

ÉCOLE DOCTORALE MSII ED 269

IRMA, UMR 7501

**THÈSE** présentée par :

**Mohamad MAASSARANI**

soutenue le : 11 décembre 2017

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : **Mathématiques fondamentales**

**Formalité pour certains espaces de configurations tordus et connexions de type Knizhnik – Zamolodochikov.**

**THÈSE dirigée par :**

**M. ENRIQUEZ Benjamin**

Professeur, Université de Strasbourg

**RAPPORTEURS :**

**M. MARIN Ivan**

Professeur, Université de Picardie-Jules Verne

**M. TOLEDANO LAREDO Valerio**

Professeur, Northeastern university

---

**AUTRES MEMBRES DU JURY :**

**M. FELDER Giovanni**

Professeur, ETH Zürich

**M. FOCK Vladimir**

Professeur, Université de Strasbourg

**M. FURUSHO Hidekazu**

Professeur, Nogyo University

Formalité pour certains espaces de configurations  
tordus et connexions de type Knizhnik–Zamolodchikov

Mohamad Maassarani

Thèse de doctorat



# Remerciements

Je commence par remercier mon directeur de thèse, Benjamin Enriquez de m'avoir encadré, pour sa bienveillance, sa disponibilité, son aide, son soutien et ses nombreux conseils.

Je suis infiniment reconnaissant envers Ivan Marin et Valerio Toledano Laredo qui ont accepté de rapporter cette thèse. Je souhaite également remercier Giovanni Felder, Vladimir Fock et Hidekazu Furusho d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens à remercier l'association "Lebanese Association for Scientific Research (LASER)" qui a financé en partie ce travail.

Merci aux doctorants et aux membres de l'ufr de mathématique-informatique et de l'IRMA.

Enfin, un très GRAND MERCI à ma mère, mon père, mes frères et soeurs qui m'ont accompagné et soutenu pendant mes années d'études.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Espaces de configurations et leurs groupes fondamentaux</b>	<b>13</b>
1.1 Définitions et premières propriétés . . . . .	14
1.2 Espaces de configurations tordus de surfaces . . . . .	16
1.3 Définition et description de l'espace $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . . . . .	18
1.4 Méridiens et lacets de $C_n^H(S_*)$ . . . . .	21
1.4.1 Rappels de topologie différentielle . . . . .	22
1.4.2 Lacets de $C_n^H(S_*)$ et action de $H^n \times \mathfrak{S}_n$ . . . . .	23
1.5 Groupe fondamental des espaces de configurations de surfaces . . . . .	25
1.5.1 Relations entre éléments de $\pi_1 C_n^H(S_*)$ . . . . .	26
1.5.2 Générateurs de $\pi_1 C_n^H(S_*)$ . . . . .	30
<b>2 Connexion sur l'espace de configuration <math>C_n^G(\mathbb{P}_*^1)</math></b>	<b>33</b>
2.1 Connexion KZ et variante cyclotomique . . . . .	33
2.2 Connexions formelles . . . . .	36
2.3 Les algèbres de Lie $\mathfrak{p}_n(Z)$ et $\mathfrak{p}_n(G)$ . . . . .	39
2.4 Connexion sur l'espace $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$ . . . . .	42
2.4.1 Définition et platitude de la connexion . . . . .	43
2.4.2 Equivalence entre connexions et monodromie . . . . .	49
2.5 Réalisation de la connexion . . . . .	51
<b>3 Le gradué associé de l'algèbre de Lie de Malcev attachée à <math>C_n^G(\mathbb{P}_*^1)</math></b>	<b>61</b>
3.1 Algèbres de Lie de Malcev . . . . .	61
3.1.1 Structures filtrées . . . . .	61
3.1.2 Algèbres de Hopf complètes et algèbres de Lie Malcev . . . . .	65
3.2 Gradué associé de l'algèbre de Lie de Malcev des espaces de configurations . . . . .	70
<b>4 L'algèbre de Lie de Malcev de <math>\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}^1)</math> et formalité</b>	<b>75</b>
4.1 Torseurs et algèbres de Lie filtrées . . . . .	75
4.1.1 Schémas en groupes (conventions) . . . . .	75
4.1.2 Preuve de la proposition 4.1.1 . . . . .	77
4.2 Preuve du théorème A . . . . .	80



# Introduction

Pour un espace topologique  $X$ , l'algèbre de Lie de Malcev de son groupe fondamental fait partie des invariants étudiés en homotopie rationnelle. Pour simplifier, on dira algèbre de Lie de Malcev de  $X$  ; cet invariant permet d'étudier la 1-formalité de  $X$  ([31]).

La 1-formalité est un résultat partiel de formalité, qui elle est associée aux modèles de  $X$ . Il s'avère que le calcul de modèles des espaces de configurations de  $n$  points :

$$C_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid x_i \neq x_j, \text{ pour } i \neq j\},$$

pour  $M$  une variété, est accessible. L'un des premiers calculs effectués est celui pour  $X = \mathbb{R}^2$  (dans [1]). Ces calculs montrent la formalité de  $C_n(\mathbb{C})$ .

L'anneau de cohomologie de  $C_n(\mathbb{R}^k)$  est connue. Des espaces similaires aux espaces de configurations sont les compléments d'arrangements d'hyperplans de  $\mathbb{C}^n$ . La formalité de ces espaces est due à [7] et le calcul de leur anneau de cohomologie se trouve dans [30]. On trouve dans [27] une présentation de l'algèbre de Lie de Malcev d'un complément d'hyperplans de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  et une preuve de la 1-formalité du complément d'une hypersurface dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . En particulier, ce travail ([27]) donne une présentation de l'algèbre de Lie Malcev de  $C_n(\mathbb{C})$ , c'est une complétion de l'algèbre de Kohno-Drinfeld.

Les travaux de [13], inspirent une méthode qui utilise la connexion KZ, pour le calcul de l'algèbre de Lie de Malcev de  $C_n(\mathbb{C})$ . L'intérêt de cette méthode c'est qu'elle fait apparaître les associateurs.

En 1994, des résultats majeurs, sur les modèles des espaces de configurations sont obtenus. Les auteurs de [21] déterminent un modèle pour l'espace de configuration de  $n$ -points d'une variété projective complexe lisse. Ces modèles sont ensuite simplifiés par [28], puis utilisés dans ([4]) pour calculer l'algèbre de Lie de Malcev de  $C_n(S)$  d'une surface  $S$  de genre supérieur ou égal à 1 : il établit un isomorphisme entre l'algèbre de Lie de Malcev de  $C_n(S)$  et la complétion pour le degré de son gradué associé.



Dans [9], une version universelle de la connexion KZB est utilisée, pour établir un isomorphisme entre l'algèbre de Lie de Malcev de  $C_n(E)$  et la complétion pour le degré du gradué associé, pour  $E$  est une courbe elliptique. Une théorie d'associateurs elliptiques liée à cette connexion est ensuite développée dans [15].

La méthode des connexions plates fus réinvestie, dans [16]. L'auteur redémontre, pour  $S$  une surface de genre supérieur ou égal à 2, les isomorphismes cités dans ([4]) en construisant des connexions plates du type KZ.

**Travaux sur les espaces de Configurations de surfaces :**

	$C_n(\mathbb{C})$	$C_n(E)$	$C_n(S_{g \geq 2})$
Méthode Hom. rat.	Kohno (1983)	Bezrukavnikov (1994)	
Méthode Connexions	Connexion KZ (Drinfeld)	Connexion KZB (CEE)	Connexion $KZB$ (Enriquez)
Théorie Associateurs	associateur $\Phi_{KZ}$	associateur elliptique $(\Phi_{KZ}, A(\tau), B(\tau))$	---

Si  $M$  est espace topologique muni d'une action d'un groupe  $H$ , on peut considérer l'espace de configuration "tordu" de  $n$  points de  $M$  :

$$C_n^H(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid x_i \notin H \cdot x_j, \text{ pour } i \neq j\},$$

où  $H \cdot x_j$  est l'orbite de  $x_j$  pour l'action de  $H$ . C'est le "orbit configuration space" au sens de [11]. Ces espaces ont été introduits dans [35]. L'exemple de l'espace de configuration tordu obtenu par l'action d'un groupe de surface sur le demi-plan hyperbolique est étudié dans [11]. Celui obtenu par l'action de l'antipode sur la sphère de dimension  $n$  est traité dans [36]. Plus de références et d'exemples traités dans la littérature sont donnés dans le survey "orbit configuration spaces" dans [25].

L'exemple qui suit a été étudié dans [10] et [14] par des méthodes et pour des fins différentes. L'action de  $\mu_N$ , le groupe des racines  $N$ -ième de l'unité (dans  $\mathbb{C}$ ) sur  $\mathbb{C}^\times$ , donne les espaces de configurations tordus :

$$C_n^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times) = \{(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n \mid z_i \neq \zeta z_j, \text{ pour } i \neq j \text{ et } \zeta \in \mu_N\}.$$

Une variante cyclotomique de la connexion KZ existe sur  $C_n^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times)$ . C'est une connexion à valeurs dans une variante cyclotomique de l'algèbre de Kohno-Drinfeld. Elle constitue un ingrédient essentiel dans le calcul de l'algèbre de Lie de Malcev de  $C_n^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times)$ , dans [14]. Dans le même papier, la connexion permet de construire une version cyclotomique des associateurs, les associateurs du même nom et de développer des variantes de plusieurs aspects des travaux de [13].

Notons que l'espace de configuration  $C_n^{\mu N}(\mathbb{C}^\times)$  est le complément d'un arrangement d'hyperplans de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  et donc [27] contient une présentation de son algèbre de Lie de Malcev.

### Des travaux dans le cas tordu

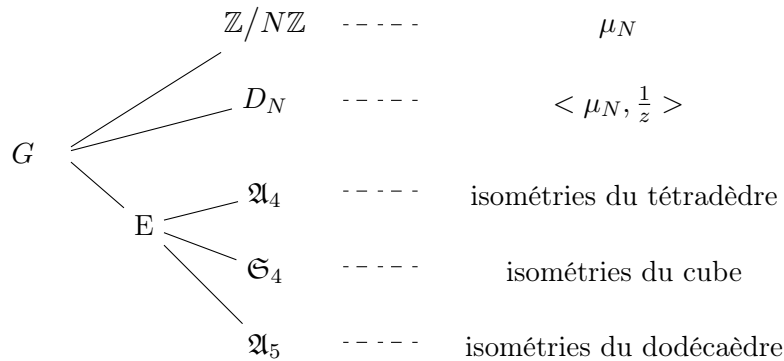
	$C_n^{\mu N}(\mathbb{C}^\times)$	$C_n^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}(E)$	$C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$
Méthode Hom. rat.	Kohno (1983)	---	---
Méthode Connexions	Enriquez KZ Cyclotomique	Travail En cours	MM
Théorie Associateurs	associateur $(\Phi_{KZ}, \Psi_{KZ}^{(N)})$	---	---

Il est naturel de s'intéresser aux espaces de configurations tordus de surfaces. Dans cette thèse, on étudie surtout une famille d'espaces de configurations tordus sur  $\mathbb{P}^1$ , la droite projective complexe, obtenus grâce à des actions par homographie de sous-groupes finis de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ . On considère, les espaces :

$$C_n^G(\mathbb{P}_*^1) = \{(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{P}_*^1)^n \mid p_i \notin G \cdot p_j, \text{ pour } i \neq j\},$$

où  $G$  est un sous-groupe de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  agit par homographie sur  $\mathbb{P}^1$  et  $\mathbb{P}_*^1$  est l'ensemble de points réguliers de l'action de  $G$  sur  $\mathbb{P}^1$ . Ici "points réguliers" signifie les points à stabilisateur trivial.

Le groupe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ , possède 5 classes (à conjugaison près) de groupes finis : les groupes cycliques, les groupes diédraux et les groupes isomorphes à un groupe d'isométries d'un solide platonicien,  $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$  ou  $\mathfrak{A}_5$ .



Lorsque  $G \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  est cyclique d'ordre  $N$ , l'espace de configuration  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  est biholomorphe à l'espace de configuration  $C_n^{\mu N}(\mathbb{C}^\times)$ .

Quand  $G$  est isomorphe à  $\mathfrak{A}_4$  l'espace  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  est homéomorphe à l'espace de configuration  $C_n^{\text{iso}(T)}(T_*)$ , où  $T_*$  est un tétraèdre régulier privé de ses sommets, des milieux de ses faces et des milieux de ces arêtes et  $\text{iso}(T)$  est le groupe d'isométries directes du tétraèdre.

Pour  $G$  isomorphe à  $\mathfrak{S}_4$  ou  $\mathfrak{A}_5$ , l'espace  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  est homéomorphe à l'un des espaces de configurations  $C_n^{\text{iso}(CU)}(CU_*)$ ,  $C_n^{\text{iso}(DO)}(DO_*)$  qui s'obtiennent à partir d'un cube régulier et d'un dodécaèdre régulier, d'une façon similaire à  $C_n^{\text{iso}(T)}(T_*)$ .

## Résultats et organisation du document

Ce manuscrit comporte quatre chapitres. On commence chaque chapitre par une introduction détaillée. On va parcourir rapidement les résultats et éléments clefs du texte.

Dans le premier chapitre, on s'intéresse aux espaces de configurations tordus de  $n$  points d'une surface (privée de points singuliers)  $C_n^H(S_*)$ . On obtient des résultats sur le groupe fondamental d'un tel espace. Pour préciser, on détermine une famille génératrice du groupe fondamental de  $C_n^H(S_*)$  (proposition 1.5.9) et on montre des relations quadratiques entre les éléments de cette famille (propositions 1.5.3, 1.5.5, 1.5.6 et 1.5.7). Les preuves des propositions 1.5.3, 1.5.5, 1.5.6 et 1.5.7 se basent sur l'identification des générateurs obtenus à des méridiens et sur une action de  $H^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  sur les classes de conjugaison de  $\pi_1 C_n^H(S_*)$ .

Pour  $G$  un sous-groupe fini de  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  et  $Z \subset \mathbb{P}^1$  un ensemble stable sous l'action de  $G$  par homographies sur  $\mathbb{P}^1$ , on définit dans le second chapitre des  $\mathbb{k}$ -algèbres de Lie graduées  $\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$ ; c'est les algèbres de Lie des définitions 2.3.3 et 2.3.4. Pour  $Z = (\mathbb{P}_*^1)^c$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  sera notée  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$ . Ensuite, on introduit dans la section 2.4 une connexion formelle du type KZ (proposition-définition 2.4.2) à valeurs dans  $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$ , sur l'espace de configuration :

$$C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z) = \{(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{P}^1 \setminus Z)^n \mid p_i \notin G \cdot p_j, \text{ pour } i \neq j\},$$

où  $G$  agit par homographies sur  $\mathbb{P}^1$  et  $Z$  est comme dans le début du paragraphe. Cette connexion est plate et fournit une représentation de monodromie. Pour  $Z = (\mathbb{P}_*^1)^c$ , la connexion est définie sur  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  et est à valeurs dans  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$ ; sa représentation de monodromie est un anti-morphisme de groupes :

$$\rho_{\tilde{Q}} : \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \rightarrow \exp(\hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}),$$

où  $\exp(\hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}})$  est l'ensemble des éléments diagonaux de  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$ . On étudie les termes de degré zero et un de  $\rho_{\tilde{Q}}$ , dans la section 2.4 (proposition 2.4.7). Enfin, la dernière section du deuxième chapitre est consacrée à une réalisation de la connexion

dans le cas  $Z = (\mathbb{P}_*^1)^c$ .

Le troisième chapitre, comporte deux sections. La première contient des rappels sur les algèbres et algèbres de Lie filtrées, en plus des rappels sur la construction et les propriétés de l'algèbre de Lie de Malcev d'un groupe donné. Les relations quadratiques dans  $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ , obtenues dans le premier chapitre, permettent de construire (section 3.2), un morphisme  $\varphi_{\mathbb{k}}$  de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$  dans le gradué associé de l'algèbre de Lie de Malcev de  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ .

Ces éléments contribuent à la preuve de :

**Théorème A.** *Soit  $\mathbb{k}$ , un corps de caractéristique nulle. L'algèbre de Lie de Malcev de  $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  est isomorphe en tant qu'algèbre de Lie filtrée au complété pour le degré de son gradué associé et à la complétion pour le degré de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$ . Pour préciser, les filtrations des trois algèbres de Lie correspondent via ces isomorphismes.*

Dans le chapitre 4, on montre le théorème A. Pour ce faire, on montre d'abord le théorème pour  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ . Résumons la preuve. On utilise la représentation de monodromie pour construire un morphisme  $\theta_\rho$  de l'algèbre de Lie de Malcev de  $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  dans la complétion pour le degré de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$ . Ensuite, on étudie les morphismes  $\theta_\rho$  et  $\varphi_{\mathbb{k}}$  pour déduire qu'il sont des isomorphismes. C'est la méthode des connexions plates citée précédemment. Ceci prouve le théorème pour  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ . Ensuite, on utilise un résultat d'existence de points rationnels de toseurs pour prouver le théorème pour tout  $\mathbb{k}$  de caractéristique nulle.

Le Théorème A donne une présentation de l'algèbre de Lie de Malcev de  $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  et établit la 1-formalité de  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . Notons que le théorème reste vrai pour les espaces  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$  et les algèbres  $\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  correspondantes. Enfin, remarquons que pour  $G \neq 1$ , l'espace  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  peut être vue comme le complémentaire d'hypersurfaces dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . La 1-formalité de cet espace est donc une conséquence des résultats de [27] cités précédemment. Il serait intéressant de comparer les présentations dans [27] pour le complémentaire d'un arrangement d'hyperplans à celles obtenues ici.



# Chapitre 1

## Espaces de configurations et leurs groupes fondamentaux

Ce chapitre est consacré aux espaces de configurations, leurs propriétés et leur groupe fondamental. Dans la première section, on rappelle la définition des espaces de configurations de  $n$  points d'une variété topologique  $M$  ([20] et [19]) des espaces de configurations tordus pour  $M$  munie d'une action d'un groupe  $H$  ("Orbit configuration spaces" au sens de [11]) et des exemples de ces espaces comme  $C_n(\mathbb{C})$  et  $C_n^H(\mathbb{C}^\times)$ . Ensuite, on donne certaines propriétés de ces espaces.

Dans la deuxième section, on associe à une surface  $S$  munie d'une action d'un groupe  $H$  l'espace de configuration tordu  $C_n^H(S_*)$ . En étudiant localement l'action des stabilisateurs de l'action de  $H$  sur  $S$ , on construit des inclusions entre espaces de configurations,  $C_k(\mathbb{C}) \subset C_n^H(S_*)$  et  $C_k(\mathbb{C}^\times) \subset C_n^H(S_*)$  (proposition 1.2.3).

La section trois est dédiée aux espaces qui nous intéressent le plus, les  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . C'est sous-famille des espaces  $C_n^H(S_*)$  de la section deux, associée à des groupes finis d'homographies qui agissent sur  $\mathbb{P}^1$ . On donne la définition de ces espaces (définition 1.3.5) et on les décrit. Ceci vient après un rappel sur les actions des sous-groupes finis de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{P}^1$ .

On commence la quatrième section par rappeler la notion de méridien (sous-section 1.4.1). C'est une classe de lacets qui dépendent d'une sous-variété  $N$  de codimension deux d'une variété  $M$ . Ensuite, on définit deux types de lacets de  $C_n^H(S_*)$  (définitions 1.4.4 et 1.4.5) qu'on identifie à des méridiens pour des couples  $M, N \subset (S)^n$  appropriés. Ceci permet de décrire une action de  $H^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  sur les classes de conjugaison de ces lacets (proposition 1.4.8).

La dernière section de ce chapitre contient deux sous-section. Une première dans laquelle on déduit des relations "élémentaires" entre les lacets définis dans la section quatre grâce aux inclusions obtenues dans la section 1.2 (voir au-dessus), puis on déduit de ces relations une famille plus large de relations grâce à l'action de  $H^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  citée précédemment. Dans la deuxième sous-section on définit une nouvelle famille de lacets de  $C_n^H(S_*)$ . On montre que les lacets ainsi définis avec ceux de la section quatre engendrent le groupe fondamental de  $C_n^H(S_*)$ .

## 1.1 Définitions et premières propriétés

On rappelle ici la définition d'un espace de configuration, on donne des exemples de ces espaces et certaines de leurs propriétés.

Soit  $M$  une variété topologique et  $n$  un entier naturel non nul. L'espace de configuration de  $n$  points de  $M$  est l'ensemble :

$$C_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j\}$$

Ces espaces sont naturellement munis d'une action de revêtement du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ .

Si  $M$  est munie d'une action d'un groupe  $H$ , on peut construire un espace de configuration "tordu" appelé en anglais "orbit configuration space".

**Définition 1.1.1.** *Soit  $H$  un groupe agissant sur  $M$ . L'espace de configuration "tordu" de  $n$  points de  $M$  est :*

$$C_n^H(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid x_i \notin H \cdot x_j \text{ pour } i \neq j\}$$

où  $H \cdot x_j$  est l'orbite de  $x_j$  pour l'action de  $H$ .

On omettra souvent le mot "tordu". Le groupe  $H^n$  agit naturellement sur  $C_n^H(M)$  et le quotient  $C_n^H(M)/H^n$  est l'espace de configuration  $C_n(M/H)$ . Le groupe  $\mathfrak{S}_n$  agit aussi sur  $C_n^H(M)$  par permutation des points. Les actions décrites sont compatibles et l'on a une action de  $H^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  sur  $C_n^H(M)$  qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C_n^H(M) & \xrightarrow{H^n \rtimes \mathfrak{S}_n} & \\ H^n \downarrow & \searrow & \\ C_n(M/H) & \xrightarrow{\mathfrak{S}_n} & C_n(M/H)/\mathfrak{S}_n \end{array}$$

où la flèche verticale est obtenue en quotientant par  $H^n$  et la diagonale est le morphisme du quotient par  $H^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ .

Rappelons que si  $X$  est un espace topologique muni d'une action par homéomorphismes d'un groupe  $\Gamma$  et d'un point de base  $*$ , alors on a une suite exacte :

$$1 \rightarrow \pi_1(X, *) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(X/\Gamma, \bar{*}) \rightarrow \Gamma \rightarrow 1,$$

où  $\pi_1^{\text{orb}}(X/\Gamma, \bar{*})$  est l'ensemble des couples  $(\gamma, g)$ , où  $\gamma$  est une classe d'homotopie de chemins de  $X$  reliant  $*$  à  $g \cdot *$  et  $g$  est un élément de  $\Gamma$ . Ici  $\bar{*}$  est l'image de  $*$  dans  $X/\Gamma$ . La loi de groupe sur  $\pi_1^{\text{orb}}(X/\Gamma, \bar{*})$  est donnée par :

$$(\gamma, g)(\gamma', g') = (\gamma(g \cdot \gamma'), gg'),$$

pour  $(\gamma, g)$  et  $(\gamma', g')$  dans  $\pi_1^{\text{orb}}(X/\Gamma, \bar{*})$ . Ici  $\gamma(g \cdot \gamma')$  désigne la composition des chemins. Ce groupe est naturellement isomorphe à  $\pi_1(X/\Gamma, \bar{*})$  quand l'action de  $\Gamma$  est une action de revêtement.

Ainsi, si  $H$  agit par homéomorphismes sur  $M$ , on obtient la suite exacte :

$$1 \rightarrow \pi_1 C_n^H(M) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(C_n(M/H)/\mathfrak{S}_n) \rightarrow H^n \rtimes \mathfrak{S}_n \rightarrow 1$$

et donc un morphisme de  $H^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  dans  $\text{Out}(\pi_1 C_n^H(M))$ .

Donnons quelques exemples. L'exemple classique est l'espace de configuration de  $n$  points du plan  $C_n(\mathbb{C})$ . Citons quelques exemples "tordus". Le groupe  $\mu_l$  des racines  $l$ -ièmes de l'unité agit naturellement sur  $\mathbb{C}^\times$ , on associe à cette action les espaces de configurations  $C_n^{\mu_l}(\mathbb{C}^\times)$ . Une courbe elliptique  $E$  est naturellement munie d'une action de l'ensemble de ses points de  $N$ -torsion, noté  $E_N$ . Ainsi, pour chaque sous-groupe  $\bar{\Lambda}$  de  $E_N$ , on peut construire les espaces de configurations  $C_n^{\bar{\Lambda}}(E)$ . Enfin, on s'intéresse dans ce texte surtout au cas où  $G$  est un sous-groupe fini de  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  qui agit par homographies sur  $\mathbb{P}^1$  privé de certains points. Cela nous donne l'espace de configuration  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  qu'on définira dans la suite.

Pour finir cette section, on cite quelques théorèmes de fibrations qui permettent de mieux comprendre la structure et l'agencement de ces espaces :

**Théorème 1.1.2** ([20]). *Pour  $k < n$ , la projection de  $C_n(M)$  dans  $C_k(M)$  sur les  $k$  premières composantes est une fibration localement triviale si  $M$  est sans bord.*

On a aussi une version similaire dans le cas tordu :

**Théorème 1.1.3** ([35]). *On suppose que  $H$  est fini et que son action sur  $M$  est libre et continue pour la topologie discrète sur  $H$ . Pour  $k < n$ , la projection de  $C_n^H(M)$  dans  $C_k^H(M)$  sur les  $k$  premières composantes est une fibration localement triviale si  $M$  est sans bord.*

On n'appliquera le dernier théorème que pour  $k = n - 1$ . Une preuve élémentaire du cas où  $k = n - 1$  est donnée dans [10].

Notons  $\pi$  la projection de l'énoncé du théorème 1.1.3. La fibre de cette projection au-dessus du point  $* = (p_1, \dots, p_k) \in C_k^H(M)$  est :

$$\pi^{-1}(p_1, \dots, p_k) \simeq C_{n-k}^H(M \setminus P),$$

où  $P$  est l'union des orbites de  $p_1, \dots, p_k$  sous l'action de  $H$ . Avec ces notations, la fibration nous donne la suite exacte longue :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{l+1} C_{n-k}^H(M \setminus P) \rightarrow \pi_{l+1} C_n^H(M) \rightarrow \pi_{l+1} C_k^H(M) \rightarrow \\ \rightarrow \pi_l C_{n-k}^H(M \setminus P) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0 C_k^H(M) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

qui est un outil efficace pour calculer les groupes d'homotopie des espaces de configurations. On termine la section par une proposition sur la connexité des espaces de configurations :



**Proposition 1.1.4.** *Supposons que  $H$  est fini. Si  $M$  est connexe et de dimension supérieure ou égale à 2, alors  $C_n^H(M)$  est connexe.*

*Démonstration.* Utilisons une récurrence. La proposition est vraie pour  $n = 1$ . Supposons qu'elle soit vraie au rang  $n$  et montrons qu'elle l'est au rang  $n + 1$ . Soit  $P = (p_1, \dots, p_{n+1})$  et  $P' = (p'_1, \dots, p'_{n+1})$  deux points de  $C_{n+1}^H(M)$ . Notons  $|P, P'|$  l'ensemble des composantes de  $P$  et  $P'$  et choisissons un  $q \in M \setminus H \cdot |P, P'|$ . On peut relier  $P$  et  $P'$  par des chemins de  $C_{n+1}^H(M)$  aux points  $(q, p_2, \dots, p_{n+1})$  et  $(q, p'_1, \dots, p'_{n+1})$  respectivement. Les deux derniers points appartiennent au connexe (par hypothèse de récurrence)  $\{q\} \times C_n^H(M \setminus H \cdot |P, P'|) \subset C_n^H(M)$ . En effet,  $M \setminus H \cdot |P, P'|$  est connexe (on suppose que  $M$  est connexe de dimension supérieure ou égale à 2). Ce qui montre la proposition.  $\square$

Remarquons que si  $M$  est connexe et de dimension supérieure ou égale à 2, alors l'espace  $C_n^H(M)$  est le complémentaire dans  $M^n$  de variétés  $N_1, \dots, N_l$  de codimension supérieure à 2. On peut en déduire par des arguments de géométrie que  $C_n^H(M)$  est connexe.

