(x, \mathbf{y})} \right) x \right) \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 = (x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) \in S_+(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, r) \quad . \end{cases}$$

Considérons également les équations différentielles satisfaites par $|x(t)|$, $|y_1(t)|$, $|y_2(t)|$ et $\theta(t) := \arg(x(t))$:

$$\begin{cases} \frac{d|x(t)|}{dt} = |x(t)| \Re \left(\frac{ix(t)}{1 + bx(t) + C_+(\mathbf{x}(t))} \right) \\ \frac{d|y_1(t)|}{dt} = |y_1(t)| \Re \left(ix(t) \left(\frac{\frac{a}{2} + R_+^{(1)}(\mathbf{x}(t))}{1 + bx(t) + C_+(\mathbf{x}(t))} \right) \right) \\ \frac{d|y_2(t)|}{dt} = |y_2(t)| \Re \left(ix(t) \left(\frac{\frac{a}{2} + R_+^{(1)}(\mathbf{x}(t))}{1 + bx(t) + C_+(\mathbf{x}(t))} \right) \right) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} = \Im \left(\frac{ix(t)}{1 + bx(t) + C_+(\mathbf{x}(t))} \right) \end{cases} .$$

Pour tout nombre complexe $\zeta \in \mathbb{C}$ et tous nombres positifs $R, B > 0$, on note $\Sigma_+(\zeta, R, B)$ le secteur de rayon R bissecté par $i\bar{\zeta}\mathbb{R}_+$ et d'ouverture $\pi - 2 \arcsin(B) = 2 \arccos(B)$:

$$\begin{aligned} \Sigma_+(\zeta, R, B) &:= \{x \in D(0, R) \mid \Im(\zeta x) > B|\zeta x|\} \\ &= \{x \in D(0, R) \mid -\arccos(B) < \arg(x) - \arg(i\bar{\zeta}) < \arccos(B)\} . \end{aligned}$$

Pour $M, R > 0$, on note $\Theta_+(R, M)$ (*resp.* $\Theta_-(R, M)$) le secteur de rayon R bissecté par $\mathbb{R}_+$ (*resp.* $\mathbb{R}_-$) et d'ouverture $2 \arccos(M)$:

$$\begin{aligned} \Theta_+(R, M) &:= \{x \in D(0, R) \mid \Re(x) > M|x|\} \\ &= \{x \in D(0, R) \mid -\arccos(M) < \arg(x) < \arccos(M)\} \\ \Theta_-(R, M) &:= \{x \in D(0, R) \mid \Re(x) < -M|x|\} \\ &= \{x \in D(0, R) \mid -\arccos(M) < \arg(x) - \pi < \arccos(M)\} \end{aligned}$$

Puisque $\Re(a) > 0$ par hypothèse, on peut choisir $\omega' \in]0, \frac{\Re(a)}{|a|}[$, de sorte que $\Sigma_+(a, r, \omega')$ contienne $i\mathbb{R}_{>0}$. En effet, on a bien :

$$|\arg(i) - \arg(i\bar{a})| = |\arg(a)| < \arccos(\omega') .$$

On a en particuliers

$$0 < \arccos(\omega') - |\arg(a)| < \frac{\pi}{2}$$

de sorte que

$$0 < \cos(\arccos(\omega') - |\arg(a)|) < 1 .$$

On prend alors ω tel que

$$\omega \in]\cos(\arccos(\omega') - |\arg(a)|), 1[, \quad (8.4.2)$$

si bien que $\Sigma_+(1, r, \omega) \subset \Sigma_+(a, r, \omega')$. En effet, si $x \in \Sigma_+(1, r, \omega)$, on a :

$$-\arccos(\omega) < \arg(x) - \frac{\pi}{2} < \arccos(\omega) , \quad (8.4.3)$$

et donc

$$\begin{aligned} |\arg(x) - \arg(i\bar{a})| &< \arccos(\omega) + |\arg(a)| \\ &\quad \text{(d'après (8.4.3))} \\ &< \arccos(\omega') \\ &\quad \text{(d'après (8.4.2)).} \end{aligned}$$

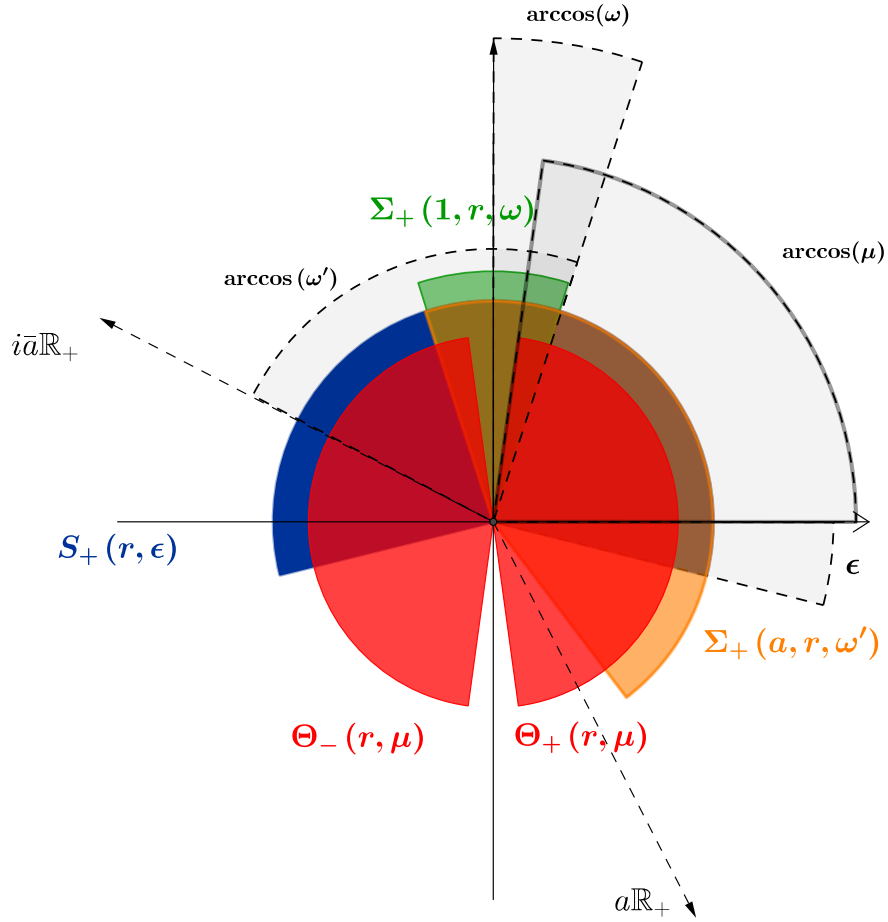


FIGURE 8.4.2 – Représentation des domaines $\Sigma_+(1, r, \omega)$, $\Sigma_+(a, r, \omega')$, $\Theta_+(r, \mu)$, $\Theta_-(r, \mu)$, $S_+(r, \epsilon)$, avec des rayons altérés par souci de clarté.

On fixe enfin $\mu \in]0, \sqrt{1 - \omega^2}[$ assez petit pour que

$$\begin{aligned}\Theta_+(r, \mu) \cap \Sigma_+(1, r, \omega) &\neq \emptyset \\ \Theta_-(r, \mu) \cap \Sigma_+(1, r, \omega) &\neq \emptyset\end{aligned}$$

et

$$S_+(r, \epsilon) \subset \Sigma_+(1, r, \omega) \cup \Theta_+(r, \mu) \cup \Theta_-(r, \mu) .$$

Plus précisément, on doit avoir $0 < \epsilon < \arccos(\mu)$. L'idée est à présent d'étudier le comportement de $t \mapsto x(t)$ (où $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x(t), y_1(t), y_2(t))$ est la solution de (8.4.1)) sur chacun des domaines $\Sigma_+(1, r, \omega)$, $\Theta_+(r, \mu)$, $\Theta_-(r, \mu)$ (cf. figure 8.4.2).

Nous pouvons à présent démontrer le lemme suivant.

Lemme 8.11.

1. Il existe $r, r_1, r_2 > 0$ tels que $\Sigma_+(1, r, \omega) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ soit stable par le flot de (8.4.1) à temps positif $t \geq 0$. De plus, dans cette région, $t \mapsto |x(t)|$, $|y_1(t)|$ et $|y_2(t)|$ sont des fonctions décroissantes de t et tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

2. Il existe $0 < r' < r$, $0 < r'_1 < r_1$, $0 < r'_2 < r_2$ ainsi qu'un domaine Ω_+ stable par le flot de (8.4.1) à temps croissant $t \geq 0$ tels qu'on ait

$$S_+(r', \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r}') \subset \Omega_+ \subset S_+(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r}) .$$

De plus, si $x_0 \in \Theta_+(r', \mu)$ (resp. $x_0 \in \Theta_-(r', \mu)$), alors $t \mapsto \theta(t) = \arg(x(t))$, $t \geq 0$ est croissante (resp. décroissante) tant que $x(t)$ reste dans $\Theta_+(r', \mu)$ (resp. $\Theta_-(r', \mu)$). Enfin, il existe $t_0 \geq 0$, tel que pour tout $t \geq t_0$, $x(t) \in \Sigma_+(1, r, \omega)$.

Démonstration. On fixe $\delta \in]0, \min(\omega, \mu)[$, $\delta' \in]0, \omega'[$ et on prend $r > 0$ assez petit de sorte que pour tout $\mathbf{x} = (x, \mathbf{y}) \in S_+(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1}{1 + bx + C_+(\mathbf{x})} - 1 \right| < \delta \\ \left| \frac{\frac{a}{2} + R_+^{(1)}(\mathbf{x})}{1 + bx + C_+(\mathbf{x})} - \frac{a}{2} \right| < \delta' \end{array} \right. .$$

Par conséquent, pour tout $\mathbf{x} \in S_+ \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, on a les encadrements

$$\left\{ \begin{array}{l} -|x|(1 + \delta) < \Re \left(\frac{ix}{1 + bx + C_+(\mathbf{x})} \right) < |x|(1 + \delta) \\ -|x| \left(\left| \frac{a}{2} \right| + \delta' \right) < \Re \left(ix \left(\frac{\frac{a}{2} + R_+^{(1)}(x, \mathbf{y})}{1 + bx + C_+(x, \mathbf{y})} \right) \right) < |x| \left(\left| \frac{a}{2} \right| + \delta' \right) \end{array} \right. .$$

De plus :

— si $x \in \Sigma_+(1, r, \omega)$ alors

$$\Re \left(\frac{ix}{1 + bx + C_+(\mathbf{x})} \right) < -|x|(\omega - \delta) \quad ;$$

— si $x \in \Sigma_+(a, r, \omega')$ (en particulier si $x \in \Sigma_+(1, r, \omega)$) alors

$$\Re \left(ix \left(\frac{\frac{a}{2} + R_+^{(1)}(x, \mathbf{y})}{1 + bx + C_+(x, \mathbf{y})} \right) \right) < -|x|(\omega' - \delta') \quad ;$$

— si $x \in \Theta_-(r, \mu)$ (resp. $\Theta_+(r, \mu)$) alors

$$\begin{aligned} \Im \left(\frac{ix}{1 + bx + C_+(\mathbf{x})} \right) &< -|x|(\mu - \delta) \\ \left(\text{resp. } \Im \left(\frac{ix}{1 + bx + C_+(\mathbf{x})} \right) &> |x|(\mu - \delta) \right) \end{aligned} .$$

D'où :

— pour tout $t \geq 0$

$$-(1 + \delta)|x(t)|^2 < \frac{d|x(t)|}{dt} < (1 + \delta)|x(t)|^2$$

et donc, tant que $\mathbf{x}(t) \in S_+(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, on a

$$|x(t)| > \frac{|x_0|}{1 + (1 + \delta)|x_0|t} \quad ;$$

— pour tout $t \geq 0$, si $x(t) \in \Sigma_+(1, r, \omega)$, alors

$$\frac{d|x(t)|}{dt} < -(\omega - \delta)|x(t)|^2 \quad (8.4.4)$$

et

$$\begin{cases} \frac{d|y_1(t)|}{dt} < -(\omega' - \delta')|y_1(t)||x(t)| \\ \frac{d|y_2(t)|}{dt} < -(\omega' - \delta')|y_2(t)||x(t)| \end{cases} \quad (8.4.5)$$

si bien que $t \mapsto |x(t)|, |y_1(t)|$ et $|y_2(t)|$ sont des fonctions décroissantes de $t \geq 0$ tant que $x(t) \in \Sigma_+(1, r, \omega)$;

— pour tout $t \geq 0$, si $x(t) \in \Theta_-(r, \mu)$ (*resp.* $\Theta_+(r, \mu)$) alors

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt}(t) &< -(\mu - \delta)|x(t)| < \frac{-(\mu - \delta)|x_0|}{1 + (1 + \delta)|x_0|t} \\ \left(\text{resp. } \frac{d\theta}{dt}(t) &> (\mu - \delta)|x(t)| > \frac{(\mu - \delta)|x_0|}{1 + (1 + \delta)|x_0|t} \right) \end{aligned}$$

de sorte que $t \mapsto \theta(t)$ est strictement décroissante (*resp.* croissante) tant que $x(t) \in \Theta_-(r, \mu)$ (*resp.* $\Theta_+(r, \mu)$). De plus, si $\theta_0 = \theta(0)$ est tel que $x_0 = x(0) \in \Theta_-(t, \mu) \setminus \Sigma_+(1, r, \omega)$ (*resp.* $\Theta_+(r, \mu) \setminus \Sigma_+(1, r, \omega)$), alors, tant que $x(t) \in \Theta_-(r, \mu)$ (*resp.* $\Theta_+(r, \mu)$) on a :

$$\begin{aligned} \theta(t) &< \theta_0 - \left(\frac{\mu - \delta}{1 + \delta} \right) \ln(1 + (1 + \delta)|x_0|t) \\ \left(\text{resp. } \theta(t) &> \theta_0 + \left(\frac{\mu - \delta}{1 + \delta} \right) \ln(1 + (1 + \delta)|x_0|t) \right) \end{aligned} .$$

On voit que $x(t) \in \Sigma_+(1, r, \omega)$ pour tout

$$\begin{aligned} t \geq t_0 &:= \frac{\left(\exp\left(\frac{1+\delta}{\mu-\delta}\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2} - \arccos(\omega)\right)\right) - 1 \right)}{(1 + \delta)|x_0|} \\ \left(\text{resp. } t_0 &:= \frac{\left(\exp\left(\frac{1+\delta}{\mu-\delta}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\omega) - \theta_0\right)\right) - 1 \right)}{(1 + \delta)|x_0|} \right) \end{aligned} .$$

En effet, si $t \geq t_0$, avec t_0 comme ci-dessus, et si $x(t) \in \Theta_+(r, \mu)$, alors d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \theta(t) &> \theta_0 + \left(\frac{\mu - \delta}{1 + \delta} \right) \ln(1 + (1 + \delta)|x_0|t) \\ &> \theta_0 + \left(\frac{\mu - \delta}{1 + \delta} \right) \ln\left(\exp\left(\frac{1 + \delta}{\mu - \delta}\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2} - \arccos(\omega)\right)\right)\right) \\ &= \theta_0 + \frac{\pi}{2} - \arccos(\omega) - \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \arccos(\omega) \end{aligned}$$

et donc

$$-\arccos(\omega) < \arg(x(t)) - \frac{\pi}{2} < 0 .$$

On a donc bien $x(t) \in \Sigma_+(1, r, \omega)$. Notons que :

$$t_0 \leq \frac{\exp\left(\left(\frac{1+\delta}{\mu-\delta}\right)(\epsilon + \arcsin(\omega))\right)}{(1 + \delta)|x_0|} . \quad (8.4.6)$$

D'une part, $\Sigma_+(1, r, \omega) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ est stable par le flot de (8.4.1) à temps croissant $t \geq 0$. En effet, dans cette région, les quantités $t \mapsto |x(t)|$, $|y_1(t)|$ et $|y_2(t)|$ sont des fonctions décroissantes de t , et dès que $x(t)$ entre dans $\Sigma_+(1, r, \omega) \cap \Theta_-(r, \mu)$ (*resp.* $\Sigma_+(1, r, \omega) \cap \Theta_+(r, \mu)$), qui est non-vide et contient une partie du bord de $\Sigma_+(1, r, \omega)$ où l'argument est constant, $t \mapsto \theta(t)$ devient décroissante (*resp.* croissante). Donc, $x(t)$ reste dans $\Sigma_+(1, r, \omega)$.

D'autre part, tant que $x(t)$ reste dans $\Theta_-(r, \mu)$ (*resp.* $\Theta_+(r, \mu)$) on peut reparamétriser les solutions par $(-\theta)$ (*resp.* θ) (nous allons ici faire un abus de notation, en écrivant au besoin $x(\theta)$ ou $x(t)$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d|x|}{d(-\theta)} = -|x| \frac{\Re\left(\frac{ix}{1+bx+C_+(\mathbf{x})}\right)}{\Im\left(\frac{ix}{1+bx+C_+(\mathbf{x})}\right)} \leq |x| \cdot \frac{1+\delta}{\mu-\delta} \\ \left(\text{resp. } \frac{d|x|}{d\theta} = |x| \frac{\Re\left(\frac{ix}{1+bx+C_+(\mathbf{x})}\right)}{\Im\left(\frac{ix}{1+bx+C_+(\mathbf{x})}\right)} \leq |x| \cdot \frac{1+\delta}{\mu-\delta} \right) \\ \frac{d|y_1|}{d(-\theta)} = -|y_1| \frac{\Re\left(ix \left(\frac{\frac{a}{2}+R_+^{(1)}(x, \mathbf{y})}{1+bx+C_+(x, \mathbf{y})}\right)\right)}{\Im\left(\frac{ix}{1+bx+C_+(\mathbf{x})}\right)} \leq |y_1| \cdot \frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta} \\ \left(\text{resp. } \frac{d|y_1|}{d\theta} = |y_1| \frac{\Re\left(ix \left(\frac{\frac{a}{2}+R_+^{(1)}(x, \mathbf{y})}{1+bx+C_+(x, \mathbf{y})}\right)\right)}{\Im\left(\frac{ix}{1+bx+C_+(\mathbf{x})}\right)} \leq |y_1| \cdot \frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta} \right) \\ \frac{d|y_2|}{d(-\theta)} = -|y_2| \frac{\Re\left(ix \left(\frac{\frac{a}{2}+R_+^{(1)}(x, \mathbf{y})}{1+bx+C_+(x, \mathbf{y})}\right)\right)}{\Im\left(\frac{ix}{1+bx+C_+(\mathbf{x})}\right)} \leq |y_2| \cdot \frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta} \\ \left(\text{resp. } \frac{d|y_2|}{d\theta} = |y_2| \frac{\Re\left(ix \left(\frac{\frac{a}{2}+R_+^{(1)}(x, \mathbf{y})}{1+bx+C_+(x, \mathbf{y})}\right)\right)}{\Im\left(\frac{ix}{1+bx+C_+(\mathbf{x})}\right)} \leq |y_2| \cdot \frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta} \right). \end{array} \right.$$

Ainsi, si $\theta_0 := \theta(0)$ est tel que $x_0 := x(0) \in \Theta_-(r, \mu)$ (*resp.* $\Theta_+(r, \mu)$), pour $t \leq t_0$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} |x(t)| \leq |x_0| \exp\left(\frac{1+\delta}{\mu-\delta} (\theta_0 - \theta(t))\right) \\ \left(\text{resp. } |x(t)| \leq |x_0| \exp\left(\frac{1+\delta}{\mu-\delta} (\theta(t) - \theta_0)\right) \right) \\ |y_1(t)| \leq |y_{1,0}| \exp\left(\frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta} (\theta_0 - \theta(t))\right) \\ \left(\text{resp. } |y_1(t)| \leq |y_{1,0}| \exp\left(\frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta} (\theta(t) - \theta_0)\right) \right) \\ |y_2(t)| \leq |y_{2,0}| \exp\left(\frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta} (\theta_0 - \theta(t))\right) \\ \left(\text{resp. } |y_2(t)| \leq |y_{2,0}| \exp\left(\frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta} (\theta(t) - \theta_0)\right) \right). \end{array} \right. \quad (8.4.7)$$

Définition 8.12. On définit le domaine Ω_+ comme l'ensemble des

$$\mathbf{x} = (x, y_1, y_2) \in S_+(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$$

tels que :

$$\begin{aligned} \text{— si } \Im(x) \geq \omega |x| \text{ alors } & \begin{cases} |x| \leq r \exp\left(\frac{1+\delta}{\mu-\delta}(\arg(x) - \arcsin(\omega))\right) \\ |y_1| \leq r_1 \exp\left(\frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta}(\arg(x) - \arcsin(\omega))\right) \\ |y_2| \leq r_2 \exp\left(\frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta}(\arg(x) - \arcsin(\omega))\right) \end{cases} ; \\ \text{— si } \Im(x) \leq -\omega |x| \text{ alors } & \begin{cases} |x| \leq r \exp\left(\frac{1+\delta}{\mu-\delta}(\pi - \arcsin(\omega) - \arg(x))\right) \\ |y_1| \leq r_1 \exp\left(\frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta}(\pi - \arcsin(\omega) - \arg(x))\right) \\ |y_2| \leq r_2 \exp\left(\frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta}(\pi - \arcsin(\omega) - \arg(x))\right) \end{cases} \end{aligned}$$

(cf. figure 8.4.1).

On voit alors que Ω_+ est stable par le flot de (8.4.1) à temps positif $t \geq 0$. On a vu que pour toute condition initiale dans Ω_+ , la solution existe pour tout $t \geq 0$, et reste dans Ω_+ . De plus, après un temps fini $t_0 \geq 0$, cette dernière entre et reste dans $\Sigma_+(1, r, \omega)$. Finalement, on a bien :

$$S_+(r', \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r}') \subset \Omega_+ \subset S_+(r, \epsilon) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r}) ,$$

avec

$$\begin{cases} r' = r \exp\left(-\left(\frac{1+\delta}{\mu-\delta}\right)(\epsilon + \arcsin(\omega))\right) < r \\ r'_1 = r_1 \exp\left(-\left(\frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta}\right)(\epsilon + \arcsin(\omega))\right) < r_1 \\ r'_2 = r_2 \exp\left(-\left(\frac{\left|\frac{a}{2}\right| + \delta'}{\mu-\delta}\right)(\epsilon + \arcsin(\omega))\right) < r_2 . \end{cases}$$

Soit finalement $\mathbf{x}_0 = (x_0, \mathbf{y}_0) \in \Sigma_+(1, r, \omega) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$. D'après (8.4.4) et (8.4.5), on a pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{cases} |x(t)| \leq \frac{|x_0|}{1+(\omega-\delta)|x_0|t} \\ |y_1(t)| \leq \frac{|y_{1,0}|}{(1+(1+\delta)|x_0|t)^{\frac{\omega'-\delta'}{1+\delta}}} \\ |y_2(t)| \leq \frac{|y_{2,0}|}{(1+(1+\delta)|x_0|t)^{\frac{\omega'-\delta'}{1+\delta}}} \end{cases} , \quad (8.4.8)$$

ce qui prouve que la solution associée tend vers $\mathbf{0}$ quand $t \rightarrow +\infty$. $\square$

Remarque 8.13. Un domaine stable Ω_- est défini de manière analogue dans le cas “ $\pm = -$ ”.

8.4.2 Construction d'une solution sectorielle à l'équation homologique

On considère la forme méromorphe suivante $\tau := \frac{dx}{x^2}$, qui satisfait à $\tau \cdot (Z_{\pm}) = 1$ (on dit que τ est une forme « temps » pour le champ $Z_{\pm}$). On considère également une fonction $A_{\pm}(x, \mathbf{y})$ analytique dans $S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et dominée par $\|\mathbf{y}\|_{\infty}$. Soit enfin un entier $M \in \mathbb{N}_{>0}$. La proposition suivante est une précision du lemme 8.6.

Proposition 8.14. *Pour tout $\mathbf{x}_0 \in \Omega_{\pm}$ (voir définition 8.12), l'intégrale définie par*

$$\alpha_{\pm}(\mathbf{x}_0) := - \int_{\gamma_{\pm, \mathbf{x}_0}} x^{M+1} A_{\pm}(\mathbf{x}) \tau$$

est absolument convergente (le chemin d'intégration $\gamma_{\pm, \mathbf{x}_0}$ est celui de la définition 8.10). De plus, la fonction $\mathbf{x}_0 \mapsto \alpha_{\pm}(\mathbf{x}_0)$ est analytique sur $\Omega_{\pm}$, satisfait

$$\mathcal{L}_{Z_{\pm}}(\alpha_{\pm}) = x^{M+1} A_{\pm}(\mathbf{x})$$

et $\alpha_{\pm}(x, \mathbf{y}) = x^M \tilde{\alpha}_{\pm}(x, \mathbf{y})$, avec $\tilde{\alpha}_{\pm}$ analytique sur $\Omega_{\pm}$ et dominée par $\|\mathbf{y}\|_{\infty}$.

Démonstration. Nous allons fortement utiliser les estimations faites dans la sous-section précédente.

— Commençons par prouver que l'intégrale est absolument convergente. On a :

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm}(\mathbf{x}_0) &= - \int_0^{+\infty} \frac{x(t)^{M+1} A_{\pm}(\mathbf{x}(t))}{x(t)^2} \frac{ix(t)^2}{1 + bx(t) + C_+(\mathbf{x}(t))} dt \\ &= -i \int_0^{+\infty} \frac{x(t)^{M+1} A_{\pm}(\mathbf{x}(t))}{1 + bx(t) + C_+(\mathbf{x}(t))} dt . \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{x}(t) \in \Omega_{\pm}$ pour tout $t \geq 0$ et puisque $A_{\pm}(x, \mathbf{y})$ est dominé par $\|\mathbf{y}\|_{\infty}$, on a :

$$\left| \frac{x(t)^{M+1} A_{\pm}(\mathbf{x}(t))}{1 + bx(t) + C_+(\mathbf{x}(t))} \right| \leq C |x(t)|^{M+1} \|\mathbf{y}(t)\|_{\infty} ,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de $\mathbf{x}_0$ et t . Pour $t \geq 0$ assez grand, on déduit de la sous-section 8.4.1 que :

$$\begin{aligned} \left| \frac{x(t)^{M+1} A_{\pm}(\mathbf{x}(t))}{1 + bx(t) + C_+(\mathbf{x}(t))} \right| &\leq C \|\mathbf{y}_0\| \left(\frac{|x_0|}{1 + (\omega - \delta)|x_0|t} \right)^{M+1} \frac{1}{(1 + (1 + \delta)|x_0|t)^{\frac{\omega' - \delta'}{1 + \delta}}} \\ &= O_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^{M+1}} \right) \end{aligned}$$

et donc l'intégrale considérée est absolument convergente.

— Montrons à présent l'analyticité de $\alpha_{\pm}$ dans $\Omega_{\pm}$: il suffit de prouver que $\alpha_{\pm}$ est analytique sur tout compact $K \subset \Omega_{\pm}$. Soit alors K un tel compact. On prend $L > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x} \in K$ on ait

$$\left| \frac{A_{\pm}(\mathbf{x})}{1 + bx + C_+(\mathbf{x})} \right| \leq L .$$

Puisque K est un compact inclus dans $\Omega_{\pm} \subset S_{\pm}(r, \epsilon) \times (\mathbb{C}^2, 0)$, et que $S_{\pm}(r, \epsilon)$ est ouvert ($0 \notin S_{\pm}(r, \epsilon)$), il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x} = (x, y_1, y_2) \in K$, on ait $\delta < |x| < r$. Finalement, d'après les estimations (8.4.8), il existe $B > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x}_0 \in K$ et tout $t \geq 0$:

$$|x(t)| \leq B \frac{|x_0|}{1 + (\omega - \delta)|x_0|t} .$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left| \frac{x(t)^{M+1} A_{\pm}(\mathbf{x}(t))}{1 + bx(t) + C_+(\mathbf{x}(t))} \right| &\leq LB^{M+1} \frac{|x_0|^{M+1}}{(1 + (\omega - \delta)|x_0|t)^{M+1}} \\ &\leq \frac{LB^{M+1} r^{M+1}}{(1 + (\omega - \delta)\delta t)^{M+1}} , \end{aligned}$$

et le théorème sur l'analyticité des intégrales à paramètres montre que $\alpha_{\pm}$ est analytique sur tout compact $K \subset \Omega_{\pm}$, et donc sur $\Omega_{\pm}$.

— On écrit $F(\mathbf{x}) := \frac{\pm i x^{M+1} A_{\pm}(\mathbf{x})}{1 + bx + C_{\pm}(\mathbf{x})}$, de sorte que

$$\alpha_{\pm}(\mathbf{x}_0) = - \int_0^{+\infty} F\left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0)\right) dt .$$

Pour tout $\mathbf{x}_0 \in \Omega_{\pm}$, la fonction $t \mapsto \mathbf{x}(t) = \Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0)$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right) = \frac{\pm i}{1 + bx \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right) + C_{\pm} \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right)} Z_{\pm} \left(\Phi_{\pm}^t(\mathbf{x}) \right) .$$

D'après le théorème sur l'analyticité (et la dérivation) des intégrales à paramètres, on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{Z_{\pm}} \alpha_{\pm})(\mathbf{x}_0) &= - \int_0^{+\infty} \mathcal{L}_{Z_{\pm}} (F \circ \Phi^s)(\mathbf{x}_0) ds \\ &= - \int_0^{+\infty} DF \left(\Phi_{X_{\pm}}^s(\mathbf{x}_0) \right) \cdot D\Phi_{X_{\pm}}^s(\mathbf{x}_0) \cdot Z_{\pm}(\mathbf{x}_0) ds \\ &= - \int_0^{+\infty} DF \left(\Phi_{X_{\pm}}^s(\mathbf{x}) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi_{X_{\pm}}^{s+t}(\mathbf{x}_0) \right)_{|t=0} \left(\pm \frac{1 + bx_0 + C_{\pm}(\mathbf{x}_0)}{i} \right) ds \\ &= - \left(\pm \frac{1 + bx_0 + C_{\pm}(\mathbf{x}_0)}{i} \right) \cdot \int_0^{+\infty} DF \left(\Phi_{X_{\pm}}^s(\mathbf{x}_0) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right)_{|t=s} ds \\ &= - \left(\pm \frac{1 + bx_0 + C_{\pm}(\mathbf{x}_0)}{i} \right) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} \left(F \circ \Phi_{X_{\pm}}^s(\mathbf{x}_0) \right) ds \\ &= - \left(\pm \frac{1 + bx_0 + C_{\pm}(\mathbf{x}_0)}{i} \right) \cdot \left[F \circ \Phi_{X_{\pm}}^s(\mathbf{x}_0) \right]_{s=0}^{s=+\infty} \\ &= - \left(\pm \frac{1 + bx_0 + C_{\pm}(\mathbf{x}_0)}{i} \right) \cdot (-F(\mathbf{x}_0)) \\ &= x_0^{M+1} A_{\pm}(\mathbf{x}_0) . \end{aligned}$$

— Montrons que la fonction $(x, \mathbf{y}) \mapsto \tilde{\alpha}_{\pm}(x, \mathbf{y}) := \frac{\alpha_{\pm}(x, \mathbf{y})}{x^M}$ est bornée et dominée par $\|\mathbf{y}\|_{\infty}$ sur $\Omega_{\pm}$. Le fait que $\tilde{\alpha}_{\pm}$ est analytique sur $\Omega_{\pm}$ est clair car la fonction $\alpha_{\pm}$ y est analytique et car $0 \notin \Omega_{\pm}$. Comme précédemment, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\mathbf{x}_0 := (x_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega_{\pm}$ et tout $t \geq 0$:

$$\left| \frac{x \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right)^{M+1} A_{\pm} \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right)}{\left(1 + bx \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right) + C_{\pm} \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right) \right)} \right| \leq C \left| x \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right) \right|^{M+1} \left\| \mathbf{y} \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right) \right\|_{\infty} .$$

Traitons uniquement le cas où $x_0 \in \Theta_{\pm}(r, \mu)$ (le cas où $\Sigma_{\pm}(1, r, \omega)$ est plus simple). D'une part, d'après (8.4.7) on a pour tout $t \leq t_0$:

$$\begin{cases} \left| x \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right) \right| \leq D |x_0| & , \text{ où } D := \exp \left(\frac{1+\delta}{\mu-\delta} (\arccos(\mu) + \epsilon) \right) \\ \left\| \mathbf{y} \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right) \right\|_{\infty} \leq D' \|\mathbf{y}_0\|_{\infty} & , \text{ où } D' := \exp \left(\frac{\frac{a}{2} + \delta'}{\mu-\delta} (\arccos(\mu) + \epsilon) \right) . \end{cases}$$

D'autre part, on a vu dans (8.4.8) que pour tout $t \geq t_0$:

$$\begin{cases} \left| x \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right) \right| \leq \frac{\left| x \left(\Phi_{X_{\pm}}^{t_0}(\mathbf{x}_0) \right) \right|}{1 + (\omega - \delta) \left| x \left(\Phi_{X_{\pm}}^{t_0}(\mathbf{x}_0) \right) \right|^{(t-t_0)}} \\ \left\| \mathbf{y} \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0) \right) \right\|_{\infty} \leq \|\mathbf{y}_0\|_{\infty} \end{cases} .$$

D'après la relation de Chasles et les estimations ci-dessus, on en déduit :

$$\begin{aligned}
|\tilde{\alpha}_{\pm}(x_0, \mathbf{y}_0)| &\leq \frac{|\alpha_{\pm}(x_0, \mathbf{y}_0)|}{|x_0|^M} \\
&\leq \frac{CD^{M+1}D' \|\mathbf{y}_0\|_{\infty} |x_0|^{M+1} |t_0|}{|x_0|^M} \\
&\quad + \frac{C \|\mathbf{y}_0\|_{\infty}}{|x_0|^M} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{\left(1 + (\omega - \delta) \left|x \left(\Phi_{X_{\pm}}^t(\mathbf{x}_0)\right)\right| (t - t_0)\right)} \\
&\leq CD^{M+1}D' \|\mathbf{y}_0\|_{\infty} |x_0| |t_0| + \frac{C \|\mathbf{y}_0\|_{\infty} \left|x \left(\Phi_{X_{\pm}}^{t_0}(\mathbf{x}_0)\right)\right|^{M+1}}{M (\omega - \delta) |x_0|^M \left|x \left(\Phi_{X_{\pm}}^{t_0}(\mathbf{x}_0)\right)\right|} ;
\end{aligned}$$

D'où, on déduit de (8.4.6) qu'on a :

$$|\tilde{\alpha}_{\pm}(x_0, \mathbf{y}_0)| \leq \left(\frac{D^2 D'}{(1 + \delta)} + \frac{1}{M (\omega - \delta)} \right) CD^M \|\mathbf{y}_0\|_{\infty} .$$

□

Chapitre 9

Unicité et faible 1-sommabilité des normalisations sectorielles : preuve du théorème

Dans ce chapitre nous allons voir qu'il existe en fait un *unique* couple de (germes de) normalisations sectorielles tangentes à l'identité (dont l'existence provient du corollaire 8.2) et que celles-ci sont en fait les 1-sommes faibles de la normalisation formelle donnée par le théorème 1.5. Ceci est résumé dans les deux propositions suivantes. Considérons $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ avec $D_0 Y = \text{diag}(0, -\lambda, \lambda)$, $\lambda \neq 0$, ainsi que sa forme normale Y_{norm} donnée par le corollaire 8.2.