## 1.2 Espaces de configurations tordus de surfaces

On décrit localement l'action des stabilisateurs relatifs à une action d'un groupe fini sur une surface. Ceci permet de décrire "localement" les espaces de configurations tordus des surfaces.

Soit  $S$  une surface orientée, compacte, sans bord, munie d'une action fidèle par difféomorphismes (conservant l'orientation) d'un groupe fini  $H$ . On note  $S_*$  l'ensemble des points de  $S$  à stabilisateur trivial pour l'action de  $H$  sur  $S$ . On suppose que  $S \setminus S_*$  est fini. On montre que ceci est automatique car  $H$  préserve l'orientation (voir remarque 1.2.2).

**Proposition 1.2.1.** *Soit  $p$  un point de  $S$ . Le stabilisateur  $H_p$  de  $p$  est un sous-groupe cyclique de  $H$ . De plus, il existe un disque  $D_p$  autour de  $p$  tel que :*

1. *Le groupe  $H_p$  agit sur  $D_p$ , cette action est équivalente par un difféomorphisme  $i_p$  à l'action par multiplication du groupe  $\mu_N$  des racines  $N$ -ièmes de 1 dans  $\mathbb{C}^\times$  sur  $\mathbb{C}$ , où  $N = |H_p|$ .*
2.  *$D_p \cap (H \cdot q) = H_p \cdot q$ , pour  $q \in D_p$ .*

*En particulier, pour  $p$  un point à stabilisateur trivial,  $D_p$  ne contient pas deux éléments d'une même orbite.*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{m}$  une métrique riemannienne  $H$ -invariante sur  $S$  (on peut en obtenir en faisant la moyenne d'une métrique quelconque). Le groupe  $H_p$  agit naturellement par isométries sur  $T_p S$ ; on a donc un morphisme  $T_p : H_p \rightarrow \mathrm{O}(T_p S)$ , injectif d'après la proposition 3.11 de [32]. Plus précisément,  $H_p$  est inclus dans  $\mathrm{SO}(T_p S) \simeq S^1$  car  $H$  préserve l'orientation. Ainsi,  $H_p$  est isomorphe à  $\mu_N$  avec

$N = |H_p|$ . De plus, pour tout disque  $D_r \subset T_p S$  centré en zéro de rayon  $r$  inférieur au rayon d'injectivité de l'application exponentielle  $\text{Exp}_p : T_p S \rightarrow S$ , l'exponentielle établit un difféomorphisme entre  $D_r$  et  $D_p(r) = \text{Exp}_p(D_r)$ . De plus,  $\text{Exp}_p$  vérifie :

$$\forall h \in H_p, \quad \text{Exp}_p \circ T_p(h) = h \circ \text{Exp}_p.$$

En effet, si  $\gamma$  est la géodésique d'origine  $p$  et de vecteur  $v \in T_p S$ , alors  $h \circ \gamma$  est la géodésique de vecteur  $T_p(h)(v)$  d'origine  $h(p) = p$ . On voit donc que  $H_p$  agit sur  $D_p(r)$  et que cette action est équivalente à celle de  $\mu_N$  par multiplication sur  $D_r$ . Ce qui montre (1).

Montrons que certains des disques  $D_p(r)$  satisfont également l'assertion (2). Si le contraire était vrai, on aurait pour tout  $k \geq 1$ , existence de  $q_k \in D_p(\frac{1}{k})$  et  $g_k \in H \setminus H_p$  tels que  $g_k(q_k) \in D_p(\frac{1}{k})$ . Comme  $H$  est fini, on peut extraire une suite  $(q_{k_i})_{i \geq 0}$  de  $(q_k)_{k \geq 0}$  telle que  $(g_{k_i})_{i \geq 0}$  est constante égale à un certain  $g \in H \setminus H_p$ . Comme  $(q_{k_i})_{i \geq 0}$  tend vers  $p$ , en passant à la limite, on trouve la contradiction  $p = g(p)$ .

L'assertion finale est une conséquence immédiate de (2).  $\square$

**Remarque 1.2.2.** *La première assertion de la proposition montre que les points fixés par un élément non trivial de  $H$  sont isolés. De plus, l'ensemble des points fixés d'un élément de  $H$  est fermé. Comme  $H$  est fini et  $S$  est compact, l'ensemble  $S \setminus S_*$  est fini.*

Soit  $k$  un entier inférieur ou égal à  $n$  et  $(p_{k+1}, \dots, p_n) \in C_{n-k}^H(S_* \setminus (H \cdot D_p))$ .

**Proposition 1.2.3.** *Soit  $p \in S$ ,  $N$  le cardinal de  $H_p$  et  $i_p$  le difféomorphisme de la proposition 1.2.1 :*

1. *L'application  $F_k$  de  $\mathbb{C}^k$  dans  $S^n$  donnée par :*

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto (i_p(x_1), \dots, i_p(x_k), p_{k+1}, \dots, p_n),$$

*induit par restriction une inclusion  $i_p^{(k)} : C_k^{\mu_N}(\mathbb{C}) \rightarrow C_n^H(S)$ .*

2. *En particulier, si  $H_p = 1$ ,  $F_k$  est une inclusion de  $C_k(\mathbb{C})$  dans  $C_n^H(S)$ .*

3. *De plus,  $i_p^{(k)}$  se restreint en une inclusion  $\bar{i}_p^{(k)} : C_k^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times) \rightarrow C_n^H(S_*)$*

Cela est une conséquence immédiate de la proposition 1.2.1.

Notons que certains espaces de configurations contiennent des espaces de configurations  $C_n^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times)$  non attachés à des points fixes. C'est le cas des espaces  $C_n^{\bar{\Lambda}}(E)$ , où  $\bar{\Lambda}$  et  $E$  sont comme dans la section 1.1. En effet, on a une équivalence entre l'action de  $\bar{\Lambda}$  sur  $E$  et l'action naturelle de  $\mu_d \times \mu_{d'} \subset S^1 \times S^1$  sur  $S^1 \times S^1$ , pour  $d$  et  $d'$  bien choisis. L'injection  $f : \mathbb{C}^\times \rightarrow S^1 \times S^1$  définie par :

$$z \rightarrow \left( \frac{z}{|z|}, e^{\frac{2i\pi|z|}{d'(1+|z|)}} \right),$$

est  $\mu_d$  équivariante et induit une injection de  $C_n^{\mu_d}(\mathbb{C}^\times)$  dans  $C_n^{\bar{\Lambda}}(E)$ . D'une manière plus visuelle, si  $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$ , alors l'image de  $f$  correspond à l'image de la bande  $]0, \frac{1}{d'}[ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  dans  $E$ . De même, on a une inclusion  $C_n^{\mu_{d'}}(\mathbb{C}^\times) \subset C_n^{\bar{\Lambda}}(E)$ . Enfin, des inclusions similaires existent pour des surfaces de genre supérieur.

### 1.3 Définition et description de l'espace $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$

On étudie maintenant le cas où  $S = \mathbb{P}^1$  et où  $H$  est un groupe fini  $G$  d'homographies, ainsi que les espaces de configurations tordus associés (voir section 1.2). On commence d'abord par un rappel sur les sous-groupes finis de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  et leurs actions. On tire des informations sur ces groupes à partir des sous-groupes de  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ .

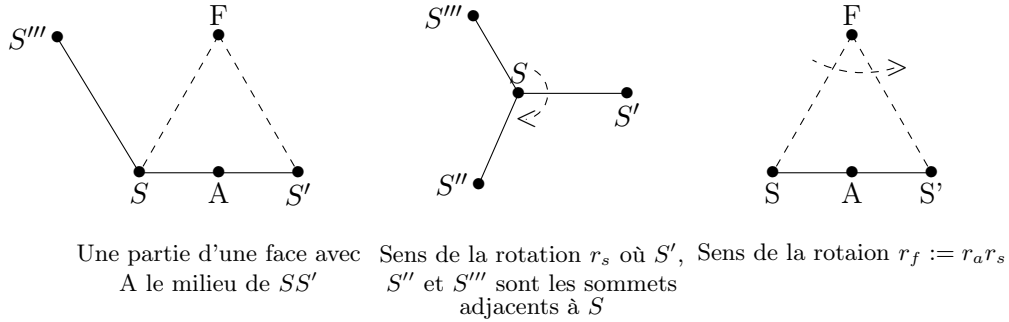
Le groupe  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  contient un unique sous-groupe  $C_l$ , cyclique d'ordre  $l$  et fixant le point  $(0, 0, 1)$ .

On appelle  $D_l$  le sous-groupe de  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  engendré par  $C_l$  et la rotation d'angle  $\pi$  qui fixe  $(0, 1, 0)$ . On peut voir ce groupe comme le groupe des isométries directes de la partie  $\mathcal{D}_l$  de  $\mathbb{R}^3$ , obtenue comme bord de l'enveloppe convexe des points  $(0, 0, 2)$ ,  $(0, 0, -2)$  et du  $l$ -gone régulier centré en 0 ayant  $(0, 1, 0)$  comme sommet et situé dans le plan  $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ . On a trois types de points à stabilisateur non trivial pour cette action : les sommets du  $l$ -gone les milieux de ses arêtes et les points  $(0, 0, 2)$ ,  $(0, 0, -2)$ . Chaque type constitue une orbite sous l'action de  $D_l$ . Une face (triangle) de  $\mathcal{D}_l$  constitue un domaine fondamental et le quotient  $\mathcal{D}_l/D_l$  s'obtient en identifiant entre eux les points du bord de ce triangle par la symétrie par rapport à la médiane passant par le milieu du côté provenant du  $l$ -gone.

Les groupes d'isométries directes des polyèdres réguliers sont les suivants :

Polyèdre	Groupe des isométries	Polyèdre dual
Tétraèdre	$\mathfrak{A}_4$	Tétraèdre
Cube	$\mathfrak{S}_4$	Octaèdre
Dodécaèdre	$\mathfrak{A}_5$	Icosaèdre

Les groupes d'isométries d'un polyèdre et de son dual sont les mêmes. Décrivons ces groupes en utilisant le tétraèdre, le cube et le dodécaèdre. Ces groupes contiennent les rotations d'ordre 2 autour d'un axe reliant les milieux de deux arêtes opposées, les rotations d'ordre 3 autour d'un axe reliant deux sommets opposés dans le cas du dodécaèdre et du cube ou autour d'un axe reliant un sommet et le milieu d'une face opposée dans le cas du tétraèdre.



**Figure 1 :** Domaine fondamental et rotations

On peut choisir une rotation  $r_a$  d'ordre 2 et une rotation  $r_s$  d'ordre 3 (voir Figure 1) dans le groupe d'isométries permettant d'en donner les présentations suivantes :

Groupe	Générateurs	Relations
$\mathfrak{A}_4$	$r_a, r_s$	$r_a^2 = r_s^3 = (r_a r_s)^3 = 1$
$\mathfrak{S}_4$	$r_a, r_s$	$r_a^2 = r_s^3 = (r_a r_s)^4 = 1$
$\mathfrak{A}_5$	$r_a, r_s$	$r_a^2 = r_s^3 = (r_a r_s)^5 = 1$

Alors  $r_f := r_a r_s$  est une rotation dont l'axe passe par le centre d'une face (voir figure 1). On a trois types de points à stabilisateur non trivial : les sommets les milieux d'arêtes et les milieux de faces. Le groupe agit transitivement sur les points d'un même type. Enfin, le domaine fondamental de l'action sur le polyèdre régulier est un triangle qui est l'enveloppe convexe du milieu d'une face et d'une arête de la même face (voir Figure 1, le triangle  $FSS'$ ). Fixons dans  $\mathbb{R}^3$  un polyèdre régulier centré en 0 et notons  $G$  son groupe d'isométries directes. Soit  $S^2$  la sphère de  $\mathbb{R}^3$  de centre 0 et de rayon 1. La projection radiale permet d'identifier le polyèdre à  $S^2$ . Le quotient de  $S^2$  par l'action de  $G$  s'identifie à  $S^2$  et s'obtient en identifiant les points du bord de  $FSS'$  par la symétrie d'axe  $FA$ , où  $A$  est le milieu de  $SS'$  (Figure 1).

**Proposition 1.3.1.** *Un sous-groupe fini de  $SO_3(\mathbb{R})$  est conjugué dans  $SO_3(\mathbb{R})$  à  $C_l$ ,  $D_l$  pour  $l \geq 1$  ou à l'un des groupes d'isométries directes  $(\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5)$  des polyèdres réguliers.*

Ainsi, on a une classification des actions naturelles des sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$  sur  $S^2$ . Cela va permettre de décrire l'action d'un groupe d'homographies, sur  $\mathbb{P}^1$ .

En utilisant les deux projections stéréographiques par rapport au plan de l'équateur, on obtient une identification  $f : S^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ . Cette identification induit un isomorphisme  $f^*$  entre  $PSU_2(\mathbb{C})$  et  $SO_3(\mathbb{R})$ . Le couple  $(f, f^*)$  réalise une équivalence entre, d'une part  $S^2$  munie de l'action de  $SO_3(\mathbb{R})$ , d'autre part  $\mathbb{P}^1$  muni de l'action de  $PSU_2(\mathbb{C})$  obtenue par restriction de celle de  $PSL_2(\mathbb{C})$ . En utilisant cette équivalence, la proposition 1.3.1 se traduit en :

**Proposition 1.3.2.** *L'action d'un sous-groupe fini  $G$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{P}^1$  est équivalente à l'une des actions suivantes :*

1. *L'action du groupe  $\mu_l$  des racines  $l$ -ièmes de l'unité (dans  $\mathbb{C}$ ) par multiplication sur  $\mathbb{P}^1$ .*
2. *L'action de  $D_l \simeq \mu_l \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{P}^1$ , où  $\mu_l$  agit par multiplication et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agit via l'homographie  $z \mapsto \frac{1}{z}$ .*
3. *L'action de l'un des groupes des isométries directes d'un polyèdre régulier sur celui-ci, identifié à  $S^2$  par projection radiale.*

*L'équivalence est l'équivalence sous l'action de conjugaison dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ .*

Dans la suite de cette section, on fixe le groupe fini  $G$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  et on pose (comme dans la section 1.2)  $\mathbb{P}_*^1 = \{p \in \mathbb{P}^1 \mid G_p = 1\}$ . Considérons le quotient de  $\mathbb{P}^1$  par l'action de  $G$  :

**Proposition 1.3.3.** *Le quotient de  $\mathbb{P}^1$  par  $G$  s'identifie à  $\mathbb{P}^1$ . L'application quotient  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1/G$  donne (pour  $G \neq 1$ ) un revêtement ramifié qui a deux points de branchement si  $G \simeq \mu_l$  et 3 trois points de branchement sinon.*

*Cette application (à automorphisme près) se restreint en un revêtement  $\pi_G : \mathbb{P}_*^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$  si  $G \simeq \mu_l$  ( $l \neq 1$ ), en un revêtement  $\pi_G : \mathbb{P}_*^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  si  $G$  n'est pas cyclique.*

*Démonstration.* Comme  $G$  agit d'une façon holomorphe sur  $\mathbb{P}^1$ , la description des points à stabilisateur non trivial et du domaine fondamental de l'action de  $G$  donnée précédemment permet de montrer la proposition.  $\square$

**Proposition 1.3.4.** *Pour tout  $g \in G$  on pose  $\mathrm{Fix}(g) = \{q \in \mathbb{P}^1 \mid g \cdot q = q\}$ . Il existe une involution  $\mathrm{at}$  de  $\mathbb{P}^1$  qui commute avec les éléments de  $G$  telle que :*

1. *Pour tout  $g \neq 1$ ,  $\mathrm{Fix}(g)$  est de la forme  $\{p, \mathrm{at}(p)\}$  avec  $p \neq \mathrm{at}(p)$ .*
2. *Il existe un sous-ensemble fini  $X$  de  $\mathbb{P}^1$  satisfaisant :*

$$(\mathbb{P}_*^1)^c = X \sqcup \mathrm{at}(X) \quad \text{et} \quad G \setminus \{1\} = \bigsqcup_{p \in X} (G_p \setminus \{1\}),$$

*où  $(\mathbb{P}_*^1)^c$  est le complémentaire de  $\mathbb{P}_*^1$  dans  $\mathbb{P}^1$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer la proposition pour  $G$  un groupe fini de rotations de la sphère. Dans ce cadre, l'application  $\mathrm{at}$  n'est autre que l'antipode de  $S^2$ . Ce qui montre (1). L'existence d'un  $X$  fini satisfaisant  $(\mathbb{P}_*^1)^c = X \sqcup \mathrm{at}(X)$  est immédiate à partir de (1). Un tel ensemble satisfait automatiquement la dernière condition de (2). En effet, si l'intersection  $G_p \cap G_q$  pour  $p \neq q$  est différente de  $\{1\}$ , alors (1) nous mène à la contradiction  $q \in \{p, \mathrm{at}(p)\}$ . Ce qui montre la proposition.  $\square$

Notons que pour  $G \subset \mathrm{PSU}_2(\mathbb{C})$ , l'involution  $z \mapsto -1/\bar{z}$  satisfait la proposition. Enfin, certains des faits énoncés précédemment peuvent être démontrés par des outils de "géométrie complexe" comme par exemple la formule de Riemann-Hurwitz et

d'autres résultats.

Passons à l'espace  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  :

**Définition 1.3.5.** *On rappelle que  $G$  est fixé et que  $\mathbb{P}_*^1 = \{p \in \mathbb{P}^1 | G_p = 1\}$ . L'espace  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  est l'espace de configuration "tordu" de  $n$  points de  $\mathbb{P}_*^1$  lié à l'action de  $G$  (voir définition 1.1.1). C'est l'ensemble :*

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{P}^1)^n | x_i \notin G \cdot x_j, \text{ pour } i \neq j \text{ et } G_{x_i} = \{1\}\}$$

où  $G_{x_i}$  est le stabilisateur de  $x_i$ .

L'espace de configuration est naturellement muni d'une action de revêtement du groupe  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ . En appliquant les prémices de la section 1.1, pour  $M = \mathbb{P}_*^1$  et  $H = G$ , on obtient :

**Proposition 1.3.6.** *Pour  $G$  non cyclique, on a les revêtements compatibles suivants :*

1.  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \rightarrow C_n(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$  de groupe d'automorphismes  $G^n$ ,
2.  $C_n(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) \rightarrow C_n(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})/\mathfrak{S}_n$  de groupe d'automorphismes  $\mathfrak{S}_n$ ,
3.  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \rightarrow C_n(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})/\mathfrak{S}_n$  de groupe d'automorphismes  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ ,

et donc la suite exacte :

$$1 \rightarrow \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \rightarrow \pi_1(C_n(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})/\mathfrak{S}_n) \rightarrow G^n \rtimes \mathfrak{S}_n \rightarrow 1.$$

Pour  $G$  cyclique (non trivial) la proposition reste vraie si l'on remplace  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  par  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$ .

## 1.4 Méridiens et lacets de $C_n^H(S_*)$

Dans la première sous-section, on introduit la notion de méridiens (d'une manière adaptée). C'est une classe de lacets libres appelés méridiens. Ensuite on compare les classes d'homotopie de deux méridiens. Dans la deuxième sous-section, on définit des lacets de  $C_n^H(S_*)$  qu'on identifiera à des méridiens. Cette identification permet de décrire l'action de  $H^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  sur les classes de conjugaison de ces lacets. L'utilisation des méridiens apparaît dans des domaines similaires comme l'étude du complémentaire d'un arrangement d'hyperplan ou l'étude des courbes algébriques. Par exemple, dans l'étude de l'arrangement correspondant à  $C_n(\mathbb{C})$ , Arnold interprète une tresse comme méridien ([1]).

### 1.4.1 Rappels de topologie différentielle

On va introduire la notion de méridien. Dans cette sous-section les variétés sont sans bord sauf mention du contraire. Soit  $M$  une variété différentielle connexe orientée et  $N$  une sous-variété de  $M$  connexe orientée de codimension 2. On considère un disque  $D \subset M$  transverse à  $N$  tel que  $D \cap N$  est réduit à un point  $p$ . Soit  $(v_3, \dots, v_{\dim M})$  une base du plan  $T_p N$  tangent à  $N$  en  $p$  compatible avec l'orientation de  $N$ . On oriente  $D$  grâce à une base  $(v_1, v_2)$  de  $T_p D$  choisie de manière que  $(v_1, \dots, v_{\dim M})$  soit une base de  $T_p M$  compatible avec l'orientation de  $M$ .

**Définition 1.4.1.** Soit  $D$  comme dans le paragraphe précédent muni de l'orientation ci-dessus. Un méridien  $m$  est un lacet  $m : [0, 1] \rightarrow M$  qui est une paramétrisation du bord de  $D$  respectant l'orientation. On dira que  $m$  est un méridien au-dessus de  $p$ .

**Proposition 1.4.2.** Soit  $m_1$  et  $m_2$  deux méridiens. Il existe un chemin  $\beta$  de  $M \setminus N$  tel que  $m_1$  est homotope (à extrémités fixées) à  $\beta m_2 \beta^{-1}$  dans  $M \setminus N$ . En particulier, si  $m_1$  et  $m_2$  ont le même point de base  $* \in M \setminus N$ , alors  $m_1$  et  $m_2$  sont conjugués dans  $\pi_1(M \setminus N, *)$ .

*Démonstration.* D'abord, on vérifie que le lemme est vrai pour  $M = \mathbb{R}^n \times D$  et  $N = \mathbb{R}^n \times \{0\}$  avec  $D$  un disque centré en zéro : il suffit de montrer que tout méridien est conjugué par un chemin à un méridien à valeurs dans  $\{0\} \times D$ . Soit  $m$  un méridien paramétrant le bord de  $D_1$  comme dans la définition 1.4.1. On note  $q$  l'unique point d'intersection (transverse) de  $D_1$  avec  $N$ . Notons  $\pi^{(2)}$  la projection naturelle de  $\mathbb{R}^n \times D$  sur  $\{0\} \times D$ . L'intersection de  $D_1$  avec  $N$  étant transverse, on sait qu'il existe un voisinage  $V_q$  de  $q$  dans  $D_1$  tel que  $\pi|_{V_q}^{(2)}$  est injective. En utilisant une isotopie  $I : D_1 \times [0, 1] \rightarrow D_1$  qui fixe  $q$  et qui envoie  $D_1$  dans  $V_q$ , puis l'isotopie :

$$(1-t)x + t\pi^{(2)}(x), \text{ pour } x \in V_q \text{ et } t \in [0, 1],$$

on trouve que  $m$  est conjugué par un chemin à un méridien dans  $\{0\} \times D$ . Ceci montre le lemme dans le cas  $M = \mathbb{R}^n \times D$  et  $N = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ .

Passons au cas général. Soit  $\pi : V \rightarrow N$  un fibré en disques qui est un voisinage de  $N$  dans  $M$  et  $p$  un point de  $N$ . On peut trouver un voisinage  $U_p$  de  $p$  dans  $N$ , difféomorphe à  $\mathbb{R}^{\dim N}$  et au-dessus duquel  $V$  est trivial. On a  $\pi^{-1}(U_p) \simeq \mathbb{R}^{\dim N} \times D$  et  $U_p$  s'identifie à  $\mathbb{R}^{\dim N} \times \{0\}$ .

Tout méridien  $m$  au-dessus d'un point de  $U_p$  est conjugué par un chemin dans  $M \setminus N$  à un méridien de  $\pi^{-1}(U_p)$ . En effet, il suffit de rétrécir le disque contenant  $m$  par une isotopie. Par conséquent, compte tenu du cas  $M = \mathbb{R}^n \times D$  et  $N = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ , tous les méridiens au-dessus des points de  $U_p$  sont conjugués les uns aux autres par des chemins dans  $M \setminus N$ .

On a donc une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $N$  donnée par :

$$x \mathcal{R} y \iff \text{les méridiens au-dessus de } x \text{ sont conjugués à ceux au-dessus de } y,$$

dont les classes d'équivalence sont ouvertes. Comme  $N$  est connexe, on n'a qu'une seule classe. Ceci montre la proposition.  $\square$

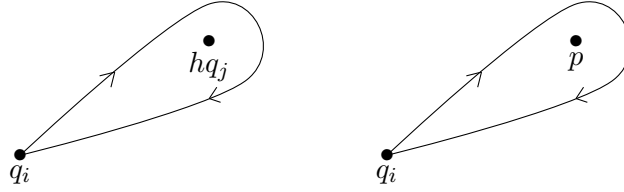
**Corollaire 1.4.3.** *Deux méridiens sont conjugués dans le groupoïde fondamental de  $M \setminus N$ .*

### 1.4.2 Lacets de $C_n^H(S_*)$ et action de $H^n \rtimes \mathfrak{S}_n$

Des lacets de  $C_n^H(S_*)$  seront définis, puis identifiés à des méridiens. Ensuite, on décrit l'action de  $H^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  sur les classes de conjugaison de ces lacets dans  $\pi_1 C_n^H(S_*)$ .

On voit  $S$  comme une surface dans  $\mathbb{R}^3$  de la manière usuelle. On oriente  $S$  en prenant la normale vers l'extérieur. Fixons un point  $Q = (q_1, \dots, q_n) \in C_n^H(S_*)$  et posons  $|Q| = \{q_1, \dots, q_n\}$ .

Pour  $i, j$  distincts dans  $[1, n]$  et  $h \in H$ , on choisit un lacet  $\gamma_{ij}^h$  de  $S_*$  basé en  $q_i$  et faisant un tour autour de  $h \cdot q_j$ . On suppose que  $\gamma_{ij}^h$  est le bord d'un disque fermé  $D \subset S_*$  tel que  $D \cap H \cdot |Q| = \{q_i, h \cdot q_j\}$ . Enfin,  $\gamma_{ij}^h$  est orienté dans le sens indiqué dans la Figure 2 ( $S$  est orienté).



**Figure 2 :** le lacet  $\gamma_{ij}^h$  à gauche et le lacet  $\gamma_i^p$  à droite

**Définition 1.4.4.** *Pour  $i, j$  distincts dans  $[1, n]$  et  $h \in H$ , on note  $x_{ij}^h$  le lacet de  $C_n^H(S_*)$  donné par :*

$$x_{ij}^h = (q_1, \dots, q_{i-1}, \gamma_{ij}^h, q_{i+1}, \dots, q_n),$$

où  $\gamma_{ij}^h$  est comme ci-dessus.

Prenons pour chaque  $i \in [1, n]$  et  $p \in (S_*)^c$ , un lacet  $\gamma_i^p$  de  $S_* \setminus H \cdot |Q|$ , basé en  $q_i$ , qui fait un tour autour de  $p$  et qui est bord d'un disque fermé  $D \subset S_* \cup \{p\} \setminus H \cdot |Q|$ . On suppose que  $\gamma_i^p$  est orienté dans le sens indiqué dans la Figure 3.

**Définition 1.4.5.** *On définit le lacet  $x_i^p$  de  $C_n^H(S_*)$  par :*

$$x_i^p = (q_1, \dots, q_{i-1}, \gamma_i^p, q_{i+1}, \dots, q_n),$$

pour  $i$  dans  $[1, n]$  et  $p \in (S_*)^c$ .

Les définitions de  $x_{ij}^h$  et de  $x_i^p$  dépendent d'un choix de  $\gamma_{ij}$  et d'un  $\gamma_i^p$ . En modifiant ce choix, on ne change pas la classe de conjugaison dans  $\pi_1(C_n^H(S_*), Q)$ . On fixe un choix de ces lacets pour la suite du texte.



On va identifier les lacets  $x_{ij}^h$  et  $x_i^p$  à des méridiens. Posons :

$$I_H = ([1, n]^2 \times H) \cup ([1, n] \times (S_*)^c).$$

On note  $N(i, p)$  l'ensemble des points  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $S^n$  tels que  $x_i = p$  et  $N(i, j, h)$  l'ensemble des points de  $S^n$  tels que  $x_i = h \cdot x_j$ . On définit, pour  $\alpha \in I_H$ , les sous-variétés de  $S^n$  :

$$M_\alpha = S^n \setminus \bigcup_{\beta \in I_H \setminus \{\alpha\}} N(\beta) \quad \text{et} \quad N_\alpha = M_\alpha \cap N(\alpha).$$

L'ensemble  $N(\alpha)$  est une sous-variété de  $M(\alpha)$  de codimension réelle deux de complémentaire  $C_n^H(S_*)$ . De plus,  $M(\alpha)$  et  $N(\alpha)$  sont connexes. En effet,  $N(\alpha)$  est homéomorphe à  $C_{n-1}^H(M)$  et on peut montrer la connexité de  $M(\alpha)$  par des arguments similaires à ceux de la preuve de la proposition 1.1.4.

Remarquons que  $x_{ij}^h$  est le bord d'un disque de  $M(i, j, h)$  coupant  $N(i, j, h)$  en un unique point :  $(q_1, \dots, q_{i-1}, h \cdot q_j, q_{i+1}, \dots, q_n)$ . Cette intersection est transverse. On munit  $M(i, j, h)$  de l'orientation induite par  $S^n$  et on oriente  $N(i, j, h)$  de façon que  $x_{ij}^h$  devienne un méridien pour  $M = M(i, j, h)$  et  $N = N(i, j, h)$  au sens de la définition 1.4.1. On fait la même chose pour que  $x_k^q$  soit un méridien au sens de 1.4.1 (pour  $M = M(k, q)$  et  $N = N(k, q)$ ). Les orientations ainsi définies de  $M(\alpha)$  et  $N(\alpha)$  sont compatibles avec l'action de  $H^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  ( $H$  conserve l'orientation).

**Définition 1.4.6.** Pour  $\alpha \in I_H$  un lacet  $m$  de  $C_n^H(S_*)$  est dit méridien pour  $\alpha$  si  $m$  satisfait la définition 1.4.1, pour  $M = M(\alpha)$  et  $N = N(\alpha)$  orientée comme ci-dessus.

**Proposition 1.4.7.** Soit  $i, j \in [1, n]$ ,  $h \in H$ ,  $p \in (S_*)^c$  et  $k \in [1, n]$ .

1. Tout méridien pour  $(i, j, h)$  est conjugué par un chemin au lacet  $x_{ij}^h$  et tout méridien pour  $(k, q)$  est conjugué par un chemin à  $x_k^q$ .
2. Soit  $\gamma$  un méridien pour  $(i, j, h)$  basé en  $Q'$  et  $\beta$  un chemin de  $Q$  à  $Q'$ . Le lacet  $\beta\gamma\beta^{-1}$  est conjugué à  $x_{ij}^h$  dans  $\pi_1(C_n^H(S_*), Q)$ . On a un résultat analogue pour  $x_k^q$ .

*Démonstration.* Le premier point est une conséquence de la proposition 1.4.2 et le second est une conséquence du premier.  $\square$

On a vu (section 1.1, prendre  $M = S_*$ ) que l'action de  $H^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  sur  $C_n^H(S_*)$  permet de construire une suite exacte courte :

$$1 \rightarrow \pi_1 C_n^H(S_*) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(C_n(S_*/H)/\mathfrak{S}_n) \rightarrow H^n \rtimes \mathfrak{S}_n \rightarrow 1. \quad (1.1)$$

Fixons une section ensembliste  $s$  de cette suite. On définit :

$$f : H^n \rtimes \mathfrak{S}_n \rightarrow \text{Aut } \pi_1(C_n^H(S_*), Q) \quad (1.2)$$

qui à  $x \in H^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  associe est la conjugaison par  $s(x)$  notée  $f_x$ .

**Proposition 1.4.8.** Soit  $\underline{h} = (h_1, \dots, h_n) \in H^n$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $i, j \in [1, n]$ . On a les équivalences :

$$\begin{aligned} f_{\underline{h}}(x_{ij}^h) &\sim x_{ij}^{h_i h h_j^{-1}} & , & & f_{\underline{h}}(x_i^p) &\sim x_i^{h_i p}, \\ f_{\sigma}(x_{ij}^h) &\sim x_{\sigma(i)\sigma(j)}^h & , & & f_{\sigma}(x_i^p) &\sim x_{\sigma(i)}^p, \end{aligned}$$

où  $\sim$  désigne la relation de conjugaison dans  $\pi_1(C_n^H(S_*), Q)$  et  $f$  est l'application de (1.2) du paragraphe précédent.

*Démonstration.* Montrons que  $f_{\underline{h}}(x_{ij}^h) \sim x_{ij}^{h_i h h_j^{-1}}$ . En appliquant la définition de la multiplication dans  $\pi_1^{\text{orb}} C_n(S_*/H)$  (voir section 1.1), on a que :

$$f_{\underline{h}}(x_{ij}^h) = \gamma(\underline{h} \circ x_{ij}^h) \gamma^{-1},$$

où  $\gamma$  est un chemin reliant  $Q$  à  $\underline{h} \cdot Q$ . Remarquons, que  $\underline{h} \circ x_{ij}^h$  est un méridien pour  $N(i, j, h_i h h_j^{-1})$  et donc il existe un chemin  $\gamma'$  qui conjugue  $\underline{h} \circ x_{ij}^h$  à  $x_{ij}^{h_i h h_j^{-1}}$  (voir proposition 1.4.7). Ceci montre que

$$f_{\underline{h}}(x_{ij}^h) = (\gamma \gamma') x_{ij}^{h_i h h_j^{-1}} (\gamma \gamma')^{-1}$$

et donc établit la relation  $f_{\underline{h}}(x_{ij}^h) \sim x_{ij}^{h_i h h_j^{-1}}$ . On montre les autres relations de la proposition d'une façon similaire.  $\square$

## 1.5 Groupe fondamental des espaces de configurations de surfaces

On montre dans la section 1.5.1 des relations quadratiques dans  $\pi_1 C_n^H(S_*)$  entres des conjugués des lacets du type  $x_{ij}^h$  et  $x_k^p$  définis dans la section précédente. Dans la section 1.5.2, on introduit d'autres lacets de  $C_n^H(S_*)$ , puis on montre que ces lacets avec les lacets du type  $x_{ij}^h$ ,  $x_k^p$  engendrent le groupe fondamental de  $C_n^H(S_*)$ .

On commence par un rappel sur le groupe fondamental de  $C_n(\mathbb{C})$ . Fixons  $(1, 2, \dots, n)$  comme point de base de  $C_n(\mathbb{C})$  et notons  $\pi_1 C_n(\mathbb{C})$  le groupe fondamental de  $C_n(\mathbb{C})$  pointé en  $(1, \dots, n)$ , pour simplifier. Pour  $i < j$  des entiers de  $[1, n]$ , on note  $a_{ij}$  le lacet de  $C_n(\mathbb{C})$  qui est constant sur les composantes  $k$ , pour  $k \neq i$  et dont la  $i$ -ème composante est donnée par le lacet de la Figure 3. Notons que le lacet  $x_{ij}^1$  obtenu en "adaptant" la définition 1.4.4 à  $C_n(\mathbb{C})$  est conjugué au lacet  $a_{ij}$  de ce paragraphe.



**Figure 3 :**  $i$ -ème composante de  $a_{ij}$

**Théorème 1.5.1.** [2] Le groupe  $\pi_1 C_n(\mathbb{C})$  est le groupe engendré par les lacets  $a_{ij}$  (pour  $1 \leq i < j \leq n$ ) soumis aux relations :

1.  $(a_{ij}, a_{kl}) = (a_{il}, a_{jk}) = (a_{ik}, a_{ij}^{-1} a_{jl} a_{ij}) = 1$ , pour  $1 \leq i < j < k < l \leq n$ .
2.  $(a_{ij}, a_{ik} a_{jk}) = (a_{jk}, a_{ij} a_{ik}) = (a_{ik}, a_{jk} a_{ij}) = 1$ , pour  $1 \leq i < j < k \leq n$ .

Ceci est une présentation de  $\pi_1 C_n(\mathbb{C})$ .

Les présentations des groupes  $\pi_1 C_n(S)$ , pour  $S$  une surface sont connues. On peut en trouver dans [5] [6] ou [3]. Ce groupe est aussi appelé le groupe de tresses pure de la surface. Dans le cas tordu, le groupe fondamental de  $\pi_1 C_n^{\text{tordu}}(\mathbb{C}^\times)$  est étudié dans [10] et [14].

### 1.5.1 Relations entre éléments de $\pi_1 C_n^H(S_*)$

On va établir des relations "quadratiques" entre les lacets du type  $x_{ij}^h$  et  $x_k^p$  dans  $\pi_1 C_n^H(S_*)$  définis dans la sous-section 1.4.2.

Pour  $K$  un groupe et  $a_1, \dots, a_{r+s}$  des éléments de  $K$ , on emploie l'expression

$$(a_1 | \cdots | a_r, a_{r+1} | \cdots | a_{r+s})_* = 1,$$

pour dire qu'il existe un conjugué  $a'_i$  de  $a_i$  ( $i \in [1, r+s]$ ), tel que le commutateur :

$$(a'_1 \cdots a'_r, a'_{r+1} \cdots a'_{r+s}),$$

vaut 1 dans  $K$ .

**Remarque 1.5.2.** Rappelons que les lacets  $x_{ij}^h$  et  $x_k^p$  définis dans la sous-section 1.4.2 dépendent d'un point de base  $Q \in C_n^H(S_*)$ . Si certains de ces lacets, disons  $x_1, \dots, x_{r+s}$ , satisfont la relation :

$$(x_1 | \cdots | x_r, x_{r+1} | \cdots | x_{r+s})_* = 1,$$

dans  $\pi_1(C_n^H(S_*), Q)$ . Alors, les analogues des  $x_i$  basés en  $Q'$  satisfont la même relation dans  $\pi_1(C_n^H(S_*), Q')$ .

**Proposition 1.5.3.** On a les relations :

$$(x_{12}, x_{13} | x_{23})_* = 1, \quad \text{pour } n \geq 3,$$

$$(x_{12}, x_{34})_* = 1, \quad \text{pour } n \geq 4,$$

dans  $\pi_1 C_n^H(S_*)$ , où  $x_{ij}$  désigne  $x_{ij}^1$ .

*Démonstration.* Dans la proposition 1.2.1, on montre que pour chaque  $p \in S_*$ , on a une inclusion  $i_p : \mathbb{C} \rightarrow D_p \subset S_*$ . Cette inclusion induit des inclusions  $i_p^{(k)}$  entre espaces de configurations (proposition 1.2.3). Supposons que  $n \geq 4$ . On choisit un

$p \in S_*$  ce qui donne une inclusion  $i_p^{(4)} : C_4(\mathbb{C}) \rightarrow C_n^H(S_*)$  (proposition 1.2.3). D'après le théorème 1.5.1 :

$$(i_p^{(4)}(a_{12}), i_p^{(4)}(a_{34})) = (i_p^{(4)}(a_{12}), i_p^{(4)}(a_{13})i_p^{(4)}(a_{23})) = 1,$$

où les  $a_{ij}$  sont définis au début de la section. Or,  $i_p^{(4)}(a_{ij})$  est un méridien pour  $(i, j, 1)$  et donc il est conjugué au lacet  $x_{ij}^1$  qui admet  $i_p^{(4)}(1, 2, 3, 4)$  comme point de base (d'après la proposition 1.4.7). Par conséquent,

$$(x_{12}, x_{34})_* = (x_{12}, x_{13}|x_{23})_* = 1,$$

dans  $\pi_1(C_n^H(S_*), i_p^{(4)}(1, 2, 3, 4))$ . La remarque 1.5.2 prouve que ces relations sont vraies pour un point de base  $Q \in C_n^H(S_*)$  quelconque. Ce qui montre la proposition pour un  $n \geq 4$ . Les égalités de la proposition sont vraies pour les  $x_{ij}$  basés en  $i_p^{(4)}(1, 2, 3, 4)$  (voir théorème 1.5.1). On traite le cas  $n = 3$  de la même façon en utilisant  $i_p^{(3)}$ .  $\square$

Soit  $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{l}} \in \mu_l$  on pose :

$$a_{ij}(k) := x_{12}^{\zeta^k}, \quad a_1^0 := x_1^0 \quad \text{et} \quad a_2^0 := x_2^0,$$

où  $x_{12}^{\zeta^k}, x_1^0$  et  $x_2^0$  sont les lacets de  $C_2^{\mu_l}(\mathbb{C}^\times) = C_2^{\mu_l}(\mathbb{P}_*^1)$  basés en  $(2, 1)$  comme dans les définitions 1.4.4 et 1.4.5.

**Lemme 1.5.4.** *les relations :*

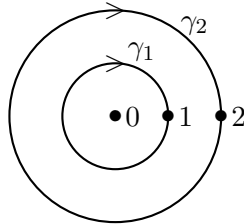
1.  $(a_{12}(0)|\cdots|a_{12}(l-1)|a_1^0, a_2^0)_* = 1,$
2.  $(a_{12}(0)|\cdots|a_{12}(l-1)|a_1^0|a_2^0, a_{12}(0))_* = 1,$

sont satisfaites dans  $\pi_1(C_2^{\mu_l}(\mathbb{C}^\times), (2, 1))$ .

*Démonstration.* Pour  $k \in [1, l]$  et  $i \in [1, 2]$ , on choisit un  $a'_{12}(k)$  conjugué à  $a_{12}(k)$  et un  $a_i^0$  conjugué à  $a_i^0$  tels que  $a_2^0$  est égal à  $(2, \gamma_1)$  et

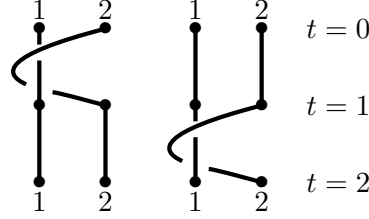
$$\beta := a'_{12}(0)a'_{12}(1)\cdots a'_{12}(N-1)a_1^0$$

est égal à  $(\gamma_2, 1)$ , où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont représentés dans la Figure 4 :



**Figure 4 :** Les lacets  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$

Les lacets  $\beta$  et  $a'_2(0)$  ainsi choisis commutent dans  $\pi_1(C_2^{\mu_l}(\mathbb{C}^\times), (2, 1))$ . En effet, ils sont à image dans  $\text{Im}(\gamma_1) \times \text{Im}(\gamma_2) \subset C_2^{\mu_l}(\mathbb{C}^\times)$  qui est un tore et donc de groupe fondamental abélien. Ce qui montre (1). Montrons (2). Soit  $H_0 : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow C_2^{\mu_l}(\mathbb{C}^\times)$  une homotopie, à valeurs dans  $C_2^{\mu_l}(\mathbb{C}^\times)$ , entre  $a_{12}(0)_*$  et  $*a_{12}(0)$ , où  $*$  est le lacet constant comme dans la figure 5 (quitte à conjuguer  $a_{12}(0)$ ).



**Figure 5 :** Graphes en fonction du temps de  $H_0(0, \cdot)$  (gauche) et de  $H_0(1, \cdot)$  (droite)

L'homotopie tordue  $H : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow C_2^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times)$  définie par :

$$H(s, t) = e^{-2i\pi(s+t)\mathcal{I}_{[1,2]}(s+t)} H_0(s, t),$$

où  $\mathcal{I}_{[1,2]}$  est l'indicatrice de l'intervalle  $[1, 2]$ , est une homotopie entre  $H(0, \cdot) = a_{12}(0)\alpha$  et  $H(1, \cdot) = \alpha a_{12}(0)$ , où  $\alpha$  est défini par :

$$\alpha(t) = (2e^{-2i\pi t}, e^{-2i\pi t}), \quad \text{pour } t \in [0, 1].$$

Or,  $\alpha$  est homotope à  $\beta a_2^0$ . Ce qui montre (2). □

Les relations du lemme 1.5.4 ressemblent aux relations :

$$(X_{02}x_{12}(0) \cdots x_{12}(N-1)X_{01}, x_{12}(0)) = (X_{02}x_{12}(0) \cdots x_{12}(N-1)X_{01}, X_{02}) = 1$$

de la proposition 1.1 de [14].

**Proposition 1.5.5.** *Pour  $p \in (S_*)^c$ , on note  $l$  le cardinal de  $H_p$ . Pour  $h$  un générateur de  $H_p$ , on a les relations suivantes :*

1.  $(x_{12}^1 | x_{12}^h | \cdots | x_{12}^{h^{l-1}} | x_1^p, x_2^p)_* = 1,$
2.  $(x_2^p | x_{12}^1 | x_{12}^h | \cdots | x_{12}^{h^{l-1}} | x_1^p, x_{12}^1)_* = 1,$

dans  $\pi_1(C_n^H(S_*), Q)$ .

*Démonstration.* Dans la proposition 1.2.1, on montre que pour chaque  $p \in (S_*)^c$ , on a un difféomorphisme  $i_p : \mathbb{C} \rightarrow D_p \subset S$  compatible avec l'action de  $H_p$  sur  $D_p$  et celle de  $\mu_N$  sur  $\mathbb{C}$ . On note  $\varphi_p : \mu_N \rightarrow H_p$  l'isomorphisme induit par  $i_p$ . l'application  $i_p$  permet de construire une inclusion  $\bar{i}_p^{(2)} : C_2^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times) \rightarrow C_n^H(S_*)$  associée à  $p$  (proposition 1.2.3). Les images des lacets  $a_{12}(k)$ ,  $a_0^1$  et  $a_0^2$  par  $\bar{i}_p^{(2)}$  sont respectivement

des méridiens pour  $(1, 2, \varphi_p(\zeta^k))$ ,  $(1, p)$  et  $(2, p)$ . Donc, les lacets  $\bar{i}_p^{(2)}(a_{12}(k))$ ,  $\bar{i}_p^{(2)}(a_0^1)$  et  $\bar{i}_p^{(2)}(a_0^2)$  sont respectivement conjugués dans  $\pi_1(C_n^H(S_*), \bar{i}_p^{(2)}(1, 2))$  à  $x_{12}^{\varphi_p(\zeta)^k}$ ,  $x_1^p$  et  $x_2^p$  (Cf. proposition 1.4.7). Par morphisme, les relations du lemme 1.5.4 donnent les relations de la proposition pour  $h = \varphi_p(\zeta)$  et  $Q = \bar{i}_p^{(2)}(1, 2)$ . Ce qui montre la proposition pour un  $Q$  quelconque (voir remarque 1.5.2) et  $h = \varphi_p(\zeta)$ . Comme les relations ci-dessus sont "à conjugaison près", elles sont vraies pour un générateur quelconque de  $H_p$ . Ce qui montre la proposition.  $\square$

**Proposition 1.5.6.** *Soit  $p$  et  $q$  deux éléments de  $(S_*)^c$  n'appartenant pas à une même orbite.*

$$\begin{aligned} \text{Pour } n \geq 2, \quad & (x_1^p, x_2^q)_* = 1, \\ \text{et pour } n \geq 3 \quad & (x_1^p, x_{23}^1)_* = 1, \end{aligned}$$

dans  $\pi_1(C_n^H(S_*), Q)$ .

*Démonstration.* D'après la remarque 1.5.2, il suffit de montrer ces relations pour un point de base au choix. Soit  $D_p$  et  $D_q$  les disques de la proposition 1.2.1 correspondant respectivement à  $p$  et  $q$ . On choisit un point de base  $Q = (q_1, \dots, q_n)$  avec  $q_1 \in D_p \setminus \{p\}$  et  $q_2, \dots, q_n \in D_q \setminus \{q\}$ . On peut supposer (quitte à effectuer une conjugaison) que la première composante  $\gamma_1^p$  de  $x_1^p$  est dans  $D_p$  et que la deuxième composante de  $\gamma_2^q$  (resp.  $\gamma_{23}^1$ ) de  $x_2^q$  (resp. de  $x_{23}^1$ ) est dans  $D_q$ . Comme  $D_p \cap H \cdot D_q = \emptyset$  (quitte à rétrécir les disques) les relations ci-dessus sont satisfaites.  $\square$

Les trois dernières propositions permettent de montrer :

**Proposition 1.5.7.** *Soit  $h, h'$  deux éléments de  $H$ ,  $p$  et  $q$  des points de  $(S_*)^c$ . On a les relations suivantes dans  $\pi_1 C_n^H(S_*)$  :*

1. *Pour  $i, j, k, l$  distincts dans  $[1, n]$  :*

$$(x_{ij}^h, x_{kl}^{h'})_* = 1.$$

2. *Pour  $i, j, k \in [1, n]$  distincts :*

$$(x_{ij}^h, x_{ik}^{hh'} | x_{jk}^{h'})_* = 1 \quad \text{et} \quad (x_i^p, x_{jk}^h)_* = 1.$$

3. *Pour  $i, j$  distincts dans  $[1, n]$  :*

$$(x_i^p, x_j^q)_* = 1, \quad \text{si } q \notin H \cdot p.$$

4. *Pour  $g$  un générateur de  $H_p$  :*

$$(x_{ij}^h | x_{ij}^{hg} | \dots | x_{ij}^{hg^{l-1}} | x_i^{h \cdot p}, x_j^p)_* = (x_{ij}^h | x_{ij}^{hg} | \dots | x_{ij}^{hg^{l-1}} | x_i^{h \cdot p} | x_j^p, x_{ij}^h)_* = 1,$$

où  $l$  est le cardinal de  $H_p$  et  $i, j$  sont distincts dans  $[1, n]$ .

*Démonstration.* Rappelons que dans la sous-section 1.4.2, on a introduit l'application  $f : H^n \rtimes \mathfrak{S}_n \rightarrow \text{Aut } \pi_1(C_n^H(S_*), Q)$  (voir l'équation (1.2)), puis on a décrit, dans la proposition 1.4.8, l'action induite par  $f$  sur les classes de conjugaisons des lacets  $x_{ij}^h$  et  $x_k^p$ . On utilisera, dans cette preuve, les résultats de la proposition 1.4.8 sans le mentionner. Pour un élément  $y \in H$ , on note  $y_i$  l'image de  $y$  par l'inclusion naturelle de  $H$  dans  $H^n$  qui envoie  $H$  sur la  $i$ -ème composante.

On a montré (propositions 1.5.3 et 1.5.6) que :

$$\begin{aligned} (x_{12}, x_{34})_* = 1 & \quad (A) & (x_{12}, x_{13} | x_{23})_* = 1 & \quad (B) \\ (x_1^p, x_{23}^1)_* = 1 & \quad (C) & (x_1^p, x_2^q)_* = 1 & \quad (D) \end{aligned}$$

En considérant l'image de la relation (A) par  $f_{h_1 h'_3}$ , on trouve la relation :

$$(x_{12}^h, x_{34}^{h'})_* = 1 \quad (A')$$

La première relation de la proposition s'obtient comme image de (A') par  $f_\sigma$ , où  $\sigma$  est une permutation qui envoie 1, 2, 3, 4 respectivement sur  $i, j, k, l$ .

Soit  $\sigma'$  une permutation qui envoie 1, 2, 3 respectivement sur  $i, j, k$ . L'image de (B) par  $f_{\sigma' h_1 (h'_3)^{-1}}$  donne la relation  $(x_{ij}^h, x_{ik}^{hh'} | x_{jk}^{h'})_* = 1$  et l'image de (C) par  $f_{\sigma' h_2}$  donne la relation  $(x_i^p, x_{jk}^h)_* = 1$ . Ce qui montre la deuxième relation.

La troisième relation est l'image de (D) par  $f_\tau$ , où  $\tau$  est une permutation qui envoie 1 sur  $i$  et 2 sur  $j$ .

Enfin, si on note  $g$  le générateur de  $H_p$  dans les relations de la proposition 1.5.5, puis on regarde l'image de ces relations par  $f_{\tau h_1}$ , on trouve la relation :

$$(x_{ij}^h | x_{ij}^{hg} | \cdots | x_{ij}^{hg^{l-1}} | x_i^p, x_j^p)_* = (x_i^p | x_j^p | x_{ij}^h | x_{ij}^{hg} | \cdots | x_{ij}^{hg^{l-1}}, x_{ij}^h)_* = 1.$$

Ce qui montre la proposition. □

### 1.5.2 Générateurs de $\pi_1 C_n^H(S_*)$

On définit des lacets de  $\pi_1 C_n^H(S_*)$ , puis on montre que ces lacets avec ceux des définitions 1.4.4 et 1.4.5 engendrent le groupe fondamental de  $C_n^H(S_*)$ . On donne aussi des relations entre ces générateurs.

Si  $S$  est de genre  $m$  le groupe fondamental de  $S$  admet comme présentation :

$$\langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m | (a_1, b_1) \cdots (a_m, b_m) = 1 \rangle,$$

où les  $a_j$  et les  $b_j$  sont les générateurs classiques.

On rappelle que  $Q \in C_n^H(S_*)$  est le  $n$ -uplet  $(q_1, \dots, q_n)$  et que  $|Q|$  désigne l'ensemble  $\{q_1, \dots, q_n\}$ . Pour  $i \in [1, n]$ , on choisit pour chacun des  $a_i$  un lacet représentant  $\gamma_i^l$  basé en  $q_i$  et pour chacun des  $b_i$  un représentant  $\gamma_i^{l+m}$  basé en  $q_i$ . On suppose que les  $\gamma_i^l$  et les  $\gamma_i^{l+m}$  ( $l \in [1, m]$ ) sont à images dans  $(S_* \setminus H \cdot |Q|) \cup \{q_i\}$ .

**Définition 1.5.8.** Pour  $i$  dans  $[1, n]$  et  $l$  dans  $[1, m]$ , on note  $a_i^l$  et  $b_i^l$  les lacets de  $C_n^H(S_*)$  donnés par :

$$a_i^l = (q_1, \dots, q_{i-1}, \gamma_i^l, q_{i+1}, \dots, q_n),$$

$$b_i^l = (q_1, \dots, q_{i-1}, \gamma_i^{l+m}, q_{i+1}, \dots, q_n),$$

où les  $\gamma_i^l$  et les  $\gamma_i^{l+m}$  sont les lacets de  $S$  du paragraphe précédent la définition.

**Proposition 1.5.9.** 1. Le groupe fondamental de  $C_n^H(S_*)$  relatif au point  $Q$  est engendré par les lacets :

- $x_{ij}^h$  pour  $(i, j, h) \in [1, n]^2 \times H$  avec  $i > j$ ,
- $x_i^p$  pour  $(i, p) \in [1, n] \times (S_*)^c$ ,
- $a_i^l, b_i^l$  pour  $(i, l) \in [1, n] \times [1, m]$ ,

qui sont définis dans 1.4.4, 1.4.5 et 1.5.8. Le résultat reste vrai si on remplace les  $x_{ij}^h$  (pour  $i > j$ ) par les  $x_{kl}^h$  pour  $k < l$ .