Proposition 9.1. *Soient $\varphi_+, \tilde{\varphi}_+$ et $\varphi_-, \tilde{\varphi}_-$ des germes de difféomorphismes sectoriels fibrés dans les directions $\arg(i\lambda)$ et $\arg(-i\lambda)$ respectivement, avec ouverture au moins π , et qui sont tangents à l'identité :*

$$\begin{cases} \varphi_+, \tilde{\varphi}_+ \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(i\lambda),\pi}; \text{Id}) \\ \varphi_-, \tilde{\varphi}_- \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(-i\lambda),\pi}; \text{Id}) \end{cases} .$$

Supposons que $\varphi_{\pm}, \tilde{\varphi}_{\pm}$ conjuguent Y à Y_{norm} :

$$(\varphi_{\pm})_*(Y) = (\tilde{\varphi}_{\pm})_*(Y) = Y_{\text{norm}} .$$

Alors $(\varphi_+, \varphi_-) = (\tilde{\varphi}_+, \tilde{\varphi}_-)$ (en tant que germes).

Proposition 9.2. *Si $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag},0}$, alors l'unique normalisation formelle $\hat{\Phi}$ donnée par le 1.5 est faiblement 1-sommable sauf pour $\arg(\pm\lambda)$. En particulier, les normalisations sectorielles Φ_+ et Φ_- du corollaire 8.2 sont les 1-sommes faibles de $\hat{\Phi}$ dans les directions $\arg(i\lambda)$ et $\arg(-i\lambda)$ respectivement.*

9.1 Unicité des normalisations sectorielles : isotropies de la forme normale dans de « grands » secteurs

Considérons une forme normale $Y_{\text{norm}} \in \mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ comme donnée par le corollaire 8.2. Nous allons étudier dans cette section les germes d'isotropies sectorielles fibrées de Y_{norm} dans des domaines de la forme $\mathcal{S}_{\pm} \in \mathcal{S}_{\arg(\pm i\lambda),\eta}$ (voisinage sectoriel attaché à l'origine dans la direction $\arg(\pm i\lambda)$ avec ouverture $\eta \in]\pi, 2\pi[$). Une conséquence directe de cette étude est la proposition 9.1.

Définition 9.3. Un germe de difféomorphisme sectoriel fibré et tangent à l'identité $\Phi_{\theta,\eta}$ (dans la direction $\theta \in \mathbb{R}$ avec ouverture $\eta \geq 0$) est un *germe d'isotropie sectorielle fibrée* de Y_{norm} (dans la direction $\theta \in \mathbb{R}$ avec ouverture $\eta \geq 0$ et tangente à l'identité) si $(\Phi_{\theta,\eta})_*(Y_{\text{norm}}) = Y_{\text{norm}}$ dans un domaine $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_{\theta,\eta}$. On note $\text{Isot}_{\text{fib}}(Y; \mathcal{S}_{\theta,\eta}; \text{Id}) \subset \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\theta,\eta}; \text{Id})$ le sous-groupe formé de ces éléments.

La proposition 9.1 est une conséquence immédiate de la proposition suivante.

Proposition 9.4. *Pour tout $\eta \in]\pi, 2\pi[$:*

$$\text{Isot}_{\text{fib}}(Y_{\text{norm}}; \mathcal{S}_{\arg(\pm i\lambda),\eta}; \text{Id}) = \{\text{Id}\} .$$

Démonstration. Soit

$$\phi : (x, \mathbf{y}) \mapsto (x, \phi_1(x, \mathbf{y}), \phi_2(x, \mathbf{y})) \in \text{Isot}_{\text{fib}}(Y_{\text{norm}}; \mathcal{S}_{\arg(\pm i\lambda),\eta}; \text{Id})$$

germe d'isotropie sectorielle fibrée de Y_{norm} dans $\mathcal{S}_{\pm} \in \mathcal{S}_{\arg(\pm i\lambda),\eta}$ avec $\eta \in]\pi, 2\pi[$. Quitte à réduire $\mathcal{S}_{\pm}$, on peut supposer que ce domaine est borné et de la forme $S_{\pm} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ (avec $S_{\pm}$ un secteur et $\mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ un polydisque) et que ϕ est borné sur ce domaine. Par hypothèse on a

$$\phi_*(Y_{\text{norm}}) = Y_{\text{norm}} ,$$

i.e.

$$D\phi \cdot Y_{\text{norm}} = Y_{\text{norm}} \circ \phi ,$$

ce qui est équivalent au système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + (-1 - c(y_1 y_2) + a_1 x) y_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} + (1 + c(y_1 y_2) + a_2 x) y_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} \\ = \phi_1 (-1 - c(\phi_1 \phi_2) + a_1 x) \\ x^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + (-1 - c(y_1 y_2) + a_1 x) y_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} + (1 + c(y_1 y_2) + a_2 x) y_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} \\ = \phi_2 (1 + c(\phi_1 \phi_2) + a_2 x) \end{cases} . \quad (9.1.1)$$

Considérons $\psi := \phi_1 \phi_2$. Alors, il vient :

$$x^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + (-1 - c(y_1 y_2) + a_1 x) y_1 \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + (1 + c(y_1 y_2) + a_2 x) y_2 \frac{\partial \psi}{\partial y_2} = (a_1 + a_2) x \psi .$$

On peut écrire

$$\psi(x, \mathbf{y}) = \sum_{j_1 + j_2 \geq 2} \psi_{j_1, j_2}(x) y_1^{j_1} y_2^{j_2} ,$$

où $\psi_{j_1, j_2}(x)$ est analytique et bornée sur $S_{\pm}$ pour tout $j_1, j_2 \geq 0$, et on peut supposer que la série

$$\sum_{j_1 + j_2 \geq 1} \left(\sup_{x \in S_{\pm}} (|\psi_{j_1, j_2}(x)|) \right) y_1^{j_1} y_2^{j_2}$$

est convergente sur $\mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ (quitte à réduire le polydisque). Par conséquent, par un argument de convergence normale sur tout compact, on a pour tout $j_1, j_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} & x^2 \frac{d\psi_{j_1, j_2}}{dx}(x) + (j_2 - j_1 + (a_1(j_1 - 1) + a_2(j_2 - 1))x) \psi_{j_1, j_2}(x) \\ &= (j_1 - j_2) \sum_{l=1}^{\min(j_1, j_2)} \psi_{j_1-l, j_2-l}(x) c_l . \end{aligned}$$

Pour $j_1 = j_2 = j \geq 1$, on a donc

$$\psi_{j,j}(x) = b_{j,j} x^{-(j-1)(a_1+a_2)}, \quad b_{j,j} \in \mathbb{C}.$$

Puisque $\Re(a_1 + a_2) > 0$, la fonction $x \mapsto \psi_{j,j}(x)$ est bornée proche de l'origine si et seulement si $b_{j,j} = 0$ ou $j = 1$. Pour $j_1 > j_2$, on voit par récurrence que $\psi_{j_1,j_2}(x) = 0$. En effet, on obtient de manière récursive que

$$\psi_{j_1,j_2}(x) = b_{j_1,j_2} \exp\left(\frac{j_2 - j_1}{x}\right) x^{-(a_1(j_1-1) + a_2(j_2-1))},$$

et puisque cette quantité doit être bornée sur $S_{\pm}$, on a nécessairement $b_{j_1,j_2} = 0$. De même, pour $j_1 < j_2$ on a $\psi_{j_1,j_2}(x) = 0$. En conclusion, $\psi(x, \mathbf{y}) = b_{1,1} y_1 y_2 = y_1 y_2$, car ϕ est tangent à l'identité.

En en revenant à (9.1.1), on peut alors résoudre séparément chacune des équations :

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + (-1 - c(y_1 y_2) + a_1 x) y_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} + (1 + c(y_1 y_2) + a_2 x) y_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} \\ = \phi_1 (-1 - c(y_1 y_2) + a_1 x) \\ x^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + (-1 - c(y_1 y_2) + a_1 x) y_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} + (1 + c(y_1 y_2) + a_2 x) y_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} \\ = \phi_2 (1 + c(y_1 y_2) + a_2 x) \end{cases}.$$

Pour $i = 1, 2$ on écrit

$$\phi_i(x, \mathbf{y}) = \sum_{j_1 + j_2 \geq 1} \phi_{i,j_1,j_2}(x) y_1^{j_1} y_2^{j_2}$$

où $\phi_{i,j_1,j_2}(x)$ est analytique et bornée sur $S_{\pm}$ pour $j_1, j_2 \geq 0$ et on peut supposer que la série entière

$$\sum_{j_1 + j_2 \geq 1} \left(\sup_{x \in S_{\pm}} (|\phi_{i,j_1,j_2}(x)|) \right) y_1^{j_1} y_2^{j_2}$$

est convergente sur $\mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ (quitte à réduire le polydisque). On obtient comme précédemment (par convergence normale sur tout compact et en identifiant les termes de même degré (j_1, j_2) par rapport à $\mathbf{y}$:

$$\begin{cases} x^2 \frac{d\phi_{1,j_1,j_2}}{dx}(x) + (j_2 - j_1 + 1 + (a_1(j_1 - 1) + a_2 j_2)x) \phi_{1,j_1,j_2}(x) \\ = \sum_{l=1}^{\min(j_1, j_2)} \phi_{1,j_1-l, j_2-l}(x) (j_1 - j_2 - 1) c_l \\ x^2 \frac{d\phi_{2,j_1,j_2}}{dx}(x) + (j_2 - j_1 - 1 + (a_1 j_1 + a_2(j_2 - 1))x) \phi_{2,j_1,j_2}(x) \\ = \sum_{l=1}^{\min(j_1, j_2)} \phi_{2,j_1-l, j_2-l}(x) (j_1 - j_2 + 1) c_l \end{cases}.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \phi_{1,1,0}(x) = p_{1,0} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \phi_{2,0,1}(x) = q_{0,1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{cases}$$

avec $p_{1,0} q_{0,1} = 1$. Ensuite, en utilisant le fait que $\phi_{i,j_1,j_2}(x)$ est analytique et borné sur $S_{\pm}$ pour tout $j_1, j_2 \geq 0$, on voit par récurrence sur $j \geq 1$ que

$$\forall j \geq 1 \quad \begin{cases} \phi_{1,j+1,j} = 0 \\ \phi_{2,j,j+1} = 0 \end{cases}.$$

En effet, on montre par récurrence que pour tout $j \geq 1$, on a

$$x^2 \frac{d\phi_{1,j+2,j+1}}{dx}(x) + (j+1)(a_1 + a_2)x\phi_{1,j+2,j+1}(x) = 0,$$

dont la solution générale est :

$$\phi_{1,j+2,j+1}(x) = p_{j+2,j}x^{-(j+1)(a_1+a_2)}.$$

La quantité $\phi_{1,j+2,j+1}(x)$ est alors bornée proche de l'origine si et seulement si $p_{j+2,j+1} = 0$, puisque $\Re(a_1 + a_2) > 0$. Le même raisonnement fonctionne pour $\phi_{2,j,j+1}$, $j \geq 1$. Par conséquent :

$$\begin{cases} x^2 \frac{d\phi_{1,j_1,j_2}}{dx}(x) + (j_2 - j_1 + 1 + (a_1(j_1 - 1) + a_2j_2)x)\phi_{1,j_1,j_2}(x) \\ = (j_1 - j_2 - 1) \sum_{l=1}^{\min(j_1,j_2)} \phi_{1,j_1-l,j_2-l}(x)c_l \\ x^2 \frac{d\phi_{2,j_1,j_2}}{dx}(x) + (j_2 - j_1 - 1 + (a_1j_1 + a_2(j_2 - 1))x)\phi_{2,j_1,j_2}(x) \\ = (j_1 - j_2 + 1) \sum_{l=1}^{\min(j_1,j_2)} \phi_{2,j_1-l,j_2-l}(x)c_l \end{cases}.$$

A nouveau par récurrence, on montre que pour tout $j_1 > j_2 + 1$, on a $\phi_{1,j_1,j_2}(x) = 0$. En effet, on obtient de proche en proche

$$\phi_{1,j_1,j_2}(x) = p_{j_1,j_2} \exp\left(\frac{j_2 - j_1 + 1}{x}\right) x^{-(a_1(j_1-1)+a_2j_2)},$$

et puisque cette quantité doit rester bornée sur $S_{\pm}$, on doit avoir $p_{j_1,j_2} = 0$, et donc $\phi_{1,j_1,j_2}(x) = 0$. De même, pour $j_1 < j_2 + 1$, on a $\phi_{j_1,j_2}(x) = 0$. En conclusion, $\phi_1(x, \mathbf{y}) = y_1$. Le même raisonnement montre que $\phi_2(x, \mathbf{y}) = y_2$. $\square$

9.2 Faible 1-sommabilité des normalisations sectorielles

Reprenons les données du lemme 8.6. Le lemme qui suit affirme qu'une solution analytique de l'équation homologique considérée admet en fait un développement asymptotique 1-Gevrey faible dans le secteur en question. En d'autres termes, il s'agit de la 1-somme faible de la solution formelle de cette équation. On reprend les notations introduites au début du chapitre 8.

Lemme 9.5. *Soit*

$$Z := Y_0 + C(x, \mathbf{y})\mathcal{C} + xR^{(1)}(x, \mathbf{y})\mathcal{R}$$

un champ de vecteurs formel faiblement 1-sommable dans $S_{\pm} \in \mathcal{S}_{\arg(\pm i\lambda), \eta}$, avec $\eta \in [\pi, 2\pi[$ et $C, R^{(1)}$ d'ordre au moins 1 par rapport à $\mathbf{y}$. On note

$$Z_{\pm} := Y_0 + C_{\pm}(x, \mathbf{y})\mathcal{C} + xR_{\pm}^{(1)}(x, \mathbf{y})\mathcal{R}$$

la faible 1-somme associée dans $S_{\pm}$. Soit également $A \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ une série formelle faiblement 1-sommable dans $S_{\pm}$, de 1-somme $A_{\pm}(x, \mathbf{y})$ et qui soit d'ordre au moins 1 par rapport à $\mathbf{y}$. Alors, tout germe sectoriel $\alpha_{\pm}(x, \mathbf{y}) = x^M \tilde{\alpha}_{\pm}(x, \mathbf{y})$ avec $M \in \mathbb{N}_{>0}$, $\tilde{\alpha}_{\pm}$ analytique sur $S_{\pm}$ et dominé par $\|\mathbf{y}\|_{\infty}$, qui satisfait à l'équation

$$\mathcal{L}_{Z_{\pm}}(\alpha_{\pm}) = x^{M+1}A_{\pm}(x, \mathbf{y}) \quad ,$$

admet un développement asymptotique 1-Gevrey faible dans $\mathcal{S}_\pm$, que l'on note α . De plus, α est solution formelle de l'équation

$$\mathcal{L}_Z(\alpha) = x^{M+1} A(x, \mathbf{y}) \quad .$$

Démonstration. Écrivons Z sous la forme

$$\begin{aligned} Z = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (- (\lambda + d(y_1 y_2)) + a_1 x + F_1(x, \mathbf{y})) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + (\lambda + d(y_1 y_2) + a_2 x + F_2(x, \mathbf{y})) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} , \end{aligned}$$

avec F_1, F_2 faiblement 1-sommables dans $\mathcal{S}_\pm \in \mathcal{S}_{\arg(\pm i\lambda), \eta}$, $\eta \in [\pi, 2\pi[$, de 1-sommes faibles respectives $F_{1,\pm}, F_{2,\pm}$ qui sont dominées par $\|\mathbf{y}\|$, et $d(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$. Considérons les développements par rapport à $\mathbf{y}$:

$$\left\{ \begin{aligned} d(y_1 y_2) &= \sum_{k \geq 1} d_k y_1^k y_2^k \\ F_1(x, \mathbf{y}) &= \sum_{j_1 + j_2 \geq 1} F_{1,\mathbf{j}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{j}} \\ F_2(x, \mathbf{y}) &= \sum_{j_1 + j_2 \geq 1} F_{2,\mathbf{j}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{j}} \\ A(x, \mathbf{y}) &= \sum_{j_1 + j_2 \geq 1} A_{\mathbf{j}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{j}} \\ \alpha(x, \mathbf{y}) &= \sum_{j_1 + j_2 \geq 1} \alpha_{\mathbf{j}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{j}} \end{aligned} \right.$$

(des développements similaires sont valides dans $\mathcal{S}_\pm$ pour les 1-sommes faibles). Comme d'habitude, quitte à réduire $\mathcal{S}_\pm$, on peut supposer que $\mathcal{S}_\pm = S_\pm \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, où $S_\pm$ est un secteur et $\mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ est un polydisque. L'équation homologique

$$\mathcal{L}_Z(\alpha) = x^{M+1} A(x, \mathbf{y})$$

peut être ré-écrite

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + (- (\lambda + d(y_1 y_2)) + a_1 x + F_1(x, \mathbf{y})) y_1 \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} \\ + (\lambda + d(y_1 y_2) + a_2 x + F_2(x, \mathbf{y})) y_2 \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} = x^{M+1} A(x, \mathbf{y}) . \end{aligned}$$

En utilisant la convergence normale sur tout compact de $\mathcal{S}_\pm$, on peut calculer les dérivées de

$$\alpha(x, \mathbf{y}) = \sum_{j_1 + j_2 \geq 1} \alpha_{\mathbf{j}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{j}}$$

par rapport à x, y_1 ou y_2 terme à terme, afin d'obtenir par identification : $\forall \mathbf{j} = (j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$,

$$x^2 \frac{d\alpha_{\mathbf{j},\pm}}{dx}(x) + (\lambda(j_2 - j_1) + (a_1 j_1 + a_2 j_2)x) \alpha_{\mathbf{j},\pm}(x) = G_{\mathbf{j},\pm}(x) ,$$

où $G_{\mathbf{j},\pm}$ ne dépend que de $d_k, F_{1,\mathbf{k},\pm}, F_{2,\mathbf{k},\pm}, \alpha_{\mathbf{k},\pm}$ et $A_{1,\pm}$, pour $k \leq \min(j_1, j_2)$, $|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{j}| - 1$ et $|\mathbf{l}| \leq |\mathbf{j}|$. On obtient une équation différentielle analogue pour les séries formelles associées. Montrons par récurrence sur $|\mathbf{j}| \geq 0$ que :

1. $G_{\mathbf{j},\pm}(x)$ est la 1-somme de $G_{\mathbf{j}}(x)$ dans $\mathcal{S}_\pm$,
2. $G_{(j,j)}(0) = 0$ si $\mathbf{j} = (j, j)$,

3. $\alpha_{\mathbf{j},\pm}(x)$ est la 1-somme de $\alpha_{\mathbf{j}}(x)$ dans $S_{\pm}$.

Il sera primordial d'utiliser le fait que pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^2$, $\alpha_{\mathbf{j},\pm}$ est bornée sur $S_{\pm}$.

- Pour $\mathbf{j} = (0, 0)$, on a $G_{(0,0)} = 0$ et $\alpha_{(0,0)} = 0$.
- Soit $\mathbf{j} = (j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$ avec $|\mathbf{j}| = j_1 + j_2 \geq 1$. Supposons que la propriété à démontrer est vraie pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2$ avec $|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{j}| - 1$.
 1. Puisque $G_{\mathbf{j}}$ ne dépend que de $d_k, F_{1,\mathbf{k}}, F_{2,\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}}$ et A_1 , pour $k \leq \min(j_1, j_2)$, $|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{j}| - 1$ et $|\mathbf{l}| \leq |\mathbf{j}|$, il vient que $G_{\mathbf{j}}$ est 1-sommable in $S_{\pm}$, de 1-somme $G_{\mathbf{j},\pm}$.
 2. On voit également que $G_{j,j}(0) = 0$ si $\mathbf{j} = (j, j)$.
 3. Si $j_1 \neq j_2$, alors le point 1. de la proposition 6.32 nous dit qu'il existe une unique solution formelle $\alpha_{\mathbf{j}}(x)$ à l'équation différentielle à singularité irrégulière considérée telle que $\alpha_{\mathbf{j}}(0) = \frac{1}{\lambda(j_2 - j_1)} G_{\mathbf{j}}(0)$. De plus, cette solution est 1-sommable dans $S_{\pm}$ puisqu'il en va de même de $G_{\mathbf{j}}$.
 4. Si au contraire $j_1 = j_2 = j \geq 1$, puisque $G_{(j,j)}(0) = 0$, on peut écrire $G_{(j,j)}(x) = x\tilde{G}_{(j,j)}(x)$ avec $\tilde{G}_{(j,j)}(x)$ 1-sommable dans $S_{\pm}$, et on obtient donc une équation différentielle à singularité régulière :

$$x \frac{d\alpha_{(j,j),\pm}}{dx}(x) + (a_1 + a_2) j \alpha_{(j,j),\pm}(x) = \tilde{G}_{(j,j),\pm}(x) .$$

Puisque $\Re(a_1 + a_2) > 0$, d'après le point 2. de la proposition 6.32, cette dernière équation a une unique solution formelle $\alpha_{(j,j)}(x)$ telle que $\alpha_{(j,j)}(0) = \frac{\tilde{G}_{(j,j)}(0)}{(a_1 + a_2)j}$, qui est de plus 1-sommable dans $S_{\pm}$, et cette 1-somme est l'unique (germe de) solution de l'équation ci-dessus qui soit bornée sur $S_{\pm}$. Par conséquent, il s'agit de $\alpha_{(j,j),\pm}$.

□

On en déduit alors la proposition 9.2.

Démonstration. (de la proposition 9.2.)

Nous allons démontrer que les normalisations sectorielles $\Phi_{\pm}$ du corollaire 8.2 admettent l'unique normalisation formelle $\hat{\Phi}$ donné par le théorème 1.5 comme développement asymptotique 1-Gevrey dans tout domaine $\mathcal{S}_{\pm} \in \mathcal{S}_{\arg(\pm\lambda),\eta}$, pour tout $\eta \in [\pi, 2\pi[$. Pour cela, reprenons la construction des normalisations sectorielles $\Phi_{\pm}$ du corollaire 8.2 : $\Phi_{\pm}$ est obtenu comme la composition de deux germes de difféomorphismes sectoriels, en appliquant successivement les propositions 7.1 et 8.1. Le difféomorphisme obtenu dans de la proposition 7.1 est 1-sommable dans toute direction $\theta \neq \arg(\pm\lambda) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Le difféomorphisme de la proposition 8.1 est quant à lui construit comme composition de deux germes de difféomorphismes sectoriels en appliquant les propositions 8.3 et 8.5. Les deux difféomorphismes sectoriels de ces deux dernières propositions sont construits en utilisant le lemme 8.6 (voir section 8.2). Or, le lemme 9.5 ci-dessus permet justement d'affirmer que ces difféomorphismes sectoriels (construits grâce aux solutions de l'équation homologique du lemme 8.6) admettent en fait chacun un développement asymptotique 1-Gevrey faible dans des domaines du type $\mathcal{S}_{\pm} \in \mathcal{S}_{\arg(\pm\lambda),\eta}$, pour tout $\eta \in [\pi, 2\pi[$. Par conséquent, il est de même du difféomorphisme sectoriel de la proposition 8.1, et donc de celui du corollaire 8.2 (on a utilisé la proposition 6.26 pour la composition).

En utilisant le point 3 du lemme 6.25, on en déduit que le développement asymptotique 1-Gevrey faible de la normalisation sectorielle du corollaire 8.2 est donc une normalisation formelle, comme celle donnée par le théorème 1.5. Par unicité, il s'agit de l'unique normalisation formelle.

□

9.3 Preuve du théorème 5.5

Nous avons à présent tous les ingrédients pour démontrer le théorème 5.5.

Démonstration. (du théorème 5.5)

L'existence de Φ_+ et Φ_- est donnée par le corollaire 8.2. L'unicité est obtenue grâce à la proposition 9.1. Le caractère faiblement 1-sommable provient directement de la proposition 9.2. Pour la cas transversalement symplectique, puisque $\hat{\Phi}$ est faiblement 1-sommable dans $S_{\pm} \times (\mathbb{C}^2, 0)$, la série formelle $\det(D\hat{\Phi})$ l'est aussi. Or, puisque $D\hat{\Phi}$ est transversalement symplectique (d'après le théorème 1.5), $\det(D\hat{\Phi}) = 1$. Par unicité d'une 1-somme faible, on a donc $\det(D\Phi_{\pm}) = 1$. $\square$

Troisième partie

Classification analytique des nœud-cols 2-résonants strictement non dégénérés div-intégrables

Chapitre 10

Présentations des résultats

Dans cette troisième partie, nous allons donner des résultats de classification analytique, en décrivant le quotient des ensembles de champs de vecteurs considérés sous l'action de certains groupes de difféomorphismes : un tel ensemble quotient sera appelé *espace des modules*. Plus précisément, nous allons décrire les actions suivantes :

- action de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ sur $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$
- action de $\text{Diff}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0)$ sur $\mathcal{SN}_{\omega}$.

Les résultats principaux sont issus de [Bit16c]. La principale tâche de cette partie sera effectuée au chapitre 12, section 12.1, où nous montrerons que les isotropies sectorielles de la forme normale obtenue dans le théorème 5.5 qui admettent l'identité comme développement asymptotiques 1-Gevrey faible, admettent en fait l'identité comme développement asymptotique 1-Gevrey (non-faible) (*cf.* proposition 10.4). En combinant ce résultat avec un important théorème de réalisations de cocycles de Martinet et Ramis (démontré dans [MR82], rappelé plus loin dans cette thèse : théorème 11.1), on sera à même de justifier la surjectivité des applications décrivant les espaces des modules considérés, autrement dit la réalisation des invariants analytiques dont il sera question. De la même manière, en utilisant les deux mêmes résultats cités, on prouvera que la normalisation formelle du théorème 1.5 est en fait 1-sommable (non-faiblement) si le champs considéré est dans $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$.

Puisque deux champs de vecteurs qui sont analytiquement conjugués sont aussi formellement conjugués, on fixe une forme normale de $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ donnée par le théorème 1.5 (ou 5.5) :

$$Y_{\text{norm}} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x - c(v)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x + c(v)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} , \quad (10.0.1)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\Re(a_1 + a_2) > 0$ et $c(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$.

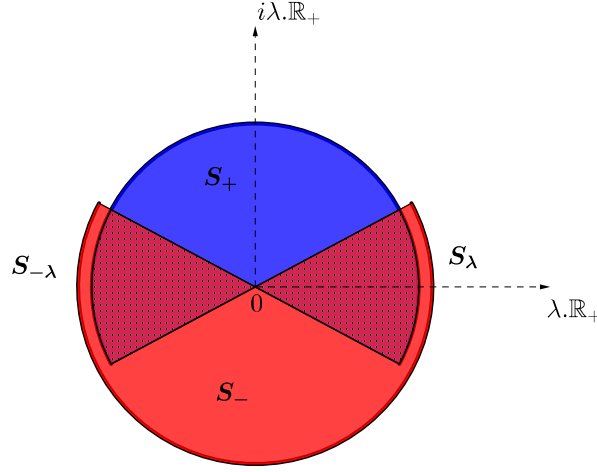
Définition 10.1. On définit $[Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$ comme l'ensemble des éléments de $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ qui sont $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ -conjugués à Y_{norm} . On note également

$$[Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}} / \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$$

l'ensemble des orbites de $[Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$ sous l'action de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$.

Considérons un élément $Y \in [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$, ainsi que ses normalisations sectorielles

$$(\Phi_+, \Phi_-) \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(i\lambda), \eta}; \text{Id}) \times \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(-i\lambda), \eta}; \text{Id}) ,$$

FIGURE 10.0.1 – Secteurs $S_+, S_-, S_\lambda, S_{-\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

où $\eta \in]\pi, 2\pi[$, données par le théorème 5.5. Il est à noter que dans la construction faite de Φ_+ et Φ_- , on remarque que l'on peut étendre analytiquement $\Phi_\pm$ à des domaines de la forme $S_\pm \times (\mathbb{C}^2, 0)$, où $S_\pm \in \mathcal{AS}_{\arg(\pm i\lambda), 2\pi}$ (voir définition 6.3). Considérons deux tels secteurs asymptotiques

$$(S_+, S_-) \in \mathcal{AS}_{\arg(i\lambda), 2\pi} \times \mathcal{AS}_{\arg(-i\lambda), 2\pi}$$

ainsi que les intersections

$$\begin{cases} S_\lambda := S_+ \cap S_- \cap \left\{ x \in \mathbb{C} \mid \Re\left(\frac{x}{\lambda}\right) > 0 \right\} \in \mathcal{AS}_{\arg(\lambda), \pi} \\ S_{-\lambda} := S_+ \cap S_- \cap \left\{ x \in \mathbb{C} \mid \Re\left(\frac{x}{\lambda}\right) < 0 \right\} \in \mathcal{AS}_{\arg(-\lambda), \pi} \end{cases} \quad (10.0.2)$$

On définit alors les deux germes de difféomorphismes sectoriels suivants :

$$\begin{cases} \Phi_\lambda := (\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1})|_{S_\lambda \times (\mathbb{C}^2, 0)} \in \text{Isot}_{\text{fib}}(Y_{\text{norm}}; \mathcal{S}_{\arg(\lambda), \epsilon}; \text{Id}) & , \forall \epsilon \in [0, \pi[\\ \Phi_{-\lambda} := (\Phi_- \circ \Phi_+^{-1})|_{S_{-\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)} \in \text{Isot}_{\text{fib}}(Y_{\text{norm}}; \mathcal{S}_{\arg(-\lambda), \epsilon}; \text{Id}) & , \forall \epsilon \in [0, \pi[\end{cases}$$

Par construction, il s'agit de germes d'isotropies (sectorielles) de Y_{norm} (*i.e.* Φ_λ et $\Phi_{-\lambda}$ vérifient $(\Phi_\pm)_*(Y_{\text{norm}}) = Y_{\text{norm}}$), qui sont fibrées, tangentes à l'identité, et qui admettent l'identité comme développement asymptotiques 1-Gevrey faible dans des domaines $S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$, avec $S_{\pm\lambda} \in \mathcal{AS}_{\arg(\pm\lambda), \pi}$, d'après le théorème 5.5.

Définition 10.2. Avec les notations ci-dessus, on définit $\Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}})$ (*resp.* $\Lambda_{\pm\lambda}(Y_{\text{norm}})$) comme le groupes des germes d'isotropies sectorielles fibrées de Y_{norm} , tangentes à l'identité, et qui admettent l'identité comme développement asymptotiques 1-Gevrey **faible** (*resp.* « non-faible », ou « classique ») dans des domaines de la forme $S_\lambda \times (\mathbb{C}^2, 0)$ (*resp.* $S_{-\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$), avec $S_{\pm\lambda} \in \mathcal{AS}_{\arg(\pm\lambda), \pi}$.

Les deux germes d'isotropies sectorielles Φ_λ et $\Phi_{-\lambda}$ définis ci-dessus sont appelés **difféomorphismes de Stokes** de $Y \in [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$.

Remarque 10.3.

1. Par définition, on a :

$$(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) \in \Lambda_\lambda^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}}) .$$

2. Il est évident qu'on a les inclusions

$$\Lambda_{\pm\lambda}(Y_{\text{norm}}) \subset \Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}}) \subset \text{Isot}_{\text{fib}}(Y_{\text{norm}}; \mathcal{S}_{\arg(\pm\lambda), \epsilon}; \text{Id}), \quad \forall \epsilon \in]0, \pi[.$$

La principale difficulté technique de cette partie est de prouver la proposition suivante, qui affirme que la première inclusion ci-dessus est fait une égalité.