2. Les lacets  $x_{ij}^h$  et  $x_{ji}^{h^{-1}}$  sont conjugués dans  $\pi_1(C_n^H(S_*), Q)$ .

3. Fixons  $i \in [1, n]$ . Il existe une bijection  $\alpha_i$  de l'ensemble  $[1, r]$ , dans l'ensemble

$$\{x_{ij}^h | j \in [1, n], h \in H, j \neq i\} \cup \{x_i^p | p \in (S_*)^c\},$$

telle que le produit :

$$(a_i^1, b_i^1) \cdots (a_i^m, b_i^m) \alpha_i(1) \cdots \alpha_i(r),$$

soit trivial dans  $\pi_1(C_n^H(S_*), Q)$  (quitte à imposer la bonne orientation aux  $a_i^l$  et  $b_i^l$ ).

*Démonstration.* On va montrer le premier point (pour les  $x_{ij}^h$  avec  $i > j$ ) en utilisant une récurrence. Pour  $n = 1$ , l'espace  $C_n^H(S_*)$  est tout simplement  $S_*$  et donc les  $x_1^p$ , les  $a_1^l$  et les  $b_1^l$  engendrent  $C_1^H(S_*)$ . Supposons que la proposition est vraie jusqu'au rang  $n - 1$  et montrons qu'elle est vraie au rang  $n$  :

Notons  $\pi$  la projection de  $C_n^H(S_*)$  sur  $C_{n-1}^H(S_*)$  du théorème 1.1.3. On sait (théorème 1.1.3) que  $\pi$  est une fibration de fibre :

$$\text{Fib}_n = \{(q_1, \dots, q_{n-1}, x) \in S_*^n | x \notin H \cdot q_i, i < n\},$$



au dessus de  $\pi(Q)$ . Le groupe fondamental de  $\text{Fib}_n$  est engendré par les lacets  $x_n^p, a_n^l, b_n^l$  et les  $x_{ni}^h$  ( $i < n, h \in H, l \in [1, m]$ ). D'autre part, Les  $x_{ij}^h, x_k^p, b_k^l$ , pour  $i > j > n, k > n$  et  $l \in [1, m]$  sont envoyés par  $\pi$  sur des lacets analogues de  $C_{n-1}^H(S_*)$  qui eux engendrent  $\pi_1(C_{n-1}^H(S_*), \pi(Q))$ . Enfin, on a la suite exacte de la fibration :

$$\cdots \rightarrow \pi_1 \text{Fib}_n \rightarrow \pi_1 C_n^H(S_*) \rightarrow \pi_1 C_{n-1}^H(S_*) \rightarrow 1,$$

et donc le point (1) (pour les  $x_{ij}^h$  avec  $i > j$ ) n'est qu'une conséquence du fait suivant : soit  $K \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$  une suite exacte de groupes et  $X$  une famille de  $G$  qui engendre un groupe contenant  $f(K)$ , si  $g(X)$  engendre  $g(G)$ , alors  $X$  engendre  $G$ . On montre le cas où les  $x_{ij}^h$  (pour  $i > j$ ) sont remplacés par les  $x_{kl}^h$  pour  $k < l$ , d'une façon analogue en utilisant la projection de  $C_n^H(S_*)$  dans  $C_{n-1}^H(S_*)$  sur les  $(n-1)$  dernières composantes. Ce qui prouve (1).

L'assertion (2) est vraie car les deux lacets  $x_{ij}^h$  et  $x_{ji}^{h^{-1}}$  sont tous les deux des méridiens pour  $(i, j, h)$ . La troisième assertion s'obtient en observant la fibre de la projection de  $C_n^H(S_*)$  sur  $C_{n-1}^H(S_*)$  obtenue en oubliant la  $i$ -ème composante. Ce qui montre la proposition.  $\square$

**Remarque 1.5.10.** *On peut définir les lacets  $x_{ij}^h, b_i^l$  et  $x_i^p$  de la même façon pour  $C_n^H(S)$ . Sauf que les  $x_i^p$  sont homotopes au lacet trivial dans  $C_n^H(S)$ . De plus, la proposition 1.4.8 est vraie pour  $C_n^H(S)$ ; la preuve est similaire à celle dans le cas de  $C_n^H(S_*)$ . Enfin,  $C_n^H(S_*)$  s'obtient en retirant des sous-variétés de codimension 2 à  $C_n^H(S)$ . On montre donc que  $i_* : \pi_1 C_n^H(S_*) \rightarrow \pi_1 C_n^H(S)$  est surjective. Par conséquent, on obtient que les lacets de type  $x_{ij}^h, a_i^l$  et  $b_i^l$  engendrent  $\pi_1 C_n^H(S)$ .*

## Chapitre 2

# Connexion sur l'espace de configuration $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$

On commence ce chapitre par une section de rappels succinct sur la connexion de Knizhnik-zamolodchikov ([26]) et de sa variante cyclotomique. La section 2.2 est consacrée à la notion de "connexions formelles". Ensuite, on introduit (section 2.3) pour chaque sous-groupe fini  $G$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  et  $Z \subset \mathbb{P}^1$  stable sous l'action de  $G$  par homographies sur  $\mathbb{P}^1$ , une algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_n(Z)$  (définitions 2.3.3 et 2.3.4). Ceci définit l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_n(G)$  de l'introduction qui est l'algèbre  $\mathfrak{p}_n(Z)$ , pour  $Z = (\mathbb{P}_*^1)^c$ . On décrit aussi une action de  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  sur  $\mathfrak{p}_n(Z)$ . Dans la section 2.4, on construit une connexion formelle sur  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$  à valeurs dans  $\mathfrak{p}_n(Z)$ , on montre que cette connexion est plate, on établit une équivalence entre certaines de ces connexions, puis on calcule les composantes de degré zéro et un de la représentation de monodromie des lacets  $x_{ij}^q$  et  $x_k^p$  définis dans le premier chapitre. La connexion ainsi obtenu sur  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  est appelée la connexion  $\mathrm{KZ}_n$  associée à  $G$ ; c'est la connexion de type KZ sur  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  citée dans l'introduction. Dans la dernière section (2.5), on donne une réalisation de la connexion  $\mathrm{KZ}_n$  associée à  $G$  : étant donné une algèbre de lie  $\mathfrak{g}$  munie d'une action de  $G$  et d'un 2-tenseur symétrique  $t \in S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$  qui est  $G$ -invariant, on construit une connexion sur un fibré au-dessus de  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  dont la fibre est un espace vectoriel provenant de certains modules liés à  $\mathfrak{g}$ ; cette connexion "provient" de la connexion universelle  $\mathrm{KZ}_n$  associée à  $G$ .

### 2.1 Connexion KZ et variante cyclotomique

On donne un exposé succinct sur les connexions de Knizhnik–Zamolodchikov (voir aussi [24] et [18]) et des variantes cyclotomiques de ces connexions qui apparaissent dans [14] et [17].

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Rappelons que si  $V_1, \dots, V_n$  sont des  $\mathfrak{g}$ -modules, alors le produit tensoriel  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  possède une structure de  $\mathfrak{g}$ -module naturelle donnée

par :

$$x \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{i=1}^n v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes (x \cdot v_i) \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n,$$

pour  $x \in \mathfrak{g}$  et  $v_k \in V_k$  ( $k \in [1, n]$ ).

Cette structure provient d'une itération du coproduit  $\Delta : \mathcal{U}\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes \mathcal{U}\mathfrak{g}$  :

$$(\Delta \otimes \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id}) \circ \cdots \circ (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta,$$

où  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$  est l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ . Ainsi, une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  agit naturellement sur  $S^2(\mathfrak{g})$ , l'ensemble des 2-tenseurs symétriques sur  $\mathfrak{g}$ . Un élément  $v$  d'un  $\mathfrak{g}$ -module  $V$  est dit  $\mathfrak{g}$ -invariant si  $x \cdot v = 0$ , pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ . L'ensemble des  $\mathfrak{g}$ -invariants de  $V$  est noté  $V^{\mathfrak{g}}$ . Donc, les  $\mathfrak{g}$ -invariants de  $S^2(\mathfrak{g})$  est l'ensemble :

$$S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \{t \in S^2(\mathfrak{g}) \mid \forall x \in \mathfrak{g}, [1 \otimes x + x \otimes 1, t] = 0\}.$$

Pour  $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  et  $i, j$  des entiers distincts de  $[1, n]$ , on note  $t^{ij}$  l'image de  $t$  par le morphisme  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}^{\otimes n}$  qui envoie la première copie de  $\mathfrak{g}$  sur la  $i$ -ème copie de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$  et la deuxième copie de  $\mathfrak{g}$  sur la  $j$ -ème copie de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ .

**Définition 2.1.1.** Soit  $V_1, \dots, V_n$  comme ci-dessus,  $t \in S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$  et  $d$  la différentiel extérieur sur  $C_n(\mathbb{C})$ . La connexion de Knizhnik–Zamolodchikov (ou connexion KZ) est la connexion :

$$\nabla = d - \frac{\hbar}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} t^{ij} \frac{dz_i}{z_i - z_j},$$

sur le fibré trivial  $C_n(\mathbb{C}) \times (V_1 \otimes \dots \otimes V_n)$  au dessus de  $C_n(\mathbb{C})$  avec  $\hbar$  un paramètre complexe.

En considérant  $\hbar$  comme une variable et en remplaçant  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  par le  $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -module  $(V_1 \otimes \dots \otimes V_n)[[\hbar]]$ , on obtient une version de cette connexion sur des modules topologiques.

La connexion de Knizhnik–Zamolodchikov est plate. On prouve la platitude de cette connexion en utilisant les identités :

- $t^{ij} = t^{ji}$ , pour  $i, j$  distincts dans  $[1, n]$ ,
- $[t^{ij}, t^{kl}] = 0$ , pour  $i, j, k, l$  distincts dans  $[1, n]$ ,
- $[t^{ij}, t^{ik} + t^{jk}] = 0$ , pour  $i, j, k$  distincts dans  $[1, n]$ ,

satisfaites par  $t$  et la relation attribuée des fois à Arnold ([1]) :

$$\omega_{ij} \wedge \omega_{jk} + \omega_{jk} \wedge \omega_{ki} + \omega_{ki} \wedge \omega_{ij},$$

pour  $i, j, k$  distincts et où  $\omega_{lm} = \frac{dz_l - dz_m}{z_l - z_m}$ .

Les identités satisfaites par le 2-tenseur  $t \in S^2(\mathfrak{g})$ , motivent la définition de l'algèbre de Lie :

**Définition 2.1.2.** *L'algèbre de Kohno-Drinfeld (sur un corps  $\mathbb{k}$ ) est l'algèbre de Lie graduée engendrée par les éléments  $t^{ij}$ , pour  $i, j \in [1, n]$  distincts, soumis aux relations :*

1. Pour  $i, j$  distincts dans  $[1, n]$  :  $t^{ij} = t^{ji}$ .
2. Pour  $i, j, k, l$  distincts dans  $[1, n]$  :  $[t^{ij}, t^{kl}] = 0$ .
3. Pour  $i, j, k$  distincts dans  $[1, n]$  :  $[t^{ij}, t^{ik} + t^{jk}] = 0$ .

Ces relations sont appelées relations de tresses infinitésimales. Le degré de  $t^{ij}$  est égal à un.

Cela suggère aussi de construire une version universelle de la connexion KZ qu'on verra dans la section 2.2.

Pour  $V_1 = \dots = V_n = V$ , la connexion  $KZ_n$  est  $\mathfrak{S}_n$ -équivariante et induit une représentation de monodromie :

$$\rho_n^{KZ} : \pi_1(C_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathrm{GL}(V^{\otimes n}[[\hbar]])$$

Le groupe  $\pi_1(C_n(\mathbb{C}))$  est le groupe  $B_n$  des tresses à  $n$  brins. Cette représentation se construit algébriquement à l'aide de l'associateur de Drinfeld.

Il existe une version cyclotomique de la connexion KZ, elle apparaît dans [14] et [17]. Décrivons brièvement cette connexion :

Soit  $\sigma$  un automorphisme d'ordre  $N$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et  $t \in S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$  un 2-tenseur invariant par  $\sigma$ . Soit  $V_0$  un  $\mathfrak{g}^\sigma$ -module et  $V_1, \dots, V_n$  des  $\mathfrak{g}$ -modules.

La variante cyclotomique de  $KZ_n$  (pour  $\sigma$ ) est la connexion sur le fibré trivial  $C_n^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times) \times (V_0 \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_n[[\hbar]])$  au-dessus de  $C_n^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times)$ , donnée par :

$$d - \sum_{i \in n} \sum_{a \in [1, N]} T_a^{0i} d \log(z_i) + \sum_{j|j \geq i} (\sigma^a \otimes 1)(t)^{ij} d \log(z_i - \zeta_N^a z_j),$$

où  $T_a^{0i} = (\sigma^a \otimes 1)(t)^{0i} + \frac{1}{2}(\sigma^a \otimes 1)(t)^{ii}$ ,  $\zeta_N = e^{\frac{-2i\pi}{N}}$  et  $d$  est la différentielle extérieure de  $C_n^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times)$ .

Pour  $V_1 = \dots = V_n = V$ , la connexion est  $\mu_N^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  équivariante, elle induit donc une représentation de monodromie :

$$\rho_{n,N}^{KZ} : \pi_1(C_n^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times) / \mu_N^n \rtimes \mathfrak{S}_n) \rightarrow \mathrm{GL}((V_0 \otimes V^{\otimes n})[[\hbar]]).$$

L'espace  $C_n^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times) / \mu_N^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  est biholomorphe à  $C_n(\mathbb{C}^\times) / \mathfrak{S}_n$ , et sont groupes fondamentale est isomorphe au groupe  $B_n^1$  des tresses à  $n$  brins d'un anneau. Le groupe  $B_n^1$  est un sous-groupe de  $B_n$ , une présentation de  $B_n^1$  est donnée dans [34]. Un associateur cyclotomique qui permet de construire la représentation  $\rho_{n,N}^{KZ}$ .

Notons que [14] développe dans des analogues cyclotomiques de plusieurs aspects des travaux de [13]. On trouve aussi dans [8] un analogue cyclotomique du théorème de Kohno-Drinfeld.

## 2.2 Connexions formelles

Dans cette sous-section, On passe en revue certaines notions sur les connexions formelles : définition, platitude, existence de solutions et représentation de monodromie.

On considère  $X$  une variété complexe et  $A$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre complète unitaire graduée (connexe) :  $A = \prod_{k \geq 0} A_k$  telle que  $A_0 = \mathbb{C}$ ,  $A_k \cdot A_l \subset A_{k+l}$  pour  $k, l \in \mathbb{N}$  et que les composantes homogènes soient de dimension finie. L'algèbre  $A$  est supposée munie de la topologie produit. On note  $\Omega^\bullet(X)$  l'algèbre des formes holomorphes sur  $X$  et  $\Omega^\bullet(X) \widehat{\otimes} A$  la complétion de l'algèbre  $\Omega^\bullet(X) \otimes_{\mathbb{C}} A$  pour la filtration  $\{\Omega^\bullet(X) \otimes_{\mathbb{C}} A_{\geq k}\}_{k \geq 0}$  (on note  $A_{\geq k} = \prod_{n \geq k} A_n$ ). On notera  $\wedge$  le produit de  $\Omega^\bullet(X) \widehat{\otimes} A$ . On se donne aussi une 1-forme holomorphe sur  $X$  à valeurs dans  $A_{\geq 1}$  (i.e un élément de  $\Omega^1(X) \widehat{\otimes} A$ ), qu'on notera  $\omega$ .

**Définition 2.2.1.** Soit  $X, A, \omega$  comme ci-dessus et  $d$  la différentielle extérieure sur  $X$ . On dit que  $\omega$  est une connexion formelle sur  $X$ , à valeurs dans  $A$ . Cette connexion est dite plate si  $(d \widehat{\otimes} \text{id}_A)(\omega) - \omega \wedge \omega = 0$

**Exemple 2.2.2.** L'algèbre de Kohno-Drinfeld (sur  $\mathbb{C}$ ),  $\mathfrak{t}_n$  de la définition 2.1.2 est graduée et donc son algèbre enveloppante  $\mathcal{U}\mathfrak{t}_n$  est aussi graduée. Notons  $\widehat{\mathcal{U}}\mathfrak{t}_n$  la complétion de  $\mathcal{U}\mathfrak{t}_n$  pour le degré. La 1-forme :

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} t^{ij} \frac{dz_i}{z_i - z_j},$$

où  $t^{ij}$  sont les générateurs de  $\mathfrak{t}_n$ , est une connexion formelle sur  $C_n(\mathbb{C})$ , à valeurs dans  $\widehat{\mathcal{U}}\mathfrak{t}_n$ . Cette connexion est la version universelle de la connexion KZ. Il existe aussi une version universelle de la connexion KZ cyclotomique (voir [14]), elle apparaît dans la section 2.4.

**Théorème 2.2.3.** Soit  $\omega'$  une connexion formelle sur  $V$ , à valeurs dans  $A$  et  $v$  un point de  $V$ . Si  $\omega$  est plate et  $V$  est simplement connexe, alors l'équation :

$$(d \widehat{\otimes} \text{id}_A)F = \omega' \wedge F,$$

d'inconnue  $F \in \Omega^0(V) \widehat{\otimes} A$ , admet une unique solution dans  $\Omega^0(V) \widehat{\otimes} A$ , à condition initiale fixée ( $F(v) = f \in A$ ). Si  $f$  est inversible dans  $A$  ( $f \in A^\times$ ), alors  $F$  est à valeurs dans  $A^\times$ .

*Démonstration.* Pour alléger les notations on remplacera  $d\widehat{\otimes}\text{id}_A$  par  $d$ . La condition sur la forme  $\omega'$  se traduit par :

$$d\omega'_k - \sum_{l+m=k} \omega'_l \wedge \omega'_m = 0, \text{ pour } k \geq 0,$$

où  $\omega'_k$  désigne la composante homogène de degré  $k$  (selon  $A$ ) de  $\omega'$ . Notons  $F_k$  la composante homogène de  $F$  de degré  $k$ . L'existence d'une solution de l'équation  $dF = \omega' \wedge F$ , est équivalente à l'existence de composantes homogènes  $F_k$  tels que :

$$dF_k = \sum_{l+m=k} \omega'_l \wedge F_m, \quad F_k(v) = f_k \quad (2.1)$$

On va montrer l'existence de ces composantes par récurrence. Au rang zéro,  $F_0$  est solution de  $dF_0 = 0$ , comme  $\omega'$  est à valeurs dans  $A_{\geq 1}$ , et donc  $F_0$  est une constante. Supposons les composantes jusqu'au rang  $k-1$  construites. Calculons la différentielle, qui ne dépend pas de  $F_k$  (comme  $\omega'_0 = 0$ ), de la forme  $\sum_{l+m=k} \omega'_l \wedge F_m$  :

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{l+m=k} \omega'_l \wedge F_m\right) &= \sum_{0 \leq m \leq k} ((d\omega'_m) \wedge F_{k-m} - \omega'_m \wedge dF_{k-m}) \\ &= \sum_{0 \leq m \leq k} (d\omega'_m) \wedge F_{k-m} - \sum_{0 \leq m \leq k} \omega'_m \wedge \sum_{0 \leq l \leq k-m} \omega'_l \wedge F_{k-m-l} \\ &= \sum_{0 \leq s \leq k} (d\omega'_s - \sum_{l+m=s} \omega'_m \wedge \omega'_l) \wedge F_{k-s} = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière forme est donc fermée et donc exacte d'après le théorème de De Rham, car  $V$  est simplement connexe (on utilise que les composantes homogènes sont de dimension finie). D'où, l'existence et l'unicité d'une solution  $F_k$  de (2.1). On vérifie que  $F_k$  satisfait les conditions de Cauchy-Riemann. Cela montre l'existence et l'unicité de solutions dans  $\Omega^0(V)\widehat{\otimes}A$ . Le début de la récurrence montre que la composante de degré 0 de  $F$  est une constante égale à la composante du même degré de la condition initiale  $f$  et donc  $F$  est inversible si et seulement si la condition initiale l'est, ce qui montre le théorème.  $\square$

Pour  $B$  une algèbre de Hopf complète (au sens de la définition 3.1.4, chapitre 3) de coproduit  $\Delta$ , on note  $\mathcal{P}(B) = \{a \in B \mid \Delta(a) = 1\widehat{\otimes}a + a\widehat{\otimes}1\}$  l'ensemble des primitifs de  $B$  et  $\mathcal{G}(B) = \{a \in B \mid \Delta(a) = a\widehat{\otimes}a, a \in B^\times\}$  l'ensemble des éléments diagonaux de  $B$ .

**Théorème 2.2.4.** *Soit  $\omega'$  une connexion formelle plate sur  $V$ , à valeurs dans  $A$ , où  $V$  est simplement connexe. Supposons de plus que  $A$  est une algèbre de Hopf complète, que  $\omega'$  est à valeurs dans  $\mathcal{P}(A)$  et que la condition initiale de l'équation  $(d\widehat{\otimes}\text{id}_A)F = \omega' \wedge F$  est dans  $\mathcal{G}(A)$ . Alors la solution  $F$  du théorème 2.2.3 est à valeurs dans  $\mathcal{G}(A)$ .*

*Démonstration.* On rappelle que  $\wedge$  est le produit de l'algèbre  $\Omega^\bullet(V)\widehat{\otimes}A$ , on notera  $\cdot$  le produit de l'algèbre  $\Omega^\bullet(V)\widehat{\otimes}A\widehat{\otimes}A$ . En utilisant la multiplicativité de  $\Delta$  on obtient :

$$\begin{aligned} [(d\widehat{\otimes}\text{id}_{A\widehat{\otimes}A}) \circ (\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes}\Delta)](F) &= [(\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes}\Delta) \circ (d\widehat{\otimes}\text{id}_{A\widehat{\otimes}A})](F) \\ &= [\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes}\Delta](\omega' \wedge F) \\ &= [\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes}\Delta](\omega') \cdot [\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes}\Delta](F). \end{aligned}$$

Pour  $S \in \Omega^\bullet(V)\widehat{\otimes}A$  on note  $S^{12}$  l'image de  $S$  par l'application qui associe à  $a\widehat{\otimes}b \in \Omega^\bullet(V)\widehat{\otimes}A$  l'élément  $a\widehat{\otimes}b\widehat{\otimes}1 \in \Omega^\bullet(V)\widehat{\otimes}A\widehat{\otimes}A$ . De même, on définit  $S^{13}$  comme l'image de  $S$  par  $a\widehat{\otimes}b \mapsto a\widehat{\otimes}1\widehat{\otimes}b$ .

Calculons la "différentielle" de  $F^{12} \cdot F^{13}$  :

$$\begin{aligned} (d\widehat{\otimes}\text{id}_{A\widehat{\otimes}A})(F^{12} \cdot F^{13}) &= [(d\widehat{\otimes}\text{id}_{A\widehat{\otimes}A})(F^{12})] \cdot F^{13} + F^{13} \cdot [(d\widehat{\otimes}\text{id}_{A\widehat{\otimes}A})(F^{12})] \\ &= (\omega' \wedge F)^{12} \cdot F^{13} + F^{12} \cdot (\omega' \wedge F)^{13} \\ &= (\omega')^{12} \cdot F^{12} \cdot F^{13} + (\omega')^{13} \cdot F^{12} \cdot F^{13}, \\ &= \text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes}\Delta(\omega') \cdot (F^{12} \cdot F^{13}), \end{aligned}$$

car  $[\Omega^0(V), \Omega^\bullet(V)] = 0$  et  $\omega' \in \Omega^\bullet(V)\otimes\mathcal{P}(A)$ . Ces calculs montrent que  $(\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes}\Delta)(F)$  et  $F^{12} \cdot F^{13}$  vérifient une même équation différentielle. Or, on suppose que la condition initiale de l'équation  $(d\widehat{\otimes}\text{id}_A)F = \omega' \wedge F$  est de type groupe. Donc,  $(\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes}\Delta)(F)$  et  $F^{12} \cdot F^{13}$  coïncident au point où on fixe la condition initiale. Le théorème 2.2.3 nous dit que  $(\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes}\Delta)(F) = F^{12} \cdot F^{13}$ . Donc, la solution  $F$  est à valeurs dans  $\mathcal{G}(A)$  ( $F$  est aussi inversible).  $\square$

Dans la suite de cette section, on se donne une connexion  $\omega$  comme dans la définition 2.2.1. On note  $r : \tilde{X} \rightarrow X$  un revêtement universel de  $X$ . On suppose que  $\omega$  est plate. Par conséquent, la connexion  $r^*(\omega)$  sur  $\tilde{X}$  à valeurs dans  $A$  une connexion plate sur un espace simplement connexe. On est dans le cadre du théorème 2.2.3. Étant donné un point  $x_0$  de  $\tilde{X}$ , l'équation  $dF = r^*(\omega) \wedge F$ ,  $F(x_0) = 1$  admet donc une unique solution qu'on notera  $F(\cdot, x_0)$ .

**Proposition 2.2.5.** *Soit  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X, r(x_0))$ . On fait agir  $\pi_1(X, r(x_0))$  à gauche sur  $\tilde{X}$ , via le morphisme de monodromie du revêtement. On a les égalités suivantes :*

1.  $F(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) = F(x, y)$ .
2.  $F(x, y)F(y, z) = F(x, z)$ .
3.  $F((\gamma_1\gamma_2) \cdot x_0, x_0) = F(\gamma_2 \cdot x_0, x_0)F(\gamma_1 \cdot x_0, x_0)$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord la première égalité : tirons en arrière par  $\gamma$  (vu comme automorphisme du revêtement  $r : \tilde{X} \rightarrow X$ ) l'équation satisfaite par  $F(x, y \cdot \gamma)$ . On obtient que  $dF(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) = \gamma^*(r^*(\omega))F(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y)$ . Comme  $\gamma$  est un automorphisme de revêtement,  $r \circ \gamma = r$  et donc les deux membres de (1) satisfont

la même équation différentielle. D'autre part, les deux membres sont égaux pour  $x = y$ . L'égalité (1) est donc une conséquence de l'unicité de solutions. La deuxième égalité est vraie pour  $x = y$ . La différentielle, par rapport à  $x$ , du membre de gauche de (2) est :  $d(F(x, y)F(y, z)) = (r^*(\omega)F(x, y))F(y, z)$ . Par conséquent, les deux membres de (2) vérifient la même équation différentielle. Comme pour (1), l'unicité de la solution donne (2). Le troisième point est obtenu en utilisant les deux premiers :

$$F((\gamma_1\gamma_2) \cdot x_0, x_0) = F((\gamma_1\gamma_2) \cdot x_0, \gamma_1 \cdot x_0)F(\gamma_1 \cdot x_0, x_0) = F(\gamma_2 \cdot x_0, x_0)F(\gamma_1 \cdot x_0, x_0),$$

ce qui montre (3) et achève donc la démonstration de la proposition.  $\square$

Ceci permet de définir pour un point  $x_0 \in \tilde{X}$ , une de monodromie de  $\omega$  :

**Proposition-Définition 2.2.6.** *On suppose que  $\omega$  est plate. Soit  $x_0$  un point de  $\tilde{X}$ .*

1. *L'application :*

$$\begin{aligned} \rho_{x_0} : \pi_1(X, r(x_0)) &\rightarrow 1 + A_{\geq 1} \\ \gamma &\rightarrow F(\gamma \cdot x_0, x_0) \end{aligned}$$

*est un anti-morphisme de groupes.*

2. *Si  $A$  est une algèbre de Hopf complète et  $\omega$  est à valeurs dans  $\mathcal{P}(A)$ , alors  $\rho_{x_0}$  est à valeurs dans  $\mathcal{G}(A)$ .*
3. *L'anti-morphisme  $\rho_{x_0}$  est appelé représentation de monodromie associée à  $x_0$  de la connexion  $\omega$ .*

*Démonstration.* Le fait que  $\rho_{x_0}$  est un anti-morphisme est une conséquence de (3) de la proposition 2.2.5. Le deuxième point est une conséquence de la proposition 2.2.4 et du fait que  $F(x_0, x_0) = 1$  par hypothèse. (3) est une définition.  $\square$

## 2.3 Les algèbres de Lie $\mathfrak{p}_n(Z)$ et $\mathfrak{p}_n(G)$

Le but de cette partie est d'associer à un groupe fini de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  et un entier  $n$  des algèbres de Lie graduées qui sont des variantes des algèbres de Kohno-Drinfeld (Définition 2.1.2).

Les variantes cyclotomiques de la connexion KZ sont sous forme universelle (connexion formelle) dans [14]. Elle sont à valeurs dans les algèbres de Lie :

**Définition 2.3.1** ([14]). *Pour  $n$  et  $N$  des entiers. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{t}_{n,N}(\mathbb{k})$  est la  $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie graduée engendrée par les éléments de degré un : les  $t_0^i$  ( $i \in [1, n]$ ) et les  $t^{ij}(\zeta)$  ( $i, j \in [1, n], i \neq j, \zeta \in \mu_N$ ); soumis aux relations :*

$$\begin{aligned} t^{ij}(\zeta) &= t^{ji}(\zeta^{-1}) \quad , \quad [t^{ij}(\zeta), t_0^j + t_0^i + \sum_{\zeta' \in \mu_N} t^{ij}(\zeta')] = 0 \\ [t_0^j, t_0^i + \sum_{\zeta' \in \mu_N} t^{ij}(\zeta')] &= 0 \quad , \quad \text{pour } i, j \in [1, n], i \neq j \text{ et } \zeta \in \mu_N \end{aligned}$$



et les relations :

$$[t^{ij}(\zeta), t^{kl}(\zeta')] = 0 \quad , \quad \text{si } i, j, k, l \text{ sont distincts dans } [1, n],$$

$$[t^{ij}(\zeta), t^{ki}(\zeta') + t^{kj}(\zeta\zeta')] = 0 \quad , \quad \text{si } i, j, k \text{ sont distincts dans } [1, n],$$

avec  $\zeta, \zeta' \in \mu_N$ .

Dans la suite  $G$  est un groupe fini de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  qui agit naturellement par homographies sur  $\mathbb{P}^1$ . On rappelle que  $\mathbb{P}_*^1$  est l'ensemble des points de  $\mathbb{P}^1$  à stabilisateur trivial.

**Définition 2.3.2.** Soit  $Z$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{P}^1$  stable sous l'action de  $G$ . Pour  $\mathbb{k}$  un corps, on note  $\mathfrak{h}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  la  $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie libre sur l'ensemble des :

$$X_k(p) \quad \text{et} \quad X_{ij}(g),$$

pour  $p \in Z$ ,  $g \in G$  et  $k, i, j \in [1, n]$ , où  $i \neq j$ . On utilisera la notation  $\mathfrak{h}_n(G)$  au lieu de  $\mathfrak{h}_n(Z)$  lorsque  $Z = (\mathbb{P}_*^1)^c$ .

On suppose que le degré de chaque générateur est égal à un. Ainsi, l'algèbre  $\mathfrak{h}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  est munie d'une structure d'algèbre de Lie graduée. De plus, le groupe  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  agit naturellement sur  $\mathfrak{h}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  de la manière suivante :

$$(g_1, \dots, g_n) \cdot X_{ij}(h) = X_{ij}(g_i h g_j^{-1}), \quad (g_1, \dots, g_n) \cdot X_i(p) = X_i(g_i \cdot p),$$

$$\sigma \cdot X_{ij}(h) = X_{\sigma(i)\sigma(j)}(h), \quad \sigma \cdot X_i(p) = X_{\sigma(i)}(p),$$

pour  $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ .

Ceci permet de donner une définition de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  :

**Définition 2.3.3.** Soit  $Z$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{P}^1$  stable sous l'action de  $G$  :

1. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  est le quotient de  $\mathfrak{h}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  par l'idéal de Lie  $\mathfrak{I}$  engendré par le  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ -module sur les éléments :

$$\begin{aligned} & \sum_{q' \in Z} X_1(q') + \sum_{2 \leq m \leq n} \sum_{g \in G} X_{1m}(g), \\ & [X_{12}, X_{13} + X_{23}], [X_{12}, X_{34}], X_{12} - X_{21}, \\ & [X_1(p), X_{23}], [X_1(q), X_2(q')], \\ & [X_{12}, X_1(p) + X_2(p) + \sum_{g \in G_p} X_{12}(g)], [X_1(p), X_2(p) + \sum_{g \in G_p} X_{12}(g)], \end{aligned}$$

et les éléments  $\sum_{g \in G_{p'}} [X_{12}, X_{12}(g)],$

pour  $p, q$  et  $q'$  dans  $Z$  avec  $q' \notin G \cdot q$ ,  $p' \in (\mathbb{P}_*^1)^c \setminus (Z \cap (\mathbb{P}_*^1)^c)$  et où l'on pose  $X_{ij} := X_{ij}(1).$

2. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$  est l'algèbre  $\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$ , pour  $Z = (\mathbb{P}_*^1)^c.$

De façon équivalente, on peut définir  $\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  grâce à une présentation.

**Définition 2.3.4.** 1. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  est l'algèbre de Lie engendrée par les :

$$X_k(p) \quad \text{et} \quad X_{ij}(g),$$

pour  $p \in Z$ ,  $g \in G$  et  $k, i, j \in [1, n]$ , où  $i \neq j$ ; soumis aux relations :

(a) Pour  $i, k$  distincts dans  $[1, n]$  :

$$X_{ik}(h) = X_{ki}(h^{-1}) \quad , \quad \sum_{q \in Z} X_i(q) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{g \in G} X_{ij}(g) = 0 ;$$

(b) Pour  $i, j, k, l$  distincts dans  $[1, n]$  :

$$[X_{ij}(h), X_{kl}(h')] = 0 ;$$

(c) Pour  $i, j, k \in [1, n]$  distincts :

$$[X_{ij}(h), X_{ik}(hh') + X_{jk}(h')] = 0 \quad \text{et} \quad [X_i(p), X_{jk}(h)] = 0 ;$$

(d) Pour  $i, j$  distincts dans  $[1, n]$ ,  $p$  et  $q$  dans  $Z$  :

$$[X_i(p), X_j(q)] = 0, \quad \text{si} \quad q \notin H \cdot p ;$$

(e) Pour  $i, j$  distincts dans  $[1, n]$  et  $p \in Z$  :

$$[X_i(h \cdot p) + \sum_{g \in G_p} X_{ij}(hg), X_j(p)] = 0,$$

$$[X_i(h \cdot p) + X_j(p) + \sum_{g \in G_p} X_{ij}(hg), X_{ij}(h)] = 0 ;$$

(f) Pour  $p' \in (\mathbb{P}_*^1)^c \setminus ((\mathbb{P}_*^1)^c \cap Z)$  :

$$[X_{ij}(h), \sum_{g \in G_{p'}} X_{ij}(hg)],$$

où  $h$  et  $h'$  sont deux éléments quelconques de  $G$ .

2. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$  est l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$ , pour  $Z = (\mathbb{P}_*^1)^c$ . La relation (f) est vide.

**Proposition 2.3.5.** 1. L'action de  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  sur  $\mathfrak{h}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  induit une action par automorphisme de Lie sur  $\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$ . Cette action est donnée par :

$$(g_1, \dots, g_n) \cdot X_{ij}(h) = X_{ij}(g_i h g_j^{-1}), \quad (g_1, \dots, g_n) \cdot X_k(p) = X_k(g_i \cdot p),$$

$$\sigma \cdot X_{ij}(h) = X_{\sigma(i)\sigma(j)}(h), \quad \sigma \cdot X_k(p) = X_{\sigma(k)}(p),$$

pour  $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $\{i, j, k\} \subset [1, n]$  avec  $i \neq j$ ,  $h \in G$  et  $p \in Z$ .

2. L'algèbre  $\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  est une algèbre de Lie graduée pour le degré induit par  $\mathfrak{h}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  et l'action de  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  respecte cette graduation.

On note  $\hat{\mathfrak{p}}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  la complétion de  $\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  pour le degré et  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  la complétion de  $\mathcal{U}\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$  pour le degré. L'algèbre  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{C}}$  est une algèbre unitaire complète graduée. On va définir dans la section 2.4 une connexion formelle sur  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$  à valeurs dans  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{k}}$ .

**Remarque 2.3.6.** Remarquons que pour  $G = 1$  et  $Z = \{\infty\}$ ,  $\mathfrak{p}_n(Z)$  est isomorphe à l'algèbre de Kohno-Drinfeld.

Pour  $G = \mu_N$ , l'algèbre  $\mathfrak{p}_n(G)$  est isomorphe  $\mathfrak{t}_{n,N}$ , la variante cyclotomique de  $\mathfrak{t}_n$  (définition 2.3.1).

En fait, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_n(Z)$  est une algèbre de Lie étroitement liée à  $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$ .

Plus précisément, l'algèbre de Lie  $\hat{\mathfrak{p}}_n(Z)$  est isomorphe à l'algèbre de Lie de Malcev de  $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$ .

## 2.4 Connexion sur l'espace $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$

Pour  $G \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  un groupe fini et  $Z \subset \mathbb{P}^1$  un ensemble fini stable sous l'action de  $G$ , on construit une connexion sur  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$ , à valeurs dans  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{C}}$  et on montre que cette connexion est plate (sous-section 2.4.1). Dans la deuxième sous-section 2.4.2, on montre qu'à équivalence près ces connexions ne dépendent que de la classe d'isomorphisme du couple  $G, Z$ . Enfin, on détermine les termes de degré un des représentations de monodromie de certaines de ces connexions.

### 2.4.1 Définition et platitude de la connexion

On fixe un groupe fini  $G \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  et  $Z \subset \mathbb{P}^1$  un ensemble fini stable sous l'action de  $G$ . On va définir des connexions sur  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$  et on va montrer qu'elle sont plates.

Notons  $[a : b]$  la coordonnée homogène sur  $\mathbb{P}^1$ . Dans la suite, on identifie  $\mathbb{P}^1$  à  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , la coordonnée sur  $\mathbb{C}$  est  $z = a/b$ .

Soit  $p \in \mathbb{P}^1, g \in G$  et  $x, y$  deux coordonnées holomorphes distincts sur  $\mathbb{C}$ . On définit les formes méromorphes suivantes :

$$\omega^p(x) = \frac{dx}{x-p}, \quad \text{sur } \mathbb{P}^1 \quad \text{et} \quad \omega^g(x, y) = \frac{dy}{x-g \cdot y}, \quad \text{sur } (\mathbb{P}^1)^2,$$

où on convient que  $\omega^\infty(x) = 0$ . Pour alléger les notations, on utilisera  $\omega(x, y)$  au lieu de  $\omega^1(x, y)$ .

**Lemme 2.4.1.** *On considère trois coordonnées  $x, z, y$  distinctes sur  $\mathbb{C}$  et  $p \in \mathbb{P}^1$ . Les formes :*

$$\omega(x, y) - \omega(x, z) \quad \text{et} \quad \omega^p(x) - \omega(x, z),$$

définissent respectivement des formes holomorphes sur  $C_3(\mathbb{P}^1)$  et  $C_2(\mathbb{P}^1 \setminus \{p\})$ .

On a vu que  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(Z)_\mathbb{C}$  est une algèbre graduée complète au sens de la section 2.2. D'autre part, l'espace  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$  est une variété complexe. On peut donc considérer des connexion formelles sur  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$  à valeurs dans  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(Z)_\mathbb{C}$ . Dans la suite, pour  $\omega'$  une forme et  $t \in \hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(Z)_\mathbb{C}$ ,  $\omega' \hat{\otimes} t$  sera noté  $\omega't$  ou  $t\omega'$ .

**Proposition-Définition 2.4.2.** *Soit  $\omega_n$  la 1-forme à valeurs dans  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(Z)_\mathbb{C}$  définie par :*

$$\omega_n = \sum_{p \in Z} \sum_{1 \leq i \leq n} \omega^p(z_i) X_i(p) + \sum_{g \in G} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \omega^g(z_i, z_j) X_{ij}(g).$$

1. *Pour  $n \geq 2$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  un dérangement (permutation sans aucun point fixe).*

*On a égalité entre  $\omega_n$  est la forme  $\omega_n(\sigma)$  donnée par :*

$$\sum_{p \in Z} \sum_{1 \leq i \leq n} d_{z_i} \log \frac{z_i - p}{z_i - z_{\sigma(i)}} X_i(p) + \sum_{g \in G} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} d_{z_i} \log \frac{z_i - g \cdot z_j}{z_i - z_{\sigma(i)}} X_{ij}(g),$$

*avec la convention  $d_{z_i} \log \frac{z_i - \infty}{z_i - z_{\sigma(i)}} = -d_{z_i} \log(z_i - z_{\sigma(i)})$ .*

2. *La forme  $\omega_n$  est holomorphe sur  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$ . Elle définit une connexion formelle sur  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$ , à valeurs dans  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(Z)_\mathbb{C}$ .*

3. *On appelle  $\omega_n$  la connexion  $KZ_n$  associée au couple  $G, Z$ . Si  $Z = (\mathbb{P}_*^1)^c$ , on appelle  $\omega_n$  la connexion  $KZ_n$  associée à  $G$ .*

*Démonstration.* Pour  $n \geq 2$ , l'égalité entre  $\omega_n$  et la forme  $\omega_n(\sigma)$  est une conséquence de la relation (1) de la définition 2.3.4. Montrons que  $\omega_n$  est holomorphe. Pour  $n \geq 2$ , on peut déduire du lemme 2.4.1 que les formes de la définition de  $\omega_n(\sigma)$  sont holomorphes sur  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$ . En effet, on a les égalités suivantes :

$$d_{z_i} \log \frac{z_i - p}{z_i - z_{\sigma(i)}} = \omega^p(z_i) - \omega(z_i, z_{\sigma(i)}),$$

$$d_{z_i} \log \frac{z_i - g \cdot z_j}{z_i - z_{\sigma(i)}} = \omega(z_i, g \cdot z_j) - \omega(z_i, z_{\sigma(i)}).$$

Comme  $\omega_n$  est égale à  $\omega_n(\sigma)$  ( $n \geq 2$ ), la forme  $\omega_n$  est holomorphe sur  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$ . Si  $Z \in \{\emptyset, \{\infty\}\}$ , alors  $\omega_1$  est triviale. Dans le cas contraire, on trouve en utilisant la relation (1) de la définition 2.3.4 l'égalité :

$$\omega_1 = \sum_{p \in Z} d \log \frac{z - p}{z - q} X_1(p),$$

pour  $q \in Z$ ,  $q \neq \infty$  et avec la convention  $d \log \frac{z - \infty}{z - q} = -d \log(z - q)$ . On voit grâce à cette écriture que  $\omega_1$  est holomorphe sur  $C_1(\mathbb{P}^1 \setminus Z) = \mathbb{P}^1 \setminus Z$ . Ceci montre que  $\omega_n$  est holomorphe, pour  $n \geq 1$ . Ainsi, le fait que  $\omega_n$  est une connexion formelle sur  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$  à valeurs dans  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(Z)_{\mathbb{C}}$  est immédiat (Cf. définition 2.2.1 de la section 2.2). Ce qui montre (2). Le point (3) est une définition.  $\square$

**Remarque 2.4.3.** Pour  $G = \mu_N$  et  $Z = (\mathbb{P}_*^1)^c$ , la connexion  $\omega_n$  qu'on vient de définir est une connexion sur  $C_n^{\mu_N}(\mathbb{C}^\times)$ , à valeurs dans  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(\mu_N)_{\mathbb{C}} \simeq \hat{\mathcal{U}}\mathfrak{t}_{n,N}(\mathbb{C})$  (voir remarque 2.3.6); Ce n'est autre que la variante cyclotomique (universelle) de la connexion KZ.

Pour montrer la platitude de  $\omega_n$ , on utilise le lemme suivant :

**Lemme 2.4.4.** On a les égalités suivantes entre formes différentielles :

1. Pour  $g \in G$  :

$$d_x \log(g \cdot x - y) = \omega^{g^{-1}}(x, y) - \omega^{g^{-1} \cdot \infty}(x).$$

2. Pour  $g \in G$ , le produit  $\omega(x, z) \wedge \omega^g(y, x)$  est égal à :

$$\omega(x, z) \wedge \omega^g(y, z) + \omega^g(y, z) \wedge \omega^{g^{-1}}(x, y) + \omega^{g^{-1}}(x, y) \wedge \omega^{g \cdot \infty}(y).$$

3. Pour  $p \in \mathbb{P}^1$  et  $g \in G_p \setminus \{1\}$  :

$$\frac{dx}{x - g \cdot x} + \frac{dx}{x - g^{-1} \cdot x} = \omega^p(x) + \omega^{\text{at}(p)}(x),$$

où  $\text{at}$  est l'involution de la proposition 1.3.4.

*Démonstration.* Notons d'abord que si  $S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ , alors :

$$S \cdot \alpha - S \cdot \beta = \frac{(\alpha - \beta) \det(S)}{P_S(\alpha) P_S(\beta)},$$

où  $S \cdot z = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$  et  $P_S(z) = a_{21}z + a_{22}$ . En utilisant cette égalité pour  $S = g$ ,  $\alpha = x$  et  $\beta = g^{-1} \cdot y$ , puis en appliquant  $d_x \log$ , on trouve (1).

Montrons la deuxième égalité. Une décomposition en éléments simples de  $\omega(x, z) \wedge \omega^g(y, x)$  selon la variable  $x$ , donne :

$$\omega(x, z) \wedge \omega^g(y, x) = \omega(x, z) \wedge \omega^g(y, z) + d_y \log(g^{-1} \cdot y - z) \wedge \omega^{g^{-1}}(x, y).$$

Ensuite, on applique (1) à  $d_y \log(g^{-1} \cdot y - z)$ , pour obtenir la deuxième égalité.

Montrons (3). L'homographie  $h(z)$  est de la forme  $\frac{az+b}{cz+d}$  et on a vu (proposition 1.3.4) que  $\mathrm{Fix}(h) = \{p, \mathrm{at}(p)\}$ . On distinguera deux cas :

Si  $\infty \notin \mathrm{Fix}(h)$ , on a  $c \neq 0$  et  $p, \mathrm{at}(p)$  sont deux solutions distinctes de  $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ . On en déduit que  $p + \mathrm{at}(p) = \frac{a-d}{c}$  et que  $p \cdot \mathrm{at}(p) = \frac{-b}{c}$ . Par conséquent, on a :

$$\frac{1}{z-p} + \frac{1}{z-\mathrm{at}(p)} = \frac{2z - (p + \mathrm{at}(p))}{(z-p)(z-\mathrm{at}(p))} = \frac{2cz + d - a}{cz^2 + (d-a)z - b}.$$

En développant  $\frac{1}{z-h \cdot z} + \frac{1}{z-h^{-1} \cdot z}$  avec  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , on trouve (3) pour  $\infty \notin \mathrm{Fix}(h)$ .

Si  $\infty \in \mathrm{Fix}(h)$ ,  $h$  est de la forme  $h(z) = ez + f$  (avec  $e \neq 1$  car  $h$  est d'ordre fini). Un calcul immédiat donne l'égalité souhaitée. Ce qui montre le lemme.  $\square$

**Proposition 2.4.5.** *La 1-forme  $\omega_n$  de la proposition-définition 2.4.2 vérifie :*

$$(d \hat{\otimes} \mathrm{id}_{\hat{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}_n(Z)}_{\mathbb{C}}}) \omega_n = \omega_n \wedge \omega_n = 0.$$

*Elle définit une connexion plate sur  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$ , à valeurs dans  $\hat{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}_n(Z)}_{\mathbb{C}}$ .*

*Démonstration.* Pour simplifier la preuve, on utilisera la convention  $\frac{1}{z-\infty} = 0$ , ce qui est cohérent avec la convention  $\omega^\infty = 0$ .

Comme  $X_{ij}(h) = X_{ji}(h^{-1})$  (voir définition 2.3.4), on peut réécrire  $\omega_n$  sous la forme suivante :

$$\omega_n = \sum_{i \in [1, n]} \sum_{p \in Z} \frac{X_i(p) dz_i}{z_i - p} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{g \in G} X_{ij}(g) [\omega^g(z_i, z_j) + \omega^{g^{-1}}(z_j, z_i)].$$

En posant  $g(z) = \frac{a_g z + b_g}{c_g z + d_g}$  et en simplifiant l'expression ci-dessus, on trouve :

$$\omega_n = \sum_{i \in [1, n]} \sum_{p \in Z} X_i(p) d \log(z_i - p) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{g \in G} X_{ij}(g) d \log(f_g^{ij}).$$

où  $f_g^{ij} = z_i(c_g z_j + d_g) - (a_g z_j + b_g)$ . Comme  $d \circ d = 0$  on en déduit que  $d\omega = 0$ , .

Passons à l'étude du terme  $\omega_n \wedge \omega_n$ . On note  $\omega_n^l$  la partie de  $\omega_n$  contenant  $dz_l$ . Alors  $\omega_n$  est donnée par :

$$\omega_n = \sum_{l=1}^n \omega_n^l. \quad (2.2)$$

En utilisant les relations  $[X_{ij}(h), X_{kl}(h')] = [X_i(p), X_{kl}(h)] = [X_i(p), X_k(q)] = 0$ , pour  $p \notin G \cdot q$  (voir définition 2.3.4), on trouve pour  $i \neq k$  :

$$\omega_n^i \wedge \omega_n^k + \omega_n^k \wedge \omega_n^i = (A + B + C + D + \sum_{j|j \notin \{i,k\}} (E_j^1 + E_j^2 + E_j^3)) dz_i \wedge dz_k, \quad (2.3)$$

où

$$A = \sum_{p \in Z} \sum_{q \in G \cdot p} \frac{[X_i(p), X_k(q)]}{(z_i - p)(z_k - q)}, \quad B = \sum_{p \in Z, g \in G} \frac{[X_i(p), X_{ki}(g)]}{(z_i - p)(z_k - g \cdot z_i)}$$

$$C = \sum_{p \in Z, g \in G} \frac{[X_{ik}(g), X_k(p)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - p)}, \quad D = \sum_{gh \neq 1} \frac{[X_{ik}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - h \cdot z_i)}$$

$$E_j^1 = \sum_{g, h \in G} \frac{[X_{ik}(g), X_{kj}(h)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - h \cdot z_j)}, \quad E_j^2 = \sum_{g, h \in G} \frac{[X_{ij}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - g \cdot z_j)(z_k - h \cdot z_i)}$$

$$E_j^3 = \sum_{g, h \in G} \frac{[X_{ij}(g), X_{kj}(h)]}{(z_i - g \cdot z_j)(z_k - h \cdot z_j)}.$$

On va décomposer les termes  $B, D$  et  $E_j^2$ . En appliquant (2) du lemme 2.4.4, on obtient l'égalité  $E_j^2 = E_j^{21} + E_j^{22} + E_j^{23}$ , où

$$E_j^{21} = \sum_{g, h} \frac{[X_{ij}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - g \cdot z_j)(z_k - hg \cdot z_j)}, \quad E_j^{22} = \sum_{g, h} \frac{-[X_{ij}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - h^{-1} \cdot z_k)(z_k - hg \cdot z_j)}$$

$$\text{et } E_j^{23} = \sum_{g, h} \frac{[X_{ij}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - h^{-1} \cdot z_k)(z_k - h \cdot \infty)}$$

En réindexant les termes de  $E_j^3$ , on trouve :

$$E_j^3 + E_j^{21} = \sum_{g, h \in G} \frac{[X_{ij}(g), X_{ki}(h) + X_{kj}(hg)]}{(z_i - g \cdot z_j)(z_k - hg \cdot z_j)}.$$

De même, en réindexant les termes de  $E_j^{22}$  et en utilisant la relation du type  $X_{lm}(h') = X_{ml}(h'^{-1})$ , on trouve :

$$E_j^{22} + E_j^1 = \sum_{g,h \in G} \frac{[X_{ik}(g), X_{jk}(h^{-1}) + X_{ji}(h^{-1}g^{-1})]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - h \cdot z_j)}.$$

Les relations (c) de la définition 2.3.4 impliquent que  $E_j^3 + E_j^{21} = E_j^{22} + E_j^1 = 0$ . Ainsi, on peut réduire l'équation (2.3) à :

$$\omega_n^i \wedge \omega_n^k + \omega_n^k \wedge \omega_n^i = (A + B + C + D + \sum_{j|j \notin \{i,k\}} E_j^{23}) dz_i \wedge dz_k, \text{ pour } i \neq k. \quad (2.4)$$

Décomposons  $B$ . En appliquant (2) du lemme 2.4.4 à  $B$ , pour  $z = z_i, y = z_k$  et  $z = p$ , on trouve que  $B$  est égal à la somme  $B_1 + B_2 + B_3$ , avec

$$B_1 = \sum_{(p,g) \in Y} \frac{[X_i(p), X_{ki}(g)]}{(z_i - p)(z_k - g \cdot p)}, \quad B_2 = \sum_{(p,g) \in Y} \frac{-[X_i(p), X_{ki}(g)]}{(z_i - g^{-1} \cdot z_k)(z_k - g \cdot p)}$$

$$\text{et } B_3 = \sum_{(p,g) \in Y} \frac{[X_i(p), X_{ki}(g)]}{(z_i - g^{-1} z_k)(z_k - g \cdot \infty)},$$

où  $Y = Z \times G$ . Pour chaque  $q \in G \cdot p$ , on choisit un  $g_q \in G$  tel que  $g_q \cdot p = q$  et on note  $G(p)$  l'ensemble des  $g_q$ . Ainsi :

$$A + B_1 = \sum_{p \in Z} \sum_{g \in G(p)} \frac{[X_i(p), X_k(g \cdot p) + \sum_{h \in G_p} X_{ki}(gh)]}{(z_i - p)(z_k - g \cdot p)}.$$

Ce terme est nul à cause de la relation (e) de la définition 2.3.4. Ce qui réduit (2.4) à :

$$\omega_n^i \wedge \omega_n^k + \omega_n^k \wedge \omega_n^i = (B_2 + B_3 + C + D + \sum_{j|j \notin \{i,k\}} E_j^{23}) dz_i \wedge dz_k, \text{ pour } i \neq k. \quad (2.5)$$

Il nous reste à décomposer  $D$ . La relation 2 du lemme 2.4.4, pour  $x = z_i, z = g \cdot z_k, y = z_k$  et  $g = h$  donne :

$$D = \sum_{gh \neq 1} (D_1(g, h) - D_2(g, h) + D_3(g, h)), \text{ où}$$

$$D_1(g, h) = \frac{[X_{ik}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - hg \cdot z_k)}, \quad D_2(g, h) = \frac{[X_{ik}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - h^{-1} \cdot z_k)(z_k - hg \cdot z_k)}$$

$$\text{et } D_3(g, h) = \frac{[X_{ik}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - h^{-1} \cdot z_k)(z_k - h \cdot \infty)}.$$



On pose

$$D_1 = \sum_{gh \neq 1} (D_1(g, h) - D_2(g, h)) \quad \text{et} \quad D^2 = D - D_1. \quad (2.6)$$

On peut transformer  $D_1$ , puis utiliser la relation du type  $X_{lm}(h') = X_{ml}(h'^{-1})$  dans  $\mathfrak{p}_n(\mathbb{Z})_{\mathbb{C}}$  pour trouver :

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{g \in G} \sum_{h \in G \setminus \{1\}} (D_1(g, (gh)^{-1}) - D_2(gh, g^{-1})) \\ &= \sum_{g \in G} \frac{1}{z_i - g \cdot z_k} \sum_{h \in G \setminus \{1\}} \omega_{k,h} [X_{ik}(g), X_{ik}(gh)], \end{aligned}$$

$$\text{où } \omega_{k,h} = \frac{1}{z_k - h \cdot z_k} + \frac{1}{z_k - h^{-1} \cdot z_k}.$$

De plus, en utilisant la proposition 1.3.4 et (3) du lemme 2.4.4,  $D_1$  se simplifie :

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{g \in G} \frac{1}{z_i - g \cdot z_k} \sum_{q \in X} \left( \frac{1}{z_k - q} + \frac{1}{z_k - \text{at}(q)} \right) \sum_{h \in G_q \setminus \{1\}} [X_{ik}(g), X_{ik}(gh)] \\ &= \sum_{g \in G, p \in (\mathbb{P}_*^1)^c} \sum_{h \in G_p} \frac{[X_{ik}(g), X_{ik}(gh)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - p)}. \end{aligned}$$

Enfin, en appliquant la relation (f) de la définition 2.3.4, la définition de  $(\mathbb{P}_*^1)^c$  et que le crochet est antisymétrique, on trouve :

$$D_1 = \sum_{(p,g) \in Y} \sum_{h \in G_p} \frac{[X_{ik}(g), X_{ik}(gh)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - p)}.$$

On va montrer que la somme  $B_2 + C + D_1$  est nulle. En réindexant les termes de  $B_2$  et en utilisant la relation  $X_{lm}(h') = X_{ml}(h'^{-1})$ , on trouve :

$$B_2 + C + D_1 = \sum_{(p,g) \in Y} \frac{[X_{ik}(g), X_k(p) + X_i(g \cdot p) + \sum_{h \in G_p} X_{ik}(gh)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - p)}.$$

Le numérateur de la fraction est nul en vertu de la relation (e) de la définition 2.3.4 de  $\mathfrak{p}_n(\mathbb{Z})_{\mathbb{C}}$ . Ce qui montre que  $B_2 + C + D_1 = 0$ .