Proposition 10.4. (*Proposition D*) *Soit Y_{norm} une forme normale de $\mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ comme ci-dessus. Tout élément $\psi \in \Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}})$ admet alors l'identité comme développement asymptotiques 1-Gevrey. Autrement dit, on a l'égalité :*

$$\Lambda_{\pm\lambda}(Y_{\text{norm}}) = \Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}}) .$$

Cette proposition va avoir plusieurs conséquences importantes. La première d'entre elles est le théorème suivant, qui nous dit que la normalisation sectorielle du théorème 1.5 est en fait 1-sommable si le champ de départ est élément de $\mathcal{SN}_{\text{diag},0}$.

Théorème 10.5. (*Théorème E*) *Soient $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ avec $D_0 Y = \text{diag}(0, -\lambda, \lambda)$ et $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ la normalisation formelle associée (donnée par le théorème 1.5). Alors, $\hat{\Phi}$ est 1-sommable dans toute direction $\theta \neq \arg(\pm\lambda) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et les normalisations sectorielles Φ_+, Φ_- du théorème 5.5 sont les 1-sommes de $\hat{\Phi}$ dans les directions $\arg(i\lambda), \arg(-i\lambda)$ respectivement.*

Le théorème ci-dessous est la seconde principale conséquence de la proposition 10.4.

Théorème 10.6. (*Théorème F*) *L'application*

$$\begin{aligned} [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}} &\longrightarrow \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ Y &\longmapsto (\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) \end{aligned}$$

passse au quotient et induit une bijection :

$$\begin{aligned} [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}} / \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) &\xrightarrow{\sim} \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ Y &\longmapsto (\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) . \end{aligned}$$

Remarque 10.7.

1. Ce résultat signifie que les difféomorphismes de Stokes encodent entièrement la classe de conjugaison de Y dans le quotient $[Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}} / \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$.
2. On donnera au chapitre 12, section 12.7, une description plus « explicite » (en termes de séries entières de cet espace d'invariants analytiques).

En conséquence de ce théorème, on peut alors décrire l'espace des modules de $\mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$.

Corollaire 10.8. (*Corollaire G*) *On a la bijection suivante :*

$$\mathcal{SN}_{\text{diag},0} / \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) \simeq \{Y_{\text{norm}}, (\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda})\}$$

où Y_{norm} décrit l'ensemble des formes normales avec paramètre $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, -c, c) \in \mathcal{P}_{\text{fib}}$ (voir corollaire 1.7), et $(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda})$ décrit $\Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}})$.

On donnera au chapitre 13 des résultats analogues pour décrire plus généralement les actions de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ et celle de $\text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0)$.

Donnons une version transversalement symplectique du résultat précédent. Gardons les notations ci-dessus, et supposons que $Y_{\text{norm}} \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, \omega}$ soit transversalement symplectique par rapport à ω .

Définition 10.9. On note $[Y_{\text{norm}}]_{\omega, \text{Id}}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{SN}_{\text{diag}, \omega}$ qui sont $\widehat{\text{Diff}}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ –conjugués à Y_{norm} . D'après le théorème 5.5, les difféomorphismes de Stokes $(\Phi_{\lambda}, \Phi_{-\lambda})$ d'un élément $Y \in [Y_{\text{norm}}]_{\omega, \text{Id}}$ sont transversalement symplectiques.

On note également $\Lambda_{\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}})$ (*resp.* $\Lambda_{-\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}})$) le sous-groupe de $\Lambda_{\lambda}(Y_{\text{norm}})$ (*resp.* $\Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}})$) formé des éléments transversalement symplectiques.

On peut alors énoncer le résultat suivant.

Théorème 10.10. *L'application*

$$\begin{aligned} [Y_{\text{norm}}]_{\omega, \text{Id}} &\longrightarrow \Lambda_{\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}}) \\ Y &\longmapsto (\Phi_{\lambda}, \Phi_{-\lambda}) \end{aligned}$$

passé au quotient et induit une bijection :

$$\begin{aligned} [Y_{\text{norm}}]_{\omega, \text{Id}} / \text{Diff}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) &\xrightarrow{\sim} \Lambda_{\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}}) \\ Y &\longmapsto (\Phi_{\lambda}, \Phi_{-\lambda}) . \end{aligned}$$

Comme avant, en conséquence, on a le résultat suivant.

Corollaire 10.11. *On a la bijection suivante :*

$$\mathcal{SN}_{\text{diag}, \omega} / \text{Diff}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) \simeq \{Y_{\text{norm}}, (\Phi_{\lambda}, \Phi_{-\lambda})\}$$

où Y_{norm} décrit l'ensemble des formes normales transversalement hamiltoniennes avec paramètre de la forme $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, -c, c) \in \mathcal{P}_{\omega}$ (voir corollaire 1.7), et $(\Phi_{\lambda}, \Phi_{-\lambda})$ décrit $\Lambda_{\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}})$.

Remarque 10.12. La preuve de la proposition 10.4 correspond à la seconde principale nouveauté que l'on a rencontré, par rapport au cas où le champ restreint $Y_{\{x=0\}}$ est linéaire, à cause de la présence d'un terme « résonant »

$$\frac{c_m (y_1 y_2)^m \log(x)}{x}$$

dans l'expression exponentielle des intégrales premières du champ de vecteurs sous forme normale. Dans [Sto96], des calculs similaires sont faits en sous-section 3.4.1. Dans cette partie de l'article cité, une infinité dénombrable d'équations différentielles linéaires à singularités irrégulières apparaissent lorsque l'on identifie des termes de même degré homogène. Le fait que la restriction $Y_{\{x=0\}}$ est linéaire implique que toutes ces équations sont indépendantes les unes des autres. Dans notre cas, la situation est plus compliquée, car toutes ces équations linéaires sont couplées, du fait de la présence de la non linéarité $c_m (y_1 y_2)^m$.

Chapitre 11

Classification analytique fibrée et 1-sommabilité de la normalisation formelle

Le but de ce chapitre est de démontrer les théorèmes 10.5, 10.6 et 10.10 en admettant la proposition 10.4 qui sera démontrée au chapitre suivant.

11.1 Un important résultat de réalisation de « cocycles » de Martinet-Ramis

Nous aurons besoin d'utiliser un important théorème de réalisation prouvé dans [MR82]. Ce théorème sera fondamental pour réaliser les invariants analytiques de l'espace des modules que nous étudions dans cette thèse.

Considérons deux secteurs asymptotiques à l'origine dans les directions θ et $\theta - \pi$ respectivement, tous deux d'ouverture π :

$$\begin{aligned} S &\in \mathcal{AS}_{\theta,\pi} \\ S' &\in \mathcal{AS}_{\theta-\pi,\pi} \end{aligned}$$

(voir définition 6.3). Dans ce cas particuliers, le théorème que nous venons de citer peut s'énoncer de la manière suivante.

Théorème 11.1. [MR82, Théorème 5.2.1] *Considérons un couple de germes de difféomorphismes sectoriels, fibrés et tangents à l'identité, dans deux directions opposés θ et $\theta - \pi$:*

$$(\varphi, \varphi') \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\theta,0}; \text{Id}) \times \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\theta-\pi,0}; \text{Id}) \quad .$$

Supposons que qu'il existe deux secteurs asymptotiques d'ouverture π dans les directions θ et $\theta - \pi$:

$$\begin{aligned} S &\in \mathcal{AS}_{\theta,\pi} \\ S' &\in \mathcal{AS}_{\theta-\pi,\pi} \end{aligned}$$

tels que φ et φ' s'étendent analytiquement à $S \times (\mathbb{C}^n, 0)$ et $S' \times (\mathbb{C}^n, 0)$ respectivement, et y admettent l'identité comme développement asymptotique 1-Gevrey. Alors, il existe un couple

(ϕ_+, ϕ_-) de germes de difféomorphismes sectoriels fibrés et tangents à l'identité :

$$(\phi_+, \phi_-) \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\theta+\frac{\pi}{2}, \eta}; \text{Id}) \times \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\theta-\frac{\pi}{2}, \eta}; \text{Id})$$

avec $\eta \in]\pi, 2\pi[$, qui s'étendent analytiquement à $S_+ \times (\mathbb{C}^n, 0)$ et $S_- \times (\mathbb{C}^n, 0)$ respectivement, avec $S_+ \in \mathcal{AS}_{\theta+\frac{\pi}{2}, 2\pi}$ et $S_- \in \mathcal{AS}_{\theta-\frac{\pi}{2}, 2\pi}$, et tels que :

$$\begin{cases} \phi_+ \circ (\phi_-)^{-1}_{|S_+ \times (\mathbb{C}^n, 0)} = \varphi \\ \phi_- \circ (\phi_+)^{-1}_{|S_- \times (\mathbb{C}^n, 0)} = \varphi' \end{cases} .$$

Il existe également un difféomorphisme formel $\hat{\phi}$, fibré et tangent à l'identité, tel que ϕ_+ et ϕ_- admettent tous deux $\hat{\phi}$ comme développement asymptotique dans $S_+ \times (\mathbb{C}^n, 0)$ et $S_- \times (\mathbb{C}^n, 0)$ respectivement.

Nous aurons également besoin d'une version "transversalement symplectique" du théorème ci-dessus. Nous rappelons que dans ce cas, nous travaillons avec $n = 2$, donc dans $\mathbb{C}^3$, avec la 1-forme méromorphe

$$\omega = \frac{dy_1 \wedge dy_2}{x} ,$$

et que dans ce cas, dire qu'un difféomorphisme fibré (formel ou non, sectoriel ou non) Φ est transversalement symplectique signifie simplement que :

$$\det(D\Phi(x, \mathbf{y})) = 1$$

(en tant que série formelle ou que fonction analytique sectorielle dans le domaine en question).

Corollaire 11.2. Avec les notations et les hypothèses du théorème 11.1, si l'on suppose de plus que φ et φ' sont tous deux transversalement symplectique, alors il existe un germe de difféomorphisme (analytique) fibré $\psi \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0, \text{Id})$ (tangent à l'identité), tel que

$$\sigma_+ := \phi_+ \circ \psi \quad \text{et} \quad \sigma_- := \phi_- \circ \psi$$

soient transversalement symplectiques. De plus, on a aussi :

$$\begin{cases} \sigma_+ \circ (\sigma_-)^{-1}_{|S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)} = \varphi \\ \sigma_- \circ (\sigma_+)^{-1}_{|S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)} = \varphi' \end{cases} .$$

Démonstration. Commençons par montrer que :

$$\det(D\phi_+) = \det(D\phi_-) \text{ sur } (S_+ \cap S_-) \times (\mathbb{C}^2, 0) .$$

Comme φ et φ' sont transversalement symplectiques, on a :

$$\det\left(D\left(\phi_+ \circ (\phi_-)^{-1}_{|(S_+ \cap S_-) \times (\mathbb{C}^2, 0)}\right)\right) = 1 .$$

On obtient donc :

$$\det(D\phi_+) = \det(D\phi_-) \text{ dans } (S_+ \cap S_-) \times (\mathbb{C}^2, 0) .$$

Cette égalité nous permet donc de définir (grâce au théorème de Riemann sur les singularités apparentes) un germe de fonction analytique $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^3, 0)$, définie par $\det(D\phi_+)$ (resp. par $\det(D\phi_-)$) sur $S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)$ (resp. sur $S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)$). Remarquons que $f(0, 0, 0) = 1$ car ϕ_+ et

ϕ_- sont tangents à l'identité. A présent, nous allons chercher un élément $\psi \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0, \text{Id})$ de la forme

$$\psi : (x, y_1, y_2) \mapsto (x, \psi_1(x, \mathbf{y}), y_2) \quad (11.1.1)$$

tel que

$$\sigma_+ := \phi_+ \circ \psi \text{ et } \sigma_- := \phi_- \circ \psi$$

soient tous deux transversalement symplectiques. Un calcul rapide donne

$$(\det(D\phi_{\pm}) \circ \psi) \det(D\psi) = 1 ,$$

i.e.

$$(f \circ \psi) \det(D\psi) = 1 .$$

D'après (11.1.1), on doit donc avoir

$$(f \circ \psi) \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} = 1 . \quad (11.1.2)$$

Introduisons la fonction suivante :

$$F(x, y_1, y_2) := \int_0^{y_1} f(x, z, y_2) dz ,$$

de sorte que (11.1.2) peut s'intégrer en

$$F \circ \psi = y_1 + h(x, y_2) ,$$

avec $h \in \mathbb{C}\{x, y_2\}$. Notons que

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(0, 0, 0) = 1$$

puisque $f(0, 0, 0) = 1$. Prenons $h = 0$. Nous avons alors à résoudre l'équation

$$F \circ \psi = y_1 ,$$

d'inconnue $\psi \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ comme dans (11.1.2). Si l'on définit

$$\Phi : (x, \mathbf{y}) \mapsto (x, F(x, \mathbf{y}), y_2) ,$$

le problème ci-dessus revient à trouver ψ tel que :

$$\Phi \circ \psi = \text{Id} .$$

Comme $D_0\Phi = \text{Id}$, le théorème d'inversion locale (version analytique) nous donne l'existence de $\psi = \Phi^{-1} \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$. $\square$

11.2 Preuve du théorème 10.5 : 1-sommabilité de la normalisation sectorielle

Nous démontrons dans cette section le théorème 10.5.

Démonstration. (du théorème 10.5)

Soit $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ avec pour forme normale Y_{norm} comme en (10.0.1). Considérons les normalisations sectorielles Φ_+ et Φ_- , analytiques sur $S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et $S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)$ respectivement, avec $S_{\pm} \in \mathcal{AS}_{\arg(\pm\lambda), 2\pi}$. On considère également les difféomorphismes de Stokes

$$\begin{cases} \Phi_\lambda = (\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1})|_{S_\lambda \times (\mathbb{C}^2, 0)} \in \Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}}) \\ \Phi_{-\lambda} = (\Phi_- \circ \Phi_+^{-1})|_{S_{-\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)} \in \Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}}) \end{cases},$$

où S_λ et $S_{-\lambda}$ sont les intersections définies comme en (10.0.2). D'après la proposition 10.4, on a

$$\Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}}) = \Lambda_{\pm\lambda}(Y_{\text{norm}}),$$

et donc Φ_λ et $\Phi_{-\lambda}$ admettent l'identité comme développement asymptotique 1-Gevrey dans $S_\lambda \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et $S_{-\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$ respectivement. Le théorème 11.1 nous fournit l'existence d'un couple

$$(\phi_+, \phi_-) \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(i\lambda), \eta}; \text{Id}) \times \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(-i\lambda), \eta}; \text{Id})$$

pour tout $\eta \in]\pi, 2\pi[$, tel que :

$$\begin{cases} \phi_+ \circ (\phi_-)^{-1}|_{S_\lambda \times (\mathbb{C}^2, 0)} = \Phi_\lambda \\ \phi_- \circ (\phi_+)^{-1}|_{S_{-\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)} = \Phi_{-\lambda} \end{cases},$$

ainsi que l'existence d'un difféomorphisme formel $\hat{\phi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ tangent à l'identité, qui est le développement asymptotique 1-Gevrey de ϕ_+ et ϕ_- dans $S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et $S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)$ respectivement. En particulier, on a :

$$\left((\Phi_+)^{-1} \circ \phi_+ \right)|_{(S_\lambda \cup S_{-\lambda}) \times (\mathbb{C}^2, 0)} = \left((\Phi_-)^{-1} \circ \phi_- \right)|_{(S_\lambda \cup S_{-\lambda}) \times (\mathbb{C}^2, 0)}.$$

Ceci prouve que la fonction Φ définie par $(\Phi_+)^{-1} \circ \phi_+$ sur $S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et par $(\Phi_-)^{-1} \circ \phi_-$ sur $S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)$ est bien définie et analytique sur un ensemble du type $D(0, r) \setminus \{0\} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$. Puisque qu'elle est bornée, elle peut être étendue analytiquement en une fonction Φ analytique sur $D(0, r) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ d'après le théorème de Riemann. D'où :

$$\begin{cases} \phi_+ = \Phi_+ \circ \Phi \\ \phi_- = \Phi_- \circ \Phi \end{cases}.$$

Par composition, Φ_+ et Φ_- admettent $\hat{\phi} \circ \Phi^{-1}$ comme développement asymptotique 1-Gevrey dans $S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et $S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)$ respectivement. Puisque Φ_+ et Φ_- conjuguent Y à Y_{norm} , le difféomorphisme formel $\hat{\phi} \circ \Phi^{-1}$ conjugue formellement Y à Y_{norm} . De plus, $\hat{\phi} \circ \Phi^{-1}$ est tangent à l'identité. En conclusion, par unicité d'une normalisation formelle (théorème 1.5) on doit avoir $\hat{\phi} \circ \Phi^{-1} = \hat{\Phi}$, l'unique normalisation formelle donnée par le théorème 1.5. Celle-ci est donc 1-sommable dans toutes les directions $\theta \neq \arg(\pm\lambda) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. $\square$

11.3 Invariants analytiques : preuve des théorèmes 10.6 et 10.10

On considère une forme normale

$$Y_{\text{norm}} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x - c(y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x + c(y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2},$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\Re(a_1 + a_2) > 0$ et $c \in v\mathbb{C}\{v\}$. On réutilise les notations introduites au chapitre 10.

11.3.1 Preuve du théorème 10.6

Le groupe $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ agit naturellement sur $[Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$ par conjugaison. Nous allons voir que l'unicité des normalisations sectorielles (Φ_+, Φ_-) d'un champ de vecteurs $Y \in [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$ va entraîner le fait que l'invariance des difféomorphismes de Stokes $(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda})$ sous l'action de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$. De plus, l'application ainsi définie par passage au quotient est une bijection. Ceci est l'objet du théorème 10.6.

Démonstration. (du théorème 10.6.)

Commençons par montrer que l'application

$$\begin{aligned} [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}} &\longrightarrow \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ Y &\longmapsto (\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) \end{aligned}$$

passé au quotient, *i.e.* se factorise *via* l'application

$$\begin{aligned} [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}} / \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) &\longrightarrow \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ Y &\longmapsto (\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) . \end{aligned}$$

Soient $Y, \tilde{Y} \in [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$ et $\Theta \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ tels que $\Theta_*(Y) = \tilde{Y}$. On note $\Phi_\pm$ (*resp.* $\tilde{\Phi}_\pm$) les normalisations sectorielles de Y (*resp.* $\tilde{Y}$), et $(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda})$ (*resp.* $(\tilde{\Phi}_\lambda, \tilde{\Phi}_{-\lambda})$) les difféomorphismes de Stokes de Y (*resp.* $\tilde{Y}$). Par hypothèse, $\tilde{\Phi}_\pm \circ \Theta$ est aussi une normalisation sectorielle de Y tangente à l'identité. Par unicité dans le théorème 5.5, on a :

$$\Phi_\pm = \tilde{\Phi}_\pm \circ \Theta .$$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Theta} & \tilde{Y} \\ \Phi_\pm \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \tilde{\Phi}_\pm \\ Y_{\text{norm}} & \xrightarrow{\text{Id}} & Y_{\text{norm}} . \end{array}$$

Par conséquent, pour $S_{\pm\lambda} \in \mathcal{AS}_{\arg(\lambda), \pi}$ convenable, on a

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda &= (\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1})|_{S_\lambda \times (\mathbb{C}^2, 0)} \\ &= \tilde{\Phi}_+ \circ \Theta \circ \Theta^{-1} \circ \tilde{\Phi}_- \\ &= \tilde{\Phi}_\lambda , \end{aligned}$$

et de même, on a

$$\begin{aligned} \Phi_{-\lambda} &= (\Phi_- \circ \Phi_+^{-1})|_{S_{-\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)} \\ &= \tilde{\Phi}_- \circ \Theta \circ \Theta^{-1} \circ (\tilde{\Phi}_+)^{-1} \\ &= \tilde{\Phi}_{-\lambda} . \end{aligned}$$

L'application passe donc au quotient.

Montrons que l'application induite est injective. Soient $Y, \tilde{Y} \in [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$ avec les même difféomorphismes de Stokes $(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda})$. On note encore $\Phi_\pm$ (*resp.* $\tilde{\Phi}_\pm$) les normalisations sectorielles

de Y (*resp.* $\tilde{Y}$). Pour $S_{\pm\lambda} \in \mathcal{AS}_{\arg(\lambda),\pi}$ convenable, on a :

$$\begin{cases} \Phi_+ \circ (\Phi_-)^{-1} = \Phi_\lambda = \tilde{\Phi}_+ \circ (\tilde{\Phi}_-)^{-1} & \text{sur } S_\lambda \times (\mathbb{C}^2, 0) \\ \Phi_- \circ (\Phi_+)^{-1} = \Phi_{-\lambda} = \tilde{\Phi}_- \circ (\tilde{\Phi}_+)^{-1} & \text{sur } S_{-\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0) . \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} (\tilde{\Phi}_+)^{-1} \circ \Phi_+ = (\tilde{\Phi}_-)^{-1} \circ \Phi_- & \text{sur } S_\lambda \times (\mathbb{C}^2, 0) \\ (\tilde{\Phi}_+)^{-1} \circ \Phi_+ = (\tilde{\Phi}_-)^{-1} \circ \Phi_- & \text{sur } S_{-\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0) . \end{cases}$$

où $S_\pm \in \mathcal{AS}_{\arg(\pm i\lambda), 2\pi}$ est tel que $S_+ \cap S_- = S_\lambda \cup S_{-\lambda}$. On peut alors définir une application φ analytique sur un domaine du type $(D(0, r) \setminus \{0\}) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, par :

$$\begin{cases} \varphi|_{S_+} = (\tilde{\Phi}_+)^{-1} \circ \Phi_+ & \text{sur } S_+ \\ \varphi|_{S_-} = (\tilde{\Phi}_-)^{-1} \circ \Phi_- & \text{sur } S_- , \end{cases}$$

où $S_\pm \in \mathcal{AS}_{\arg(\pm i\lambda), 2\pi}$ est tel que $S_+ \cap S_- = S_\lambda \cup S_{-\lambda}$. L'application φ étant bornée sur $(D(0, r) \setminus \{0\}) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, elle peut s'étendre analytiquement à $D(0, r) \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ d'après le théorème de Riemann. En conclusion, on a $\varphi \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$, $\Phi_\pm = \tilde{\Phi}_\pm \circ \varphi$ et $\varphi_*(Y) = \tilde{Y}$.

Montrons enfin que l'application

$$\begin{aligned} [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}} / \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) &\longrightarrow \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ Y &\longmapsto (\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) . \end{aligned}$$

est surjective. Soit

$$\begin{cases} \Phi_\lambda \in \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}) \\ \Phi_{-\lambda} \in \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \end{cases} .$$

D'après le théorème 11.1, il existe

$$(\phi_+, \phi_-) \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(i\lambda), \eta}; \text{Id}) \times \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(-i\lambda), \eta}; \text{Id})$$

avec $\eta \in]\pi, 2\pi[$, qui s'étendent analytiquement à $S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et $S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)$ respectivement, avec $S_\pm \in \mathcal{AS}_{\arg(\pm i\lambda), 2\pi}$, tels que :

$$\begin{cases} \phi_+ \circ (\phi_-)^{-1}|_{S_\lambda \times (\mathbb{C}^2, 0)} = \Phi_\lambda \\ \phi_- \circ (\phi_+)^{-1}|_{S_{-\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)} = \Phi_{-\lambda} \end{cases}$$

avec S_+ et S_- comme en (10.0.2), et il existe un difféomorphisme formel $\hat{\phi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ qui est le développement asymptotique 1-Gevrey de ϕ_+ et ϕ_- dans $S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et $S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)$ respectivement. Considérons les germes sectoriels de champs de vecteurs suivants :

$$\begin{cases} Y_+ := (\phi_+^{-1})_*(Y_{\text{norm}}) \\ Y_- := (\phi_-^{-1})_*(Y_{\text{norm}}) \end{cases} .$$

Puisque $\hat{\phi}$ est le développement asymptotique 1-Gevrey de ϕ_+ et ϕ_- , il s'ensuit que Y_+ et Y_- admettent tous deux $\left(\hat{\phi}\right)_*(Y_{\text{norm}})$ comme développement asymptotique 1-Gevrey. Le fait que

$\phi_+ \circ (\phi_-)^{-1}$ et $\phi_- \circ (\phi_+)^{-1}$ soient des isotropies de Y_{norm} implique immédiatement que $Y_+ = Y_-$ sur

$$(S_+ \cap S_-) \times (\mathbb{C}^2, 0) = (S_\lambda \cup S_{-\lambda}) \times (\mathbb{C}^2, 0) .$$

Le champ de vecteurs Y , défini par Y_+ sur $S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et par Y_- sur $S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)$, s'étend en un germe de champ de vecteurs analytique sur $(\mathbb{C}^3, 0)$ d'après le théorème de Riemann. Par construction, $Y \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})_*(Y_{\text{norm}})$ et admet $(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda})$ comme difféomorphismes de Stokes. L'application considérée dans l'énoncé du théorème 10.6 est donc surjective. $\square$

11.3.2 Preuve du théorème 10.10

De façon analogue, on prouve à présent le théorème 10.10. Soit $Y_{\text{norm}} \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, \omega}$ une forme normale transversalement symplectique comme dans le théorème 5.5. Nous renvoyons encore une fois au chapitre 10.

Démonstration. (du théorème 10.10.)

Il s'agit de montrer que l'application

$$\begin{aligned} [Y_{\text{norm}}]_{\omega, \text{Id}} / \text{Diff}_{\omega}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) &\longrightarrow \Lambda_{\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}}) \\ Y &\longmapsto (\Phi_{\lambda}, \Phi_{-\lambda}) \end{aligned}$$

est bijective. D'après les théorèmes 5.5 et 10.6, il est immédiat que cette application est bien définie et injective. Il reste à prouver qu'elle est surjective. Soit

$$\begin{cases} \Phi_{\lambda} \in \Lambda_{\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}}) \\ \Phi_{-\lambda} \in \Lambda_{-\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}}) \end{cases} .$$

Puisque $\Lambda_{\pm\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}}) \subset \Lambda_{\lambda}(Y_{\text{norm}})$, d'après le théorème 11.1, il existe

$$(\phi_+, \phi_-) \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(i\lambda), \eta}; \text{Id}) \times \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathcal{S}_{\arg(-i\lambda), \eta}; \text{Id})$$

avec $\eta \in]\pi, 2\pi[$, qui s'étendent analytiquement à $S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et $S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)$ respectivement, avec $S_{\pm} \in \mathcal{AS}_{\arg(\pm i\lambda), 2\pi}$, tels que :

$$\begin{cases} \phi_+ \circ (\phi_-)^{-1}|_{S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)} = \Phi_{\lambda} \\ \phi_- \circ (\phi_+)^{-1}|_{S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)} = \Phi_{-\lambda} \end{cases}$$

avec S_+ et S_- comme en (10.0.2), et il existe un difféomorphisme formel $\hat{\phi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ qui est le développement asymptotique 1-Gevrey de ϕ_+ et ϕ_- dans $S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)$ et $S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)$ respectivement. D'après le corollaire 11.2, il existe $\psi \in \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ tel que

$$\sigma_+ := \phi_+ \circ \psi \text{ et } \sigma_- := \phi_- \circ \psi$$

soient tous deux transversalement symplectiques. On en déduit que :

$$\begin{cases} \sigma_+ \circ (\sigma_-)^{-1}|_{S_+ \times (\mathbb{C}^2, 0)} = \Phi_{\lambda} \\ \sigma_- \circ (\sigma_+)^{-1}|_{S_- \times (\mathbb{C}^2, 0)} = \Phi_{-\lambda} \end{cases} ,$$

avec σ_+ et σ_- transversalement symplectiques. Le fin de la preuve est ensuite exactement comme la fin de celle du théorème 10.6. $\square$

Chapitre 12

Isotropies de la forme normale dans de « petits » secteurs et espace des feuilles : preuve de la proposition 10.4

Le but de ce chapitre est double : démontrer la proposition 10.4 et donner une description de l'espace des modules du théorème 10.6 en termes de séries entières dans l'espace des feuilles. On considère une forme normale

$$Y_{\text{norm}} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x - c(v)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x + c(v)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} ,$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\Re(a_1 + a_2) > 0$ et $c(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$. Notons $a := \text{res}(Y_{\text{norm}}) = a_1 + a_2$, $m := \frac{1}{a}$ ainsi que

$$c(v) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k v^k .$$

Si $m \notin \mathbb{N}_{>0}$, on pose $c_m := 0$. On définit également pour la série suivante :

$$\tilde{c}(v) = m \sum_{k \neq m} \frac{c_k}{k - m} v^k ,$$

et remarquons que $\tilde{c}(v) \in v\mathbb{C}\{v\}$.

12.1 Intégrales premières sectorielles et espace des feuilles

Dans un voisinage sectoriel de l'origine de la forme $S_\lambda \times (\mathbb{C}^2, 0)$ (*resp.* $S_{-\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$), avec $S_{\pm\lambda} \in \mathcal{S}_{\arg(\pm\lambda), \epsilon}$ et $\epsilon \in]0, \pi[$, on peut donner trois intégrales premières de Y_{norm} analytiques dans cette région. Nous allons les décrire. Commençons par énoncer la proposition suivante.

Proposition 12.1. *Les quantités suivantes sont toutes les trois des intégrales premières (analytique sur $S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$) de Y_{norm} :*

$$\begin{cases} w := \frac{y_1 y_2}{x^a} \\ h_{1,\pm}(x, \mathbf{y}) := y_1 \exp \left(\frac{-\lambda}{x} + \frac{c_m (y_1 y_2)^m \log(x)}{x} + \frac{\tilde{c}(y_1 y_2)}{x} \right) x^{-a_1} \\ h_{2,\pm}(x, \mathbf{y}) := y_2 \exp \left(\frac{\lambda}{x} - \frac{c_m (y_1 y_2)^m \log(x)}{x} - \frac{\tilde{c}(y_1 y_2)}{x} \right) x^{-a_2} \end{cases} \quad (12.1.1)$$

(on choisit une détermination du logarithme dans $S_{\pm\lambda}$ que l'on garde fixée dans tout ce chapitre, et on notera dorénavant simplement h_j au lieu de $h_{j,\pm}$ pour 1,2).

De plus, ces quantités sont liées par la relation :

$$h_1 h_2 = w .$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul élémentaire sans difficulté. $\square$

Remarque 12.2. En d'autres mots, dans un domaine sectoriel, on peut paramétrer une feuille du feuilletage associé à Y_{norm} qui n'est pas contenue dans $\{x = 0\}$ par :

$$\begin{cases} y_1(x) = h_1 \exp \left(\frac{\lambda}{x} - c_m (h_1 h_2)^m \log(x) - \frac{\tilde{c}(h_1 h_2 x^a)}{x} \right) x^{a_1} \\ y_2(x) = h_2 \exp \left(-\frac{\lambda}{x} + c_m (h_1 h_2)^m \log(x) + \frac{\tilde{c}(h_1 h_2 x^a)}{x} \right) x^{a_2} \end{cases} \quad (12.1.2)$$

$$(h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2 .$$

Corollaire 12.3. *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\pm} : S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0) &\rightarrow S_{\pm\lambda} \times \mathbb{C}^2 \\ (x, \mathbf{y}) &\mapsto (x, h_{1,\pm}(x, \mathbf{y}), h_{2,\pm}(x, \mathbf{y})) , \end{aligned}$$

(où $h_{1,\pm}, h_{2,\pm}$ sont définies dans (12.1.1)) est un germe sectoriel d'application analytique et injective sur $S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$. De plus, il existe un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^2$, noté $\Gamma_{\pm\lambda} \subset \mathbb{C}^2$, tel que :

$$\mathcal{H}_{\pm}(S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)) = S_{\pm\lambda} \times \Gamma_{\pm\lambda} .$$

En particulier, $\mathcal{H}_{\pm}$ induit un biholomorphisme fibré

$$S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0) \xrightarrow{\mathcal{H}_{\pm}} S_{\pm\lambda} \times \Gamma_{\pm\lambda}$$

qui conjugue Y_{norm} à $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$, i.e.

$$(\mathcal{H}_{\pm})_*(Y_{\text{norm}}) = x^2 \frac{\partial}{\partial x} .$$

Définition 12.4. On appelle $\Gamma_{\pm\lambda}$ l'espace des feuilles de Y_{norm} dans $S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$.

Remarque 12.5. L'ensemble $\Gamma_{\pm\lambda}$ dépend du choix du voisinage $(\mathbb{C}^2, 0)$ initial, mais également du voisinage sectoriel $S_{\pm\lambda} \in \mathcal{S}_{\arg(\pm\lambda), \epsilon}$.