On a décomposé  $D$  en  $D = D_1 + D^2$  (équation (2.6)) et on a montré que la somme  $B_2 + C + D_1$  est nulle. On peut donc simplifier l'équation (2.5) en :

$$\omega_n^i \wedge \omega_n^k + \omega_n^k \wedge \omega_n^i = (B_3 + D^2 + \sum_{j|j \notin \{i,k\}} E_j^{23}) dz_i \wedge dz_k. \quad (2.7)$$

Remarquons que la relation (a) de la définition 2.3.4 :

$$\sum_{q \in Z} X_i(q) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{g \in G} X_{ij}(g) = 0,$$

implique que la somme  $B_3 + D^2 + \sum_{j|j \notin \{i,k\}} E_j^{23}$  est nulle. Donc, pour tout  $i \neq k$  :

$$\omega_n^i \wedge \omega_n^k + \omega_n^k \wedge \omega_n^i = 0.$$

Les éléments  $\omega_n^i \wedge \omega_n^i$  étant nuls par définition de  $\wedge$  et compte tenu de l'équation (2.2), on obtient que  $\omega_n \wedge \omega_n = 0$ . Ce qui achève la démonstration de la proposition.  $\square$

### 2.4.2 Equivalence entre connexions et monodromie

On commence par donner un résultat d'équivalence entre les connexions de la sous-section 2.4.1. Ensuite, on s'intéresse à la représentation de monodromie de ces connexions.

Soit  $G$  et  $G'$  deux sous-groupes finis isomorphes de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ . On a vu dans la section 1.3, que  $G$  et  $G'$  sont conjugués dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  (proposition 1.3.2). Soit  $h$  un élément de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  qui conjugue  $G$  à  $G'$ . On note  $\varphi_h$  l'isomorphisme correspondant :

$$\begin{aligned} \varphi_h : G &\longrightarrow G' \\ g &\longmapsto hgh^{-1} . \end{aligned}$$

Soit  $Z$  et  $Z'$  deux ensembles stables respectivement par  $G$  et  $G'$  tels que  $h(Z) = Z'$ . Pour  $\mathbb{k}$  un corps, la donnée :

$$\mathfrak{p}_n(\varphi_h)_\mathbb{k} X_{ij}(g) = X_{ij}(hgh^{-1}), \quad \mathfrak{p}_n(\varphi_h)_\mathbb{k} X_k(p) = X_k(h \cdot p),$$

Pour  $i, j, k \in [1, n]$ ,  $g \in G$  et  $p \in Z$  avec  $i \neq j$ , définit un isomorphisme :

$$\mathfrak{p}_n(\varphi_h)_\mathbb{k} : \mathfrak{p}_n(Z)_K \xrightarrow{\cong} \mathfrak{p}_n(Z')_\mathbb{k}.$$

Soit  $\omega_n$  la connexion  $KZ_n$  associée au couple  $G, Z$  et  $\omega'_n$  la connexion  $KZ_n$  associée au couple  $G', Z'$ .

**Proposition 2.4.6.** *Soit  $G, G', Z, Z', h, \omega_n$  et  $\omega'_n$  comme dans le paragraphe précédent.*

1. *La connexion  $\omega_n$  associée au couple  $G, Z$  est équivalente à la connexion  $\omega'_n$  associée au couple  $G', Z'$  :*

$$[(h^{-1}, \dots, h^{-1})^* \hat{\otimes} \mathfrak{p}_n(\varphi_h)_\mathbb{C}] \omega_n = \omega'_n,$$

où  $(h^{-1}, \dots, h^{-1})^*$  désigne le tiré en arrière par  $(h^{-1}, \dots, h^{-1})$ .

2. *Il existe à équivalence près une connexion  $KZ_n$  tordue par classe d'isomorphisme de couples  $G, Z$ .*

3. La 1-forme  $\omega_n$  est  $G^m \rtimes \mathfrak{S}_n$ -équivariante. Ici l'action de  $x \in G^m \rtimes \mathfrak{S}_n$  sur  $\omega \hat{\otimes} y \in \Omega^\bullet(C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)) \hat{\otimes} \hat{\mathfrak{p}}_n(Z)_\mathbb{C}$  est donnée par :

$$x \cdot \omega \hat{\otimes} y = (x^{-1})^*(\omega) \hat{\otimes} x \cdot y,$$

où  $x \cdot y$  est l'action de  $x$  sur  $y$  de la proposition 2.3.5.

*Démonstration.* La première relation du lemme 2.4.4, implique les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (h^{-1}, h^{-1})^* \omega^g(z_i, z_j) &= \omega^{ghh^{-1}}(z_i, z_j) - \omega^{h \cdot \infty}(z_i), \\ (h^{-1})^* \omega^p(z_i) &= \omega^{h \cdot p}(z_i) - \omega^{h \cdot \infty}(z_i). \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$[(h^{-1}, \dots, h^{-1})^* \hat{\otimes} \hat{\mathfrak{p}}_n(\varphi_h)_\mathbb{C}] \omega_n = \omega'_n - \sum_{i \in [1, n]} \omega^{h \cdot \infty}(z_i) X(i)$$

où  $X(i) = \sum_{p \in Z} X_i(p) + \sum_{g \in G} \sum_{j|j \neq i} X_{ij}(g)$ . Or,  $X(i)$  est nul dans  $\mathfrak{p}_n(Z)_\mathbb{C}$  (voir définition 2.3.4). L'assertion (2) est une conséquence de (1). Montrons (3). La  $\mathfrak{S}_n$ -équivariance de  $\omega_n$  est immédiate. On vérifie, en utilisant la première relation du lemme 2.4.4 que :

$$\underline{h} \cdot \omega_n = \omega'_n - \sum_{i \in [1, n]} \omega^{h_i \cdot \infty}(z_i) X(i),$$

pour  $X(i)$  comme précédemment et  $\underline{h} = (h_1, \cdot, h_n) \in G^m$ . Comme les  $X(i)$  sont nuls,  $\underline{h} \cdot \omega_n = \omega'_n$ . Ce qui montre la proposition.  $\square$

Passons à l'étude de la représentation de monodromie de  $\omega_n$  la connexion  $KZ_n$  tordue associée à  $G, Z = (\mathbb{P}_*^1)^c$ . On rappelle que dans la section 1.4.2, on a défini des lacets de  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  basés en  $Q$  : les  $x_{ij}^g$  et les  $x_k^p$  (définitions 1.4.4 et 1.4.5).

Soit  $r : \tilde{C} \rightarrow C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  un revêtement universel de  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  et  $\tilde{Q}$  un point de la fibre au-dessus de  $Q$ . On a vu dans la sous-section précédente que  $\omega_n$  est plate. Donc, on peut lui associer (voir section 2.2) une représentation de monodromie :

$$\rho_{\tilde{Q}} : \pi_1(C_n^G(\mathbb{P}_*^1), Q) \rightarrow \mathcal{G}(\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_\mathbb{C}) \quad (2.8)$$

où  $\mathcal{G}(\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_\mathbb{C})$  est le groupe des éléments diagonaux de  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_\mathbb{C}$ .

**Proposition 2.4.7.** *Pour  $1 \leq i \neq j \leq n, g \in G, k \in [1, n]$  et  $p \in (\mathbb{P}_*^1)^c$ , on a les égalités suivantes :*

$$\rho_{\tilde{Q}}(x_{ij}^g) = 1 - 2i\pi X_{ij}(g) + R_{ij}(g), \quad \rho_{\tilde{Q}}(x_k^p) = 1 - 2i\pi X_k(p) + R_k(p),$$

où  $R_{ij}(g)$  et  $R_k(p)$  ne comportent que des termes de degré supérieur ou égale à deux.

*Démonstration.* On ne montrera l'égalité que pour  $x_{ij}^g$ , l'autre cas étant similaire. Pour calculer la monodromie, il faut s'intéresser à la solution  $F$  de l'équation  $dF = r^*(\omega_n) \wedge F$ , avec  $F(\tilde{Q}) = 1$  (cf. section 2.2). Soit  $\tilde{x}_{ij}^g$  le chemin de  $\tilde{C}$  relevant le lacet  $x_{ij}^g$  de point de départ  $\tilde{Q}$ . Son point d'arrivée est  $x_{ij}^g \cdot \tilde{Q}$ . On a  $\rho_{\tilde{Q}}(x_{ij}^g) = F(x_{ij}^g \cdot \tilde{Q})$ . Soit  $F = F_0 + F_1 + [deg \geq 2]$  le développement de  $F$  en composantes homogènes. On sait que  $F_0 = 1$  et on a  $dF_1 = r^*(\omega_n)$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{Q}}(x_{ij}^g) &= 1 + F_1(x_{ij}^g \cdot \tilde{Q}) - F_1(\tilde{Q}) + [deg \geq 2] \\ &= 1 + \int_{\tilde{x}_{ij}^g} r^*(\omega) + [deg \geq 2] \\ &= 1 + \int_{x_{ij}^g} \omega + [deg \geq 2] \\ &= 1 - 2i\pi X_{ij}(g) + [deg \geq 2] \end{aligned}$$

□

En adaptant ce qui précède et en définissant des lacets similaire dans  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$ , on trouve un résultat analogue pour les connexions  $KZ_n$  associés à  $G, Z$ , pour  $Z \neq (\mathbb{P}_*^1)^c$ .

## 2.5 Réalisation de la connexion

On a défini la version "universelle" de la connexion  $KZ_n$  associée à  $G$ . On va construire une connexion  $KZ_n$  associée à  $G$  "classique" sur un fibré au-dessus de  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  (pour  $G$  non cyclique) dont la fibre est constituée de modules liés à une algèbre de Lie.

On fixe un  $G \subset \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  qui n'est pas cyclique. Soit  $\mathfrak{g}$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie munie d'une action de  $G$  par automorphismes de Lie et  $t \in S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$  invariant sous l'action diagonale de  $G$ . On peut trouver des exemples de ce genre de situations pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$ . On a vu dans la section 1.3 que l'action de  $G$  sur  $\mathbb{P}^1$ , possède trois orbites de points à stabilisateur non trivial :  $G \cdot a, G \cdot s$  et  $G \cdot f$ , où  $a$  est le milieu d'une arête,  $s$  est un sommet et  $f$  est le milieu d'une face. Pour  $p$  dans  $\{a, s, f\}$ , on pose  $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}^{G_p}$ , où  $\mathfrak{g}^{G_p}$  est l'algèbre de Lie des invariants de  $\mathfrak{g}$  sous l'action de  $G_p$ . Remarquons que si on échange le point  $a$  par un autre milieu d'arête  $a'$ , alors  $\mathfrak{g}_{a'}$  est isomorphe à  $\mathfrak{g}_a$ . Il en est de même, si on échange  $s$  et  $f$ .

**Proposition 2.5.1.** *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension fini sur  $\mathbb{k}$  de caractéristique nulle, muni d'une action linéaire du groupe fini  $H$ .*

1. Si  $x \in V \otimes V$  est invariant par l'action diagonale de  $G$ , alors  $x$  se décompose en :

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{avec } x_1 \in V^H \otimes V^H \text{ et } x_2 \in V' \otimes V',$$

où  $V' = \text{Ker}(m_H)$  et  $m_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$ . De plus, on a :

$$x_1 = (1 \otimes m_H)(x) = (m_H \otimes 1)(x).$$

2. Si  $V = \mathfrak{h}$  est une algèbre de Lie et que  $H$  agit par automorphisme de Lie. Soit  $x$  comme dans (1), si  $x$  appartient à  $S^2(\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ , alors :

$$x_1 \in S^2(\mathfrak{h}^H)^{\mathfrak{h}^H} \quad \text{et} \quad x_2 \in S^2(\mathfrak{h}'),$$

où  $\mathfrak{h}' = \text{Ker}(m_H)$ .

*Démonstration.* Remarquons d'abord que  $V = V^H \oplus V'$ . En effet,  $m_H^2 = m_H$  et donc :

$$V = \text{Im}(m_H) \oplus \text{Ker}(m_H).$$

Or,  $V' = \text{Ker}(m_H)$  et  $\text{Im}(m_H) = V^H$ . Ce qui montre la décomposition  $V = V^H \oplus V'$ . Soit  $x \in (V \otimes V)^H$ . On a  $x = x_1 + x_2 + x_{1,2} + x_{2,1}$ , où les termes de cette somme sont les composantes de  $x$  selon la décomposition :

$$V \otimes V = (V^H \otimes V^H) \oplus (V' \otimes V') \oplus (V^H \otimes V') \oplus (V' \otimes V^H).$$

On a :

$$(1 \otimes m_H)(x) = x_1 + x_{2,1} \quad \text{et} \quad (m_H \otimes 1)(x) = x_1 + x_{1,2}.$$

Comme  $x$  est invariant sous l'action diagonale de  $H$ ,  $(1 \otimes m_H)(x)$  et  $(m_H \otimes 1)(x)$  sont égaux et on a l'égalité :

$$x_1 = (1 \otimes m_H)(x) = (m_H \otimes 1)(x).$$

Ce qui montre (1). Soit  $x$  comme dans (2). D'après (1),  $x$  se décompose en  $x_1 + x_2$ , avec  $x_1 \in V^H \otimes V^H$  et  $x_2 \in V' \otimes V'$ . Comme  $x$  est symétrique et que  $V^H \otimes V^H$  et  $V' \otimes V'$  sont en somme direct,  $x_1$  et  $x_2$  sont symétriques. Vérifions que  $x_1$  est  $\mathfrak{h}^H$  invariant. On suppose par hypothèse que  $x$  est  $\mathfrak{h}$ -invariant, c'est à dire :

$$[x, \Delta(y)] = 0, \quad \text{pour } y \in \mathfrak{h}.$$

Ainsi, en appliquant  $1 \otimes m_H$  à cette égalité, pour  $y \in \mathfrak{h}^H$ , on obtient :

$$(1 \otimes m_h)[x, \Delta(y)] = [x_1, \Delta(y)] = 0.$$

Donc  $x_1$  est  $\mathfrak{h}^H$ -invariant. Ce qui montre la proposition.  $\square$

**Corollaire 2.5.2.** *Le 2-tenseurs  $t \in S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$  qui est invariant par l'action diagonale de  $G$ , se décompose :*

- Comme la somme de  $t_G \in S^2(\mathfrak{g}^G)^{\mathfrak{g}^G}$  et de  $\bar{t}_G \in S^2(\text{Ker}(m_G))$ , avec

$$t_G = (1 \otimes m_G)(t) = (m_G \otimes 1)(t).$$

- Comme la somme de  $t_p \in S^2(\mathfrak{g}_p)^{\mathfrak{g}_p}$  et de  $\bar{t}_p \in S^2(\text{Ker}(m_{G_p}))$ , avec

$$t_p = (1 \otimes m_{G_p})(t) = (m_{G_p} \otimes 1)(t),$$

Pour  $p \in \{a, s, f\}$ .

*Démonstration.* On obtient le corollaire en appliquant la proposition 2.5.1 pour  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$  et les groupes  $H \in \{G, G_a, G_f, G_s\}$ .  $\square$

Pour construire la réalisation on utilise une extension  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)$  de  $\mathfrak{p}_n(G)$ .

**Définition 2.5.3.** L'algèbre de Lie  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{k}}$  est le quotient de  $\mathfrak{h}_n(G)_{\mathbb{k}}$  de la définition 2.3.2 par l'idéal de Lie  $\tilde{\mathcal{I}}$  engendré par le  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ -module sur les éléments :

$$[X_{12}, X_{13} + X_{23}], [X_{12}, X_{34}], X_{12} - X_{21},$$

$$[X_1(p), X_{23}], [X_1(p), X_2(q)],$$

$$[X_{12}, X_1(p) + X_2(p) + \sum_{g \in G_p} X_{12}(g)], [X_1(p), X_2(p) + \sum_{g \in G_p} X_{12}(g)],$$

pour  $p, q$  distincts dans  $\{a, f, s\}$  et où l'on pose  $X_{ij} := X_{ij}(1)$ .

Remarquons que la différence entre  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)$  et  $\mathfrak{p}_n(G)$  est au niveau des relations en degré un ; les relations du type :

$$\sum_{q \in (\mathbb{P}^1_*)^c} X_i(q) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{g \in G} X_{ij}(g) = 0.$$

ne sont pas imposées dans  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)$ . L'algèbre  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)$  est aussi munie d'une action de  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ , provenant de l'action de  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  sur  $\mathfrak{h}_n(G)$  décrite dans la section 2.3. On a donc naturellement les surjections  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ -équivariantes :

$$\mathfrak{h}_n(G) \rightarrow \tilde{\mathfrak{p}}_n(G) \rightarrow \mathfrak{p}_n(G)$$

Le produit tensoriel  $\mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[G]$  possède une structure d'algèbre de Hopf. Le produit et le coproduit sont donnés par les formules suivantes :

$$(x \otimes g) \cdot (y \otimes h) = x(g \cdot y) \otimes gh,$$

$$\Delta(x \otimes g) = \sum_{(x)} (x' \otimes g) \otimes (x'' \otimes g),$$

où  $x \in \mathcal{U}\mathfrak{g}$ ,  $g \in G$  et le coproduit de  $x \in \mathcal{U}\mathfrak{g}$  est :

$$\sum_{(x)} x' \otimes x''.$$

Pour plus de détails sur cette construction (le "bicrossed product") on renvoie à [24]. L'algèbre de Hopf ainsi définie sera notée  $\mathcal{U}\mathfrak{g} \rtimes G$ . Elle est munie d'une action de  $G$  par automorphismes d'algèbre de Hopf définie par :

$$h \cdot (x \otimes g) = (h \cdot x) \otimes hgh^{-1},$$

pour  $h, g \in G$ , et  $x \in \mathcal{U}\mathfrak{g}$ .

On note  $C_n$  l'algèbre :

$$C_n = \mathcal{U}\mathfrak{g}_a \otimes \mathcal{U}\mathfrak{g}_s \otimes \mathcal{U}\mathfrak{g}_f \otimes (\mathcal{U}\mathfrak{g} \rtimes G)^n.$$

L'algèbre  $C_n$  est naturellement munie d'une action du groupe  $G^n \rtimes \mathfrak{S}^n$  qui agit sur le "facteur"  $(\mathcal{U}\mathfrak{g} \rtimes G)^n$ .

On se donne  $n$   $\mathfrak{g}$ -modules  $V_1, \dots, V_n$  et pour chaque  $p \in \{a, s, f\}$  un  $\mathfrak{g}_p$ -module  $V_p$ . On associe à ces modules le  $C_n$ -module :

$$V = V_a \otimes V_s \otimes V_f \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_n.$$

La structure de  $C_n$ -module sur  $V$  est  $G^n$ -équivariante, c'est à dire :

$$(\underline{g} \cdot y) \cdot v = \underline{g} \cdot (y \cdot (\underline{g}^{-1} \cdot v)),$$

pour  $\underline{g} \in G^n$ ,  $y \in C_n$  et  $v \in V$ . On montrera que l'espace des  $\mathfrak{g}^G$ -invariants de  $V$  possède une structure de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$ -module,  $G^n$ -équivariante.

Soit  $\mu : \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes \mathcal{U}\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}$  la multiplication de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ . On pose :

$$c = \mu(t) \quad \text{et} \quad c_p = \mu(t_p) \quad \text{et} \quad \mu(t_G) = c_G,$$

pour  $p \in \{a, s, f\}$ . Rappelons que la  $\mathfrak{g}$ -invariance de  $t$  implique que  $c$  appartient au centre de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ . Comme  $t_p$  est  $\mathfrak{g}_p$ -invariant,  $c_p$  appartient au centre de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}_p$ . De même,  $c_G$  appartient au centre de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}^G$ .

Pour  $i, j$  distincts dans  $[1, n]$  et  $x \in (\mathcal{U}\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ , on note  $x^{ij}$  l'image de  $x$  par l'inclusion  $(\mathcal{U}\mathfrak{g})^{\otimes 2} \rightarrow C_n$  donnée par :

$$x^{(1)} \otimes x^{(2)} \mapsto x_a \otimes x_s \otimes x_f \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n,$$

où  $x_i = x^{(1)}$ ,  $x_j = x^{(2)}$  et les autres  $x_r$  sont égaux à 1.

Pour  $i \in [1, n]$ ,  $p \in \{a, s, f\}$  et  $x \in \mathcal{U}\mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{U}\mathfrak{g}$ , on note  $x^{pi}$  l'image de  $x$  par l'inclusion  $(\mathcal{U}\mathfrak{g})^{\otimes 2} \rightarrow C_n$  donnée par :

$$x^{(1)} \otimes x^{(2)} \mapsto x_a \otimes x_s \otimes x_f \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n,$$

où  $x_p = x^{(1)}$ ,  $x_i = x^{(2)}$  et les autres  $x_r$  sont égaux à 1.

Enfin, pour  $\beta \in [1, n]$  et  $x \in \mathcal{U}\mathfrak{g}$  ou  $\beta \in \{a, s, f\}$  et  $x \in \mathcal{U}\mathfrak{g}_\beta$ , on note  $x^i$  l'élément de  $C_n$  :

$$x^\beta = x_a \otimes x_s \otimes x_f \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n,$$

où  $x_\beta = x$  et les autres  $x_r$  sont égaux à 1.

**Proposition 2.5.4.** *Pour  $p \in \{a, f, s\}$ , on note  $\alpha_p$  la constante  $\frac{1}{2} \frac{2 - |(\mathbb{P}_*^1)^c|}{|G_p| \cdot |(\mathbb{P}_*^1)^c|}$ .*

1. *On a un morphisme de Lie  $\rho_n$  de  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_\mathbb{C}$  dans  $C_n$ ,  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  équivariant, donné par :*

- *Pour  $i \in [1, n]$  et  $q \in (\mathbb{P}_*^1)^c$  :*

$$\frac{1}{|G_q|} \tilde{\rho}_n(X_i(q)) = (1 \otimes h)(t_p)^{p_i} + \frac{h(c_p)^i}{2} + \alpha_p c^i,$$

où  $p \in \{a, s, f\}$  et  $h \in G$  sont tels que  $h(p) = q$ .

- *Pour  $i, j \in [1, n]$  distincts et  $g \in G$  :*

$$\tilde{\rho}_n(X_{ij}(g)) = (g \otimes 1)(t)^{ij}.$$

2. *L'espace  $V^{(\mathfrak{g}^G)}$  des  $\mathfrak{g}^G$ -invariants de  $V$  est un sous  $G^n$ -module de  $V$ . Le morphisme  $\tilde{\rho}_n$  induit une structure  $G^n$ -équivariante de  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_\mathbb{C}$ -module sur  $V^{(\mathfrak{g}^G)}$ . Plus précisément, les endomorphismes de  $V$  provenant de  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_\mathbb{C}$  sont  $\mathfrak{g}^G$ -invariants.*

*Démonstration.* Remarquons d'abord que le terme  $(1 \otimes h)(t_p)$  ne dépend que de  $q$  (à  $\{a, s, f\}$  fixé). En effet, si  $h'(p) = q$ , on a  $h' = hh''$  avec  $h'' \in G_p$ . Par conséquent :

$$(1 \otimes h')(t_p) = (1 \otimes h)(1 \otimes h'')(t_p) = (1 \otimes h)(t_p),$$

car  $t_p \in S^2(\mathfrak{g}_p)$ , où  $\mathfrak{g}_p$  est par définition l'ensemble des invariants de  $\mathfrak{g}$  sous  $G_p$ . On vérifie d'une façon similaire que  $h(c_p)$  ne dépend que de  $q$  (à  $\{a, s, f\}$  fixé).

L'algèbre  $\mathfrak{h}_n(G)$  de la définition 2.3.2 est l'algèbre de Lie libre sur les  $X_i(q)$  et les  $X_{ij}(g)$  et donc les formules :

$$\frac{1}{|G_q|} \rho_n^L(X_i(q)) = (1 \otimes h)(t_p)^{p_i} + \frac{h(c_p)^i}{2} + \alpha_p c^i,$$

$$\rho_n^L(X_{ij}(g)) = (g \otimes 1)(t)^{ij}.$$

pour,  $i, j, q, p, h$  et  $g$  comme dans la proposition définissent un morphisme de Lie  $\rho_n^L : \mathfrak{h}_n(G)_\mathbb{C} \rightarrow C_n$ . On vérifie que ce morphisme est  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  équivariant. On rappelle que



$\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)$  est un quotient de  $\mathfrak{h}_n(G)$  et que l'application quotient  $\tilde{\pi}_n : \mathfrak{h}_n(G) \rightarrow \tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$  est  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  équivariante. On va montrer que le morphisme  $\rho_n^L$  se factorise par l'application quotient  $\tilde{\pi}_n$  et induit  $\tilde{\rho}_n$ . Ce qui montrera l'existence et l'équivariance de  $\tilde{\rho}_n$ . Pour cela, il suffit de vérifier que les éléments :

$$[X_{12}, X_{13} + X_{23}], [X_{12}, X_{34}], X_{12} - X_{21}, \quad (D)$$

$$[X_1(p), X_{23}], [X_1(p), X_2(q)], \quad (E)$$

$$[X_{12}, X_1(p) + X_2(p) + \sum_{g \in G_p} X_{12}(g)], [X_1(p), X_2(p) + \sum_{g \in G_p} X_{12}(g)], \quad (F)$$

cités dans la définition 2.5.3 sont envoyés par  $\rho_n^L$  sur 0. On vérifie par des arguments classiques que les éléments de (D) (la  $\mathfrak{g}$  invariance et la symétrie de  $t$ ) sont envoyés sur 0.

Il est immédiat que :

$$[\rho_n^L(X_1(p)), \rho_n^L(X_{23})] = [\rho_n^L(X_1(p)), \rho_n^L(X_2(q))] = 0,$$

et donc les éléments de (E) sont envoyés sur 0.

Remarquons que les éléments de (C) sont envoyés par  $\rho_n^L$  dans la "sous-algèbre"  $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}_p} \otimes (\mathcal{U}_{\mathfrak{g}})^{\otimes 2}$  de  $C_n$ . On effectue les calculs qui suivent dans cette sous-algèbre. on a :

$$\rho_n^L\left(\sum_{g \in G_p} X_{12}(g)\right) = |G_p|(m_{G_p} \otimes 1)(t)^{12} = |G_p|t_p^{12}, \quad (E')$$

En utilisant cette égalité on vérifie que l'image de  $X_1(p) + X_2(p) + \sum_{g \in G_p} X_{12}(g)$  par  $\frac{1}{|G_p|}\rho_n^L$  est égale à :

$$(\text{id} \otimes \Delta)(t_p) + 1 \otimes (t_p + \frac{c_p}{2} \otimes 1 + 1 \otimes \frac{c_p}{2}) + \alpha_p \otimes (c \otimes 1 + 1 \otimes c).$$

Le terme  $t_p + c_p \otimes 1 + 1 \otimes c_p$  est égal au coproduit  $\Delta(c_p)$ . Posons  $z = c \otimes 1 + 1 \otimes c$ .

Ainsi, l'image du premier élément de (F) par  $\frac{1}{|G_p|}\rho_n^L$  est :

$$[(\text{id} \otimes \Delta)(t_p + 1 \otimes c_p) + \alpha_p \otimes z, 1 \otimes t],$$

avec  $z$  un élément du centre de  $(\mathcal{U}_{\mathfrak{g}})^{\otimes 2}$ . Comme  $z$  est central et que  $t$  est  $\mathfrak{g}$ -invariant, on conclut que le premier élément de (F) est envoyé sur 0.

Traitons le dernier élément de (F) :

$$F_2 = [X_1(p), X_2(p) + \sum_{g \in G_p} X_{12}(g)].$$

On vérifie que :

$$\frac{1}{|G_p|} \rho_n^L(X_2(p) + \sum_{g \in G_p} X_{12}(g)) = (\Delta \otimes \text{id})(t_p) + 1 \otimes 1 \otimes \left(\frac{c_p}{2} + \alpha_p c\right).$$

En utilisant  $(E')$ , puis que  $c$  (resp.  $c_p$ ) est central dans  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$  (resp.  $\mathcal{U}\mathfrak{g}_p$ ), on obtient :

$$\frac{1}{|G_p|} \rho_n^L(F_2) = [t_p \otimes 1, (\Delta \otimes \text{id})(t_p)].$$

Comme  $t_p$  est  $\mathfrak{g}_p$  équivariant on a  $\rho_n^L(F_2) = 0$ . Ce qui montre que tous les éléments de  $(F)$  sont envoyés sur 0 et prouve (1).

Montrons (2). Notons  $\varphi$  le morphisme de  $C_n$  dans  $\text{End}(V)$  qui induit la structure de  $C_n$ -module à  $V$ . Par définition :

$$V^{(\mathfrak{g}^G)} = \bigcap_{x \in \mathfrak{g}^G} \text{Ker}(\varphi(d_x)), \quad \text{où } d_x = \sum_{\beta \in \{a, f, s\} \cup [1, n]} x^\beta.$$

Par l'invariance des éléments de  $\mathfrak{g}^G$  par l'action de  $G$  et la  $G^n$ -équivariance de la structure de  $C_n$ -module sur  $V$ , on obtient :

$$\underline{g} \cdot (x \cdot v) = x \cdot (\underline{g} \cdot v),$$

pour  $\underline{g} \in G$ ,  $x \in \mathfrak{g}^G$  et  $v \in V$ . Ce qui montre que  $V^{(\mathfrak{g}^G)}$  est un sous  $G^n$ -module de  $V$ .

Montrons les autres assertions de (2). Pour se faire, on va montrer que :

$$[\rho_n^L(X_k(p)), d_x] = [\rho_n^L(X_{ij}(g)), d_x] = 0,$$

pour  $k, i, j \in [1, n]$ , avec  $i \neq j$ ,  $p \in (\mathbb{P}_*^1)^c$ ,  $g \in G$  et  $x \in \mathfrak{g}^G$ . Ce qui montrera que  $V^{(\mathfrak{g}^G)}$  est un  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$ -module. Cela revient à vérifier les égalités :

$$[(1 \otimes h)(t_p + 1 \otimes c_p) + \alpha_p \otimes c, \Delta(x)] = 0, \quad (A)$$

$$\text{et } [(1 \otimes g)(t), \Delta(x)] = 0, \quad (B)$$

pour  $x \in \mathfrak{g}^G$ . Comme  $t$  est invariant par l'action diagonale de  $G$  et que  $t$  est  $\mathfrak{g}$ -invariant, on a :

$$(g \otimes 1)([(1 \otimes g)(t), \Delta(x)]) = [t, \Delta(x)] = 0,$$

pour  $x \in \mathfrak{g}^G$ . Ce qui montre (B). Montrons (A). Comme  $c$  est dans le centre de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ , on a :

$$(1 \otimes g^{-1})([(1 \otimes g)(t_p + 1 \otimes c_p) + \alpha_p \otimes c, \Delta(x)]) = [t_p + 1 \otimes c_p, \Delta(x)],$$

pour  $x \in \mathfrak{g}^G$ . Comme  $\mathfrak{g}^G$  est incluse dans  $\mathfrak{g}_p$ ,  $[1 \otimes c_p, \Delta(x)] = 0$  et  $[t_p, \Delta(x)] = 0$ . On en déduit que  $[t_p + 1 \otimes c_p, \Delta(x)] = 0$  et donc (A) est vraie. Ce qui prouve que les

endomorphismes de  $V$  provenant de  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$  sont  $\mathfrak{g}^G$ -invariants et que  $V(\mathfrak{g}^G)$  est un  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$ -module. Enfin, l'équivariance de cette structure, par rapport à  $G^n$ , est due à l'équivariance des morphismes :

$$\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\tilde{\rho}_n} C_n \rightarrow \text{End}(V),$$

par rapport à  $G^n$  et au fait que  $V(\mathfrak{g}^G)$  est un  $\mathbb{C}[G^n]$  sous-module de  $V$ . Ce qui montre (2) et achève la démonstration de la proposition.  $\square$

**Lemme 2.5.5.** *Pour  $i \in [1, n]$ , l'élément :*

$$X(i) = \sum_{q \in (\mathbb{P}_*^1)^c} X_i(q) + \sum_{g \in G} \sum_{j \in [1, n], j \neq i} X_{ij}(g)$$

de  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$  agit trivialement sur  $V(\mathfrak{g}^G)$ .

*Démonstration.* Calculons  $\tilde{\rho}_n(X(i))$ . Par définition :

$$\tilde{\rho}_n\left(\sum_{q \in (\mathbb{P}_*^1)^c} X_i(q)\right) = \sum_{p \in \{a, f, s\}} |G_p| \sum_{q \in G \cdot p} (1 \otimes g_q)(t_p)^{pi} + \frac{g_q(c_p)^i}{2} + \alpha_p c^i,$$

où  $g_q$  est un élément de  $g$  qui envoie  $p$  sur  $q$  pour  $q \in G \cdot p$ .

Comme  $t_p = (1 \otimes m_{G_p})(t)$ , où  $m_{G_p} = \frac{1}{|G_p|} \sum_{h \in G_p} h$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \{a, f, s\}} |G_p| \sum_{q \in G \cdot p} (1 \otimes g_q)(t_p)^{pi} &= \sum_{p \in \{a, f, s\}} \sum_{q \in G \cdot p} \sum_{h \in G_p} (1 \otimes g_q h)(t)^{pi} \\ &= \sum_{p \in \{a, f, s\}} \sum_{g \in G} (1 \otimes g)(t)^{pi} \\ &= |G| \sum_{p \in \{a, f, s\}} (t_G)^{pi}, \end{aligned}$$

où  $t_G$  est défini dans le corollaire 2.5.2 et vaut  $(1 \otimes m_G)(t)$ . En utilisant la définition de  $c_p$ , la  $G$  invariance de  $t$ , puis la proposition 1.3.4, on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \{a, f, s\}} |G_p| \sum_{q \in G \cdot p} \frac{g_q(c_p)^i}{2} &= \sum_{p \in \{a, f, s\}} |G_p| \sum_{q \in G \cdot p} \frac{1}{2} \mu((g_q \otimes g_q m_{G_p})(t))^i \\ &= \sum_{p \in \{a, f, s\}} |G_p| \sum_{q \in G \cdot p} \frac{1}{2} \mu((1 \otimes g_q m_{G_p} g_q^{-1})(t))^i \\ &= \sum_{q \in (\mathbb{P}_*^1)^c} \frac{|G_q|}{2} \mu((1 \otimes m_{G_q})(t))^i \\ &= |G| \mu(1 \otimes m_G(t))^i + \frac{|\mathbb{P}_*^1|^c - 2}{2} \mu(t)^i \\ &= |G| c_G^i + \frac{|\mathbb{P}_*^1|^c - 2}{2} c^i, \end{aligned}$$

où  $c_G = \mu(t_G)$ . Un calcul immédiat, donne :

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \{a, f, s\}} |G_p| \sum_{q \in G \cdot p} \alpha_p c^i &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \{a, f, s\}} \sum_{q \in G \cdot p} \frac{2 - |(\mathbb{P}_*^1)^c|}{|(\mathbb{P}_*^1)^c|} c^i \\ &= \frac{2 - |(\mathbb{P}_*^1)^c|}{2} c^i \end{aligned}$$

En combinant les trois derniers calculs et l'expression de  $\tilde{\rho}_n(\sum_{q \in (\mathbb{P}_*^1)^c} X_i(q))$  donnée au début de la preuve, on a la simplification suivante :

$$\tilde{\rho}_n\left(\sum_{q \in (\mathbb{P}_*^1)^c} X_i(q)\right) = |G| \left( \sum_{p \in \{a, f, s\}} (t_G)^{pi} + c_G^i \right).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \sum_{j \in [1, n], j \neq i} \tilde{\rho}_n(X_{ij}(g)) &= |G| \sum_{j \in [1, n], j \neq i} (m_G \otimes 1)(t)^{ij} \\ &= |G| \sum_{j \in [1, n], j \neq i} (1 \otimes m_G)(t)^{ji} \\ &= |G| (t_G)^{ji}. \end{aligned}$$

la deuxième égalité est obtenue grâce à la symétrie et la  $G$ -invariance de  $t$ . Les deux derniers calculs, prouve que :

$$\frac{1}{|G|} \tilde{\rho}_n(X(i)) = \sum_{\beta \in (\{a, f, s\} \cup [1, n]), \beta \neq i} (t_G)^{\beta i} + (c_G)^i.$$

Posons  $t_G = \sum_{(x, y)} x \otimes y$ . Comme  $t_G$  est symétrique, on a :

$$\frac{1}{|G|} \tilde{\rho}_n(X(i)) = \sum_{\beta \in (\{a, f, s\} \cup [1, n]), \beta \neq i} \sum_{(x, y)} y^\beta \cdot d_x,$$

où  $d_x = \sum_{\beta \in (\{a, f, s\} \cup [1, n])} x^\beta$ . Or,  $x \in \mathfrak{g}^G$  et donc par définition de  $V(\mathfrak{g}^G)$  :

$$d_x(V(\mathfrak{g}^G)) = 0.$$

Ce qui montre que  $\tilde{\rho}_n(X(i))(V(\mathfrak{g}^G)) = 0$  est achève la démonstration du lemme.  $\square$

On a vue que  $\mathfrak{p}_n(G)$  est un quotient de  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)$ , l'application quotient permet d'induire une structure de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$ -module sur  $V(\mathfrak{g}^G)$ .

**Proposition 2.5.6.**

- L'espace  $V(\mathfrak{g}^G)$  possède une structure de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$ -module  $G^n$ -équivariante, elle est induite par la structure de  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$ -module sur  $V(\mathfrak{g}^G)$ .

- On a le diagramme commutatif de morphismes  $G^n$ -équivariants suivant :

$$\begin{array}{ccccc} C_n & \longleftarrow & \tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}} \\ & & \downarrow & \searrow & \\ \text{End}(V) & \longleftarrow & \text{End}(V)^{\mathfrak{g}^G} & & \end{array}$$

- Si les modules  $V_1, \dots, V_n$  de la définition de  $V$  sont égaux, alors les morphismes du diagramme précédent sont  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  équivariants.

*Démonstration.* La proposition comporte trois assertions. Montrons la première. On vérifie que  $\mathfrak{p}_n(G)$  s'obtient comme quotient de  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)$  en imposant les relations :

$$X(i) = 0, \quad \text{pour } i \in [1, n],$$

où  $X_i$  est l'élément qui apparaît dans le lemme 2.5.5. On a montré (proposition 2.5.4) que  $V^{(\mathfrak{g}^G)}$  est un  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$ -module ( $G^n$ -équivariante) et que  $X_i \in \tilde{\mathfrak{p}}_n(G)$  agit trivialement sur  $V^{(\mathfrak{g}^G)}$  (lemme 2.5.5). Ceci montre que la  $V^{(\mathfrak{g}^G)}$  est un  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$ -module. D'autre part, l'application quotient  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G) \rightarrow \mathfrak{p}_n(G)$  est  $G^n$  équivariante et la structure de  $\tilde{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$ -module sur  $V^{(\mathfrak{g}^G)}$  l'est aussi. Ce qui montre que  $V^{(\mathfrak{g}^G)}$  possède une structure de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$ -module. On a montré la première assertion. La deuxième est un récapitulatif des résultats de cette section. Le dernier point est immédiat.  $\square$

Notons  $\rho_n$  l'application de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$  dans  $\text{End}(V^{(\mathfrak{g}^G)})$  qui munit  $V^{(\mathfrak{g}^G)}$  de la structure de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$ -module.

**Définition 2.5.7.** Soit  $G, \mathfrak{g}, t$  et  $V$  comme dans ce qui précède. La connexion  $KZ_n$  associée à  $G, V, t$  est la connexion sur le fibré trivial  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \times V^{(\mathfrak{g}^G)}$  au dessus de  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  :

$$d - (1 \otimes \rho_n)\omega_n,$$

où  $\omega_n$  est la 1-forme sur  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  à valeurs dans  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$  de la proposition-définition 2.4.2 pour  $Z = (\mathbb{P}_*^1)^c$  (voir (3)).

La connexion ainsi définie est plate par platitude de  $\omega_n$  (proposition 2.4.5) et est  $G^n$ -équivariante par la proposition 2.4.6 et la  $G^n$ -équivariance de  $\rho_n$ .

Dans le cas où  $V_1 = \dots = V_n$ , la connexion est  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  équivariante. Elle induit une connexion plate sur le fibré  $(C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \times V^{(\mathfrak{g}^G)}) / (G^n \rtimes \mathfrak{S}_n)$  au-dessus de  $C_n(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) / \mathfrak{S}_n$ . Ce qui permet de construire des représentations du groupe fondamental de  $C_n(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) / \mathfrak{S}_n$ . Une présentation de  $\pi_1(C_n(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) / \mathfrak{S}_n)$  est donnée dans [34], c'est le groupe  $B_n^2$ . Le groupe  $B_n^2$  est un sous-groupe des tresses de  $B_{n+2}$  qui "laissent fixe" deux brins donnés, par exemple les deux premiers.

Enfin, on peut adapter la construction de cette section pour obtenir des réalisations de certaines des connexions universelles de la section 2.3 sur les espaces  $C_n^G(\mathbb{P}^1 \setminus Z)$ . Ainsi, selon le choix de  $Z$ , on récupère une représentation d'un groupe  $B_n^k$  ( $k \geq 1$  voir [34]), qui est le sous-groupe des tresses de  $B_{n+k}$  qui "laissent fixe"  $k$  brins donnés.

## Chapitre 3

# Le gradué associé de l'algèbre de Lie de Malcev attachée à $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$

A un groupe on associe une algèbre de Lie de Malcev qui est une algèbre de Lie filtrée. Cette construction est détaillée dans la première section (section 3.1) de ce chapitre. On va construire un morphisme d'algèbres de Lie graduées de  $\mathfrak{p}_n(G)$  dans le gradué associé de l'algèbre de Lie de Malcev du groupe  $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . Le morphisme est donné dans la deuxième section (section 3.2), c'est le morphisme de la proposition 3.2.4.

Dans ce chapitre  $\mathbb{k}$  est un corps de caractéristique nulle et les produits tensoriels sont sur  $\mathbb{k}$ , sauf mention du contraire. Les algèbres sont des algèbres sur  $\mathbb{k}$ , supposées unitaires et associatives.

### 3.1 Algèbres de Lie de Malcev

Cette section contient deux sous-sections : la première sous-section comporte des rappels sur des objets algébriques (algèbres, algèbre de Lie, groupes) filtrés. Ceci permet de rappeler la notion d'algèbres de Hopf complètes dans la deuxième sous-section, puis de définir l'algèbre de Lie de Malcev d'un groupe  $\Gamma$  comme étant l'ensemble des primitifs d'une algèbre de Hopf ; à savoir une complétion de l'algèbre du groupe  $\Gamma$ . On donne aussi certaines propriétés du gradué associé de l'algèbre de Lie de Malcev d'un groupe. La majorité des éléments de cette section se trouvent dans [33] (appendice A), en grande partie la section est une reformulation du contenu de l'appendice cité.

#### 3.1.1 Structures filtrées

On rappelle les notions d'algèbre filtrée complète selon [33], de complétion d'une algèbre augmentée pour les puissances de l'idéal d'augmentation, de produit tensoriel complété, d'algèbre de Lie filtrée et de groupe filtré. Ensuite, on s'intéresse à

l'application exponentielle associée à une algèbre complète.

Une algèbre filtrée est une algèbre unitaire  $A$  munie d'une suite  $F_\bullet A$  de sous-espaces :

$$A = F_0 A \supset F_1 A \supset F_2 A \supset \dots,$$

telles que  $F_p A \cdot F_q A \subset F_{p+q} A$ , pour  $p, q \in \mathbb{N}$ . On dit que  $F_\bullet A$  est une filtration d'algèbre. Si  $A$  est une algèbre filtrée, elle possède une "complétion"  $\hat{A}$  :

$$\hat{A} = \varprojlim_i (A/F_i A).$$

L'algèbre  $\hat{A}$  possède une filtration d'algèbre :

$$F_k \hat{A} = \text{Ker}(\hat{A} \rightarrow A/F_k A),$$

pour  $k \in \mathbb{N}$ . Un morphisme  $f : A \rightarrow B$ , entre deux algèbres filtrées est un morphisme d'algèbres filtrées si :  $f(F_k A) \subset F_k B$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme d'algèbres filtrées, alors il existe un unique morphisme d'algèbres filtrées  $\hat{f} : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$  qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{B} \end{array} \quad (3.1)$$

où les morphismes verticaux sont les applications naturelles  $A \rightarrow \hat{A}$  et  $B \rightarrow \hat{B}$ . L'application  $\hat{f}$  est l'application induite par le produit des  $f_i : A/F_i A \rightarrow B/F_i B$  (qui proviennent de  $f$ ). On dit que  $\hat{f}$  est le complété de  $f$ .

Une algèbre  $B$  est dite graduée si :

$$B = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} B_i \quad \text{et} \quad B_q \cdot B_p \subset B_{p+q}, \quad \text{pour } p, q \in \mathbb{N}.$$

On dit que  $B_q$  est la composante homogène de degré  $q$  de  $B$  et on associe à  $B$  la filtration d'algèbre donnée par  $F_k B = \bigoplus_{i \geq k} B_i$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ .

Étant donnée une filtration d'algèbre  $F_\bullet A$  sur  $A$ , on peut construire le gradué associé  $\text{gr}(A)$  de  $A$  (pour  $F_\bullet A$ ) :

$$\text{gr}(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \text{gr}_i(A), \quad \text{où } \text{gr}_i(A) = F_i A / F_{i+1} A,$$

qui hérite un produit de  $A$  et qui est une algèbre graduée pour ce produit.

Une algèbre  $A$  d'unité  $\nu : \mathbb{k} \rightarrow A$  est dite augmentée si elle possède un morphisme d'algèbre  $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{k}$  (une augmentation) tel que  $\varepsilon \circ \nu = \text{id}_{\mathbb{k}}$ . Le noyau de  $\varepsilon$  est appelé l'idéal d'augmentation de  $A$  et sera noté  $I_A$ .

**Définition 3.1.1.** 1. Une algèbre complète augmentée est une algèbre  $A$  augmentée, munie d'une filtration d'algèbre  $F_\bullet A$  telle que :

- $F_1 A$  est l'idéal d'augmentation  $I_A$  de  $A$ .
- L'algèbre  $\text{gr}(A)$  est engendrée par  $\text{gr}_1(A)$ .
- L'application naturelle de  $A$  dans  $\varprojlim_i (A/F_i A)$  est un isomorphisme.

2. Un morphisme d'algèbres complètes augmentées est un morphisme d'algèbres filtrées entre deux algèbres complètes augmentées.

**Remarque 3.1.2.** Une algèbre complète augmentée  $A$  est un espace complet séparé pour la valuation :

$$v(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{i \mid x \in F_i A\}, \text{ pour } x \in A.$$

Une série de la forme  $\sum_i x_i$  avec les  $x_i \in F_i A$ , converge vers un unique élément de  $A$ .

L'algèbre  $\mathbb{k}[[t]]$  des séries formelles sur  $\mathbb{k}$  est une algèbre complète augmentée pour la filtration induite par le degré.

Si  $A$  est une algèbre augmentée, la complétion de  $A$  pour les puissances de l'idéal d'augmentation :

$$\hat{A} = \varprojlim_i (A/I_A^i),$$

munie des données :

$$F_k \hat{A} = \text{Ker}(\hat{A} \rightarrow A/I_A^k), \text{ pour } k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \hat{A} \rightarrow A/I_A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{k},$$

est une algèbre complète augmentée. On s'intéressera aux complétés (pour les puissances de l'idéal d'augmentation) :

$$\mathbb{k}[\Gamma]^\wedge \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{U}}\mathfrak{g},$$

de  $\mathbb{k}[\Gamma]$  l'algèbre du groupe  $\Gamma$  et de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$  l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ .

Soit  $A$  et  $B$  deux algèbres complètes augmentées. Le produit tensoriel  $A \otimes B$  est une algèbre filtrée pour la filtration :

$$F_k(A \otimes B) = \sum_{i+j=k} F_i A \otimes F_j B, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Le produit tensoriel complété de  $A$  et  $B$  :

$$A \hat{\otimes} B = \varprojlim_i (A \otimes B / F_i(A \otimes B))$$



est une algèbre complète augmentée de filtration :

$$F_k(A\hat{\otimes}B) = \text{Ker}(A\hat{\otimes}B \rightarrow A\otimes B/F_i(A\otimes B)) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Le produit tensoriel complété  $A\hat{\otimes}B$  n'est autre que la complétion  $\widehat{A\otimes B}$  de l'algèbre  $A\otimes B$  munie de la filtration du début du paragraphe.

De plus, on a :

$$\text{gr}(A\hat{\otimes}B) = \text{gr}(A)\otimes\text{gr}(B). \quad (3.2)$$

et pour deux algèbres augmentées  $A_1$  et  $A_2$  :

$$\hat{A}_1\hat{\otimes}\hat{A}_2 \simeq \widehat{A_1\otimes A_2},$$

où  $\hat{A}_i$  ( $i = 1, 2$ ) est le complété de  $A_i$  pour les puissances de l'idéal d'augmentation.

**Définition 3.1.3.** 1. Une algèbre de Lie filtrée est une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  munie d'une suite de sous-espaces :  $\mathfrak{g} = F_1\mathfrak{g} \supset F_2\mathfrak{g} \supset \dots$  tels que  $[F_p\mathfrak{g}, F_q\mathfrak{g}] \subset F_{p+q}\mathfrak{g}$ , pour  $p, q \geq 1$ .

2. Un groupe filtré est un groupe  $\Gamma$  muni d'une suite de sous-groupes :  $\Gamma = F_1\Gamma \supset F_2\Gamma \supset \dots$  tels que  $(F_p\Gamma, F_q\Gamma) \subset F_{p+q}\Gamma$ , où  $(-, -)$  est le commutateur.

3. Soit  $\mathfrak{g}$  et  $\Gamma$  comme dans (1) et (2).

- L'algèbre de Lie filtrée  $\mathfrak{g}$  est complète si l'application naturelle  $\mathfrak{g} \rightarrow \varprojlim_i (\mathfrak{g}/F_i\mathfrak{g})$  est un isomorphisme. De même, le groupe filtré  $\Gamma$  est complet si l'application naturelle  $\Gamma \rightarrow \varprojlim_i (\Gamma/F_i\Gamma)$  est un isomorphisme.

- Un morphisme d'algèbres de Lie filtrées (resp. de groupes filtrés) est un morphisme entre deux algèbres de Lie filtrées (resp. deux groupes filtrés) qui respecte les filtrations (comme pour les algèbres).

- On définit le gradués associés respectifs de  $\mathfrak{g}$  et de  $\Gamma$  (pour  $F_\bullet\mathfrak{g}$  et  $F_\bullet\Gamma$ ), par :

$$\text{gr}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \geq 1} (F_i\mathfrak{g}/F_{i+1}\mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad \text{gr}(\Gamma) = \bigoplus_{i \geq 1} (F_i\Gamma/F_{i+1}\Gamma).$$

On dit que  $\text{gr}_i(\mathfrak{g}) := F_i\mathfrak{g}/F_{i+1}\mathfrak{g}$  est la composante de degré  $i$  de  $\text{gr}(\mathfrak{g})$ .

Remarquons que  $F_k\mathfrak{g}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  qui contient  $\mathcal{C}_k\mathfrak{g}$ , le  $k$ -ème terme de la suite centrale descendante de  $\mathfrak{g}$  et que le filtre  $F_k\Gamma$  contient  $\mathcal{C}_k\Gamma$ , le  $k$ -ème terme de la suite centrale descendante de  $\Gamma$ . Notons que  $\text{gr}(\mathfrak{g})$  est naturellement une algèbre de Lie et que  $\text{gr}(\Gamma)$  est un anneau de Lie pour le crochet induit par le commutateur  $(-, -)$  de  $\Gamma$ .

A titre d'exemple, une algèbre de Lie munie de sa série centrale descendante est une algèbre de Lie filtrée. De même, pour un groupe.