12.2 Isotropies sectorielles dans l'espace des feuilles

On poursuit notre étude, avec $S_{\pm\lambda} \in \mathcal{S}_{\arg(\pm\lambda), \epsilon}$ fixé, l'application $\mathcal{H}_{\pm}$ comme ci-dessus, et l'espace des feuilles $\Gamma_{\pm\lambda}$. Considérons une isotropie $\psi_{\pm} \in \Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}})$ et notons $\Gamma'_{\pm\lambda}$ le (germe de) voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\mathcal{H}_{\pm} \circ \psi_{\pm}(S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)) = S_{\pm\lambda} \times \Gamma'_{\pm\lambda} .$$

Proposition 12.6. *Avec les notations précédentes, l'application*

$$\Psi_{\pm} := \mathcal{H}_{\pm} \circ \psi_{\pm} \circ \mathcal{H}_{\pm}^{-1} : S_{\pm\lambda} \times \Gamma_{\pm\lambda} \longrightarrow S_{\pm\lambda} \times \Gamma'_{\pm\lambda}$$

est un germe sectoriel de difféomorphisme fibré de $S_{\pm\lambda} \times \Gamma_{\pm\lambda}$ vers $S_{\pm\lambda} \times \Gamma'_{\pm\lambda}$, qui est de la forme :

$$\Psi_{\pm}(x, h_1, h_2) = (x, \Psi_{1,\pm}(h_1, h_2), \Psi_{2,\pm}(h_1, h_2)) .$$

En particulier, $\Psi_{1,\pm}$ et $\Psi_{2,\pm}$ sont analytiques et ne dépendent que de $(h_1, h_2) \in \Gamma_{\pm\lambda}$, et $\Psi_{\pm}$ induit un biholomorphisme (aussi noté $\Psi_{\pm}$) :

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm} : \Gamma_{\pm\lambda} &\xrightarrow{\sim} \Gamma'_{\pm\lambda} \\ (h_1, h_2) &\mapsto (\Psi_{1,\pm}(h_1, h_2), \Psi_{2,\pm}(h_1, h_2)) . \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de prouver que $\Psi_{1,\pm}$ et $\Psi_{2,\pm}$ ne dépendent que de $(h_1, h_2) \in \Gamma_{\pm\lambda}$. Par construction, $\Psi_{\pm}$ est une isotropie de $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$, puisque $\psi_{\pm}$ est un isotropie de Y_{norm} et que $\mathcal{H}_{\pm}$ conjugue Y_{norm} à $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$:

$$(\Psi_{\pm})_* \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) = x^2 \frac{\partial}{\partial x} .$$

On obtient immédiatement :

$$\frac{\partial \Psi_{1,\pm}}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_{2,\pm}}{\partial x} = 0 .$$

□

Dans l'espace des feuilles $\Gamma_{\pm\lambda}$ muni des coordonnées (h_1, h_2) , on note w le produit de h_1 et h_2 :

$$w(h_1, h_2) := h_1 h_2 .$$

On définit alors les deux quantités suivantes :

$$\begin{cases} f_1(x, w) := \exp \left(\frac{\lambda}{x} - c_m w^m \log(x) - \frac{\tilde{c}(wx^a)}{x} \right) x^{a_1} \\ f_2(x, w) := \exp \left(-\frac{\lambda}{x} + c_m w^m \log(x) + \frac{\tilde{c}(wx^a)}{x} \right) x^{a_2} \end{cases} , \quad (12.2.1)$$

de sorte que les feuilles du feuilletage non contenues dans $\{x = 0\}$ soient paramétrées sectoriellement par

$$\begin{cases} y_1(x) = h_1 f_1(x, h_1 h_2) \\ y_2(x) = h_2 f_2(x, h_1 h_2) \end{cases} , \quad (h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2 .$$

On remarque que l'on a la relation

$$f_1(x, w) f_2(x, w) = x^a .$$

De plus, une étude élémentaire montre l'affirmation suivante :

Fait 12.7. *Pour tout $w \in \mathbb{C}$:*

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S_{\lambda}}} |f_1(x, w)| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S_{-\lambda}}} |f_2(x, w)| = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S_{-\lambda}}} |f_1(x, w)| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S_{\lambda}}} |f_2(x, w)| = 0 \end{cases} .$$

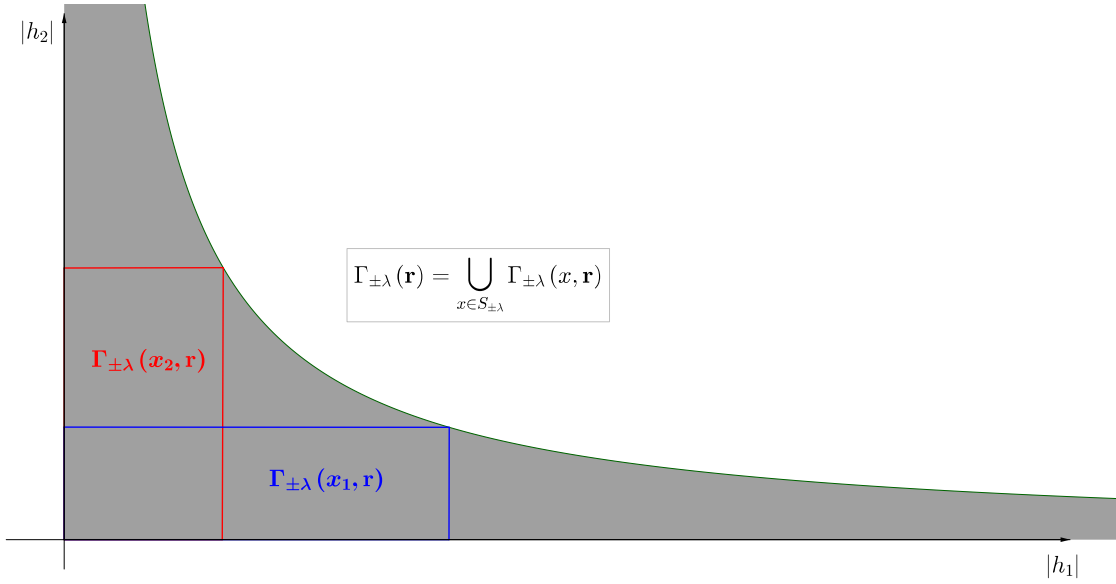


FIGURE 12.2.1 – Illustration de l'espace des feuilles en fonction de $|h_1|$ et $|h_2|$ dans le cas où $c = 0$: dans ce cas, il s'agit d'un *domaine de Reinhardt* (cf. [Hor73]).

En utilisant la proposition 12.6, on suppose désormais que $(\mathbb{C}^2, 0) = \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, avec $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ et $r_1, r_2 > 0$ assez petits pour qu'on ait :

$$\psi_{\pm}(S_{\pm\lambda} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})) \subset S_{\pm\lambda} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r}')$$

pour un certain $\mathbf{r}' = (r'_1, r'_2) \in (\mathbb{R}_{>0})^2$. Définissons de manière générale l'ensemble suivant associé au voisinage sectoriel $S_{\pm\lambda}$ et au polydisque $\mathbf{D}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{r}})$, avec $\tilde{\mathbf{r}} := (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$.

Définition 12.8. Pour tout $x \in S_{\pm\lambda}$ et $\tilde{\mathbf{r}} := (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) \in (\mathbb{R}_{>0})^2$, on définit

$$\Gamma_{\pm\lambda}(x, \tilde{\mathbf{r}}) := \left\{ (h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } |h_j| \leq \frac{\tilde{r}_j}{|f_j(x, h_1 h_2)|}, j \in \{1, 2\} \right\}.$$

On considère également l'ensemble :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pm\lambda}(\tilde{\mathbf{r}}) &:= \bigcup_{x \in S_{\pm\lambda}} \Gamma_{\pm\lambda}(x, \tilde{\mathbf{r}}) \\ &= \left\{ (h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel qu'il existe } x \in S_{\pm\lambda} \mid |h_j| \leq \frac{\tilde{r}_j}{|f_j(x, h_1 h_2)|}, j \in \{1, 2\} \right\} \end{aligned}$$

(cf. figure 12.2.1).

On a donc, puisque qu'on suppose désormais que $(\mathbb{C}^2, 0) = \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$:

$$\Gamma_{\pm\lambda} = \Gamma_{\pm\lambda}(\mathbf{r}),$$

et

$$\Gamma'_{\pm\lambda} \subset \Gamma_{\pm\lambda}(\mathbf{r}').$$

Remarque 12.9.

1. Il est important de remarquer que la forme particulière de $\Psi_{\pm}$ implique notamment le fait que l'image de n'importe quelle fibre

$$\{x = x_0\} \times \Gamma_{\pm\lambda}(x_0, \mathbf{r})$$

par $\Psi_{\pm}$ est incluse dans une autre fibre de la forme

$$\{x = x_0\} \times \Gamma_{\pm\lambda}(x_0, \mathbf{r}') .$$

2. Si $(h_1, h_2) \in \Gamma_{\pm\lambda}(x, \mathbf{r})$, alors

$$|h_1 h_2| < \frac{r_1 r_2}{|x^a|} .$$

3. Si (h_1, h_2) décrit entièrement $\Gamma_{\pm\lambda}$, alors la quantité $w = h_1 h_2$ décrit $\mathbb{C}$ tout entier.

12.3 Action sur le monôme résonant dans l'espace des feuilles

Nous poursuivons notre étude en réutilisant les notations et autres hypothèses des sections précédentes de ce même chapitre.

Lemme 12.10. *On considère un biholomorphisme*

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm} : \Gamma_{\pm\lambda} &\xrightarrow{\sim} \Gamma'_{\pm\lambda} \\ (h_1, h_2) &\mapsto (\Psi_{1,\pm}(h_1, h_2), \Psi_{2,\pm}(h_1, h_2)) . \end{aligned}$$

On définit $\Psi_{w,\pm} := \Psi_{1,\pm} \Psi_{2,\pm}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des fonctions entières (i.e. analytiques sur $\mathbb{C}$) notées $\Psi_{w,+,n}$ et $\Psi_{w,-,n}$ telles qu'on ait

$$\begin{cases} \Psi_{w,+}(h_1, h_2) = \sum_{n \geq 0} \Psi_{w,+,n}(h_1 h_2) h_1^n \\ \Psi_{w,-}(h_1, h_2) = \sum_{n \geq 0} \Psi_{w,-,n}(h_1 h_2) h_2^n \end{cases} .$$

De plus, les séries de fonctions ci-dessus convergent normalement sur tout sous-ensemble de $\Gamma_{\pm\lambda}$ de la forme $\Gamma_{\pm\lambda}(\tilde{\mathbf{r}})$, avec $\tilde{\mathbf{r}} := (\tilde{r}_1 \tilde{r}_2)$ et

$$0 < \tilde{r}_j < r_j \quad , \quad j \in \{1, 2\}$$

(cf. définition 12.8). Plus précisément, pour tout $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \delta > 0$ tels que

$$0 < \tilde{r}_j + \delta < r_j \quad , \quad j \in \{1, 2\} ,$$

pour tout $x \in S_{\pm\lambda}$ et tout $w \in \mathbb{C}$, on a l'implication suivante :

$$|wx^a| \leq \tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \implies \begin{cases} |\Psi_{w,+,n}(w)| \leq \frac{r'_1 r'_2}{|x^a|} \left| \frac{f_1(x, w)}{\tilde{r}_1 + \delta} \right|^n \\ |\Psi_{w,-,n}(w)| \leq \frac{r'_1 r'_2}{|x^a|} \left| \frac{f_2(x, w)}{\tilde{r}_2 + \delta} \right|^n \end{cases} , \quad \forall n \geq 0 .$$

Démonstration. Nous allons démontrer le résultat pour $\Psi_{w,+}$, $\Psi_{1,+}$ et $\Psi_{2,+}$ dans Γ_{λ} (la même preuve fonctionne pour $\Psi_{w,-}$ dans $\Gamma_{-\lambda}$ en échangeant les rôles de h_1 et h_2). On fixe $0 < \tilde{r}_1 < r_1$, $0 < \tilde{r}_2 < r_2$, et $\delta > 0$ tels que

$$\begin{cases} 0 < \tilde{r}_1 + \delta < r_1 \\ 0 < \tilde{r}_2 + \delta < r_2 \end{cases} .$$

Pour une valeur fixée de $w \in \mathbb{C}$, on considère la restriction de $\Psi_{w,+}$ à l'hypersurface $M_w := \{h_1 h_2 = w\} \cap \Gamma_\lambda$: cette restriction est une fonction analytique sur M_w . L'application

$$\varphi_w : h_1 \mapsto \Psi_{w,+} \left(h_1, \frac{w}{h_1} \right)$$

est analytique sur

$$M_{w,1} := \bigcup_{\substack{x \in S_\lambda \\ |wx^a| < r_1 r_2}} \Omega_{x,w} ,$$

où pour tout $x \in S_\lambda$ avec $|wx^a| < r_1 r_2$, l'ensemble $\Omega_{x,w}$ est la couronne suivante :

$$\Omega_{x,w} := \left\{ h_1 \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{wf_2(x,w)}{r_2} \right| < |h_1| < \left| \frac{r_1}{f_1(x,w)} \right| \right\} .$$

En particulier, φ_w admet un développement en série de Laurent

$$\varphi_w(h_1) = \Psi_{w,+} \left(h_1, \frac{w}{h_1} \right) = \sum_{n \geq -L} \Psi_{w,+,n}(w) h_1^n$$

dans toute couronne $\Omega_{x,w}$, avec $x \in S_\lambda$ tel que $|wx^a| < r_1 r_2$. De plus, pour tout tel $x \in S_\lambda$ avec $|wx^a| < r_1 r_2$, la formule intégrale de Cauchy donne

$$\Psi_{w,+,n}(w) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma(x,w)} \frac{\Psi_{w,+} \left(h_1, \frac{w}{h_1} \right)}{h_1^{n+1}} dh_1 , \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z},$$

où $\gamma(x,w)$ est n'importe quel cercle centré en l'origine (parcouru dans le sens positif), de rayon $\rho(x,w)$ tel que

$$\left| \frac{wf_2(x,w)}{r_2} \right| < \rho(x,w) < \left| \frac{r_1}{f_1(x,w)} \right| .$$

Si $|wx^a| < (\tilde{r}_1 + \delta)(\tilde{r}_2 + \delta)$, on peut par exemple prendre

$$\rho(x,w) = \left| \frac{\tilde{r}_1 + \delta}{f_1(x,w)} \right| .$$

D'où, pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $|wx^a| \leq \tilde{r}_1 \tilde{r}_2$, pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ avec $|\xi| < \delta$, on aussi :

$$\Psi_{w,+,n}(w + \xi) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma(x,w)} \frac{\Psi_{w,+} \left(h_1, \frac{w+\xi}{h_1} \right)}{h_1^{n+1}} dh_1 , \text{ for all } n \in \mathbb{Z},$$

où $\gamma(x,w)$ est le même cercle que plus haut (de rayon $\rho(x,w) = \left| \frac{\tilde{r}_1 + \delta}{f_1(x,w)} \right|$), pour tout $|\xi| < \delta$.

De plus, puisque l'image de n'importe quelle fibre

$$\{x = x_0\} \times \Gamma_{\pm\lambda}(x_0, \mathbf{r})$$

par $\Psi_\pm$ est incluse dans une autre fibre de la forme

$$\{x = x_0\} \times \Gamma_{\pm\lambda}(x_0, \mathbf{r}') ,$$

et puisque pour tout $(h'_1, h'_2) \in \Gamma_{\pm\lambda}(x, \mathbf{r}')$ on a

$$|h'_1 h'_2| < \frac{r'_1 r'_2}{|x^a|} ,$$

on en déduit que si $|wx^a| \leq \tilde{r}_1 \tilde{r}_2$, alors :

$$\left| \Psi_{w,+} \left(h_1, \frac{w}{h_1} \right) \right| < \frac{r'_1 r'_2}{|x^a|}.$$

Le théorème de dérivations des intégrales à paramètre version holomorphe montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $\Psi_{w,+,n}$ est analytique en tout point $w \in \mathbb{C}$, et est donc une fonction entière. De plus, l'inégalité ci-dessus et la formule de Cauchy impliquent que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $(x, w) \in S_\lambda \times \mathbb{C}$ avec $|wx^a| \leq \tilde{r}_1 \tilde{r}_2$, on a :

$$|\Psi_{w,+,n}(w)| < \frac{r'_1 r'_2}{|x^a| \rho(x, w)^n} = \frac{r'_1 r'_2}{|x^a|} \left| \frac{f_1(x, w)}{\tilde{r}_1 + \delta} \right|^n.$$

D'après le fait 12.7, pour une valeur fixée $w \in \mathbb{C}$ et pour $n < 0$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque x tend vers 0 dans S_λ . Il s'en suit que $\Psi_{w,+,n} = 0$ pour tout $n < 0$. Par conséquent :

$$\Psi_{w,+} \left(h_1, \frac{w}{h_1} \right) = \sum_{n \geq 0} \Psi_{w,+,n}(w) h_1^n.$$

De plus, pour tout $w \in \mathbb{C}$, cette série converge normalement sur tout domaine de la forme

$$\Omega_{x,w} := \left\{ h_1 \in \mathbb{C} \mid |h_1| \leq \left| \frac{\tilde{r}_1}{f_1(x, w)} \right| \right\}, \text{ pour tout } x \in S_\lambda, 0 < \tilde{r}_1 < r_1,$$

puisqu'il ne reste que des termes avec $n \geq 0$ dans le développement en série de Laurent. Cela signifie que cette série converge en fait normalement sur un voisinage de l'origine. D'où, pour tout $w \in \mathbb{C}$, l'application

$$h_1 \mapsto \Psi_{w,+} \left(h_1, \frac{w}{h_1} \right) = \sum_{n \geq 0} \Psi_{w,+,n}(w) h_1^n$$

est analytique au voisinage de l'origine. Finalement, la série de fonctions

$$\Psi_{w,+}(h_1, h_2) = \sum_{n \geq 0} \Psi_{w,+,n}(h_1 h_2) h_1^n$$

converge normalement, et est donc analytique, sur tout domaine de la forme $\Gamma_\lambda(\tilde{\mathbf{r}})$, avec $0 < \tilde{r}_1 < r_1$ et $0 < \tilde{r}_2 < r_2$. $\square$

12.4 Action sur le monôme résonant

Puisque $\psi_\pm \in \Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}})$, on sait que $\psi_\pm$ est de la forme :

$$\psi_\pm(x, \mathbf{y}) = (x, \psi_{1,\pm}(x, \mathbf{y}), \psi_{2,\pm}(x, \mathbf{y})) ,$$

avec $\psi_{1,\pm}, \psi_{2,\pm}$ analytiques et bornées sur $S_{\pm\lambda} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$. De plus, par hypothèse, $\psi_\pm$ admet l'identité comme développement asymptotique 1-Gevrey faible, *i.e.*

$$\psi_{i,\pm}(x, \mathbf{y}) = y_i + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2} \psi_{i,\pm,\mathbf{k}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{k}}, \quad \forall (x, \mathbf{y}) \in S_{\pm\lambda} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r}),$$

où, pour $i = 1, 2$ et pour tout $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $\psi_{i,\pm,\mathbf{k}}$ est analytique et bornée sur $S_{\pm\lambda}$ et admet 0 comme développement asymptotique 1-Gevrey.

Lemme 12.11. *Avec les notations précédentes, on définit $\psi_{v,\pm} := \psi_{1,\pm}\psi_{2,\pm}$. Alors, $\psi_{v,+}$ et $\psi_{v,-}$ admettent chacune un développement en série entière par rapport à $\mathbf{y} \in \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$:*

$$\begin{cases} \psi_{v,+}(x, \mathbf{y}) = y_1 y_2 + x^a \sum_{n \geq 1} \Psi_{w,+,n} \left(\frac{y_1 y_2}{x^a} \right) \left(\frac{y_1}{f_1(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})} \right)^n \\ \psi_{v,-}(x, \mathbf{y}) = y_1 y_2 + x^a \sum_{n \geq 1} \Psi_{w,-,n} \left(\frac{y_1 y_2}{x^a} \right) \left(\frac{y_2}{f_2(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})} \right)^n \end{cases},$$

qui convergent normalement sur tout sous-ensemble de $S_{\pm\lambda} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ de la forme $S_{\pm\lambda} \times \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{r}})$, où $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{r}})$ est un polydisque fermé avec $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ tel que

$$0 < \tilde{r}_j < r_j \quad , \quad j \in \{1, 2\} \quad .$$

Les fonctions $\Psi_{w,+,n}$ et $\Psi_{w,-,n}$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont celles données dans le lemme 12.10. De plus, pour tout sous-secteur fermé $S' \subset S_{\pm\lambda}$ et pour tout polydisque fermé $\overline{\mathbf{D}} \subset \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, il existe $A, B > 0$ tels que :

$$|\psi_{v,\pm}(x, y_1, y_2) - y_1 y_2| \leq A \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right), \quad \forall (x, \mathbf{y}) \in S' \times \overline{\mathbf{D}}.$$

En particulier, $\psi_{v,\pm}$ admet $y_1 y_2$ comme développement asymptotique 1-Gevrey sur $S_{\pm\lambda} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$.

Démonstration. Par définition, on a :

$$\Psi_{\pm} \circ \mathcal{H}_{\pm} = \mathcal{H}_{\pm} \circ \psi_{\pm}.$$

D'où, pour tout $(x, \mathbf{y}) \in S_{\pm\lambda} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$:

$$\Psi_{w,\pm} \left(x, \frac{y_1}{f_1(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})}, \frac{y_2}{f_2(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})} \right) = \frac{\psi_{v,\pm}(x, y_1, y_2)}{x^a}.$$

D'après le lemme 12.10, on a donc :

$$\begin{cases} \psi_{v,+}(x, \mathbf{y}) = x^a \sum_{n \geq 0} \Psi_{w,+,n} \left(\frac{y_1 y_2}{x^a} \right) \left(\frac{y_1}{f_1(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})} \right)^n \\ \psi_{v,-}(x, \mathbf{y}) = x^a \sum_{n \geq 0} \Psi_{w,-,n} \left(\frac{y_1 y_2}{x^a} \right) \left(\frac{y_2}{f_2(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})} \right)^n \end{cases} \quad (12.4.1)$$

De plus, on sait que $\psi_{v,\pm}(x, y_1, y_2)$ admet $y_1 y_2$ comme développement asymptotique 1-Gevrey faible sur $S_{\pm\lambda} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, car $\psi_{\pm} \in \tilde{\Lambda}_{\pm\lambda}(Y_{\text{norm}})$. On peut donc écrire

$$\psi_{v,\pm}(x, y_1, y_2) = y_1 y_2 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2} \psi_{v,+, \mathbf{k}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{k}}, \quad (12.4.2)$$

où pour tout $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $\psi_{v,+, \mathbf{k}}$ est analytique et bornée sur $S_{\pm\lambda}$ et admet 0 comme développement asymptotique 1-Gevrey. Comparons les deux expressions de $\psi_{v,\pm}$ ci-dessus. En regardant les monômes $\mathbf{y}^{\mathbf{k}}$ avec $k_1 = k_2$ dans (12.4.2), et les termes correspondants à $n = 0$ dans (12.4.1), on doit avoir pour $x \in S_{\pm\lambda}$, et $v \in \mathbb{C}$ avec $|v| < r_1 r_2$:

$$v + \sum_{k \geq 0} \psi_{v,+, (k, k)}(x) v^k = x^a \Psi_{w,+, 0} \left(\frac{v}{x^a} \right).$$

Puisque $\Psi_{w,\pm,0}$ est analytique sur $\mathbb{C}$, il existe une suite $(\alpha_{\pm,k})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ telle que

$$\Psi_{w,\pm,0} \left(\frac{v}{x^a} \right) = \sum_{k \geq 0} \alpha_{\pm,k} \left(\frac{v}{x^a} \right)^k .$$

Ceci n'est possible que si $\alpha_{\pm,k} = 0$ dès que $k \neq 1$, puisque $\psi_{v,\pm,k}$ est holomorphe sur $S_{\pm\lambda}$ et admet 0 comme développement asymptotique 1-Gevrey. Après identification, on obtient :

$$\Psi_{v,\pm,0}(w) = w .$$

D'où :

$$\begin{cases} \psi_{v,+}(x, \mathbf{y}) = y_1 y_2 + x^a \sum_{n \geq 1} \Psi_{w,+,n} \left(\frac{y_1 y_2}{x^a} \right) \left(\frac{y_1}{f_1(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})} \right)^n \\ \psi_{v,-}(x, \mathbf{y}) = y_1 y_2 + x^a \sum_{n \geq 1} \Psi_{w,-,n} \left(\frac{y_1 y_2}{x^a} \right) \left(\frac{y_2}{f_2(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})} \right)^n \end{cases} .$$

Montrons désormais que $\psi_{v,\pm}$ admet $y_1 y_2$ comme développement asymptotique 1-Gevrey dans $S_{\pm\lambda} \times (\mathbb{C}^2, 0)$. Pour cela, on doit montrer que $|\psi_{v,\pm}(x, y_1, y_2) - y_1 y_2|$ est exponentiellement petit par rapport à $x \in S_{\pm\lambda}$, uniformément en $\mathbf{y} \in \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$. Comme pour le lemme précédent, nous allons rédiger la preuve pour $\psi_{v,+}$ (la même preuve fonctionne pour $\psi_{v,-}$ en échangeant les rôles de y_1 et y_2). D'après les calculs précédents, on a :

$$|\psi_{v,+}(x, y_1, y_2) - y_1 y_2| \leq \sum_{n \geq 1} \left| x^a \Psi_{w,+,n} \left(\frac{y_1 y_2}{x^a} \right) \left(\frac{y_1}{f_1(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})} \right)^n \right| .$$

Fixons $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \delta > 0$ tels que :

$$0 < \tilde{r}_j + \delta < r_j, \quad j \in \{1, 2\} .$$

Prenons $|x|, |y_1|$ et $|y_2|$ assez petits pour que

$$2x \in S_\lambda$$

et

$$|y_1 y_2| < \frac{\tilde{r}_1 \tilde{r}_2}{|2^a|} < r_1 r_2 .$$

D'après le lemme 12.10, pour tout $\tilde{x} \in S_\lambda$ et tout $w \in \mathbb{C}$:

$$|w \tilde{x}^a| \leq \tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \implies |\Psi_{w,+,n}(w)| \leq \frac{r'_1 r'_2}{|\tilde{x}^a|} \left| \frac{f_1(\tilde{x}, w)}{\tilde{r}_1 + \delta} \right|^n . \quad (12.4.3)$$

En particulier, pour $\tilde{x} = 2x$ et $w = \frac{y_1 y_2}{x^a}$, on obtient $|w \tilde{x}^a| < \tilde{r}_1 \tilde{r}_2$ et donc

$$\left| \Psi_{w,+,n} \left(\frac{y_1 y_2}{x^a} \right) \right| \leq \frac{r'_1 r'_2}{|2^a x^a|} \left| \frac{f_1(2x, \frac{y_1 y_2}{x^a})}{\tilde{r}_1 + \delta} \right|^n .$$

Par conséquent, pour tout $(x, y_1, y_2) \in S_\lambda \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{r}})$ tel que

$$\begin{cases} 2x \in S_\lambda \\ |y_1 y_2| < \frac{\tilde{r}_1 \tilde{r}_2}{|2^a|} < r_1 r_2 \end{cases} ,$$

on a :

$$\begin{aligned} |\psi_{v,+}(x, y_1, y_2) - y_1 y_2| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| x^a \frac{r'_1 r'_2}{2^a x^a} \left(\frac{f_1(2x, \frac{y_1 y_2}{x^a})}{\tilde{r}_1 + \delta} \right)^n \left(\frac{y_1}{f_1(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})} \right)^n \right| \\ &\leq \frac{r'_1 r'_2}{|2^a|} \sum_{n \geq 1} \left| \left(\frac{y_1}{\tilde{r}_1 + \delta} \right)^n \left(\frac{f_1(2x, \frac{y_1 y_2}{x^a})}{f_1(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})} \right)^n \right|. \end{aligned}$$

Puisque $\tilde{c}(v)$ est un germe de fonction analytique qui s'annule en l'origine, il s'en suit qu'on peut choisir $r_1, r_2 > 0$ assez petits de sorte que pour tout sous-secteur fermé $S' \subset S_\lambda$, et pour tout $\tilde{r}_1 \in]0, r_1[$ et tout $\tilde{r}_2 \in]0, r_2[$, il existe $A, B > 0$ tel que :

$$(x, y_1, y_2) \in S' \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{r}}) \implies |\psi_{v,+}(x, y_1, y_2) - y_1 y_2| A \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right).$$

Montrons cela. Il s'agit d'estimer la quantité suivante :

$$\left| \frac{f_1(2x, \frac{y_1 y_2}{x^a})}{f_1(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})} \right| = \left| 2^{a_1} \exp\left(-\frac{\lambda}{2x} - c_m \frac{(y_1 y_2)^m}{x} \log(2) - \frac{\tilde{c}(y_1 y_2 2^a)}{2x} + \frac{\tilde{c}(y_1 y_2)}{x}\right) \right|.$$

On peut se contenter de traiter le cas où $x \in S'$ est tel que $2x \in S'$ (sinon x est « loin » de l'origine et on conclut sans difficulté). On a :

$$(x, y_1, y_2) \in S' \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{r}}) \text{ et } 2x \in S \implies \left| \frac{f_1(2x, \frac{y_1 y_2}{x^a})}{f_1(x, \frac{y_1 y_2}{x^a})} \right| \leq |2^{a_1}| \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right) < 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned} |\psi_{v,+}(x, y_1, y_2) - y_1 y_2| &\leq \frac{r'_1 r'_2}{|2^a|} \sum_{n \geq 1} \left| \frac{2^{a_1} y_1}{\tilde{r}_1 + \delta} \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right) \right|^n \\ &\leq \frac{r'_1 r'_2}{|2^a|} \frac{\left| \frac{2^{a_1} y_1}{\tilde{r}_1 + \delta} \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right) \right|}{1 - \left| \frac{2^{a_1} y_1}{\tilde{r}_1 + \delta} \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right) \right|} \\ &\leq A \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right), \end{aligned}$$

pour un choix convenable de $A > 0$. □

Le lemme ci-dessus implique en particulier que $\Psi_{v,\pm,0}(w) = w$. En conséquence, on obtient immédiatement le résultat ci-dessous.

Corollaire 12.12. *Pour tout sous-secteur fermé $S' \subset S_{\pm\lambda}$, tout $\tilde{r}_1 \in]0, r_1[$ et tout $\tilde{r}_2 \in]0, r_2[$, il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $x \in S'$:*

$$\left. \begin{aligned} |h_1| &\leq \frac{\tilde{r}_1}{|f_1(x, h_1 h_2)|} \\ |h_2| &\leq \frac{\tilde{r}_2}{|f_2(x, h_1 h_2)|} \end{aligned} \right\} \implies |\Psi_{w,\pm}(x, h_1, h_2) - h_1 h_2| \leq \frac{A \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right)}{|x^a|}.$$

En particulier, il existe $C > 0$ tel que :

$$\left. \begin{aligned} |h_1| &\leq \frac{\tilde{r}_1}{|f_1(x, h_1 h_2)|} \\ |h_2| &\leq \frac{\tilde{r}_2}{|f_2(x, h_1 h_2)|} \end{aligned} \right\} \implies \frac{\left| \exp\left(c_m (h_1 h_2)^m \log(x) + \frac{\tilde{c}(x^a (h_1 h_2)^m)}{x}\right) \right|}{\left| \exp\left(c_m (\Psi_w(x, h_1, h_2))^m \log(x) + \frac{\tilde{c}(x^a (\Psi_w(x, h_1, h_2))^m)}{x}\right) \right|} < C.$$

12.5 Développement en séries des isotropies dans l'espace des feuilles

A présent, nous allons donner un développement en séries de $\Psi_{1,\pm}$ et $\Psi_{2,\pm}$ dans les coordonnées de l'espace des feuilles. Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{cases} N(1,+) := N(2,-) := 1 \\ N(1,-) := N(2,+) := -1 \end{cases} .$$

Lemme 12.13. *Avec les notations et les hypothèses précédentes de ce chapitre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des fonctions entières (i.e. analytiques sur $\mathbb{C}$) notées $\Psi_{j,\nu,n}$, $j \in \{1,2\}$, $\nu \in \{+,-\}$, $n \geq N(j,\nu)$, telles que pour $j \in \{1,2\}$ on ait*

$$\begin{cases} \Psi_{j,+,n}(h_1, h_2) = \sum_{n \geq N(j,+)} \Psi_{j,+,n}(h_1 h_2) h_1^n \\ \Psi_{j,-,n}(h_1, h_2) = \sum_{n \geq N(j,-)} \Psi_{j,-,n}(h_1 h_2) h_2^n \end{cases} .$$

Ces séries de fonctions convergent normalement sur tout sous-ensemble de $\Gamma_{\pm\lambda}$ de la forme $\Gamma_{\pm\lambda}(\tilde{\mathbf{r}})$ avec $0 < \tilde{r}_1 < r_1$ et $0 < \tilde{r}_2 < r_2$ (cf. définition 12.8). Plus précisément, pour tout $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \delta > 0$ tels que

$$0 < \tilde{r}_j + \delta < r_j, \quad j \in \{1,2\},$$

il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in S_{\pm\lambda}$ et tout $w \in \mathbb{C}$, on ait :

$$|wx^a| \leq \tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \implies \begin{cases} |\Psi_{1,+,n}(w)| < Cr'_1 \frac{|f_1(x, w)|^{n-1}}{(\tilde{r}_1 + \delta)^n}, & n \geq 1 \\ |\Psi_{2,+,n}(w)| < \frac{Cr'_2}{|x^a|} \frac{|f_1(x, w)|^{n+1}}{(\tilde{r}_1 + \delta)^n}, & n \geq -1 \\ |\Psi_{1,-,n}(w)| < \frac{Cr'_1}{|x^a|} \frac{|f_2(x, w)|^{n+1}}{(\tilde{r}_2 + \delta)^n}, & n \geq -1 \\ |\Psi_{2,-,n}(w)| < Cr'_2 \frac{|f_2(x, w)|^{n-1}}{(\tilde{r}_2 + \delta)^n}, & n \geq 1. \end{cases}$$

De plus :

$$\Psi_{1,-,-1}(0) = \Psi_{2,+,-1}(0) = 0 .$$

Fait. Nous allons réutiliser les mêmes notations que dans la preuve du lemme 12.10. Pour chaque $w \in \mathbb{C}$ fixé, les applications

$$\varphi_1 : h_1 \mapsto \Psi_{1,+} \left(h_1, \frac{w}{h_1} \right)$$

et

$$\varphi_2 : h_1 \mapsto \Psi_{2,+} \left(h_1, \frac{w}{h_1} \right)$$

sont analytiques sur

$$M_{w,1} = \bigcup_{\substack{x \in S_\lambda \\ |wx^a| < r_1 r_2}} \Omega_{x,w}$$

(cf. preuve du lemme 12.10). En particulier, φ_1 et φ_2 admettent chacune un développement en série de Laurent

$$\begin{cases} \varphi_1(h_1) = \Psi_{1,+} \left(h_1, \frac{w}{h_1} \right) = \sum_{n \geq -L_1} \Psi_{1,+,n}(w) h_1^n \\ \varphi_2(h_1) = \Psi_{2,+} \left(h_1, \frac{w}{h_1} \right) = \sum_{n \geq -L_2} \Psi_{2,+,n}(w) h_1^n \end{cases}$$

dans tout anneau $\Omega_{x,w}$, avec $x \in S_\lambda$ tel que $|wx^a| < r_1 r_2$. En utilisant la même méthode que dans la preuve du lemme 12.10, on montre sans difficulté supplémentaire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\Psi_{1,+,n}$ et $\Psi_{2,+,n}$ sont analytiques en tout point $w \in \mathbb{C}$, et sont donc des fonctions entières (analytiques sur $\mathbb{C}$). De plus, on montre également comme plus tôt que pour tout $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \delta > 0$ avec

$$0 < \tilde{r}_j + \delta < r_j, \quad j \in \{1, 2\},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $(x, w) \in S_\lambda \times \mathbb{C}$ tel que $|wx^a| \leq \tilde{r}_1 \tilde{r}_2$, on a :

$$\begin{cases} |\Psi_{1,+,n}(w)| < \frac{r'_1}{\left| f_1 \left(x, \Psi_{w,+} \left(x, h_1, \frac{w}{h_1} \right) \right) \right|} \left| \frac{f_1(x, w)}{\tilde{r}_1 + \delta} \right|^n \\ |\Psi_{2,+,n}(w)| < \frac{r'_2}{\left| f_2 \left(x, \Psi_{w,+} \left(x, h_1, \frac{w}{h_1} \right) \right) \right|} \left| \frac{f_1(x, w)}{\tilde{r}_1 + \delta} \right|^n \end{cases}.$$

D'après le corollaire 12.12, il existe $C > 0$ tel que pour tout $(x, w) \in S_\lambda \times \mathbb{C}$ avec $|wx^a| \leq \tilde{r}_1 \tilde{r}_2$, on a :

$$\begin{cases} |\Psi_{1,+,n}(w)| < Cr'_1 \frac{|f_1(x, w)|^{n-1}}{(\tilde{r}_1 + \delta)^n} \\ |\Psi_{2,+,n}(w)| < \frac{Cr'_2}{|x^a|} \frac{|f_1(x, w)|^{n+1}}{(\tilde{r}_1 + \delta)^n} \end{cases}.$$

D'après le fait 12.7, pour une valeur fixée de $w \in \mathbb{C}$, si l'on regarde la limite quand x tend vers 0 dans S_λ du membre de droite dans chacune des inégalités ci-dessus, on en déduit que :

$$\begin{cases} |\Psi_{1,+,n}(w)| = 0, \quad \forall n \leq 0 \\ |\Psi_{2,+,n}(w)| = 0, \quad \forall n \leq -2. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \Psi_{1,+}(h_1, h_2) = \sum_{n \geq 1} \Psi_{1,+,n}(h_1 h_2) h_1^n \\ \Psi_{2,+}(h_1, h_2) = \sum_{n \geq -1} \Psi_{2,+,n}(h_1 h_2) h_1^n \end{cases}.$$

Ces séries de fonctions convergent normalement (et définissent donc des fonctions analytiques) sur tout domaine de la forme $\Gamma_\lambda(\tilde{\mathbf{r}})$ avec $\tilde{\mathbf{r}} := (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ et

$$0 < \tilde{r}_j + \delta < r_j, \quad j \in \{1, 2\}.$$

De plus, pour toute valeur fixée de h_2 , d'une part la fonction

$$h_1 \mapsto \Psi_{2,+}(h_1, h_2) = \sum_{n \geq -1} \Psi_{2,+,n}(h_1 h_2) h_1^n$$

est analytique sur un disque épointé centré en 0 puisque

$$|f_2(x, h_1, h_2)| \xrightarrow[x \in S_\lambda]{x \rightarrow 0} 0,$$

et d'autre part, on sait déjà que la fonction $h_1 \mapsto \Psi_{2,+}(h_1, h_2)$ est analytique sur un voisinage de l'origine. Donc, on soit avoir $\Psi_{2,+,-1}(0) = 0$.

Démonstration. Une preuve analogue fonctionne pour $\Psi_{1,-}$ et $\Psi_{2,-}$. □

12.6 Preuve de la proposition

Le lemme à venir est une version plus précise de la proposition 10.4. Rappelons les notations suivantes :

$$\begin{cases} N(1, +) = N(2, -) = 1 \\ N(1, -) = N(2, +) = -1 \end{cases} .$$

Lemme 12.14. *Avec les notations et hypothèses précédentes de ce chapitre, considérons $\psi_{\pm} \in \Lambda_{\pm\lambda}^{(\text{faible})}(Y_{\text{norm}})$ avec*

$$\psi_{\pm}(x, \mathbf{y}) = (x, \psi_{1,\pm}(x, \mathbf{y}), \psi_{2,\pm}(x, \mathbf{y})) .$$

Alors, pour $i = 1, 2$, les fonctions $\psi_{i,+}$ et $\psi_{i,-}$ peuvent s'écrire comme séries de fonctions

$$\begin{cases} \psi_{i,+}(x, \mathbf{y}) = y_i + f_i\left(x, \frac{\psi_{v,+}(x, \mathbf{y})}{x^a}\right) \sum_{n \geq N(i,+)+1} \Psi_{i,+,n}\left(\frac{y_1 y_2}{x^a}\right) \left(\frac{y_1}{f_1\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^a}\right)}\right)^n \\ \psi_{i,-}(x, \mathbf{y}) = y_i + f_i\left(x, \frac{\psi_{v,-}(x, \mathbf{y})}{x^a}\right) \sum_{n \geq N(i,-)+1} \Psi_{i,-,n}\left(\frac{y_1 y_2}{x^a}\right) \left(\frac{y_2}{f_2\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^a}\right)}\right)^n \end{cases} .$$

qui sont normalement convergentes sur tout sous ensemble de $S_{\pm\lambda} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ de la forme $S_{\pm\lambda} \times \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{r}})$, où $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{r}})$ est un polydisque fermé avec $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ tel que

$$0 < \tilde{r}_j < r_j \quad , \quad j \in \{1, 2\} .$$

Ici, les fonctions $\Psi_{i,+,n}$, $\Psi_{i,-,n}$, pour $i = 1, 2$ et $n \in \mathbb{N}$, sont celles données dans le lemme 12.13. De plus, pour tout sous-secteur fermé $S' \subset S_{\pm\lambda}$ et pour tout polydisque fermé $\overline{\mathbf{D}} \subset \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, il existe $A, B > 0$ tels que pour $i = 1, 2$:

$$|\psi_{i,\pm}(x, y_1, y_2) - y_i| \leq A \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right) , \quad \forall (x, \mathbf{y}) \in S' \times \overline{\mathbf{D}} .$$

Par conséquent, $\psi_{i,\pm}$ admet y_i comme développement asymptotique 1-Gevrey dans $S_{\pm\lambda} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$.

Remarque 12.15. En particulier, $\Psi_{1,+,1}(w) = \Psi_{2,-,1}(w) = 1$ et $\Psi_{1,-,1}(w) = \Psi_{2,+,1}(w) = w$.

Démonstration. Par définition, on a

$$\Psi_{\pm} \circ \mathcal{H}_{\pm} = \mathcal{H}_{\pm} \circ \psi_{\pm} .$$

En particulier, pour $i = 1, 2$ et pour $(x, \mathbf{y}) \in S_{\pm\lambda} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$:

$$\Psi_{i,\pm}\left(x, \frac{y_1}{f_1\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^a}\right)}, \frac{y_2}{f_2\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^a}\right)}\right) = \frac{\psi_{i,\pm}(x, y_1, y_2)}{f_i\left(x, \frac{\psi_{v,\pm}(x, y_1, y_2)}{x^a}\right)} .$$

D'où, d'après le lemme 12.13, on a pour $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} \psi_{i,+}(x, \mathbf{y}) = f_i\left(x, \frac{\psi_{v,+}(x, \mathbf{y})}{x^a}\right) \sum_{n \geq N(i,+)} \Psi_{i,+,n}\left(\frac{y_1 y_2}{x^a}\right) \left(\frac{y_1}{f_1\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^a}\right)}\right)^n \\ \psi_{i,-}(x, \mathbf{y}) = f_i\left(x, \frac{\psi_{v,-}(x, \mathbf{y})}{x^a}\right) \sum_{n \geq N(i,-)} \Psi_{i,-,n}\left(\frac{y_1 y_2}{x^a}\right) \left(\frac{y_2}{f_2\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^a}\right)}\right)^n \end{cases} , \quad (12.6.1)$$

et ces séries de fonctions convergent normalement (et définissent donc des fonctions analytiques) sur tout domaine de la forme $S' \times \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{r}})$, où S' est un sous-secteur fermé de $S_{\pm\lambda}$ et $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{r}})$ est un polydisque fermé avec $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ tel que

$$0 < \tilde{r}_j < r_j \quad , j \in \{1, 2\} \quad .$$

Comparons les différentes expressions de $\psi_{j,\pm}$, $j = 1, 2$. On sait que $\psi_{j,\pm}(x, y_1, y_2)$ admet y_j comme développement asymptotique 1-Gevrey sur $S_{\pm\lambda} \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$. On peut donc écrire

$$\psi_{j,\pm}(x, y_1, y_2) = y_j + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2} \psi_{j,\pm,\mathbf{k}}(x) \mathbf{y}^{\mathbf{k}} \quad ,$$

où, pour tout $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $\psi_{j,\pm,\mathbf{k}}$ est analytique sur $S_{\pm\lambda}$ et admet 0 comme développement asymptotique 1-Gevrey. Comme d'habitude, nous allons traiter le cas de $\psi_{1,+}$ et $\psi_{2,+}$ (l'autre cas est similaire en échangeant les rôles joués par y_1 et y_2).

D'après les expressions obtenues dans les lemmes 12.10 et 12.13, on peut être plus précis sur les ensembles des indices de sommation :

$$\begin{cases} \psi_{1,+}(x, y_1, y_2) = y_1 + \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_1,k_2) \in \mathbb{N}^2 \\ k_1 \geq k_2+1}} \psi_{1,+, \mathbf{k}}(x) y_1^{k_1} y_2^{k_2} \\ \psi_{2,+}(x, y_1, y_2) = y_2 + \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_1,k_2) \in \mathbb{N}^2 \\ k_1 \geq k_2}} \psi_{2,+, \mathbf{k}}(x) y_1^{k_1} y_2^{k_2} \end{cases} \quad . \quad (12.6.2)$$

Traisons le cas de $\psi_{1,+}$ (une preuve similaire peut s'adapter sans difficulté à $\psi_{2,+}$). En étudiant les termes pour $n = 1$ dans (12.6.1), et les termes monomiaux $\mathbf{y}^{\mathbf{k}}$ avec $k_1 \leq k_2 + 1$ dans (12.6.2), on voit qu'on doit nécessairement avoir pour $x \in S_\lambda$, $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ avec $|y_1| < r_1$, $|y_2| < r_2$:

$$1 + \sum_{k \geq 0} \psi_{1,+, (k+1, k)}(x) y_1^k y_2^k = \frac{f_1\left(x, \frac{\psi_{v,+}(x, \mathbf{y})}{x^a}\right)}{f_1\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^z}\right)} \Psi_{1,+, 1}\left(\frac{y_1 y_2}{x^a}\right) \quad .$$

D'après le lemme 12.11 et le corollaire 12.12, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f_1\left(x, \frac{\psi_{v,+}(x, \mathbf{y})}{x^a}\right)}{f_1\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^z}\right)} &= 1 + \sum_{j_1 \geq j_2 + 1 \geq 1} F_{j_1, j_2}(x) y_1^{j_1} y_2^{j_2} \\ &= 1 + \underset{(x, \mathbf{y}) \in S_\lambda \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})}{\underset{(x, \mathbf{y}) \rightarrow 0}{O}}(|y_1|) \quad , \end{aligned}$$

où les $F_{j_1, j_2}(x)$, $j_1 \geq j_2$, sont des fonctions analytiques et bornées sur S_λ . Comme dans la preuve du lemme 12.11, en utilisant le fait que $\psi_\pm$ admet l'identité comme développement asymptotique 1-Gevrey faible, on montre que $\Psi_{1,+, 1}(w) = 1$, et donc :

$$\begin{aligned} \psi_{1,+}(x, \mathbf{y}) &= y_1 + f_1\left(x, \frac{\psi_{v,+}(x, \mathbf{y})}{x^a}\right) \sum_{n \geq 2} \Psi_{1,+, n}\left(\frac{y_1 y_2}{x^a}\right) \left(\frac{y_1}{f_1\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^a}\right)}\right)^n \\ &= y_1 + \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_1,k_2) \in \mathbb{N}^2 \\ k_1 \geq k_2+2}} \psi_{1,+, \mathbf{k}}(x) y_1^{k_1} y_2^{k_2} \quad . \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\psi_{1,+}$ admet y_1 comme développement asymptotique 1-Gevrey dans $S_\lambda \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$. D'après les calculs précédent, on a :

$$|\psi_{1,+}(x, y_1, y_2) - y_1| \leq \sum_{n \geq 2} \left| \Psi_{1,+, n}\left(\frac{y_1 y_2}{x^a}\right) \left(\frac{y_1}{f_1\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^a}\right)}\right)^{n-1} \frac{f_1\left(x, \frac{\psi_{v,+}(x, \mathbf{y})}{x^a}\right)}{f_1\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^a}\right)} y_1 \right| \quad .$$

En utilisant le lemme 12.13, le corollaire 12.12 et la même méthode qu'à la fin de la preuve du lemme 12.11, on peut montrer la chose suivante : on peut prendre $r_1, r_2 > 0$ assez petits de sorte que pour tout sous-secteur fermé S' de S_λ , pour tout $0 < \tilde{r}_1 < r_1$ et $0 < \tilde{r}_2 < r_2$, il existe $A, B > 0$ tels que :

$$(x, y_1, y_2) \in S' \times \mathbf{D}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{r}}) \implies |\psi_{1,+}(x, y_1, y_2) - y_1| \leq A \exp\left(-\frac{B}{|x|}\right).$$

Une preuve similaire fonctionne pour $\psi_{2,-}, \psi_{2,+}$ et $\psi_{1,-}$. □

Remarque 12.16. Notons que dans les expressions

$$\begin{cases} \psi_{1,+}(x, \mathbf{y}) = y_1 + f_1\left(x, \frac{\psi_{v,+}(x, \mathbf{y})}{x^a}\right) \sum_{n \geq 2} \Psi_{1,+,n}\left(\frac{y_1 y_2}{x^a}\right) \left(\frac{y_1}{f_1\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^a}\right)}\right)^n \\ \psi_{1,-}(x, \mathbf{y}) = y_1 + f_1\left(x, \frac{\psi_{v,+}(x, \mathbf{y})}{x^a}\right) \sum_{n \geq 0} \Psi_{1,-,n}\left(\frac{y_1 y_2}{x^a}\right) \left(\frac{y_2}{f_2\left(x, \frac{y_1 y_2}{x^a}\right)}\right)^n \end{cases}$$

du lemme 12.14, le développement de $\psi_{1,+}$ par rapport à $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ commence avec un terme d'ordre 1, à savoir y_1 , suivi de termes d'ordre au moins 2, alors que dans le développement de $\psi_{1,-}$, le terme de plus bas degré est une constante, à savoir $\Psi_{1,-,0}(0)$. De même, le développement de $\psi_{2,-}$ (par rapport à $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$) commence avec y_2 , alors que celui de $\psi_{1,-}$ débute avec la constante $\Psi_{2,+,0}(0)$.

12.7 Description de l'espace des modules dans l'espace des feuilles

D'après les lemmes 12.13 et 12.14, on peut donner une description de l'espace des modules $\Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}})$ pour une forme normale fixée Y_{norm} (et de $\Lambda_\lambda^\omega(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}^\omega(Y_{\text{norm}})$ dans le cas transversalement symplectique).

12.7.1 Une description en termes de séries entières de l'espace des modules

On réutilise ici les notations introduites tout au long de ce chapitre. On va noter $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions entières, *i.e.* l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$. On considère les fonctions f_1 et f_2 définies en (12.2.1) et on introduit quatre sous-ensembles de $(\mathcal{O}(\mathbb{C}))^\mathbb{N}$, que l'on note $\mathcal{E}_{1,\lambda}(Y_{\text{norm}})$, $\mathcal{E}_{2,\lambda}(Y_{\text{norm}})$, $\mathcal{E}_{1,-\lambda}(Y_{\text{norm}})$ et $\mathcal{E}_{1,-\lambda}(Y_{\text{norm}})$, définis comme suit. On réutilise les notations

$$\begin{cases} N(1, +) = N(2, -) = 1 \\ N(1, -) = N(2, +) = -1 \end{cases}.$$

Définition 12.17. Pour $j \in \{1, 2\}$, une suite $(\psi_n(w))_{n \geq N(j, \pm)+1} \in (\mathcal{O}(\mathbb{C}))^\mathbb{N}$ appartient à $\mathcal{E}_{j, \pm \lambda}(Y_{\text{norm}})$ s'il existe un polydisque $\mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ et un secteur asymptotique

$$S_{\pm \lambda} \in \mathcal{AS}_{\arg(\pm \lambda), 2\pi},$$

tels que pour tout $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \delta > 0$ avec

$$0 < \tilde{r}_i + \delta < r_i, \quad i \in \{1, 2\},$$

il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in S_\lambda$ (resp. $x \in S_{-\lambda}$) et tout $w \in \mathbb{C}$:

$$|wx^a| \leq \tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \implies \begin{cases} |\psi_n(w)| < C \frac{|f_1(x,w)|^{n-1}}{(\tilde{r}_1 + \delta)^n}, \forall n \geq 2, & \text{si } (\psi_n(w))_{n \geq 2} \in \mathcal{E}_{1,\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ |\psi_n(w)| < \frac{C}{|x^a|} \frac{|f_1(x,w)|^{n+1}}{(\tilde{r}_1 + \delta)^n}, \forall n \geq 0, & \text{si } (\psi_n(w))_{n \geq 0} \in \mathcal{E}_{2,\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ |\psi_n(w)| < \frac{C}{|x^a|} \frac{|f_2(x,w)|^{n+1}}{(\tilde{r}_2 + \delta)^n}, \forall n \geq 0, & \text{si } (\psi_n(w))_{n \geq 0} \in \mathcal{E}_{1,-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ |\psi_n(w)| < C \frac{|f_2(x,w)|^{n-1}}{(\tilde{r}_2 + \delta)^n}, \forall n \geq 2, & \text{si } (\psi_n(w))_{n \geq 2} \in \mathcal{E}_{2,-\lambda}(Y_{\text{norm}}). \end{cases}$$

Comme expliqué un début de chapitre, on peut associer à toute paire

$$(\psi_\lambda, \psi_{-\lambda}) \in \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}})$$

deux germes de biholomorphismes sectoriels de l'espace des feuilles, notés Ψ_λ et $\Psi_{-\lambda}$, correspondant à des secteurs « étroits », définis par :

$$\Psi_{\pm\lambda} := \mathcal{H}_\pm \circ \psi_{\pm\lambda} \circ \mathcal{H}_\pm^{-1}, \quad (12.7.1)$$

où $\mathcal{H}_\pm$ est l'application introduite au corollaire 12.3. D'après les lemmes 12.13 et 12.14, si l'on écrit $\Psi_{\pm\lambda} = (x, \Psi_{1,\pm}, \Psi_{2,\pm})$, alors pour $j = 1, 2$ on a :

$$\begin{aligned} \Psi_{j,+}(h_1, h_2) &= h_j + \sum_{n \geq N(j,+) + 1} \Psi_{j,+,n}(h_1 h_2) h_1^n \\ \Psi_{j,-}(h_1, h_2) &= h_j + \sum_{n \geq N(j,-) + 1} \Psi_{j,-,n}(h_1 h_2) h_2^n \end{aligned} \quad (12.7.2)$$

où $(\Psi_{j,\pm,n})_n \in \mathcal{E}_{j,\pm\lambda}$ et

$$\begin{cases} N(1,+) := N(2,-) := 1 \\ N(1,-) := N(2,+) := -1 \end{cases}.$$

Réciproquement, étant donné $(\Psi_{j,\pm})_n \in \mathcal{E}_{j,\pm\lambda}$ pour $j = 1, 2$, en considérant $\Psi_{\pm\lambda}(x, \mathbf{h}) = (x, \Psi_{1,\pm}(\mathbf{h}), \Psi_{2,\pm}(\mathbf{h}))$, les estimations faites dans les sections précédentes montrent que

$$\psi_{\pm\lambda} := \mathcal{H}_\pm^{-1} \circ \Psi_{\pm\lambda} \circ \mathcal{H}_\pm$$

est un élément de $\Lambda_{\pm\lambda}(Y_{\text{norm}})$. Par conséquent, on peut énoncer la proposition suivante.

Proposition 12.18. *On a les bijections suivantes :*

$$\begin{aligned} \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1,\lambda}(Y_{\text{norm}}) \times \mathcal{E}_{2,\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ \psi_\lambda &\mapsto (\Psi_{1,+}, \Psi_{2,+}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1,-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \times \mathcal{E}_{2,-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ \psi_{-\lambda} &\mapsto (\Psi_{1,-}, \Psi_{2,-}) \end{aligned}$$

(on identifie ici $\Psi_\pm(x, \mathbf{h}) = (x, \Psi_{1,\pm}(\mathbf{h}), \Psi_{2,\pm}(\mathbf{h}))$ avec $(\Psi_{1,\pm}(\mathbf{h}), \Psi_{2,\pm}(\mathbf{h}))$).

12.7.2 Variétés invariantes analytiques et nœud-cols en dimension deux : invariants de Martinet-Ramis

On peut donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de variétés invariantes analytiques en termes de la description de l'espace des modules décrit ci-dessus. Rappelons que

pour tout champ de vecteurs $Y \in [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$ (cf. définition 10.1), il existe toujours trois variétés invariantes (formelles) particulières : $\mathcal{C} = \{(y_1, y_2) = (g_1(x), g_2(x))\}$, $\mathcal{H}_1 = \{y_1 = f_1(x, y_2)\}$ et $\mathcal{H}_2 = \{y_2 = f_2(x, y_1)\}$, où g_1, g_2, f_1, f_2 sont des séries formelles sans terme constant. La première est classiquement appelée *variété centrale* et on a $\mathcal{C} = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$. Si $Y = Y_{\text{norm}}$, alors :

$$\begin{cases} \mathcal{C} = \{y_1 = y_2 = 0\} \\ \mathcal{H}_1 = \{y_1 = 0\} \\ \mathcal{H}_2 = \{y_2 = 0\} \end{cases} .$$

Proposition 12.19. *Soit $Y \in [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$ et $(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) \in \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}})$ les difféomorphismes de Stokes associés. On considère $\Psi_\pm = \mathcal{H}_\pm \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ \mathcal{H}_\pm^{-1}$ comme dans la sous-section précédente. Alors :*

1. *la variété centrale $\mathcal{C}$ est convergente (analytique en l'origine) si et seulement si $\Psi_{2,+}(0) = \Psi_{1,-}(0) = 0$;*
2. *l'hypersurface invariante $\mathcal{H}_1$ est convergente (analytique en l'origine) si et seulement si pour tout $n \geq 0$, on a $\Psi_{1,-,n}(0) = 0$;*
3. *l'hypersurface invariante $\mathcal{H}_2$ est convergente (analytique en l'origine) si et seulement si pour tout $n \geq 0$, on a $\Psi_{2,+,n}(0) = 0$.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe de la représentation en séries donnée en (12.7.2) des difféomorphismes de Stokes $(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda})$. Expliquons le point 2. (des arguments similaires fonctionnent pour les points 1. et 3.). Le fait que $\Psi_{1,-,n}(0) = 0$, pour tout $n \geq 0$ signifie que $\Psi_{1,-}$ est divisible par h_1 . De manière équivalente, $\Phi_{1,+}$ et $\Phi_{1,-}$ sont tous deux divisibles par y_1 , de sorte que l'hypersurface analytique $\{y_1 = 0\}$ a la même pré-image par Φ_+ et par Φ_- . Ces pré-images se recollent pour définir une hypersurface invariante analytique $\mathcal{H}_1$. $\square$

Remarquons à présent que si l'on regarde la restriction d'une forme normale Y_{norm} à une de ses hypersurfaces invariantes, on obtient exactement une forme normale d'un nœud-col en dimension deux comme dans [MR82]. Quand une des hypersurfaces invariantes est analytiques, on retrouve les invariants de Martinet-Ramis par restriction à cette hypersurface, comme nous le présentons dans la proposition qui suit.

Proposition 12.20. *Supposons que pour $Y \in [Y_{\text{norm}}]_{\text{fib}, \text{Id}}$, l'hypersurface invariante $\mathcal{H}_1$ soit analytique en l'origine. Alors, les invariants de Martinet-Ramis du nœud-col $Y|_{\mathcal{H}_1}$ sont :*

$$\begin{cases} \Psi_{2,+}(0, h_2) = h_2 + \Psi_{2,+,0}(0) \in \text{Aff}(\mathbb{C}) \\ \Psi_{2,-}(0, h_2) = h_2 + \sum_{n \geq 2} \Psi_{2,-,n}(0) h_2^n \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) . \end{cases}$$

Un résultat similaire est évidemment valable pour $\mathcal{H}_2$.

12.7.3 Cas transversalement symplectique

Intéressons-nous à présent au cas transversalement symplectique du théorème 10.10. Soit $Y_{\text{norm}} \in \mathcal{SN}_\omega$ une forme normale transversalement symplectique. Avec les notations introduites en début de section, on définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_{1,\lambda}(Y_{\text{norm}}) \times \mathcal{E}_{2,\lambda}(Y_{\text{norm}}))_\omega &:= \left\{ \begin{array}{l} \Psi_+ = (\Psi_{1,+}, \Psi_{2,+}) \in \mathcal{E}_{1,\lambda}(Y_{\text{norm}}) \times \mathcal{E}_{2,\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ \text{tels que : } \det(D\Psi_+) = 1 \end{array} \right\} \\ (\mathcal{E}_{1,-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \times \mathcal{E}_{2,-\lambda}(Y_{\text{norm}}))_\omega &:= \left\{ \begin{array}{l} \Psi_- = (\Psi_{1,-}, \Psi_{2,-}) \in \mathcal{E}_{1,-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \times \mathcal{E}_{2,-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ \text{tels que : } \det(D\Psi_-) = 1 \end{array} \right\} . \end{aligned}$$

La proposition 12.18 nous dit que l'application

$$\begin{aligned} \Lambda_{\pm\lambda}(Y_{\text{norm}}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1,\pm\lambda}(Y_{\text{norm}}) \times \mathcal{E}_{2,\pm\lambda}(Y_{\text{norm}}) \\ \psi_{\pm} &\mapsto \Psi_{\pm\lambda} := \mathcal{H}_{\pm} \circ \psi_{\pm\lambda} \circ \mathcal{H}_{\pm}^{-1} \end{aligned}$$

est une bijection (on identifie $\Psi_{\pm}(x, \mathbf{h}) = (x, \Psi_{1,\pm}(\mathbf{h}), \Psi_{2,\pm}(\mathbf{h}))$ avec $(\Psi_{1,\pm}(\mathbf{h}), \Psi_{2,\pm}(\mathbf{h}))$).
Un rapide calcul basé sur (12.1.1) donne :

$$(\mathcal{H}_{\pm}^{-1})^* \left(\frac{dy_1 \wedge dy_2}{x} \right) = dh_1 \wedge dh_2 + \langle dx \rangle .$$

Cela nous dit que $\psi_{\pm\lambda}$ est transversalement symplectique $\omega = \frac{dy_1 \wedge dy_2}{x}$, *i.e.*

$$(\psi_{\pm\lambda})^*(\omega) = \omega + \langle dx \rangle ,$$

si et seulement si $\Psi_{\pm} = (\Psi_{1,\pm}, \Psi_{2,\pm})$ préserve la forme symplectique standard $dh_1 \wedge dh_2$ de l'espace des feuilles, *i.e.* $\det(D\Psi_{\pm}) = 1$. En d'autres termes, on a le résultat suivant.

Proposition 12.21. *On a les bijections suivantes :*

$$\begin{aligned} \Lambda_{\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}}) &\xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}_{1,\lambda}(Y_{\text{norm}}) \times \mathcal{E}_{2,\lambda}(Y_{\text{norm}}))_{\omega} \\ \psi_{\lambda} &\mapsto (\Psi_{1,+}, \Psi_{2,+}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda_{-\lambda}^{\omega}(Y_{\text{norm}}) &\xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}_{1,-\lambda}(Y_{\text{norm}}) \times \mathcal{E}_{2,-\lambda}(Y_{\text{norm}}))_{\omega} \\ \psi_{-\lambda} &\mapsto (\Psi_{1,-}, \Psi_{2,-}) \end{aligned}$$

(on identifie $\Psi_{\pm}(x, \mathbf{h}) = (x, \Psi_{1,\pm}(\mathbf{h}), \Psi_{2,\pm}(\mathbf{h}))$ avec $(\Psi_{1,\pm}(\mathbf{h}), \Psi_{2,\pm}(\mathbf{h}))$).

Chapitre 13

Classification analytique (non-fibrée)

Ce chapitre tient lieu de conclusion sur le problème de classification analytique des germes champs de vecteurs singuliers de $(\mathbb{C}^3, 0)$ 2-résonants de type nœud-col, strictement non dégénérés et div-intégrables. Nous allons donner des résultats de classification plus généraux, en étudiant les actions par conjugaison de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ et de $\text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0)$ sur ces germes champs de vecteurs. Commençons par reformuler et résumer le résultat de classification sous l'action de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ vu dans cette partie.

On a une action de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ sur $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ par conjugaison (*cf.* chapitre 5 pour la définition de $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$). Grâce aux théorèmes 1.5 et 10.6, on sait que la classe analytique d'un champ de vecteurs $Y \in \mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ est uniquement déterminée par sa **forme normale** Y_{norm} (donnée par les théorèmes 1.5 et 10.6) et par ses **difféomorphismes de Stokes** $(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda})$ (donnés par le théorème 10.6).

Définition 13.1. On note

$$\mathcal{M}_{\text{fib}, \text{Id}} := (\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}) / \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$$

l'espace des modules associé, *i.e.* l'ensemble des orbites de $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ sous cette action.

On note

$$\mathcal{P}_0 := \{\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, -c, c) \in \mathcal{P}_{\text{fib}} \mid \Re(a_1 + a_2) > 0 \text{ et } c(v) \in v\mathbb{C}\{v\}\}$$

l'espace des paramètres caractérisant les formes normales d'éléments de $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$ dans la classification formelle sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ décrite par le théorème 1.5. On notera alors $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})$ une forme normale de paramètre $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_0$.

On peut alors résumer l'étude faite jusqu'ici par le théorème suivant.

Théorème 13.2. *On a la bijection suivante :*

$$\mathcal{M}_{\text{fib}, \text{Id}} \simeq \bigsqcup_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_0} \{\mathbf{p}\} \times \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})) \quad .$$

13.1 Classification fibrée (non tangente à l'identité)

Nous allons décrire dans cette section la classification analytique sous l'action de germes de difféomorphismes fibrés non-nécessairement tangents à l'identité.

Définition 13.3. Un germe de champ de vecteurs singulier $Y \in \chi(\mathbb{C}^3, 0)$ est un **noeud-col 2-résonant fibré strictement non dégénéré div-intégrable** si Y est $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ –conjugué à un élément de $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$. On note l'ensemble de ces champs de vecteurs

$$\mathcal{SN}_{\text{fib}, 0} := \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)_* (\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}) .$$

Il y a une action naturelle de $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ sur $\mathcal{SN}_{\text{fib}, 0}$ par conjugaison, et on note

$$\mathcal{M}_{\text{fib}} := (\mathcal{SN}_{\text{fib}, 0}) / \text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$$

l'espace quotient.

On définit enfin le sous-groupe de $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ suivant :

$$\mathcal{L} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}, \mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0 \right\} .$$

Le groupe $\mathcal{L}$ ci-dessus agit sur $\mathcal{M}_{\text{fib}, \text{Id}}$ de la façon suivante : on va utiliser la bijection donnée par le théorème 13.2. Soit

$$\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, -c(v), c(v)) \in \mathcal{P}_0$$

et

$$(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) \in \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})) .$$

$$\text{— Si } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}, \text{ alors on définit}$$

$$L_*(\mathbf{p}, \Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) := (\mathbf{p}', \Phi'_\lambda, \Phi'_{-\lambda}) \in \mathcal{P}_0 \times \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')) ,$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{p}' = \left(\lambda, a_1, a_2, -c\left(\frac{v}{\mu_1 \mu_2}\right), c\left(\frac{v}{\mu_1 \mu_2}\right) \right) \\ \Phi'_\lambda = L \circ \Phi_\lambda \circ L^{-1} \\ \Phi'_{-\lambda} = L \circ \Phi_{-\lambda} \circ L^{-1} \end{cases} .$$

$$\text{— Si } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}, \text{ alors on définit}$$

$$L_*(\mathbf{p}, \Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) := (\mathbf{p}', \Phi'_{-\lambda}, \Phi'_\lambda) \in \mathcal{P}_0 \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')) \times \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')) ,$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{p}' = \left(-\lambda, a_2, a_1, c\left(\frac{v}{\mu_1 \mu_2}\right), -c\left(\frac{v}{\mu_1 \mu_2}\right) \right) \\ \Phi'_{-\lambda} = L \circ \Phi_\lambda \circ L^{-1} \\ \Phi'_\lambda = L \circ \Phi_{-\lambda} \circ L^{-1} \end{cases} .$$

On peut alors formuler le résultat suivant.

Théorème 13.4. *On a la bijection :*

$$\mathcal{M}_{\text{fib}} \simeq \mathcal{M}_{\text{fib}, \text{Id}} / \mathcal{L} .$$

Démonstration. Considérons deux champs de vecteurs $Y, Y' \in \mathcal{SN}_{\text{diag},0}$. Considérons alors $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})$ et $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')$, avec $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathcal{P}_0$, les formes normales de Y et Y' respectivement. On note également $\hat{\Phi}$ (*resp.* $\hat{\Phi}'$) la normalisation formelle, Φ_+, Φ_- (*resp.* Φ'_+, Φ'_-) les normalisations sectorielles et $\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}$ (*resp.* $\Phi'_{\lambda'}, \Phi'_{-\lambda'}$) les difféomorphismes de Stokes de Y (*resp.* de Y').

On doit montrer que Y et Y' sont $\text{Diff}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ -conjugués si et seulement s'il existe $L \in \mathcal{L}$ tel que

$$L_*(\mathbf{p}, \Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) = (\mathbf{p}', \Phi'_{\lambda'}, \Phi'_{-\lambda'}) .$$

Supposons que Y et Y' sont conjugués par un germe de difféomorphisme fibré $\phi \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$. Comme Y et Y' sont formellement conjugués respectivement par $\hat{\Phi}$ et $\hat{\Phi}' \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ à leurs formes normales $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})$ et $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')$, et puisque Y et Y' sont conjugués entre eux par $\phi \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$, par composition, $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})$ et $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')$ sont formellement conjugués par un élément de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$. D'après la proposition 3.3 et sa preuve, deux formes normales $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}), Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')$ de paramètres respectifs $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathcal{P}_0$ sont formellement conjugués par un difféomorphisme formel fibré $\hat{\varphi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0)$ si et seulement s'il existe $L \in \mathcal{L}$ tel que $\hat{\varphi} = L$ et $L_*(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$, comme dans l'action décrite ci-dessus. Il existe donc $L \in \mathcal{L}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\phi} & Y' \\ \hat{\Phi} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \hat{\Phi}' \\ Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}) & \xrightarrow{L} & Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}') \end{array}$$

i.e.

$$\hat{\Phi}' \circ \phi = L \circ \hat{\Phi} .$$

Par composition, on en déduit que les fonctions $\Phi'_\pm$ et $L \circ \Phi_\pm \circ \phi^{-1}$ ont même développement asymptotiques 1-Gevrey, à savoir

$$\hat{\Phi}' = L \circ \hat{\Phi} \circ \phi^{-1} ,$$

dans les domaines sectoriels $\mathcal{S}_\pm$ d'ouverture $> \pi$ associés. Par unicité de la 1-somme d'une série formelle 1-sommable, on en déduit que

$$\Phi'_\pm = L \circ \Phi_\pm \circ \phi^{-1} .$$

Par conséquent, en regardant les difféomorphismes de Stokes $\Phi_{\pm\lambda}$ et $\Phi'_{\pm\lambda'}$ associés, on voit que :

$$\begin{cases} \Phi'_{\lambda'} = L \circ \Phi_\lambda \circ L^{-1} \\ \Phi'_{-\lambda'} = L \circ \Phi_{-\lambda} \circ L^{-1} \end{cases} ,$$

avec $\lambda' = \pm\lambda$ selon que $L \in \mathcal{L}$ soit diagonale ou non. On a donc montré que

$$L_*(\mathbf{p}, \Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) = (\mathbf{p}', \Phi'_{\lambda'}, \Phi'_{-\lambda'}) . \quad (13.1.1)$$

Réciproquement, supposons que $L_*(\mathbf{p}, \Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) = (\mathbf{p}', \Phi'_{\lambda'}, \Phi'_{-\lambda'})$. On considère des domaines sectoriels $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$ tels que $\mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_-$ soit un voisinage de $\{x = 0\}$ dans $\mathbb{C}^3$, sur lesquelles Φ_+ et Φ_- conjuguent respectivement Y à $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')$ (comme dans le théorème 5.5). On a alors, d'après (13.1.1) :

$$\Phi_+ \circ (\Phi_-)^{-1}|_{\mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_-} = L^{-1} \circ \Phi'_+ \circ \Phi'_- \circ L|_{\mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_-} . \quad (13.1.2)$$

On définit alors :

$$\begin{cases} \phi_+ := (\Phi'_+)^{-1} \circ L \circ \Phi_+ \\ \phi_- := (\Phi'_-)^{-1} \circ L \circ \Phi_- \end{cases} .$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \phi_+ \circ (\phi_-)^{-1}_{\mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_-} &= (\Phi'_+)^{-1} \circ \left(L \circ \Phi_+ \circ (\Phi_-)^{-1} \circ L^{-1} \right) \circ \Phi'_- \\
 &= (\Phi'_+)^{-1} \circ \left(\Phi'_+ \circ (\Phi'_-)^{-1} \right) \circ \Phi'_- \\
 &\quad \text{(d'après (13.1.2))} \\
 &= \text{Id}_{\mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_-} .
 \end{aligned}$$

D'où $(\phi_+)|_{\mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_-} = (\phi_-)|_{\mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_-}$, et on définit ainsi une fonction ϕ analytique au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^3$ d'après le théorème de Riemann. Enfin, puisque $(\Phi_\pm)_*(Y) = Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})$, que $L_*(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})) = Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')$ et que $\left((\Phi'_\pm)^{-1}\right)_*(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')) = Y'$, on en déduit par composition que $\phi_*(Y) = Y'$. $\square$

13.2 Classification analytique (non fibrée)

Nous allons décrire dans cette section la classification analytique sous l'action de germes de difféomorphismes analytiques (non-nécessairement fibrés). Nous allons procéder de manière analogue à la section précédente. Comme pour la classification fibrée, nous allons commencer par étudier les l'action par conjugaison *via* des éléments tangents à l'identité.

Définition 13.5. Un germe de champ de vecteurs singulier $Y \in \chi(\mathbb{C}^3, 0)$ est un **nœud-col 2-résonant strictement non dégénéré div-intégrable** si Y est $\text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0)$ -conjugué à un élément de $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$. On note l'ensemble de ces champs de vecteurs

$$\mathcal{SN}_0 := \text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0)_*(\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}) .$$

Il y a une action naturelle de $\text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0)$ sur $\mathcal{SN}_{\text{fib}, 0}$ par conjugaison, et on note

$$\mathcal{M} := (\mathcal{SN}_0) / \text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0)$$

l'espace quotient.

Comme pour la classification fibrée, commençons par étudier l'action des germes de difféomorphismes analytiques tangents à l'identité, dont le groupe est noté $\text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$.

Définition 13.6. On note $\mathcal{SN}_{\text{Id}, 0}$ l'ensemble des germes de champs de vecteurs analytiques de $(\mathbb{C}^3, 0)$ qui sont $\text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ -conjugués à $\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}$:

$$\mathcal{SN}_{\text{Id}, 0} := \text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})_*(\mathcal{SN}_{\text{diag}, 0}) .$$

Il y a une action naturelle de $\text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ sur $\mathcal{SN}_{\text{Id}, 0}$ par conjugaison, et on note

$$\mathcal{M}_{\text{Id}} := (\mathcal{SN}_{\text{Id}, 0}) / \text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$$

l'espace quotient.

Introduisons quelques notations. Pour $\mathbf{a} := (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, si $m := \frac{1}{a_1 + a_2} \in \mathbb{N}$, on définit le champ de vecteurs suivant

$$\begin{aligned}
 V_{\mathbf{a}} &:= v^m \left(x \frac{\partial}{\partial x} + a_1 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + a_2 y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) . \\
 &= v^m S(1, a_1, a_2) .
 \end{aligned} \tag{13.2.1}$$

Pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, on définit aussi le difféomorphisme suivant :

$$F_{\mathbf{a},\beta} := \exp(\beta V_{\mathbf{a}}) \in \text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) . \quad (13.2.2)$$

Notons que $(F_{\mathbf{a},\beta})^{-1} = F_{\mathbf{a},-\beta}$. Un tel difféomorphisme agit sur le monôme $v := y_1 y_2$, et donc sur toute série formelle $c(v) \in \mathbb{C}[[v]]$, par *pull-back*, et un rapide calcul montre que :

$$\begin{aligned} (F_{\mathbf{a},\beta})^*(c) &= c \circ F_{\mathbf{a},\beta}(v) , \\ &= c\left(\frac{v}{(1 - \beta v^m)^{\frac{1}{m}}}\right) . \end{aligned} \quad (13.2.3)$$

Soient $Y, Y' \in \mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ dont les formes normales sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ sont respectivement $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})$ et $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')$ avec $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, -c, c) \in \mathcal{P}_0$ et $\mathbf{p}' = (\lambda', a'_1, a'_2, -c', c') \in \mathcal{P}_0$:

$$\begin{cases} Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}) = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + a_1 x - c(y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + a_2 x + c(y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}') = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda' + a'_1 x - c'(y_1 y_2)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda' + a'_2 x + c'(y_1 y_2)) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \end{cases} .$$

On écrit $m := \frac{1}{a_1 + a_2}$, $m' := \frac{1}{a'_1 + a'_2}$, $c(v) = \sum_{k \geq 1} c_k v^k$, $c'(v) = \sum_{k \geq 1} c'_k v^k$, $k_0 := \text{ord}(c)$ et $k'_0 := \text{ord}(c')$. Remarquons que si $m = m'$ et $c' = (F_{\mathbf{a},\beta})^*(c)$, alors $k_0 = k'_0$, et pour tout $j \leq k_0 + m - 1$, on a $c_j = c'_j$. Un corollaire immédiat de la proposition 4.1 et de la preuve du théorème 1.8 est le suivant.

Corollaire 13.7. *Deux champs de vecteurs $Y, Y' \in \mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ comme ci-dessus sont $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ -conjugués si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $(\lambda, a_1, a_2) = (\lambda, a'_1, a'_2)$ (en particulier : $m = m'$)
2. $[c = c']$ ou $\left[m \in \mathbb{N}_{>0}, c \neq 0 \text{ et } c' = (F_{\mathbf{a},\beta})^*(c), \text{ avec } \beta = \frac{m}{k_0} \left(\frac{c_{k_0+m} - c'_{k_0+m}}{c_{k_0}} \right) \right]$.

Démonstration. Dans le théorème 1.8, on a décrit (en particulier) des formes normales (uniques) pour $\widehat{\mathcal{SN}}_*$ sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$. Dans la preuve de l'existence de ses formes normales, on voit que le lien entre les formes normales du théorème 1.5 et celles-ci se fait grâce aux applications de type $F_{\mathbf{a},\beta}$. On obtient alors sans difficulté l'équivalence annoncée. $\square$

La proposition suivante nous permettra de décrire complètement l'espace quotient

$$\mathcal{M}_{\text{Id}} = (\mathcal{SN}_{\text{Id},0}) / \text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id}) .$$

Proposition 13.8. *Considérons $Y, Y' \in \mathcal{SN}_{\text{diag},0}$ comme ci-dessus, et supposons qu'ils soient $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ -conjugués (i.e. les conditions 1. et 2. du corollaire précédent sont satisfaites). Considérons leurs difféomorphismes de Stokes notés $(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda})$ et $(\Phi'_\lambda, \Phi'_{-\lambda})$ respectivement (voir définition 10.2 et théorème 10.6). Alors, Y et Y' sont $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ -conjugués si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- $m := \frac{1}{a_1 + a_2} \notin \mathbb{N}_{>0}$ et $(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) = (\Phi'_\lambda, \Phi'_{-\lambda})$;
- $m \in \mathbb{N}_{>0}$ et il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{cases} c' = (F_{\mathbf{a},\beta})^*(c) \\ \Phi_\lambda = F_{\mathbf{a},\beta} \circ \Phi'_\lambda \circ F_{\mathbf{a},-\beta} \\ \Phi_{-\lambda} = F_{\mathbf{a},\beta} \circ \Phi'_{-\lambda} \circ F_{\mathbf{a},-\beta} \end{cases} .$$

Remarque 13.9. Dans la proposition ci-dessus, si $m \in \mathbb{N}_{>0}$ et $c \neq 0$, alors $\beta = \frac{m}{k_0} \left(\frac{c_{k_0+m} - c'_{k_0+m}}{c_{k_0}} \right)$.

Démonstration. L'outil clé sera le corollaire 4.2 donnant les isotropies des formes normales de $\widehat{\mathcal{SN}}_*$ sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0)$ (voir théorème 1.8). Notons dans toute la suite Z_{norm} la forme normale de Y_{diag} et Y'_{diag} donnée par le théorème 1.8 (qui est la même car les champs sont $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ -conjugués). On note également $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})$ et $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')$ les formes normales sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ données par le théorème 1.5 de Y et Y' respectivement. On note également $\hat{\Phi}$ (*resp.* $\hat{\Phi}'$) la normalisation formelle, Φ_+, Φ_- (*resp.* Φ'_+, Φ'_-) les normalisations sectorielles et $\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}$ (*resp.* $\Phi'_{\lambda'}, \Phi'_{-\lambda'}$) les difféomorphismes de Stokes de Y (*resp.* de Y'). Commençons par traiter deux cas simultanément.

— 1^{er} cas : $\left[m := \frac{1}{a_1+a_2} \notin \mathbb{N}_{>0} \right]$ ou $\left[m \in \mathbb{N}_{>0}, c \neq 0 \text{ et } c' = (F_{\mathbf{a},\beta})^*(c) \text{ avec } \beta = \frac{m}{k_0} \left(\frac{c_{k_0+m} - c'_{k_0+m}}{c_{k_0}} \right) \right]$.

Dans ce cas, d'après la preuve du théorème 1.8 :

$$\begin{cases} (F_{\mathbf{a},\gamma})_*(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})) = Z_{\text{norm}} & , \text{ avec } \gamma = 0 \text{ ou } -\frac{m}{k_0} \frac{c_{k_0+m}}{c_{k_0}} \\ (F_{\mathbf{a},\gamma'})_*(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}')) = Z_{\text{norm}} & , \text{ avec } \gamma' = 0 \text{ ou } \frac{m}{k_0} \frac{c'_{k_0+m}}{c_{k_0}} \end{cases}$$

Il existe alors $\hat{\varphi} \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ tel que $(F_{\mathbf{a},\gamma'} \circ \hat{\Phi}') \circ \hat{\varphi} \circ (F_{\mathbf{a},\gamma} \hat{\Phi})^{-1}$ soit une isotropie formelle de Z_{norm} tangente à l'identité. D'après le corollaire 4.2, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$F_{\mathbf{a},\gamma'} \circ \hat{\Phi}' \circ \hat{\varphi} \circ \hat{\Phi}^{-1} F_{\mathbf{a},-\gamma} = \exp(\alpha Z_{\text{norm}}) \text{ .}$$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & Y' \\ \hat{\Phi} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \hat{\Phi}' \\ Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}) & \longrightarrow & Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}') \\ F_{\mathbf{a},\gamma} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow F_{\mathbf{a},\gamma'} \\ Z_{\text{norm}} & \xrightarrow{\exp(\alpha Z_{\text{norm}})} & Z_{\text{norm}} \end{array}$$

Supposons qu'il existe $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ tel que $\varphi_*(Y) = Y'$. Par composition, les fonctions $F_{\mathbf{a},\gamma'} \circ \Phi'_\pm$ et $\exp(\alpha Z_{\text{norm}}) \circ F_{\mathbf{a},\gamma} \circ \Phi_\pm \circ \varphi^{-1}$ ont même développement asymptotiques 1-Gevrey, à savoir

$$F_{\mathbf{a},\gamma'} \circ \hat{\Phi}' = \exp(\alpha Z_{\text{norm}}) \circ F_{\mathbf{a},\gamma} \circ \Phi_\pm \circ \varphi^{-1} \text{ ,}$$

dans les domaines sectoriels $\mathcal{S}_\pm$ (d'ouverture strictement supérieure à π) associés. Par unicité de la 1-somme d'une série formelle 1-sommable, on en déduit que

$$F_{\mathbf{a},\gamma'} \circ \Phi'_\pm = \exp(\alpha Z_{\text{norm}}) \circ F_{\mathbf{a},\gamma} \circ \Phi_\pm \circ \varphi^{-1} \text{ .}$$

Par conséquent, en regardant les difféomorphismes de Stokes $\Phi_{\pm\lambda}$ et $\Phi'_{\pm\lambda'}$ associés, on voit que :

$$\Phi'_{\pm\lambda'} = F_{\mathbf{a},-\gamma'} \circ \exp(\alpha Z_{\text{norm}}) \circ F_{\mathbf{a},\gamma} \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ F_{\mathbf{a},-\gamma} \circ \exp(-\alpha Z_{\text{norm}}) \circ F_{\mathbf{a},\gamma'} \text{ .}$$

Or, puisque $(F_{\mathbf{a},\gamma} \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ F_{\mathbf{a},-\gamma})$ est une isotropie de Z_{norm} , *i.e.*

$$(F_{\mathbf{a},\gamma} \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ F_{\mathbf{a},-\gamma})_*(Z_{\text{norm}}) = Z_{\text{norm}} \text{ ,}$$

celle-ci commute avec $\exp(\alpha Z_{\text{norm}})$, le flot au temps α de Z_{norm} , *i.e.*

$$\exp(\alpha Z_{\text{norm}}) \circ F_{\mathbf{a},\gamma} \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ F_{\mathbf{a},-\gamma} = F_{\mathbf{a},\gamma} \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ F_{\mathbf{a},-\gamma} \circ \exp(-\alpha Z_{\text{norm}}) .$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \Phi'_{\pm\lambda} &= F_{\mathbf{a},\gamma-\gamma'} \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ F_{\mathbf{a},\gamma'-\gamma} \\ &= F_{\mathbf{a},-\beta} \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ F_{\mathbf{a},\beta} . \end{aligned}$$

— 2nd cas : $m \in \mathbb{N}_{>0}$ et $c = c' = 0$. Dans ce cas :

$$Z_{\text{norm}} = Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}) = Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}') .$$

Il existe alors $\hat{\varphi} \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ tel que $\hat{\Phi}' \circ \hat{\varphi} \circ \hat{\Phi}^{-1}$ soit une isotropie formelle de Z_{norm} tangent à l'identité. D'après le corollaire 4.2, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tel que

$$\hat{\Phi}' \circ \hat{\varphi} \circ \hat{\Phi}^{-1} = \exp(\alpha Z_{\text{norm}}) \circ F_{\mathbf{a},\beta} .$$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & Y' \\ \hat{\Phi} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \hat{\Phi}' \\ Z_{\text{norm}} & \longrightarrow & Z_{\text{norm}} \\ & \exp(\alpha Z_{\text{norm}}) \circ F_{\mathbf{a},\beta} & \end{array} .$$

Supposons qu'il existe $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ tel que $\varphi_*(Y) = Y'$. Par composition, les fonctions $\Phi'_{\pm}$ et $\exp(\alpha Z_{\text{norm}}) \circ F_{\mathbf{a},\beta} \circ \Phi_{\pm} \circ \varphi^{-1}$ ont même développement asymptotique 1-Gevrey, à savoir

$$\hat{\Phi}' = \exp(\alpha Z_{\text{norm}}) \circ F_{\mathbf{a},\beta} \circ \hat{\Phi} \circ \varphi^{-1} ,$$

dans les domaines sectoriels $\mathcal{S}_{\pm}$ (d'ouverture strictement supérieure à π) associés. Par unicité de la 1-somme d'une série formelle 1-sommable, on en déduit que

$$\Phi'_{\pm} = \exp(\alpha Z_{\text{norm}}) \circ F_{\mathbf{a},\beta} \circ \Phi_{\pm} \circ \varphi^{-1} .$$

Par conséquent, en regardant les difféomorphismes de Stokes $\Phi_{\pm\lambda}$ et $\Phi'_{\pm\lambda}$ associés, on voit que :

$$\Phi'_{\pm\lambda} = \exp(\alpha Z_{\text{norm}}) \circ F_{\mathbf{a},\beta} \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ F_{\mathbf{a},-\beta} \circ \exp(-\alpha Z_{\text{norm}}) .$$

Or, puisque $\Phi_{\pm}$ et $F_{\mathbf{a},\pm\beta}$ sont des isotropies de Z_{norm} , il en est de même de $F_{\mathbf{a},\beta} \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ F_{\mathbf{a},-\beta}$, qui commute alors avec $\exp(\alpha Z_{\text{norm}})$, le flot au temps α de Z_{norm} . Par conséquent :

$$\Phi'_{\pm\lambda} = F_{\mathbf{a},\beta} \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ F_{\mathbf{a},-\beta} .$$

— Réciproquement, supposons que

$$\Phi'_{\pm\lambda} = F_{\mathbf{a},-\beta} \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ F_{\mathbf{a},\beta} ,$$

avec $\beta = 0$, ou $\beta = \frac{m}{k_0} \left(\frac{c_{k_0+m} - c'_{k_0+m}}{c_{k_0}} \right)$, ou $\beta \in \mathbb{C}$ selon le cas. Alors, en considérant $F_{\mathbf{a},\gamma}$ et $F_{\mathbf{a},\gamma'}$ comme ci-dessus si $Y_{\text{norm}}(\mathbf{p}) \neq Z_{\text{norm}}$, on voit que les applications

$$\varphi_+ := (\Phi'_+)^{-1} \circ F_{\mathbf{a},-\gamma'} \circ F_{\mathbf{a},\gamma} \circ \Phi_+$$

et

$$\varphi_- := (\Phi'_-)^{-1} \circ F_{\mathbf{a}, -\gamma'} \circ F_{\mathbf{a}, \gamma} \circ \Phi_-$$

coïncident sur les intersections de leurs domaines de définitions. Comme déjà vu, d'après le théorème de Riemann, on définit ainsi une conjugaison $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$ entre Y et Y' .

□

On définit alors une relation d'équivalence sur l'ensemble

$$\mathcal{M}_{\text{fib}, \text{Id}} \simeq \bigsqcup_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_0} \{\mathbf{p}\} \times \Lambda_\lambda(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})) \times \Lambda_{-\lambda}(Y_{\text{norm}}(\mathbf{p})) \quad .$$

En notant $\mathbf{p} = (\lambda, a_1, a_2, -c, c) \in \mathcal{P}_0$ et $\mathbf{p}' = (\lambda', a'_1, a'_2, -c', c') \in \mathcal{P}_0$, on dit que $(\mathbf{p}, \Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda})$ et $(\mathbf{p}', \Phi'_{\lambda'}, \Phi'_{-\lambda'})$ sont équivalents, et l'on écrit

$$(\mathbf{p}, \Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) \sim (\mathbf{p}', \Phi'_{\lambda'}, \Phi'_{-\lambda'})$$

si $(\lambda, a_1, a_2) = (\lambda, a'_1, a'_2)$ (en particulier : $m = m'$) et si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :

- $m := \frac{1}{a_1 + a_2} \notin \mathbb{N}_{>0}$ et $(\Phi_\lambda, \Phi_{-\lambda}) = (\Phi'_{\lambda'}, \Phi'_{-\lambda'})$;
- $m \in \mathbb{N}_{>0}$, $c \neq 0$, $c' = (F_{\mathbf{a}, \beta})^*(c)$ et

$$\begin{cases} \Phi_\lambda = F_{\mathbf{a}, \beta} \circ \Phi'_\lambda \circ F_{\mathbf{a}, -\beta} \\ \Phi_{-\lambda} = F_{\mathbf{a}, \beta} \circ \Phi'_{-\lambda} \circ F_{\mathbf{a}, -\beta} \end{cases} \quad ,$$

$$\text{où } \beta = \frac{m}{k_0} \left(\frac{c_{k_0+m} - c'_{k_0+m}}{c_{k_0}} \right) ;$$

- $m \in \mathbb{N}_{>0}$, $c = c' = 0$ et il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\begin{cases} \Phi_\lambda = F_{\mathbf{a}, \beta} \circ \Phi'_\lambda \circ F_{\mathbf{a}, -\beta} \\ \Phi_{-\lambda} = F_{\mathbf{a}, \beta} \circ \Phi'_{-\lambda} \circ F_{\mathbf{a}, -\beta} \end{cases} \quad .$$

On note $\mathcal{M}_{\text{fib}, \text{Id}} / \sim$ l'ensemble des classes d'équivalence. D'après la proposition précédente, on peut énoncer le résultat suivant.

Théorème 13.10. *On a la bijection suivante :*

$$\mathcal{M}_{\text{Id}} \simeq \mathcal{M}_{\text{fib}, \text{Id}} / \sim \quad .$$

On a vu dans la section précédente le groupe

$$\mathcal{L} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}, \mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0 \right\}$$

agit sur $\mathcal{M}_{\text{fib}, \text{Id}}$. Cette action passe en fait au quotient $\mathcal{M}_{\text{fib}, \text{Id}} / \sim$ et définit ainsi une action sur $\mathcal{M}_{\text{Id}}$. On note

$$\mathcal{M}_{\text{Id}} / \mathcal{L}$$

l'ensemble quotient. On démontre alors de manière analogue à ce qui a déjà été fait dans chapitre le théorème suivant.

Théorème 13.11. *On a la bijection suivante :*

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_{\text{Id}} / \mathcal{L} \quad .$$

Quatrième partie

Applications aux singularités irrégulières à l'infini dans les équations de Painlevé

Chapitre 14

Compactification à poids et symétries de l'équation de Painlevé (P_I)

Dans ce chapitre nous allons détailler la compactification à poids de l'équation de Painlevé (P_I) , pour montrer que la singularité irrégulière à l'infini est bien un nœud-col 2-résonant transversalement symplectique. Nous allons également décrire certaines symétries du champ de vecteurs ainsi obtenu.

14.1 La première équation de Painlevé

On considère la première équation de Painlevé notée (P_I) :

$$(P_I) \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = 6z_1^2 + t \quad .$$

Comme on le sait depuis Okamoto [Oka80], (P_I) peut être vue comme un système hamiltonien non-autonome :

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = -\frac{\partial H_I}{\partial z_2} \\ \frac{dz_2}{dt} = \frac{\partial H_I}{\partial z_1} \end{cases}$$

avec pour hamiltonien la fonction

$$H_I(t, z_1, z_2) := 2z_1^3 + tz_1 - \frac{z_2^2}{2}.$$

Plus précisément, en considérant la forme symplectique standard $\omega_{st} := dz_1 \wedge dz_2$ et le champ de vecteurs

$$Z_I := \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial H_I}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial H_I}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_2}$$

appelé *le champ de vecteurs de (P_I)* dans $\mathbb{C}^3$, la dérivée de Lie

$$\mathcal{L}_{Z_I}(\omega_{st}) = \left(\frac{\partial^2 H_I}{\partial t \partial z_1} dz_1 + \frac{\partial^2 H_I}{\partial t \partial z_2} dz_2 \right) \wedge dt = dz_1 \wedge dt$$

appartient à l'idéal $\langle dt \rangle$ engendré par dt dans l'algèbre extérieure $\Omega^*(\mathbb{C}^3)$ des formes différentielles en les variables (t, z_1, z_2) . De manière équivalente, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$, le flot de Z_I au temps $(t_2 - t_1)$ agit comme un symplectomorphisme entre les fibres $\{t = t_1\}$ et $\{t = t_2\}$.

14.2 Symétries et compactification à poids

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = 6z_1^2 + t \end{cases}$$

ou encore le champ de vecteurs Z_I donné par :

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = 6z_1^2 + t \end{cases} .$$

Nous utilisons les calculs faits par Chiba [Chi16], qui décrivent l'équation (P_I) dans l'espace projectif à poids $\mathbb{CP}^3(4, 2, 3, 5)$, obtenu *via* l'invariance de l'équation sous l'action

$$(t, z_1, z_2) \xrightarrow{\varphi_\omega} (\omega^4 t, \omega^2 z_1, \omega^3 z_2)$$

où $\omega = e^{2i\pi/5}$. Plus précisément, *via* le changement de variables diagonal ci-dessus, Z_I est envoyé sur $\omega^4 Z_I$. Si $t \mapsto (t, z_1(t), z_2(t))$ est une trajectoire du champ Z_I paramétrée par t , alors

$$t \mapsto (\omega^4 t, \omega^2 z_1(\omega^4 t), \omega^3 z_2(\omega^4 t))$$

est aussi une trajectoire de Z_I . En se plaçant dans la carte correspondant à “ $\{t = \infty\}$ ” grâce au changement de variables donné par

$$\begin{cases} t = x^{-\frac{4}{5}} \\ z_1 = u_1 x^{-\frac{2}{5}} \\ z_2 = u_2 x^{-\frac{3}{5}} \end{cases} , \quad (14.2.1)$$

on obtient le champ de vecteurs $\tilde{U}_I = -\frac{5}{4x^{\frac{1}{5}}} U_I$, où U_I est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{u}_1 = -\frac{4}{5}u_2 + \frac{2}{5}xu_1 \\ \dot{u}_2 = -\frac{24}{5}u_1^2 - \frac{4}{5} + \frac{3}{5}xu_2 \end{cases} .$$

De plus, on a :

$$\begin{cases} dt &= -\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}}dx \\ dz_1 \wedge dz_2 &= \frac{1}{x}(du_1 \wedge du_2) + \frac{1}{5x^2}(2u_1 du_2 - 3u_2 du_1) \wedge dx \\ &\in \frac{1}{x}(du_1 \wedge du_2) + \langle dx \rangle \end{cases} ,$$

où $\langle dx \rangle$ désigne l'idéal engendré par dx . Si l'on note $\omega := \frac{du_1 \wedge du_2}{x}$, on obtient alors :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{U_I}(\omega) \in \langle dx \rangle \\ \mathcal{L}_{U_I}(dx) = 2x dx \end{cases} .$$

Donc $\mathcal{L}_{U_I}(\omega)$ et $\mathcal{L}_{U_I}(dx)$ appartiennent toutes deux à l'idéal $\langle dx \rangle$.

Notons également que le champ $\tilde{U}_I$ est invariant *via* la transformation

$$(x, u_1, u_2) \xrightarrow{\varphi_\xi} (\xi x, \xi^2 u_1, \xi^3 u_2) = (ix, -u_1, -iu_2) ,$$

où $\xi = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. Autrement dit, *via* cette transformation, le champ U_I est changé en $\xi^3 U_I = -iU_I$. En conséquence, on a également une symétrie *via* l'action de

$$\varphi_\xi^{\circ 2} : (x, u_1, u_2) \mapsto (-x, u_1, -u_2) ;$$

U_I est envoyé sur $(-U_I)$. Résumons l'étude.

Lemme 14.1. *Le champ de vecteurs obtenu à l'infini après compactification à poids de l'espace de (P_I) donnée par (14.2.1) est*

$$U_I := x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{4}{5}u_2 + \frac{2}{5}xu_1 \right) \frac{\partial}{\partial u_1} + \left(-\frac{24}{5}u_1^2 - \frac{4}{5} + \frac{3}{5}xu_2 \right) \frac{\partial}{\partial u_2} . \quad (14.2.2)$$

De plus, U_I est transversalement hamiltonien (cf. définition 1.3), et on a également une symétrie orbitale *via* l'action de

$$\varphi_\xi : (x, u_1, u_2) \mapsto (ix, -u_1, -iu_2) ;$$

plus précisément, on a :

$$(\varphi_\xi)_*(U_I) = -iU_I .$$

14.3 Nœud-col 2-résonant transversalement symplectique

Le champ U_I a deux points singuliers en $(x, u_1, u_2) = (0, \pm\zeta, 0)$, avec $\zeta = \frac{i}{\sqrt{6}}$. La symétrie décrite ci-dessus nous dit qu'il suffit d'étudier l'une de ces deux singularités pour connaître l'autre. Notons $T_{\pm\zeta}$ la transformation donnée par $T_{\pm\zeta}(x, u_1, u_2) = (x, u_1 \pm \zeta, u_2)$, et $V_{\pm\zeta} = (T_{\pm\zeta})_*(U_I)$. On a alors :

$$\varphi_\xi \circ T_{\pm\zeta} = T_{\mp\zeta} \circ \varphi_\xi ,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} (\varphi_\xi)_*(V_{\pm\zeta}) &= (\varphi_\xi \circ T_{\pm\zeta})_*(U) \\ &= (T_{\mp\zeta} \circ \varphi_\xi)_*(U) \\ &= -i(T_{\mp\zeta})_*(U) \\ &= -iV_{\mp\zeta} . \end{aligned}$$

En particulier, on obtient aussi :

$$(\varphi_\xi^{\circ 2})_*(V_{\pm\zeta}) = -V_{\pm\zeta} .$$

On pose donc

$$\begin{cases} x = x \\ v_1 = u_1 \pm \zeta \\ v_2 = u_2 \end{cases} ,$$

qui est une transformation qui préserve à la fois dx et ω . Le champ $V_{\pm\zeta}$ est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{v}_1 = -\frac{2(\pm\zeta)}{5}x - \frac{4}{5}v_2 + \frac{2}{5}xv_1 \\ \dot{v}_2 = \frac{48(\pm\zeta)}{5}v_1 + \frac{3}{5}xv_2 - \frac{24}{5}v_1^2 \end{cases} . \quad (14.3.1)$$

Notons que l'on a encore nécessairement

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{V_{\pm\zeta}} \left(\frac{dv_1 \wedge dv_2}{x} \right) \in \langle dx \rangle \\ \mathcal{L}_{V_{\pm\zeta}} (dx) = 2x dx \end{cases}.$$

Autrement dit, le champ de vecteurs

$$V_{\pm\zeta} := x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{2(\pm\zeta)}{5}x - \frac{4}{5}v_2 + \frac{2}{5}xv_1 \right) \frac{\partial}{\partial v_1} + \left(\frac{48(\pm\zeta)}{5}v_1 + \frac{3}{5}xv_2 - \frac{24}{5}v_1^2 \right) \frac{\partial}{\partial v_2} \quad (14.3.2)$$

est aussi transversalement hamiltonien. Diagonalisons la partie linéaire de $V_{\pm\zeta}$, à savoir :

$$A_{\pm\zeta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2(\pm\zeta)}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{48(\pm\zeta)}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $A_{\pm\zeta}$ sont $\{0, -\lambda_{\pm\zeta}, \lambda_{\pm\zeta}\}$, avec $\lambda_{\pm\zeta} = \frac{8\sqrt{-3(\pm\zeta)}}{5}$. On a alors :

$$A_{\pm\zeta} = P_{\pm\zeta} D_{\pm\zeta} P_{\pm\zeta}^{-1},$$

avec $D_{\pm\zeta} = \text{diag}(0, -\lambda_{\pm\zeta}, \lambda_{\pm\zeta})$, et

$$P_{\pm\zeta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4\sqrt{-3(\pm\zeta)}} \\ -\frac{\pm\zeta}{2} & 2\sqrt{-3(\pm\zeta)} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Notons que $\det(P_{\pm\zeta}) = 1$ de sorte que le difféomorphisme ainsi défini est *transversalement symplectique* (cf. définition 1.3). Si l'on définit

$$\begin{pmatrix} x \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = P_{\pm\zeta} \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\begin{cases} x = x \\ y_1 = \frac{\pm\zeta}{8\sqrt{-3(\pm\zeta)}}x + \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4\sqrt{-3(\pm\zeta)}}v_2 \\ y_2 = -\frac{\pm\zeta}{2}x + 2\sqrt{-3(\pm\zeta)}v_1 - v_2 \end{cases},$$

alors on obtient le champ de vecteurs $Y_{\pm\zeta}$ qui est de la forme :

$$\begin{aligned} Y_{\pm\zeta} = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\lambda_{\pm\zeta}y_1 + \frac{1}{2}xy_1 + \frac{1}{25\lambda_{\pm\zeta}}xy_2 - \frac{\lambda_{\pm\zeta}}{96}x^2 - \frac{48}{25\lambda_{\pm\zeta}} \left(y_1 - \frac{2}{5\lambda_{\pm\zeta}}y_2 \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + \left(\lambda_{\pm\zeta}y_2 + \frac{1}{2}xy_2 + \frac{\lambda_{\pm\zeta}}{4}xy_1 - \frac{5(\lambda_{\pm\zeta})^2}{192}x^2 - \frac{24}{5} \left(y_1 - \frac{2}{5\lambda_{\pm\zeta}}y_2 \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial y_2}. \end{aligned}$$

Comme on a effectué une transformation transversalement symplectique, on a encore

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{Y_{\pm\zeta}} \left(\frac{dy_1 \wedge dy_2}{x} \right) \in \langle dx \rangle \\ \mathcal{L}_{Y_{\pm\zeta}} (dx) = 2x dx \end{cases}.$$

Remarque 14.2. C'est cela qui motive la définition de champ transversalement hamiltonien (cf. définition 1.3).

Remarquons également le fait suivant :

$$(P_{\zeta})^{-1} \circ \varphi_{\xi} \circ P_{-\zeta} = \chi : (x, y_1, y_2) \mapsto (\xi x, \xi^2 y_1, \xi y_2^2) = (ix, -y_1, -y_2)$$

et

$$(P_{-\zeta})^{-1} \circ \varphi_{\xi} \circ P_{\zeta} = \delta : (x, y_1, y_2) \mapsto (\xi x, \xi^2 y_2, \xi^2 y_1) = (ix, -y_2, -y_1) .$$

Ainsi :

$$\begin{cases} (\chi)_* (Y_{-\zeta}) = -iY_{\zeta} \\ (\delta)_* (Y_{\zeta}) = -iY_{-\zeta} \end{cases} .$$

En particulier, l'application

$$\Lambda := \delta \circ \chi = \chi \circ \delta : (x, y_1, y_2) \mapsto (-x, y_2, y_1)$$

est telle que :

$$\Lambda_* (Y_{\pm\zeta}) = -Y_{\pm\zeta} .$$

Notons que $\Lambda^2 = \text{Id}$, de sorte que $\Lambda^{-1} = \Lambda$.

Lemme 14.3. *Le champ ainsi obtenu à partir du champ U_I donné en (14.2.2) par les opérations transversalement symplectiques décrites ci-dessus est le champ*

$$\begin{aligned} Y_{\pm\zeta} = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\lambda_{\pm\zeta} y_1 + \frac{1}{2} x y_1 + \frac{1}{25\lambda_{\pm\zeta}} x y_2 - \frac{\lambda_{\pm\zeta}}{96} x^2 - \frac{48}{25\lambda_{\pm\zeta}} \left(y_1 - \frac{2}{5\lambda_{\pm\zeta}} y_2 \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + \left(\lambda_{\pm\zeta} y_2 + \frac{1}{2} x y_2 + \frac{\lambda_{\pm\zeta}}{4} x y_1 - \frac{5(\lambda_{\pm\zeta})^2}{192} x^2 - \frac{24}{5} \left(y_1 - \frac{2}{5\lambda_{\pm\zeta}} y_2 \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial y_2} , \end{aligned} \quad (14.3.3)$$

qui est un nœud-col 2-résonant diagonal transversalement symplectique. De plus, on a la symétrie

$$\Lambda_* (Y_{\pm\zeta}) = -Y_{\pm\zeta} ,$$

où $\Lambda : (x, y_1, y_2) \mapsto (-x, y_2, y_1)$.

Pour la suite de cette partie, on va s'intéresser à $Y := Y_{-\zeta}$, avec $\lambda := \lambda_{-\zeta}$.

Chapitre 15

Calcul des invariants formels

Dans ce chapitre, nous allons expliquer comment calculer les invariants formels de la singularité irrégulière à l'infini dans l'équation de Painlevé (P_I) . Des calculs similaires peuvent être faits pour les équations de Painlevé (P_j) , $j = II, \dots, V$.

Théorème 15.1. *Soit Y le champ associé à la singularité à l'infini de (P_I) donné par (14.3.3). Avec les notations du théorème 5.5, on a $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{8\sqrt{3}\zeta}{5} = \frac{4 \cdot 2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{5} e^{\frac{i\pi}{4}}$ et*

$$\begin{aligned} c(v) = & v + \left(\frac{47 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}}{96} e^{\frac{3i\pi}{4}} \right) v^2 \\ & + \left(-\frac{7717}{6912} i\sqrt{6} \right) v^3 + O(v^4) . \end{aligned}$$

Corollaire 15.2. *Les invariants formels donnés par le théorème 1.11 (pour la classification orbitale) du champ associé à la singularité à l'infini de (P_I) donné par (14.3.3) sont : $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ (et donc $m = 1$), et $\eta = 1$. Autre dit, la forme normale orbitale est*

$$\begin{aligned} Z = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(-1 - y_1 y_2 + \frac{1}{2} x \right) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + \left(1 + y_1 y_2 + \frac{1}{2} x \right) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} . \end{aligned} \quad (15.0.1)$$

On peut paramétrer les feuilles non-contenues dans l'hypersurface $\{x = 0\}$ de la forme normale orbitale formelle de la façon suivante :

$$\begin{cases} y_1(x) = h_1 \exp\left(\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2} - h_1 h_2\right) \log(x)\right) \\ y_2(x) = h_2 \exp\left(-\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2} + h_1 h_2\right) \log(x)\right) \end{cases}, (h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2$$

(cf. figure 15.0.1).

15.1 Périodes du hamiltonien sur $\{x = 0\}$

Dans cette section, nous considérons un champ de vecteurs noeud-col 2-résonant transversalement hamiltonien, *i.e.* de la forme :

$$Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(\left(-\frac{\partial H}{\partial y_2} + x F_1(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_1} + \left(\frac{\partial H}{\partial y_1} + x F_2(x, \mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_2} \right) ,$$

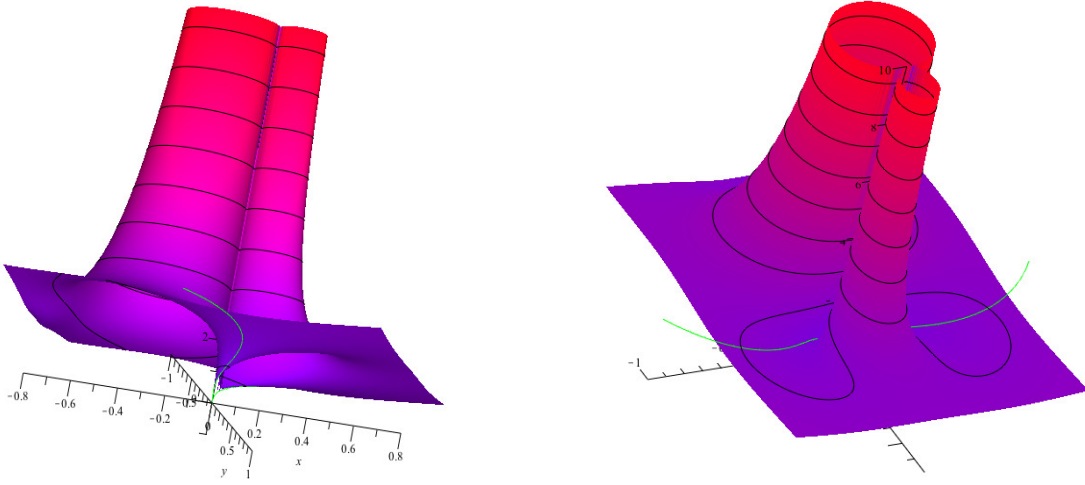


FIGURE 15.0.1 – Représentation de $|y_1(x)| + |y_2(x)|$ en fonction de $(\Re(x), \Im(x))$ dans le cas de (P_I) , pour $h_1 = h_2 = 1$. En vert : un chemin asymptotique (cf. définition 8.10 page 104).

avec $H(\mathbf{y}) = \lambda y_1 y_2 + O_{\mathbf{y} \rightarrow 0}(\|\mathbf{y}\|^3)$ analytique à l'origine de $\mathbb{C}^2$, $\lambda \neq 0$ et $F_1, F_2 \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ s'annulant à l'origine. Considérons la restriction $Y_0 := Y|_{\{x=0\}}$: il s'agit d'un champ hamiltonien sur $(\mathbb{C}^2, 0)$, à savoir

$$Y_0 = -\frac{\partial H}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

On fixe un (petit) polydisque $\mathbf{D}(0, \mathbf{r}) \subset \mathbb{C}^2$, avec $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$, sur lequel H est analytique. Les feuilles du feuilletage défini par Y_0 dans $\mathbf{D}(0, \mathbf{r})$ sont données par les lignes de niveau $L_a := \{H = a\} \cap \mathbf{D}(0, \mathbf{r})$, $a \in \mathbf{D}(0, r)$, avec $r > 0$ assez petit. Le lemme de Morse pour les fonctions holomorphes (cf. [Voi07, p.46]) nous dit que L_a est topologiquement un cylindre pour $a \neq 0$, et $r, r_1, r_2 > 0$ assez petits. En effet, L_a est homéomorphe, localement, à un ensemble du type $\{y_1 y_2 = a'\} \cap \mathbf{D}(0, \mathbf{r})$, qui est topologiquement un cylindre. On choisit un générateur γ_a du premier groupe d'homologie de L_a . On considère également une *forme temps* τ_{Y_0} pour Y_0 , i.e. telle que $\tau_{Y_0} \cdot (Y_0) = 1$, qui soit méromorphe sur $\mathbf{D}(0, \mathbf{r})$ avec un unique pôle à l'origine. On peut prendre par exemple $\tau_{Y_0} := -\frac{dy_1}{\frac{\partial H}{\partial y_2}}$.

On définit à présent l'application période associée :

$$\begin{aligned} T_H : \mathbf{D}(0, r) \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto T_H(a) := \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_a} \tau_{Y_0}. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une fonction méromorphe de $a \in \mathbf{D}(0, r)$, holomorphe sur $\mathbf{D}(0, r) \setminus \{0\}$.

Proposition 15.3. *Pour $r > 0$ assez petit, et $a \in \mathbf{D}(0, r) \setminus \{0\}$, la quantité $T_{Y_0}(a)$ ne dépend que de la classe d'homologie de γ_a dans $H_1(L_a, \mathbb{Z})$. En d'autres termes, si τ'_{Y_0} est une autre forme temps de Y_0 et si γ'_a est un lacet de L_a homologue à γ_a , alors :*

$$\oint_{\gamma_a} \tau_{Y_0} = \oint_{\gamma'_a} \tau'_{Y_0}.$$

Démonstration. Le fait que cette quantité ne dépende pas du choix d'un représentant d'un lacet dans la classe d'homologie de γ_a provient du théorème de Stokes. Le fait que la quantité $T_H(a)$

ne dépende pas du choix d'une forme temps spécifique provient du fait que le lacet γ_a (le long duquel on intègre la forme en question) est « tangent au feuilletage », c'est-à-dire est contenu dans une unique feuille L_a du feuilletage engendré par Y_0 . Si

$$\begin{aligned} \gamma_a : [0, 1] &\rightarrow L_a \\ t &\mapsto (\gamma_{a,1}(t), \gamma_{a,2}(t)) \quad , \end{aligned}$$

alors $\frac{d}{dt}(\gamma_a)(t) = v_a(t) Y_0(\gamma_a(t))$, où

$$v_a(t) = \frac{1}{\left(-\frac{\partial H}{\partial y_2}(\gamma_a(t))\right)} \frac{d\gamma_{a,1}(t)}{dt} = \frac{1}{\left(\frac{\partial H}{\partial y_1}(\gamma_a(t))\right)} \frac{d\gamma_{a,2}(t)}{dt} \quad .$$

D'où

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_a} \tau_{Y_0} &= \int_0^1 \tau_{Y_0}(\gamma_a(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt}(\gamma_a)(t)\right) dt \\ &= \int_0^1 \tau_{Y_0}(\gamma_a(t)) \cdot (v_a(t) Y_0(\gamma_a(t))) dt \\ &= \int_0^1 v_a(t) dt \end{aligned}$$

puisque $\tau_{Y_0} \cdot (Y_0) = 1$. □

Définition 15.4. On appelle T_H l'application période de H au voisinage de l'origine.

A présent, on considère un germe de difféomorphisme Ψ fixant l'origine de $\mathbb{C}^2$. On a donc

$$\begin{aligned} T_H(a) &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_a} \tau_{Y_0} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Psi^{-1}(\gamma_a)} \Psi^*(\tau_{Y_0}) \quad . \end{aligned}$$

Si l'on écrit $X_0 := (\Psi^{-1})_*(Y_0)$ et $\tau_{X_0} := \Psi^*(\tau_{Y_0})$, alors on a :

$$\tau_{X_0} \cdot (X_0) = (\Psi^*(\tau_{Y_0})) \cdot ((\Psi^{-1})_*(Y_0)) = \Psi_*(\tau_{Y_0} \cdot (Y_0)) = 1 \quad .$$

Autrement dit, τ_{X_0} est une forme temps X_0 . Prenons $\Psi^{-1} = \hat{\Phi}_{|x=0}$, où $\hat{\Phi}$ est la normalisation formelle transversalement symplectique du théorème 1.5 (cf. aussi corollaire 5.6), tel que :

$$X_0 := (\Psi^{-1})_*(Y_0) = (\lambda + c(v)) \left(-y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) ,$$

avec $v = y_1 y_2$, $c \in \mathbb{C}\{v\}$ et $c(0) = 0$. Alors $\tilde{\gamma}_a := \Psi^{-1}(\gamma_a) = \Phi_{|x=0}(\gamma_a)$ est un générateur de l'homologie de la feuille $\Phi_{|x=0}(L_a)$.

Considérons alors $h := H \circ \Psi$ au voisinage de l'origine. Alors, la feuille $\Phi_{|x=0}(L_a) = \{h = a\}$ est dans un voisinage de l'origine. Remarquons que h ne dépend en fait que de $v = y_1 y_2$, et $h(v) = \lambda v + o(|v|)$, $v \rightarrow 0$. Puisque $\lambda \neq 0$, le théorème d'inversion locale assure l'existence d'un germe de fonction analytique $g \in \mathbb{C}\{v\}$ avec $g(0) = 0$ tel que $h \circ g(v) = g \circ h(v) = v$ au voisinage de 0. On a donc $\{h(v) = a\} = \{v = g(a)\}$. Par conséquent, on prenant $\tau_{X_0} = -\frac{dy_1}{y_1(\lambda + c(v))}$,

on a :

$$\begin{aligned} T_H(a) &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\tilde{\gamma}_a} \tau_{X_0} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{\lambda + c(g(a))} \oint_{\tilde{\gamma}_a} -\frac{dy_1}{y_1} \\ &= \frac{-1}{\lambda + c(g(a))} \end{aligned}$$

en fonction de l'orientation de γ_a . En particulier, on voit que T_H est analytique au voisinage de l'origine et peut être étendue en 0 par la valeur $\frac{-1}{\lambda}$.

Le fait que $\hat{\Phi}$ soit transversalement symplectique implique que $\hat{\Phi}|_{\{x=0\}}$ est un symplectomorphisme pour la forme symplectique standard $dy_1 \wedge dy_2$. On a donc :

$$X_0 = -\frac{\partial h}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial h}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_2} ,$$

où $h := H \circ \Psi$, et par identification :

$$\frac{dh}{dv} = \lambda + c(v) .$$

Par conséquent, pour $a = h(v)$, on a la relation :

$$\frac{dh}{dv}(v) \cdot T_H(h(v)) = -1 .$$

Si on considère l'unique primitive S_H de T_H telle que $S_H(0) = 0$, on a :

$$S_H(h(v)) = -v ,$$

et donc

$$S_H(a) = -g(a) .$$

Résumons l'étude ci-dessus.

Proposition 15.5. *Considérons la restriction à $\{x = 0\}$, notée*

$$Y_0 = -\frac{\partial H}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_2} ,$$

d'un nœud-col 2-résonant transversalement hamiltonien $Y \in \mathcal{SN}_\omega$, avec $H(\mathbf{y}) = \lambda y_1 y_2 + \underset{\mathbf{y} \rightarrow 0}{o}(\|\mathbf{y}\|^2)$ analytique au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$. On considère son unique forme normale (transversalement hamiltonienne)

$$Y_{\text{norm}} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda + c(v)) + a_1 x y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda + c(v) + a_2 x) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

donnée par le théorème 1.5. Soit enfin T_H l'application période associée à Y_0 comme. Alors, on a les propriétés suivantes :

1. $v \mapsto c(v)$ est le germe d'une fonction analytique nulle en l'origine ;
2. $a \mapsto T_H(a)$ est un germe d'une fonction analytique au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$, telle que $T_H(0) = \frac{-1}{\lambda}$.
3. Si S_H est l'unique primitive de T_H telle que $S_H(0) = 0$, alors $(-S_H)$ est inversible (pour la composition), et son inverse $h := (-S_H)^{-1}$ satisfait :

$$\frac{dh}{dv}(v) = \lambda + c(v) .$$

En conclusion, si l'on est capable de calculer l'application période du champ de vecteurs hamiltonien originale en restriction à $\{x = 0\}$, alors on est capable de calculer l'invariant formel $c(v)$ donné par le théorème 1.5 (qui est un germe de fonction analytique).

Remarque 15.6. La fonction hamiltonienne $v \mapsto h(v) = \lambda v + \int_0^v c(u) du$ est en fait la *forme normale symplectique* du hamiltonien original $H(y_1, y_2) = \lambda y_1 y_2 + o(\|y\|^2)$, $\|y\| \rightarrow 0$, comme cela est décrit dans [CLW94] (section 2.7).

15.2 Exemple : le cas de la première équation de Painlevé

Démonstration. (du théorème 15.1)

Dans le cas de la première équation de Painlevé, on travaille avec le champ de vecteurs $V := V_{-\zeta}$ défini en (14.3.2), dont le hamiltonien associé est :

$$H(v_1, v_2) = \frac{1}{5} (2v_2^2 - 24\zeta v_1^2 - 8v_1^3)$$

où $\zeta = \frac{i}{\sqrt{6}}$. Bien qu'il ne s'agisse pas de coordonnées dans lesquelles la partie linéaire du champ de vecteurs soit diagonale, le calcul de la période sera le même que si l'on était parti du champ $Y := Y_{-\zeta}$ en (14.3.3), car le changement de variables linéaire qui conjugue V à Y est symplectique. On voit dans l'expression du champ (14.3.3) qu'on a déjà :

$$\begin{cases} \lambda = 8\sqrt{3}\zeta & , \text{ avec } \zeta = \frac{i}{\sqrt{6}} \\ a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

A présent, fixons $a \neq 0$ avec $|a|$ assez petit, et considérons la courbe de niveau $\{H = a\}$ près de l'origine dans $\mathbb{C}^2$. On peut calculer la période associée :

$$\begin{aligned} T_H(a) &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_a} \frac{5dv_1}{-4v_2} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_{a,1}} \frac{5dv_1}{-4\sqrt{12\zeta v_1^2 + 4v_1^3 + \frac{5}{2}a}} , \end{aligned}$$

où $\gamma_{a,1}$ est la composante de γ_a par rapport à $\frac{\partial}{\partial v_1}$.

La période $T_H(a)$ est l'une des périodes de la fonction $\wp$ de Weierstrass associée à la cubique

$$H(y_1, y_2) = a$$

(voir par exemple *e.g.* [BG08], [AB94]).

Pour la calculer, on peut par exemple prendre

$$\begin{aligned} \gamma_{a,1} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \rho_a e^{it} \end{aligned}$$

où $\rho_a > 0$ est tel que $|12\zeta v_1^2 + 4v_1^3| > \frac{5|a|}{2}$, pour tout $v_1 = \gamma_{a,1}(t)$, $t \in [0, 2\pi]$. A présent, on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{-4\sqrt{12\zeta v_1^2 + 4v_1^3 + \frac{5}{2}a}} &= \frac{\sqrt{2}}{-4\sqrt{24\zeta v_1^2 + 8v_1^3}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{5a}{24\zeta v_1^2 + 8v_1^3}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{-4\sqrt{24\zeta v_1^2 + 8v_1^3}} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{-1}{2} \right)^k \left(\frac{-5a}{24\zeta v_1^2 + 8v_1^3} \right)^k . \end{aligned}$$

Puisque qu'on a convergence normale, on peut intervertir les symboles somme et intégrale :

$$\begin{aligned} T_H(a) &= \frac{5}{2i\pi} \oint_{\gamma_{a,1}} \frac{\sqrt{2}}{-4\sqrt{24\zeta v_1^2 + 8v_1^3}} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{-1}{2} \right)^k \left(\frac{-5a}{24\zeta v_1^2 + 8v_1^3} \right)^k dv_1 \\ &= \frac{-5\sqrt{2}}{8i\pi} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{-1}{2} \right)^k (-5)^k \left(\oint_{\gamma_{a,1}} (24\zeta v_1^2 + 8v_1^3)^{-(k+\frac{1}{2})} dv_1 \right) a^k . \end{aligned}$$

Remarquons que $v_1 \mapsto (24\zeta v_1^2 + 8v_1^3)^{(k+\frac{1}{2})}$ est un germe de fonction analytique au voisinage de l'origine, avec un zéro d'ordre $2k+1$. L'intégrale ci-dessus se calcule donc facilement avec le théorème des résidus. On a

$$(24\zeta v_1^2 + 8v_1^3)^{-(k+\frac{1}{2})} = (24\zeta)^{-(k+\frac{1}{2})} v_1^{-(2k+1)} \sum_{j \geq 0} \binom{-(k+\frac{1}{2})}{j} \left(\frac{8}{24\zeta} \right)^j v_1^j ,$$

et le résidu en 0 est donc $8^{2k}(24\zeta)^{-(3k+\frac{1}{2})} \binom{-(k+\frac{1}{2})}{2k}$. Finalement, on a

$$T_H(a) = \sum_{k \geq 0} T_{H,k} a^k$$

avec :

$$T_{H,k} = (-5)^{k+1} \binom{\frac{-1}{2}}{k} \binom{-(k+\frac{1}{2})}{2k} 8^{-(k+1)} (3\zeta)^{-(3k+\frac{1}{2})} .$$

En utilisant les notations de la proposition 15.5 on a :

$$S_H(a) = \sum_{k \geq 0} \frac{T_{H,k}}{k+1} a^{k+1} = \sum_{k \geq 1} S_{H,k} a^k$$

avec $S_{H,k} = \frac{T_{H,k-1}}{k}$ pour $k \geq 1$. Puisque $S_H(0) = 0$ et $\frac{dS_H}{da}(0) = T_H(0) \neq 0$, l'application $(-S_H)$ est inversible pour la composition et on peut calculer de manière récursive son inverse noté

$$h(v) = \sum_{k \geq 1} h_k v^k .$$

Pour tout $k \geq 1$, le coefficient h_k est entièrement déterminé par les coefficients $S_{H,j}$, $j \leq k$. On obtient au final :

$$\lambda + c(v) = \frac{dh}{dv}(v) = \sum_{k \geq 0} (k+1) h_k v^k = \lambda + \sum_{k \geq 1} c_k v^k .$$

En conclusion, le jet d'ordre k de T_H nous fournit le jet d'ordre k de c . Après quelques calculs (fournis par Maple), on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{8\sqrt{3\zeta}}{5} = \frac{4 \cdot 2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{5} e^{\frac{i\pi}{4}} \\ c_1 &= 1 \\ c_2 &= \frac{47 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}}{96} e^{\frac{3i\pi}{4}} \\ c_3 &= -\frac{7717}{6912} i\sqrt{6} . \end{aligned}$$

On pourrait en fait calculer n'importe quel jet fini de c . □

Remarque 15.7. On peut effectuer ce type de calculs pour des hamiltoniens de la forme $H(y_1, y_2) = \beta y_2^2 + \alpha y_1^2 + f(y_1)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $f \in \mathbb{C}\{y_1\}$.

Chapitre 16

Calculs des phénomènes de Stokes quasi-linéaires

Le but est ici de calculer un coefficient des difféomorphismes de Stokes du champ (14.3.3), le nœud-col 2-résonant de la singularité irrégulière à l'infini de l'équation (P_I) .

Théorème 16.1. *Soit Y le champ associé à la singularité à l'infini de (P_I) donné par (14.3.3). Soit $\Phi_{\pm\lambda}$ les difféomorphismes de Stokes associés. En considérant $\Psi_{\pm\lambda} := \mathcal{H} \circ \Phi_{\pm\lambda} \circ \mathcal{H}^{-1}$ comme en (12.7.1), et en utilisant les notations de (12.7.2), on a :*

$$\Psi_{2,\lambda,0}(0) = i \cdot \Psi_{1,-\lambda,0}(0) = \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{3}{8}} 3^{\frac{1}{8}} .$$

Démonstration. Nous allons déterminer la valeur de $\Psi_{2,\lambda,0}(0)$. Le fait qu'on ait l'égalité $\Psi_{2,\lambda,0}(0) = i \cdot \Psi_{1,-\lambda,0}(0)$ provient des symétries de l'équation de Painlevé (P_I) (voir ci-dessous). On sait d'après le théorème de normalisation sectorielle qu'il existe une unique normalisation formelle $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$, qui est 1-sommable dans toutes les directions sauf pour $\arg(x) = \arg(\pm\lambda) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, telle que :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_*(Y) &= Y_{\text{norm}} \\ &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \left(-(\lambda + c(y_1 y_2)) + \frac{1}{2}x \right) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \left(\lambda + c(y_1 y_2) + \frac{1}{2}x \right) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} , \end{aligned}$$

avec $c(v) \in \mathbb{C}\{v\}$ d'ordre 1. On note Φ_+, Φ_- les 1-sommes respectives dans les directions $\arg(i\lambda), \arg(-i\lambda)$. Remarquons que grâce à la symétrie $\Lambda : (x, y_1, y_2) \mapsto (-x, y_2, y_1)$ qui agit de la manière suivante :

$$\Lambda_*(Y) = -Y$$

et

$$\Lambda_*(Y_{\text{norm}}) = -Y_{\text{norm}} ,$$

on obtient

$$\left(\Lambda \circ \hat{\Phi} \circ \Lambda \right)_*(Y) = Y_{\text{norm}} .$$

Comme $\Lambda \circ \hat{\Phi} \circ \Lambda \in \widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^3, 0; \text{Id})$, par unicité de la normalisation formelle fibrée et tangente à l'identité, on a :

$$\Lambda \circ \hat{\Phi} \circ \Lambda = \hat{\Phi} .$$

De même, par unicité des normalisations sectorielles fibrées tangentes à l'identité, on a aussi :

$$\Lambda \circ \Phi_+ \circ \Lambda = \Phi_- .$$

Ainsi, il suffit de connaître Φ_+ (*resp.* Φ_-) pour connaître Φ_- (*resp.* Φ_+). Il est à noter que Φ est obtenue par la composée

$$\hat{\Phi} = \hat{\psi} \circ \hat{\varphi} ,$$

avec

$$\hat{\varphi}(x, y_1, y_2) = (x, y_1 - \hat{y}_1(x), y_2 - \hat{y}_2(x)) ,$$

et

$$\hat{\psi}(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y}_1(1 + \hat{p}_1(x)) + \tilde{y}_2\hat{p}_2(x) + \hat{R}_1(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \\ \tilde{y}_2(1 + \hat{q}_1(x)) + \tilde{y}_1\hat{q}_2(x) + \hat{R}_2(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \end{pmatrix} ,$$

où le couple de séries formelles $(\hat{y}_1(x), \hat{y}_2(x))$ correspond, si l'on revient aux variables d'origine, à la solution formelle à l'infini de (P_1) (et leurs 1-sommes $(y_{1,\pm}(x), y_{2,\pm}(x))$ aux solutions tri-tronquées de Boutroux), $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{q}_1, \hat{q}_2 \in x\mathbb{C}[[x]]$ sont 1-sommables (sauf dans les directions $\arg(\pm\lambda)$) et $\hat{R}_1, \hat{R}_2 = O(|y_1|^2 + |y_2|^2)$ sont aussi 1-sommables (sauf dans les directions $\arg(\pm\lambda)$). Les difféomorphismes de Stokes $\Phi_{-\lambda}, \Phi_\lambda$, donnés par la restriction de $\Phi_- \circ (\Phi_+)^{-1}$ et de $\Phi_+ \circ (\Phi_-)^{-1}$ à $\mathcal{AS}_{-\lambda,\pi}$ et $\mathcal{AS}_{\lambda,\pi}$ respectivement, peuvent être déduits l'un de l'autre *via* la symétrie $\Lambda : (x, y_1, y_2) \mapsto (-x, y_2, y_1)$. En effet :

$$\begin{aligned} (\Lambda \circ \Phi_\lambda \circ \Lambda)|_{\mathcal{AS}_{-\lambda,\pi}} &= (\Lambda \circ \Phi_+ \circ \Phi_-^{-1} \circ \Lambda)|_{\mathcal{AS}_{-\lambda,\pi}} \\ &= (\Phi_- \circ \Lambda \circ \Phi_-^{-1} \circ \Lambda)|_{\mathcal{AS}_{-\lambda,\pi}} \\ &= (\Phi_- \circ \Phi_+^{-1})|_{\mathcal{AS}_{-\lambda,\pi}} \\ &= (\Phi_{-\lambda}) . \end{aligned} \tag{16.0.1}$$

Nous avons vu grâce à l'étude des difféomorphismes de Stokes dans l'espace des feuilles (12.7.2), que $\Phi_{-\lambda}$ et Φ_λ ont une forme bien particulière. Si l'on note $\Phi_\lambda = (x, \Phi_{1,\lambda}, \Phi_{2,\lambda})$ alors :

$$\begin{cases} \Phi_{1,\lambda}(x, \mathbf{y}) = y_1 + f_1\left(x, \frac{\Phi_{v,\lambda}(x, \mathbf{y})}{x}\right) \sum_{n \geq 2} \Psi_{1,\lambda,n}\left(\frac{y_1 y_2}{x}\right) \left(\frac{y_1}{f_1\left(x, \frac{y_1 y_2}{x}\right)}\right)^n \\ \Phi_{2,\lambda}(x, \mathbf{y}) = y_2 + f_2\left(x, \frac{\Phi_{v,\lambda}(x, \mathbf{y})}{x}\right) \sum_{n \geq 0} \Psi_{2,\lambda,n}\left(\frac{y_1 y_2}{x}\right) \left(\frac{y_1}{f_1\left(x, \frac{y_1 y_2}{x}\right)}\right)^n \end{cases} ,$$

où

$$\begin{cases} f_1(x, w) := \exp\left(\frac{\lambda}{x} - c_1 w \log(x) - \frac{\tilde{c}(wx)}{x}\right) x^{\frac{1}{2}} \\ f_2(x, w) := \exp\left(-\frac{\lambda}{x} + c_1 w \log(x) + \frac{\tilde{c}(wx)}{x}\right) x^{\frac{1}{2}} \end{cases} ,$$

$$(\Phi_{1,\lambda} \Phi_{2,\lambda})(x, \mathbf{y}) = \Phi_{v,\lambda}(x, \mathbf{y}) = y_1 y_2 + x \sum_{n \geq 1} \Psi_{w,\lambda,n}\left(\frac{y_1 y_2}{x}\right) \left(\frac{y_1}{f_1\left(x, \frac{y_1 y_2}{x}\right)}\right)^n ,$$

et où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\nu \in \{1, 2, w\}$, $\Psi_{\nu,\lambda,n}(w)$ est une série entière sur $\mathbb{C}$, de sorte que les séries qui apparaissent sont convergentes dans les régions du type concerné. En particulier,

$$\Phi_{2,\lambda}(x, 0, 0) = \Psi_{2,\lambda,0}(0) \exp\left(\frac{-\lambda}{x}\right) x^{\frac{1}{2}} .$$

De même, on a aussi

$$\Phi_{1,-\lambda}(\tilde{x}, 0, 0) = \Psi_{1,-\lambda,0}(0) \exp\left(\frac{\lambda}{\tilde{x}}\right) \tilde{x}^{\frac{1}{2}},$$

et d'après (16.0.1), en prenant $\tilde{x} = -x$, on en déduit que

$$\Phi_{2,\lambda}(x, 0, 0) = \Phi_{1,-\lambda}(-x, 0, 0)$$

et donc

$$\Psi_{2,\lambda,0}(0) = \pm i \cdot \Psi_{1,-\lambda,0}(0)$$

selon le choix de la détermination du logarithme fait dans (12.1.1) : on peut décider de choisir la branche du logarithme telle qu'on ait ici un signe "+". Le coefficient $\Psi_{2,\lambda,0}(0)$ est déterminé par le coefficient de Stokes quasi-linéaire calculé par Kapaev dans [Kap04]. Rappelons rapidement ces calculs.

Notons $z_{1,+}(t)$ la solution tri-tronquée correspondant au secteur :

$$\Sigma_+ := \left\{ t \in \mathbb{C}^* \mid \frac{\pi}{5} < \arg(t) < \frac{9\pi}{5} \right\}$$

avec $|t| \rightarrow +\infty$, et $z_{1,-}(t)$ la solution tri-tronquée correspondant au secteur

$$\Sigma_- := \left\{ t \in \mathbb{C}^* \mid \pi < \arg(t) < \frac{13\pi}{5} \right\}$$

quand $|t| \rightarrow +\infty$. Un des résultats de Kapaev est le suivant (pour les autres solutions tri-tronquées, on obtient des résultats similaires en utilisant les symétries *via* l'action de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$).

Théorème. [Kap04]

Lorsque $\arg(t) \in [\pi, \frac{9\pi}{5}]$ et que $|t| \rightarrow +\infty$, on a :

$$z_{1,-}(t) - z_{1,+}(t) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{-\frac{11}{8}} 3^{-\frac{1}{8}} t^{-\frac{1}{8}} \exp\left(-\frac{1}{5} 2^{\frac{11}{4}} 3^{\frac{1}{4}} \left(e^{-\frac{7i\pi}{5}} t\right)^{\frac{5}{4}}\right) \left(1 + O\left(t^{-\frac{3}{8}}\right)\right). \quad (16.0.2)$$

En notant $z_{2,-}(t) := \frac{dz_{1,-}}{dt}(t)$ et $z_{2,+}(t) := \frac{dz_{1,+}}{dt}(t)$, on en déduit :

$$z_{2,-}(t) - z_{2,+}(t) = -\frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{-\frac{5}{8}} 3^{\frac{1}{8}} t^{\frac{1}{8}} \exp\left(-\frac{1}{5} 2^{\frac{11}{4}} 3^{\frac{1}{4}} \left(e^{-\frac{7i\pi}{5}} t\right)^{\frac{5}{4}}\right) \left(1 + O\left(t^{-\frac{3}{8}}\right)\right).$$

En utilisant à présent le changement de coordonnées

$$\begin{cases} t = x^{-\frac{4}{5}} \\ z_1 = u_1 x^{-\frac{2}{5}} \\ z_2 = u_2 x^{-\frac{3}{5}} \end{cases},$$

et en notant $(u_{1,-}(x), u_{2,-}(x))$ et $(u_{1,+}(x), u_{2,+}(x))$ les solutions correspondantes, analytiques proches de $x = 0$ respectivement pour

$$-\frac{13\pi}{4} < \arg(x) < -\frac{5\pi}{4} \text{ et } -\frac{9\pi}{4} < \arg(x) < -\frac{\pi}{4}$$

on obtient alors dans l'intersection :

$$\begin{cases} u_{1,-}(x) - u_{1,+}(x) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{-\frac{11}{8}} 3^{-\frac{1}{8}} x^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\frac{1}{5} 2^{\frac{11}{4}} 3^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{4}}}{x}\right) \left(1 + O\left(x^{\frac{3}{10}}\right)\right) \\ u_{2,-}(x) - u_{2,+}(x) = -\frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{-\frac{5}{8}} 3^{\frac{1}{8}} x^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\frac{1}{5} 2^{\frac{11}{4}} 3^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{4}}}{x}\right) \left(1 + O\left(x^{\frac{3}{10}}\right)\right) \end{cases}$$

pour

$$-\frac{9\pi}{4} < \arg(x) < -\frac{5\pi}{4}.$$

Ensuite, en considérant

$$\begin{cases} x = x \\ v_1 = u_1 - \zeta \\ v_2 = u_2 \end{cases},$$

on a évidemment les mêmes estimations :

$$\begin{cases} v_{1,-}(x) - v_{1,+}(x) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{-\frac{11}{8}} 3^{-\frac{1}{8}} x^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\frac{1}{5} 2^{\frac{11}{4}} 3^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{4}}}{x}\right) \left(1 + O\left(x^{\frac{3}{10}}\right)\right) \\ v_{2,-}(x) - v_{2,+}(x) = -\frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{-\frac{5}{8}} 3^{\frac{1}{8}} x^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\frac{1}{5} 2^{\frac{11}{4}} 3^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{4}}}{x}\right) \left(1 + O\left(x^{\frac{3}{10}}\right)\right) \end{cases}.$$

Enfin, effectuons le changement de coordonnées donné par

$$\begin{cases} x = x \\ y_1 = \frac{-\zeta}{8\sqrt{3\zeta}} x + \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{4\sqrt{3\zeta}} v_2 \\ y_2 = \frac{\zeta}{2} x + 2\sqrt{3\zeta} v_1 - v_2 \end{cases}.$$

On a alors :

$$\begin{cases} y_{1,-}(x) - y_{1,+}(x) = \frac{1}{2} (v_{1,-}(x) - v_{1,+}(x)) + \frac{1}{4\sqrt{3\zeta}} (v_{2,-}(x) - v_{2,+}(x)) \\ = 0 \\ y_{2,-}(x) - y_{2,+}(x) = 2\sqrt{3\zeta} (v_{1,-}(x) - v_{1,+}(x)) - (v_{2,-}(x) - v_{2,+}(x)) \\ = \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{3}{8}} 3^{\frac{1}{8}} x^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\frac{1}{5} 2^{\frac{11}{4}} 3^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{4}}}{x}\right) \left(1 + O\left(x^{\frac{3}{10}}\right)\right) \end{cases} \quad (16.0.3)$$

Remarquons qu'on a bien :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{8\sqrt{3\zeta}}{5} \\ &= \frac{2^{\frac{11}{4}} 3^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{4}}}{5}. \end{aligned}$$

Il nous reste à relier $(\Phi_\lambda)_{|\{\mathbf{y}=0\}} = \Phi_+ \circ (\Phi_-)^{-1}_{|\{\mathbf{y}=0\}}$ à $\mathbf{y}_-(x) - \mathbf{y}_+(x)$, où $\mathbf{y}_j(x) = (y_{1,j}(x), y_{2,j}(x))$, $j = \pm$. Notons $\sigma_\lambda := \varphi_+ \circ (\varphi_-)^{-1}_{|\mathcal{AS}_{\lambda,\pi}}$, de sorte que :

$$\sigma_\lambda = (\psi_+)^{-1} \circ \Phi_\lambda \circ \psi_-|_{\mathcal{AS}_{\lambda,\pi}}.$$

On a alors :

$$(\sigma_\lambda)_{|\{y_1=y_2=0\}}(x, 0, 0) = (x, y_{1,-}(x) - y_{1,+}(x), y_{2,-}(x) - y_{2,+}(x)).$$

D'après les calculs précédents

$$\sigma_\lambda(x, 0, 0) = \left(x, 0, \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{3}{8}} 3^{\frac{1}{8}} x^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\lambda}{x}\right) \left(1 + O\left(x^{\frac{3}{10}}\right)\right) \right).$$

Rappelons que

$$\hat{\psi}(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y}_1(1 + \hat{p}_1(x)) + \tilde{y}_2 \hat{p}_2(x) + \hat{R}_1(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \\ \tilde{y}_2(1 + \hat{q}_1(x)) + \tilde{y}_1 \hat{q}_2(x) + \hat{R}_2(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \end{pmatrix},$$

et que :

$$\psi_{\pm}(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y}_1(1 + p_{1,\pm}(x)) + \tilde{y}_2 p_{2,\pm}(x) + R_{1,\pm}(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \\ \tilde{y}_2(1 + q_{1,\pm}(x)) + \tilde{y}_1 q_{2,\pm}(x) + R_{2,\pm}(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\psi_{-}(x, 0, 0) = (x, 0, 0),$$

et donc :

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda} \circ \psi_{-}(x, 0, 0) &= \Phi_{+\lambda}(x, 0, 0) \\ &= \left(x, 0, Ax^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\lambda}{x}\right) \right), \end{aligned}$$

avec $A = \Psi_{2,\lambda,n}(0)$. Remarquons que $(\psi_{\pm})_{|_{\{y_1=0\}}}^{-1}$ est de la forme :

$$(\psi_{\pm})^{-1}(x, 0, y_2) = (x, y_2 \tilde{p}_{2,\pm}(x) + \tilde{R}_{1,\pm}(x, 0, y_2), y_2(1 + \tilde{q}_{1,\pm}(x)) + \tilde{R}_{2,\pm}(x, 0, y_2))$$

avec $\tilde{p}_{2,\pm}(x), \tilde{q}_{1,\pm}(x) = O(x)$ et pour $j = 1, 2$:

$$\tilde{R}_{j,\pm}(x, 0, y_2) = \sum_{k \geq 2} R_{j,\pm}^{(k)}(x) y_2^k$$

est la 1-somme (dans le secteur correspondant) d'une série 1-sommable, et est donc analytique dans ce secteur. On a donc :

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda}(x, 0, 0) &= (\psi_{+})^{-1}\left(x, 0, Ax^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\lambda}{x}\right)\right) \\ &= \begin{pmatrix} x \\ Ax^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\lambda}{x}\right) \tilde{p}_{2,+}(x) + \tilde{R}_{1,+}\left(x, 0, Ax^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\lambda}{x}\right)\right) \\ Ax^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\lambda}{x}\right) (1 + \tilde{q}_{1,+}(x)) + \tilde{R}_{2,+}\left(x, 0, Ax^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\lambda}{x}\right)\right) \end{pmatrix} \\ &= \left(x, 0, \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{3}{8}} 3^{\frac{1}{8}} x^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda}{x}\right) \left(1 + O\left(x^{\frac{3}{10}}\right)\right)\right) \\ &\quad \text{(d'après les calculs précédents).} \end{aligned}$$

On voit donc en particulier que :

$$\tilde{p}_{2,+}(x) = \tilde{R}_{1,+}(x, 0, y_2) = 0$$

et que :

$$\begin{aligned} &Ax^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\lambda}{x}\right) (1 + \tilde{q}_{1,+}(x)) + \sum_{k \geq 2} R_{2,+}^{(k)}(x) A^k x^{\frac{k}{2}} \exp\left(\frac{-\lambda k}{x}\right) \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{3}{8}} 3^{\frac{1}{8}} x^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\lambda}{x}\right) \left(1 + O\left(x^{\frac{3}{10}}\right)\right). \end{aligned}$$

Par identification, on voit que :

$$A = \Psi_{2,\lambda,0}(0) = \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{3}{8}} 3^{\frac{1}{8}}$$

et que le terme en $O\left(x^{\frac{3}{10}}\right)$ obtenu dans (16.0.3) grâce à la formule de Kapaev (16.0.2) est en fait un terme en $O(x)$, dans le secteur en question. En conclusion :

$$y_{2,-}(x) - y_{2,+}(x) = \sum_{k \geq 1} R_{2,+}^{(k)}(x) A^k x^{\frac{k}{2}} \exp\left(\frac{-\lambda k}{x}\right) ,$$

avec

$$A = \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{3}{8}} 3^{\frac{1}{8}}$$

et

$$R_{2,+}^{(1)}(x) = 1 + \tilde{q}_{1,+}(x) = 1 + O(x) .$$

□

On a donc le corollaire suivant.

Corollaire 16.2. *En reprenant les notations du théorème de Kapaev [Kap04] rappelé plus haut, lorsque $\arg(t) \in [\pi, \frac{9\pi}{5}]$ et que $|t| \rightarrow +\infty$, on a :*

$$z_{1,-}(t) - z_{1,+}(t) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{\pi}} 2^{-\frac{11}{8}} 3^{-\frac{1}{8}} t^{-\frac{1}{8}} \exp\left(-\frac{1}{5} 2^{\frac{11}{4}} 3^{\frac{1}{4}} \left(e^{-\frac{7i\pi}{5}} t\right)^{\frac{5}{4}}\right) \left(1 + O\left(t^{-\frac{5}{4}}\right)\right) .$$

Remarque 16.3. On a amélioré le terme d'erreur : le $O\left(t^{-\frac{3}{8}}\right)$ est en fait un $O\left(t^{-\frac{5}{4}}\right)$.

Perspectives

Je vais essayer de décrire ici plusieurs perspectives de recherche possibles à la suite de travail de thèse.

16.1 Généralisation de la classification formelle en dimension quelconque

La première perspective que je vois serait de généraliser le théorème A, pour des noeud-cols “multi-résonants” dans $\mathbb{C}^{n+1}$, $n \geq 2$. De plus, cela donne une meilleure compréhension de l’hypothèse de non-dégénérescence sur le résidu. Soyons plus précis.

On considère un champ de vecteurs (formel) de la forme

$$Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (\lambda_1 y_1 + F_1(x, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + (\lambda_n y_n + F_n(x, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial y_n} ,$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, et $F_1, \dots, F_n \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ des séries formelles d’ordre au moins 2 en $(x, \mathbf{y}) = (x, y_1, \dots, y_n)$. Un tel champ de vecteurs sera appelé un *nœud-col* de $\mathbb{C}^{n+1}$. Supposons que ce champ de vecteurs soit *n-résonant* : cela signifie qu’il existe n vecteurs $e_0, e_1, \dots, e_{n-1} \in \mathbb{N}^{n+1}$ (*i.e.* à coefficients entiers positifs), linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, avec $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ et $e_i = (0, \cdot, \dots, \cdot)$ pour $i = 1, \dots, n-1$, de sorte que les solutions $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ (à coefficients entiers positifs) à l’équation

$$\langle \mathbf{p}, \lambda \rangle = p_1 \lambda_1 + \cdots + p_n \lambda_n = 0$$

soient exactement les éléments de la forme

$$\mathbf{p} = p_0 e_0 + m_1 e_1 + \cdots + m_{n-1} e_{n-1} \quad , \quad \text{avec } m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{N}.$$

Pour $i = 1, \dots, n-1$, considérons $\mathbf{q}_i = (q_{i,1}, \dots, q_{i,n}) \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ tel que $e_i = (0, \mathbf{q}_i)$. Remarquons que la famille $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-1})$ est encore libre sur $\mathbb{C}$. Introduisons $n-1$ monômes résonants $v_1, \dots, v_{n-1}$ (autres que le monôme résonant x) définis par :

$$v_i := \mathbf{y}^{\mathbf{q}_i} = y_1^{q_{i,1}} \cdots y_n^{q_{i,n}} \quad , \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

D’après la théorie classique des formes normales de Poincaré-Dulac, Y est formellement conjugué, *via* un difféomorphisme fibré et tangent à l’identité, à un champ de vecteurs de la forme :

$$\begin{aligned} Z = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (\lambda_1 + d_1(v_1, \dots, v_{n-1}) + a_1 x + x G_1(x, v_1, \dots, v_n)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + \cdots + (\lambda_n + d_n(v_1, \dots, v_{n-1}) + a_n x + x G_n(x, v_1, \dots, v_n)) y_n \frac{\partial}{\partial y_n} , \end{aligned}$$

avec $G_1, \dots, G_n \in \mathbb{C}[[x, v_1, \dots, v_{n-1}]]$ et $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{C}[[v_1, \dots, v_{n-1}]]$ des séries formelles d'ordre au moins 1. On peut donc écrire le champ Z ainsi obtenu, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Z = & (1 + c(v_1, \dots, v_{n-1})) S(0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ & + r_1(v_1, \dots, v_{n-1}) S(0, \mathbf{q}_1) + \dots + r_{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1}) S(0, \mathbf{q}_{n-1}) \\ & + x \left(S(1, a_1, \dots, a_n) + \sum_{k_0 + \dots + k_n \geq 1} x^{k_0} v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n} S(0, \mu_{1,\mathbf{k}}, \dots, \mu_{n,\mathbf{k}}) \right), \end{aligned}$$

avec $c, r_1, \dots, r_{n-1} \in \mathbb{C}[[v_1, \dots, v_{n-1}]]$ des séries formelles d'ordre au moins 1, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, et $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-1} \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ étant ceux introduits plus haut. Regardons à présent l'action de la dérivée de Lie $\mathcal{L}_Z$ sur chacun des monômes résonants v_i , pour $i = 1, \dots, n-1$: en notant $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n)$, on a

$$\mathcal{L}_Z(v_i) = v_i \left(\sum_{j=1}^{n-1} r_j(v_1, \dots, v_{n-1}) \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \rangle + x (\langle \mathbf{a}, \mathbf{q}_j \rangle + O(x, v_1, \dots, v_{n-1})) \right).$$

On définit alors naturellement le $j^{\text{ième}}$ -résidu par :

$$\text{res}_j := \langle \mathbf{a}, \mathbf{q}_j \rangle,$$

de sorte que le champ de vecteurs dans les coordonnées $(x, v_1, \dots, v_{n-1})$ soit :

$$\begin{aligned} V = & \sum_{i=1}^{n-1} r_i(v_1, \dots, v_{n-1}) S(0, \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_i \rangle, \dots, \langle \mathbf{q}_{n-1}, \mathbf{q}_i \rangle) \\ & + x (S(1, \text{res}_1, \dots, \text{res}_{n-1}) + O(x, v_1, \dots, v_{n-1})). \end{aligned}$$

La condition générale d'être *non dégénéré* est alors la suivante : un nœud-col n -résonant de $\mathbb{C}^{n+1}$ est *non dégénéré* si la famille $(1, \text{res}_1, \dots, \text{res}_{n-1})$ est libre sur $\mathbb{N}$. Cette condition va entraîner, d'après un résultat classique de Poincaré sur la linéarisation des champs de vecteurs, que le terme

$$S(1, \text{res}_1, \dots, \text{res}_{n-1}) + O(x, v_1, \dots, v_{n-1})$$

(qui apparaît dans l'expression de V ci-dessus) est formellement linéarisable. On va retrouver concrètement ceci dans ce qui serait l'analogue du lemme 3.2.

Il est à noter que les termes $\text{res}_1, \dots, \text{res}_{n-1}$ sont des invariants sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0; \text{Id})$, de sorte que l'on puisse alors écrire $\text{res}_1(Y), \dots, \text{res}_{n-1}(Y)$. On établit alors la conjecture suivante.

Conjecture 16.4. *Soit Y un nœud-col n -résonant de $\mathbb{C}^{n+1}$ de la forme*

$$Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (\lambda_1 y_1 + F_1(x, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + (\lambda_n y_n + F_n(x, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial y_n},$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, et $F_1, \dots, F_n \in \mathbb{C}[[x, \mathbf{y}]]$ des séries formelles d'ordre au moins 2. En gardant les notations introduite plus haut, on note $v_j = \mathbf{y}^{\mathbf{q}_j}$ le $j^{\text{ième}}$ -monôme résonant, avec $\mathbf{q}_j \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ comme définit ci-dessus, pour $j = 1, \dots, n-1$. On suppose que Y est *non dégénéré*, i.e. $(1, \text{res}_1(Y), \dots, \text{res}_{n-1}(Y))$ est une famille libre sur $\mathbb{N}$. Alors, Y est formellement conjugué par $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0; \text{Id})$ à un champ de vecteurs de la forme

$$\begin{aligned} Y_{\text{norm}} = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (\lambda_1 + c_1(v_1, \dots, v_{n-1}) + a_1 x) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + \dots + (\lambda_n + c_n(v_1, \dots, v_{n-1}) + a_n x) y_n \frac{\partial}{\partial y_n}, \end{aligned}$$

avec $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C} \llbracket v_1, \dots, v_{n-1} \rrbracket$ d'ordre au moins 1, et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ de sorte que pour tout $j = 1, \dots, n-1$, on ait :

$$\text{res}_j(Y) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{q}_j \rangle := a_1 q_{j,1} + \dots + a_n q_{j,n}.$$

De plus, Y_{norm} est unique sous l'action de $\widehat{\text{Diff}}_{\text{fib}}(\mathbb{C}^{n+1}, 0; \text{Id})$ par conjugaison.

Le théorème A correspond au cas $n = 2$, $\lambda_1 = -\lambda_2$, $v_1 = y_1 y_2$ et $\text{res}(Y) = a_1 + a_2 \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$, qui signifie exactement que $(1, \text{res}(Y))$ est libre sur $\mathbb{N}$. La partie « existence » de cette conjecture semble pouvoir s'obtenir sans difficulté nouvelle par rapport à celle du théorème A, mais la partie « unicité » pourrait nécessiter plus de travail. L'idée serait ensuite de trouver des conditions généralisant celles d'être « strictement non dégénéré » et « div-intégrable » des théorèmes C et E, afin de pouvoir fournir une normalisation sectorielle qui déboucherait sur une classification analytique grâce à des difféomorphismes de Stokes.

16.2 Invariants de Stokes pour les équations de Painlevé

Une poursuite naturelle serait déjà de faire les calculs nécessaires pour obtenir l'invariant formel $c(v)$ pour les équations de Painlevé (P_j) , $j = II, III, IV, V$ comme dans le théorème 15.1 pour la première équation de Painlevé.

Une autre piste pour la suite de ce travail concernant les équations de Painlevé serait d'obtenir plus d'informations sur les difféomorphismes de Stokes des équations de Painlevé, *i.e.* plus de termes que celui correspondant au coefficient de Stokes quasi-linéaire. Une première pour cela serait de se baser sur une formule de connexion pour la seconde équation de Painlevé obtenue dans [CM82, LL87].

Finalement, un but (peut être trop ambitieux) serait d'obtenir une nouvelle caractérisation des équations de Painlevé, non pas à partir de la propriété de Painlevé, mais à partir des invariants de Stokes, une fois ceux-ci déterminés.

16.3 Version à paramètre et déploiement

Une troisième idée de poursuite de ce travail serait de se baser sur les travaux sur la classification analytique des déploiements de nœud-cols de $(\mathbb{C}^2, 0)$ obtenue dans [RT08], afin de généraliser cela aux déploiements des nœud-cols 2-résonants de $(\mathbb{C}^3, 0)$.

16.4 Le cas non « div-intégrable »

Enfin, une situation très intéressante à étudier serait le cas générale où l'on n'impose **pas** l'hypothèse « div-intégrable ». Dans ce cas, il semblerait qu'on aurait une « double-divergence » en les deux monômes résonants x et $v = y_1 y_2$.

Bibliographie

- [AB94] S. Abenda and A. Bazzani. Singularity analysis of 2D complexified Hamiltonian systems. In *Hamiltonian mechanics (Toruń, 1993)*, volume 331 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys.*, pages 205–212. Plenum, New York, 1994.
- [Arn74] V. Arnold. *Équations différentielles ordinaires*. Éditions Mir, Moscow, 1974. Champs de vecteurs, groupes à un paramètre, difféomorphismes, flots, systèmes linéaires, stabilités des positions d’équilibre, théorie des oscillations, équations différentielles sur les variétés, Traduit du russe par Djilali Embarek.
- [BDM08] P. Bonckaert and P. De Maesschalck. Gevrey normal forms of vector fields with one zero eigenvalue. *J. Math. Anal. Appl.*, 344(1) :301–321, 2008.
- [BG08] A. D. Bryuno and I. V. Goryuchkina. Boutroux asymptotics of solutions of Painlevé equations and power geometry. *Dokl. Akad. Nauk*, 422(2) :157–160, 2008.
- [Bit16a] Amaury Bittmann. Doubly-resonant saddle-nodes in $\mathbb{C}^3$ and the fixed singularity at infinity in the painlevé equations : Formal classification. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, pages 1–39, 2016.
- [Bit16b] Amaury Bittmann. Doubly-resonant saddle-nodes in $(\mathbb{C}^3, 0)$ and the fixed singularity at infinity in the Painlevé equations (part II) : sectorial normalization. working paper or preprint, June 2016.
- [Bit16c] Amaury Bittmann. Doubly-resonant saddle-nodes in $(\mathbb{C}^3, 0)$ and the fixed singularity at infinity in the Painlevé equations (part III) : local analytic classification. working paper or preprint, June 2016.
- [Bou13] P. Boutroux. Recherches sur les transcendentes de M. Painlevé et l’étude asymptotique des équations différentielles du second ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 30 :255–375, 1913.
- [Bry73] A.D. Bryuno. Analytical form of differential equations. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 25 :131–288, 1973.
- [CCH15] O. Costin, R. D. Costin, and M. Huang. Tronquée solutions of the Painlevé equation PI. *Constr. Approx.*, 41(3) :467–494, 2015.
- [Chi16] Hayato Chiba. The first, second and fourth Painlevé equations on weighted projective spaces. *J. Differential Equations*, 260(2) :1263–1313, 2016.
- [CHT14] O. Costin, M. Huang, and S. Tanveer. Proof of the Dubrovin conjecture and analysis of the tritronquée solutions of P_I . *Duke Math. J.*, 163(4) :665–704, 2014.
- [CLW94] Shui-Nee Chow, Cheng Zhi Li, and Duo Wang. *Normal forms and bifurcation of planar vector fields*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [CM82] P. A. Clarkson and J. B. McLeod. A connection formula for the second Painlevé transcendent. In *Ordinary and partial differential equations (Dundee, 1982)*, volume 964 of *Lecture Notes in Math.*, pages 135–142. Springer, Berlin, 1982.

- [DGK09] B. Dubrovin, T. Grava, and C. Klein. On universality of critical behavior in the focusing nonlinear Schrödinger equation, elliptic umbilic catastrophe and the tritronquée solution to the Painlevé-I equation. *J. Nonlinear Sci.*, 19(1) :57–94, 2009.
- [Fra80a] J.-P. Francoise. Sur les formes normales de champs de vecteurs. *Boll. Un. Mat. Ital. A (5)*, 17(1) :60–66, 1980.
- [Fra80b] J.-P. Francoise. Sur les formes normales de champs de vecteurs. *Boll. Un. Mat. Ital. A (5)*, 17(1) :60–66, 1980.
- [HKM61] Masuo Hukuhara, Tosihusa Kimura, and Tizuko Matuda. *Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe*. Publications of the Mathematical Society of Japan, 7. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961.
- [Hor73] Lars Hormander. *An introduction to complex analysis in several variables*, volume 7. Elsevier, 1973.
- [Iwa80] Masahiro Iwano. On a general solution of a nonlinear 2-system of the form $x^2 dw/dx = \Lambda w + xh(x, w)$ with a constant diagonal matrix Λ of signature (1, 1). *Tôhoku Math. J. (2)*, 32(4) :453–486, 1980.
- [IY08] Yulij Ilyashenko and Sergei Yakovenko. *Lectures on analytic differential equations*, volume 86 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [JK92] Nalini Joshi and Martin D. Kruskal. The Painlevé connection problem : an asymptotic approach. I. *Stud. Appl. Math.*, 86(4) :315–376, 1992.
- [JK01] N. Joshi and A. V. Kitaev. On Boutroux’s tritronquée solutions of the first Painlevé equation. *Stud. Appl. Math.*, 107(3) :253–291, 2001.
- [Kap04] A. A. Kapaev. Quasi-linear stokes phenomenon for the Painlevé first equation. *J. Phys. A*, 37(46) :11149–11167, 2004.
- [KK93] A. A. Kapaev and A. V. Kitaev. Connection formulae for the first Painlevé transcendent in the complex domain. *Lett. Math. Phys.*, 27(4) :243–252, 1993.
- [LL87] G. Lebeau and P. Lochak. On the second Painlevé equation : the connection formula via a Riemann-Hilbert problem and other results. *J. Differential Equations*, 68(3) :344–372, 1987.
- [Mal95] Bernard Malgrange. Sommutation des séries divergentes. In *Exposition. Math.*, volume 13, pages 163–222, 1995.
- [Mar81] Jean Martinet. Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d’après A.-D. Brjuno). In *Bourbaki Seminar, Vol. 1980/81*, volume 901 of *Lecture Notes in Math.*, pages 55–70. Springer, Berlin-New York, 1981.
- [MM80] J.-F. Mattei and R. Moussu. Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(4) :469–523, 1980.
- [MP⁺13] Michael McQuillan, Daniel Panazzolo, et al. Almost étale resolution of foliations. *Journal of Differential Geometry*, 95(2) :279–319, 2013.
- [MR82] Jean Martinet and Jean-Pierre Ramis. Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (55) :63–164, 1982.
- [MR83] Jean Martinet and Jean-Pierre Ramis. Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(4) :571–621 (1984), 1983.
- [Oka77] Kazuo Okamoto. Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 285(12) :A765–A767, 1977.

- [Oka80] Kazuo Okamoto. Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations. I. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 56(6) :264–268, 1980.
- [Pai02] P. Painlevé. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme. *Acta Math.*, 25(1) :1–85, 1902.
- [RR11] J. C. Rebelo and H. Reis. Local Theory of Holomorphic Foliations and Vector Fields. *ArXiv e-prints*, January 2011.
- [RS89] J-P Ramis and Y Sibuya. Hukuhara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of gevre type. *Asymptotic Analysis*, 2(1) :39–94, 1989.
- [RS93] Jean Pierre Ramis and L Stolovitch. Divergent series and holomorphic dynamical systems. *Unpublished lecture notes*, 1 :993, 1993.
- [RT08] Christiane Rousseau and Loïc Teyssier. Analytical moduli for unfoldings of saddle-node vector fields. *Mosc. Math. J.*, 8(3) :547–614, 616, 2008.
- [Shi83] Shun Shimomura. Analytic integration of some nonlinear ordinary differential equations and the fifth Painlevé equation in the neighbourhood of an irregular singular point. *Funkcial. Ekvac.*, 26(3) :301–338, 1983.
- [Sib90] Yasutaka Sibuya. *Linear differential equations in the complex domain : problems of analytic continuation*, volume 82 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. Translated from the Japanese by the author.
- [Sto96] Laurent Stolovitch. Classification analytique de champs de vecteurs 1-résonnants de $(\mathbb{C}^n, 0)$. *Asymptotic Anal.*, 12(2) :91–143, 1996.
- [Sto97] Laurent Stolovitch. Forme normale de champs de vecteurs commutants. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(6) :665–668, 1997.
- [Sto08] Laurent Stolovitch. Normal form of holomorphic dynamical systems. In *Hamiltonian dynamical systems and applications*, pages 249–284. Springer, 2008.
- [Tey03] Loïc Teyssier. Analytical classification of saddle-node vector fields. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(8) :619–624, 2003.
- [Tey04a] Loc Teyssier. Examples of non-conjugated holomorphic vector fields and foliations. *Journal of Differential Equations*, 205(2) :390 – 407, 2004.
- [Tey04b] Loïc Teyssier. Équation homologique et cycles asymptotiques d'une singularité nœud-col. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 128(3) :167–187, 2004.
- [Voi07] Claire Voisin. *Hodge theory and complex algebraic geometry. II*, volume 77 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, english edition, 2007. Translated from the French by Leila Schneps.
- [Yos84] Setsuji Yoshida. A general solution of a nonlinear 2-system without Poincaré's condition at an irregular singular point. *Funkcial. Ekvac.*, 27(3) :367–391, 1984.
- [Yos85] Setsuji Yoshida. 2-parameter family of solutions for Painlevé equations (I)–(V) at an irregular singular point. *Funkcial. Ekvac.*, 28(2) :233–248, 1985.