Pour  $A$  une algèbre complète augmentée, on pose  $G_m A = 1 + I_A$  et  $G_a A = I_A$ . L'ensemble  $G_m A$  est un groupe filtré pour la multiplication et la filtration :

$$F_k G_m A = 1 + F_k A, \quad \text{pour } k \geq 1.$$

L'espace  $G_a A$  est une algèbre de Lie filtrée pour le commutateur  $[x, y] = xy - yx$  et la filtration :

$$F_k G_a A = F_k A, \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Compte tenu de la remarque 3.1.2, on peut définir pour  $x \in G_a A$  la série exponentielle :

$$e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!},$$

qui induit une application  $\exp : G_a A \rightarrow G_m A$  bijective d'inverse donné par la série logarithmique :

$$\log(y) = - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(1-y)^i}{i}, \quad \text{pour } y \in G_m A.$$

Rappelons qu'un mot de Lie de  $\mathbb{k}\langle\langle X, Y \rangle\rangle$  est une itération de crochets entre  $X$  et  $Y$  et que la série de Campbell-Baker-Hausdorff en  $X, Y$  est une série en des mots de Lie :

$$z(X, Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \sum_{i \geq 3} z_i(X, Y),$$

où  $z_i$  est une somme de mots de Lie de degré  $i$ . On pose  $z_{\geq 3}(X, Y) = \sum_{i \geq 3} z_i(X, Y)$ . Ainsi, pour tout  $x, y \in G_a A = I_A$ , on peut définir la série  $z(x, y)$  comme étant l'image de  $z(X, Y)$  par le morphisme :

$$f_{xy} : \mathbb{k}\langle\langle X, Y \rangle\rangle \rightarrow A, \quad \text{défini par } X \mapsto x \text{ et } Y \mapsto y.$$

La série de Campbell-Baker-Hausdorff permet de déterminer le produit sur  $G_m A$  à partir du crochet sur  $G_a A$ , on a :

$$e^x e^y = e^{z(x, y)}.$$

### 3.1.2 Algèbres de Hopf complètes et algèbres de Lie Malcev

Ici on donne la définition d'une algèbre de Hopf complète. On s'intéresse à l'ensemble des éléments diagonaux et l'ensemble des éléments primitifs d'une algèbre de Hopf complète, pour définir après l'algèbre de Lie de Malcev d'un groupe (définition 3.1.6) et décrire son gradué associé (propositions 3.1.7 et 3.1.8).

- Définition 3.1.4.**
1. Une algèbre de Hopf complète est une algèbre complète augmentée  $A$  munie d'un coproduit (morphisme d'algèbres filtrées)  $\Delta : A \rightarrow A \hat{\otimes} A$ , coassociative, cocommutative de counité l'augmentation  $\varepsilon$  de  $A$ .
  2. Pour deux algèbres de Hopf complètes  $A$  et  $B$ , un morphisme d'algèbres de Hopf complètes  $f : A \rightarrow B$  et un morphisme d'algèbres filtrées qui respecte les coproduits.

Si  $A$  est une algèbre de Hopf de coproduit  $\Delta$  (cocommutative et coassociative), alors la complétion  $\hat{A}$  de  $A$  (pour les puissances de l'idéal d'augmentation) est une algèbre de Hopf complète de coproduit  $\hat{\Delta} : \hat{A} \rightarrow \widehat{A \otimes A} \simeq \hat{A} \hat{\otimes} \hat{A}$ . Par exemple :

$$\mathbb{k}[\Gamma]^\wedge \text{ et } \hat{\mathcal{U}}\mathfrak{g},$$

sont des algèbres de Hopf complètes.

Pour  $\Gamma$  un groupe :  $\Gamma \mapsto \mathbb{k}[\Gamma]^\wedge$ , définie un foncteur  $\mathbb{k}[-]^\wedge$  de la catégorie des groupes dans la catégorie des  $\mathbb{k}$ -algèbres de Hopf complètes, qui envoie un morphisme de groupe  $g : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  vers le complété (voir diagramme 3.1) du morphisme  $\mathbb{k}[g]$ . D'une façon similaire, on définit un foncteur de la catégorie des  $\mathbb{k}$ -algèbres de Lie dans la catégorie des  $\mathbb{k}$ -algèbres de Hopf complètes :  $\mathfrak{g} \mapsto \hat{\mathcal{U}}\mathfrak{g}$ .

A une algèbre de Hopf complète  $A$ , on associe une algèbre de Lie filtrée, l'ensemble des éléments primitifs :

$$\mathcal{P}(A) = \{x \in A \mid \Delta(x) = 1 \hat{\otimes} x + x \hat{\otimes} 1\}, \quad F_k \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A) \cap F_k A \quad (k \geq 1), \quad (3.3)$$

et un groupe filtré, l'ensemble des éléments diagonaux :

$$\mathcal{G}(A) = \{x \in 1 + I_A \mid \Delta(x) = x \hat{\otimes} x\}, \quad F_k \mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(A) \cap (1 + F_k A) \quad (k \geq 1). \quad (3.4)$$

$\mathcal{P}(A)$  et  $\mathcal{G}(A)$  sont complets pour ces filtrations.

Un morphisme  $f : A \rightarrow B$  d'algèbres de Hopf complètes envoie  $\mathcal{P}(A)$  dans  $\mathcal{P}(B)$  et  $\mathcal{G}(A)$  dans  $\mathcal{G}(B)$  ( $f$  respecte le coproduit). Donc,  $A \mapsto \mathcal{P}(A)$ ,  $A \mapsto \mathcal{G}(A)$  définissent naturellement des foncteurs à valeurs dans la catégorie des  $\mathbb{k}$ -algèbres de Lie et dans la catégorie des groupes.

Notons que si  $A$  est une algèbre de Hopf complète, alors  $\text{gr}A$  est une bigèbre graduée connexe de coproduit  $\text{gr}\Delta : \text{gr}A \rightarrow \text{gr}(A \hat{\otimes} A) \simeq \text{gr}A \otimes \text{gr}A$  (elle possède une structure d'algèbre de Hopf aussi).

**Proposition 3.1.5.** Soit  $A$  une algèbre de Hopf complète.

1. L'exponentielle se restreint en une bijection de  $\mathcal{P}(A)$  dans  $\mathcal{G}(A)$ .

2. L'espace  $\text{gr}_1(A)$  est constitué d'éléments primitifs, il engendre l'algèbre de Lie  $\mathcal{P}(\text{gr}(A))$ , où  $\mathcal{P}(\text{gr}(A))$  est l'ensemble des éléments primitifs de  $\text{gr}(A)$ .
3. L'inclusion naturelle  $\text{gr}(\mathcal{P}(A)) \rightarrow \text{gr}(A)$  induit un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées :  $\text{gr}(\mathcal{P}(A)) \rightarrow \mathcal{P}(\text{gr}(A))$ .

Le premier point de la proposition 3.1.5 montre que pour un morphisme d'algèbres de Hopf complètes  $f : A \rightarrow B$ , le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(A) & \xrightarrow{\mathcal{G}(f)} & \mathcal{G}(B) \\ \log \downarrow & & \downarrow \log \\ \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{\mathcal{P}(f)} & \mathcal{P}(B) \end{array} \quad (3.5)$$

Commute.

La suite de la sous-section est consacré à la définition de l'algèbre de Lie de Malcev (sur  $\mathbb{k}$ ) d'un groupe et aux propriétés de cette algèbre de Lie.

**Définition 3.1.6.** Soit  $\Gamma$  un groupe.

1. L'algèbre de Lie de Malcev sur  $\mathbb{k}$  de  $\Gamma$  est la  $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie filtrée complète :

$$\mathcal{P}(\mathbb{k}[\Gamma]^\wedge),$$

où  $\mathbb{k}[\Gamma]^\wedge$  est la complétion de l'algèbre  $\mathbb{k}[\Gamma]$  pour les puissances de l'idéal d'augmentation et  $\mathcal{P}(\mathbb{k}[\Gamma]^\wedge)$  est l'ensemble des primitifs de filtration comme dans (3.3).

2. On notera  $\text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$  l'algèbre de Lie de Malcev de  $\Gamma$ .

On peut aussi définir la notion du groupe de Malcev comme étant l'ensemble des diagonaux de  $\mathbb{k}[\Gamma]^\wedge$ . Notons que l'algèbre de Lie de Malcev d'un groupe détermine entièrement le complété pro-unipotent de ce groupe et réciproquement (Remarque 4.1.4).

**Proposition 3.1.7.** Soit  $\Gamma$  un groupe.

1. L'algèbre de Lie  $\text{grLie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$  est engendrée par sa composante de degré un  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$ .
2. La composante  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$  est isomorphe  $I_{\mathbb{k}[\Gamma]} / I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2$ , cet isomorphisme est induit par l'application linéaire de  $I_{\mathbb{k}[\Gamma]}$  dans  $\text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$  donnée par :

$$1 - h \mapsto \log(h), \quad \text{pour } h \in \Gamma$$

où  $I_{\mathbb{k}[\Gamma]}$  est l'idéal d'augmentation de  $\mathbb{k}[\Gamma]$ .

3. On note  $\Gamma^{ab}$  l'abélianisé de  $\Gamma$ . On a un isomorphisme entre  $I_{\mathbb{k}[\Gamma]} / I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2$  et  $\Gamma^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$  induit par :

$$1 - h \mapsto [h] \otimes 1, \quad \text{pour } h \in \Gamma$$

et où  $[h]$  désigne la classe de  $h$  dans  $\Gamma^{ab}$ .

4. Soit  $h_1, \dots, h_l$  une famille de  $\Gamma$  qui engendrent  $\Gamma^{ab}$ . L'algèbre de Lie  $\text{grLie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$  est engendré par les éléments :

$$[\log(h_1)]_1, \dots, [\log(h_l)]_1,$$

où  $[\log(h_i)]_1$  est la classe de  $\log(h_i)$  dans  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$ , pour  $i \in [1, l]$ .

5. Soit  $K$  un groupe,  $\phi : K \rightarrow \text{Out}(\Gamma)$  un morphisme de groupes :

- (a) Le morphisme  $\phi$  induit naturellement une action sur  $I_{\mathbb{k}[\Gamma]}/I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2$  et une action par automorphismes d'algèbre de Lie graduée sur  $\text{grLie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$ , qui est compatible à l'isomorphisme :

$$\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma) \simeq I_{\mathbb{k}[\Gamma]}/I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2.$$

- (b) Les actions de  $K$  (induites par  $\phi$ ) sur  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$ ,  $I_{\mathbb{k}[\Gamma]}/I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2$  et  $\Gamma^{ab} \otimes \mathbb{k}$  sont compatibles avec les isomorphismes précédents.  
(c) En particulier, on a pour  $(k, h) \in K \times \Gamma$ , on a :

$$k \cdot [\log(h)]_1 = [\log(\tilde{\phi}(k)(h))]_1,$$

où  $\tilde{\phi} : K \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  est une application relevant  $\phi$  et  $[\log(h)]_1$  est la classe de  $\log(h)$  dans  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$ .

- (d) Pour déterminer l'action de  $K$  sur  $\text{grLie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$ , il suffit de décrire l'action des éléments de  $K$  sur les classes

$$[\log(h_1)]_1, \dots, [\log(h_l)]_1,$$

pour  $h_1, \dots, h_l$  une famille de  $\Gamma$  qui engendrent  $\Gamma^{ab}$  ; ce qui est équivalent à déterminer l'action de  $K$  sur  $\Gamma^{ab}$ .

*Démonstration.* Pour  $A = \mathbb{k}[\Gamma]^\wedge$  le point (2) de la proposition 3.1.5 donne les informations suivantes :

- e) La composante  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$  engendrent  $\text{grLie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$ .  
f) On a un isomorphisme naturel  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma) \simeq \text{gr}_1(\mathbb{k}[\Gamma]^\wedge)$ .

Le point (e) implique (1).

Le gradué associé  $\text{gr}(\mathbb{k}[\Gamma]^\wedge)$  est naturellement isomorphe au gradué associé  $\text{gr}(\mathbb{k}[\Gamma])$  (où  $\mathbb{k}[\Gamma]$  est filtré pour les puissances de son idéal d'augmentation). Ainsi, en utilisant (f) et ce qui précède, on obtient :

$$\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma) \simeq \text{gr}_1 \mathbb{k}[\Gamma]^\wedge \simeq \text{gr}_1 \mathbb{k}[\Gamma] \simeq I_{\mathbb{k}[\Gamma]}/I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2.$$

Ces isomorphismes sont naturels et on a :

$$\log(h) = (1 - h) + r_h, \quad \text{avec } r_h \in I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2.$$

Ce qui montre que la classe de  $\log(h)$  dans  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$  correspond à celle de  $1 - h$  dans  $I_{\mathbb{k}[\Gamma]}/I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2$  et prouve (2). On trouve une preuve de (3) dans [22]. Montrons (4). Les classes  $[h_1], \dots, [h_l]$  engendrent  $\Gamma^{ab}$ . En appliquant les isomorphismes de (2) et (3), on obtient que :

$$[\log(h_1)]_1, \dots, [\log(h_l)]_1,$$

engendrent linéairement l'espace vectoriel  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$  et donc elles engendrent l'algèbre de Lie  $\text{gr} \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$  d'après (1). Ce qui montre (4).

Démontrons (5). Pour  $g, h \in \Gamma$ , on a :

$$g(1 - h)g^{-1} = (1 - g) + y, \quad \text{avec } y \in I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2;$$

on peut voir cela grâce à l'isomorphisme  $I_{\mathbb{k}[\Gamma]}/I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2 \simeq \Gamma^{ab} \otimes \mathbb{k}$  (ou par un calcul). On en déduit que pour  $x \in I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^n$  et  $g \in \Gamma$  :

$$gxg^{-1} = x + x_g, \quad \text{avec } x_g \in I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^{n+1},$$

et donc les automorphismes intérieurs de  $\Gamma$  induisent une action triviale sur  $\text{gr} \mathbb{k}[\Gamma]$  (où  $\text{Aut}(\Gamma)$  est supposé agir naturellement sur  $\mathbb{k}[\Gamma]$ ). Par conséquent, un morphisme  $\mathbb{k} \rightarrow \text{Out}(\Gamma)$  définit une action sur  $\text{gr}(\mathbb{k}[\Gamma])$ . Cette action est compatible au coproduit. Elle se restreint donc, en une action sur  $\mathcal{P}(\text{gr}(\mathbb{k}[\Gamma])) \simeq \mathcal{P}(\text{gr}(\mathbb{k}[\Gamma]^\wedge)) \simeq \text{gr} \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$ , où l'isomorphisme

$$\mathcal{P}(\text{gr}(\mathbb{k}[\Gamma]^\wedge)) \simeq \text{gr} \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$$

est celui du point trois de la proposition 3.1.5 (pour  $A = \mathbb{k}[\Gamma]^\wedge$ ). L'action ainsi définie est compatible avec l'isomorphisme  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma) \simeq I_{\mathbb{k}[\Gamma]}/I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2$ . Ce qui montre (a).

Pour  $(k, h) \in K \times \Gamma$ , on a :

$$k \cdot [h] = [\tilde{\phi}(k)(h)], \quad \text{dans } \Gamma^{ab},$$

$$\text{et } k \cdot (1 - h) = 1 - \tilde{\phi}(k)(h), \quad \text{dans } I_{\mathbb{k}[\Gamma]}/I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2 \quad (f')$$

où  $\tilde{\phi} : K \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  est une application quelconque relevant le morphisme  $\phi$ . Ces égalités prouvent la compatibilité des actions induites par  $\phi$  à l'isomorphisme  $I_{\mathbb{k}[\Gamma]}/I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2 \simeq \Gamma^{ab} \otimes \mathbb{k}$ . Notons que ces actions ne dépendent pas du relevé  $\tilde{\phi}$  choisi. L'autre compatibilité a été traité dans la preuve de (a).

L'égalité de (c) est une transcription de l'égalité  $(f')$  via la correspondance (compatible aux actions d'après (b)) donnée dans (2).

L'assertion (d), est une conséquence de (4). Ce qui achève la démonstration de la proposition. □

**Proposition 3.1.8.** Soit  $a_1, \dots, a_k$  et  $b_1, \dots, b_l$  des éléments d'un groupe  $\Gamma$ . On suppose que

$$(a'_1 \cdots a'_k, b'_1 \cdots b'_l) = 1,$$

pour  $a'_i$  un conjugué de  $a_i$  ( $i \in [1, k]$ ) et  $b'_i$  un conjugué de  $b_i$  ( $i \in [1, l]$ ), alors

$$\sum_{i,j} [\log(a_i)]_1, [\log(b_j)]_1 = 0,$$

dans  $\text{grLie}(K)_{\mathbb{k}}$ , ici  $[\log(x)]_1$  désigne la classe de  $\log(x)$  dans  $\text{gr}_1 \text{Lie}(K)_{\mathbb{k}}$ , pour  $x \in \Gamma$ .

*Démonstration.* Soit  $x, y \in \Gamma$ . On vérifie que :

$$(x, y) - 1 = [x - 1, y - 1] - [x - 1, y - 1](1 - (yx)^{-1}).$$

Or,

$$[x - 1, y - 1] \in I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2 \quad \text{et} \quad [x - 1, y - 1](1 - (yx)^{-1}) \in I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^3.$$

Donc, on a les égalités suivantes :

$$\log(x, y) = [x - 1, y - 1] = [\log(x), \log(y)], \quad \text{dans } I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2 / I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^3.$$

Ceci montre l'égalité (dans  $\text{gr}_2 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$ ) suivante :

$$[[\log(x)]_1, [\log(y)]_1] = [\log(x, y)]_2,$$

où  $[\log(x, y)]_2$  est la classe de  $\log(x, y) \in I_{\mathbb{k}[\Gamma]}^2$  dans  $\text{gr}_2 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$ . Ainsi, pour  $x = a'_1 \cdots a'_k$  et  $y = b'_1 \cdots b'_l$ , on trouve :

$$[[\log(a'_1 \cdots a'_k)]_1, [\log(b'_1 \cdots b'_l)]_1] = [\log(a'_1 \cdots a'_k, b'_1 \cdots b'_l)]_2 = 0$$

Enfin, l'isomorphisme entre  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}}(\Gamma)$  et  $\Gamma^{ab} \otimes \mathbb{k}$ , montre que :

$$[\log(a'_1 \cdots a'_k)]_1 = \sum_{i=1}^k [\log(a_i)]_1, \quad \text{et que} \quad [\log(b'_1 \cdots b'_l)]_1 = \sum_{j=1}^l [\log(b_j)]_1.$$

Cela prouve la proposition. On peut montrer cette proposition d'autres façons.  $\square$

## 3.2 Gradué associé de l'algèbre de Lie de Malcev des espaces de configurations

Dans cette section, on construit un morphisme surjectif d'algèbres de Lie graduées de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$  de la définition 2.3.3 (où 2.3.4) dans le gradué associé de l'algèbre de Lie de Malcev sur  $\mathbb{k}$  du groupe  $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ .

On a défini dans le premier chapitre des lacets de  $C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  :

les  $x_{ij}^g$ , pour  $i, j \in [1, n]$ ,  $i \neq j$  et  $g \in G$ ,

et les  $x_k^p$ , pour  $k \in [1, n]$  et  $p \in (\mathbb{P}_*^1)^c$ ,

(voir définitions 1.4.4 et 1.4.5 pour  $H = G$  et  $S_* = \mathbb{P}_*^1$ ).

**Proposition 3.2.1.** *Pour  $\gamma \in \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ , on note  $[\log(\gamma)]_1$  la classe de  $\log(\gamma)$  dans  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}} \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . Les classes :*

$$[\log(x_{ij}^g)]_1, \text{ pour } i, j \in [1, n], i \neq j, g \in G$$

$$\text{et } [\log(x_k^p)]_1, \text{ pour } k \in [1, n], p \in (\mathbb{P}_*^1)^c,$$

*engendrent linéairement  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}} \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  et forment une famille génératrice de l'algèbre de Lie  $\text{gr} \text{Lie}_{\mathbb{k}} \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ .*

*Démonstration.* On a montré (proposition 1.5.9 pour  $H = G$  et  $S = \mathbb{P}^1$ ) que les lacets  $x_{ij}^g$  et  $x_k^p$  engendrent le groupe  $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . La proposition est donc une conséquence de (4) de la proposition 3.1.7.  $\square$

D'autre part, la suite exacte courte (1.1) du premier chapitre pour  $H = G$  et  $S = \mathbb{P}^1$  :

$$1 \rightarrow \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(C_n(\mathbb{P}_*^1)/G)/\mathfrak{S}_n \rightarrow G^n \rtimes \mathfrak{S}_n \rightarrow 1.$$

donne un morphisme :

$$\bar{f} : G^n \rtimes \mathfrak{S}_n \rightarrow \text{Out } \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1).$$

On a explicité cette flèche en décrivant l'action de  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  sur les classes de conjugaison des lacets  $x_{ij}^g$  et  $x_k^p$  (proposition 1.4.8).

Ces données permettent, en appliquant la proposition 3.1.7 (point (5)), pour  $\Gamma = \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ ,  $K = G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  et  $\phi = \bar{f}$ , d'obtenir une action de  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  par automorphisme de Lie sur  $\text{gr} \text{Lie}_{\mathbb{k}} \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  :

**Proposition 3.2.2.** *Pour  $i, j, k \in [1, n]$  avec  $i \neq j$ ,  $g \in G$ ,  $p \in (\mathbb{P}_*^1)^c$ ,  $\underline{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , les formules suivantes :*

$$\underline{g} \cdot [\log(x_{ij}^h)]_1 = [\log(x_{ij}^{g_i h g_j^{-1}})]_1 \quad , \quad \underline{g} \cdot [\log(x_i^p)]_1 = [\log(x_i^{g_i \cdot p})]_1,$$

$$\sigma \cdot [\log(x_{ij}^g)]_1 = [\log(x_{\sigma(i)\sigma(j)}^g)]_1 \quad , \quad \sigma \cdot [\log(x_i^p)]_1 = [\log(x_{\sigma(i)}^p)]_1,$$

*définissent une action de  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  par automorphismes d'algèbre de Lie graduée sur  $\text{gr} \text{Lie}_{\mathbb{k}} \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ .*

*Démonstration.* Cette action est celle décrite dans le paragraphe précédent la proposition. Soit  $f : G^n \rtimes \mathfrak{S}_n \rightarrow \text{Aut}(\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1))$  une application relevant  $\bar{f}$  du paragraphe précédent cette proposition. L'action induite par  $f$  sur les classes  $[\log(\gamma)]_1$ , pour  $\gamma \in \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  est donnée par :

$$x \cdot [\log(\gamma)]_1 = [\log(f_x(\gamma))]_1,$$

où  $x \in G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  et  $f_x = f(x)$ . On a obtenu dans la proposition 1.4.8, pour  $\underline{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , les relations :

$$f_{\underline{g}}(x_{ij}^h) \sim x_{ij}^{g_i h g_j^{-1}} \quad , \quad f_{\underline{g}}(x_i^p) \sim x_i^{g_i \cdot p}$$



$$f_\sigma(x_{ij}^h) \sim x_{\sigma(i)\sigma(j)}^h \quad , \quad f_\sigma(x_i^p) \sim x_{\sigma(i)}^p$$

où  $\sim$  désigne la relation de conjugaison dans  $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . D'autre part,  $[\log(\gamma)]_1 = [\log(\gamma')]_1$  si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont conjugués dans  $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . En combinant ce qui précède on obtient les formules de la proposition.

Les formules de la proposition définissent bien l'action car les classes :

$$[\log(x_{ij}^g)]_1 \quad \text{et} \quad [\log(x_i^p)]_1,$$

pour  $i, j, k \in [1, n]$  avec  $i \neq j$ ,  $g \in G, p \in (\mathbb{P}_*^1)^c$  engendrent  $\text{gr Lie}_{\mathbb{k}} \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  (proposition 3.2.1).  $\square$

Dans le troisième chapitre, on a défini (définition 2.3.2) l'algèbre de Lie libre  $\mathfrak{h}_n(G)_{\mathbb{k}}$  et on a décrit une action de  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  par automorphismes de Lie sur cette algèbre (paragraphe après la définition 2.3.2).

**Proposition 3.2.3.** *Pour  $\gamma \in \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ , on note  $[\log(\gamma)]_1$  la classe de  $\log(\gamma)$  dans  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{k}} \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . Soit  $L_{\mathbb{k}} : \mathfrak{h}_n(G)_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{gr Lie}_{\mathbb{k}} \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  le morphisme de Lie donné par :*

$$X_{ij}(g) \mapsto [\log(x_{ij}^g)]_1 \quad , \quad X_i(p) \mapsto [\log(x_i^p)]_1,$$

pour  $i, j, k \in [1, n]$ ,  $i \neq j$ ,  $g \in G$ ,  $k \in [1, n]$  et  $p \in (\mathbb{P}_*^1)^c$ .

Le morphisme  $L_{\mathbb{k}}$  est un morphisme d'algèbres de Lie graduées,  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ -équivariant et surjectif.

*Démonstration.* On vérifie que le morphisme  $L_{\mathbb{k}}$  est  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ -équivariant en utilisant la proposition 3.2.2. Le morphisme  $L_{\mathbb{k}}$  est surjectif car les classes  $[\log(x_{ij}^g)]_1$  et  $[\log(x_k^p)]_1$  engendrent  $\text{gr Lie}_{\mathbb{k}} \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  (proposition 3.2.1). Le fait que ce morphisme respecte le degré est immédiat.  $\square$

Par définition  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$  est un quotient de  $\mathfrak{h}_n(G)_{\mathbb{k}}$ . De plus,  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$  est munie d'une action par automorphismes d'algèbre de Lie de  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  compatible avec celle de  $\mathfrak{h}_n(G)_{\mathbb{k}}$  (proposition 2.3.5).

**Proposition 3.2.4.** *On a un morphisme surjectif  $G^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ -équivariant d'algèbres de Lie graduées  $\varphi_{\mathbb{k}} : \mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{gr Lie}_{\mathbb{k}} \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ , donné par :*

$$X_{ij}(g) \mapsto [\log(x_{ij}^g)]_1 \quad , \quad X_i(p) \mapsto [\log(x_i^p)]_1,$$

pour  $i, j \in [1, n]$ ,  $i \neq j$ ,  $g \in G$ ,  $k \in [1, n]$  et  $p \in (\mathbb{P}_*^1)^c$ . Ce morphisme provient du morphisme  $L_{\mathbb{k}}$  de la proposition 3.2.3.

*Démonstration.* Compte tenu de la définition 2.3.3, de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$  comme quotient de  $\mathfrak{h}_n(G)_{\mathbb{k}}$ , et de la proposition 3.2.3, il suffit de vérifier que les éléments :

$$[X_{12}, X_{13} + X_{23}], [X_{12}, X_{34}], X_{12} - X_{21},$$

$$[X_1(p), X_{23}], [X_1(p), X_2(q)],$$

$$[X_{12}, X_1(p) + X_2(p) + \sum_{g \in G_p} X_{12}(g)], [X_1(p), X_2(p) + \sum_{g \in G_p} X_{12}(g)],$$

de  $\mathfrak{h}_n(G)_{\mathbb{k}}$  sont envoyés sur 0 par le morphisme  $L_{\mathbb{k}}$ . Or, c'est le cas. Pour le voir, il suffit d'appliquer la proposition 3.1.8 aux relations des propositions 1.5.3, 1.5.5 et 1.5.6 du premier chapitre. Ce qui montre la proposition.

On peut aussi construire le morphisme  $\varphi_{\mathbb{k}}$  en utilisant la présentation de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$  (définition 2.3.4) et les relations de la proposition 1.5.7.  $\square$



## Chapitre 4

# L'algèbre de Lie de Malcev de $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}^1)$ et formalité

Le but de la première section est de montrer la proposition 4.1.1. On utilisera cette proposition dans la deuxième section qui, elle, est consacrée à la preuve du théorème 4.2.1 (une reformulation du théorème A de l'introduction).

### 4.1 Torseurs et algèbres de Lie filtrées

Étant données deux  $\mathbb{Q}$ -algèbres de Lie filtrées. On montre (sous-section 4.1.2, proposition 4.1.1) sous certaines hypothèses que si "les extensions" de ces algèbres de Lie sur  $\mathbb{C}$  sont isomorphes, alors elles le sont sur  $\mathbb{Q}$ .

**Proposition 4.1.1.** *Soit  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  deux algèbres de Lie filtrées complètes au sens de la définition 3.1.3 telles que  $\text{gr}(\mathfrak{g})$  et  $\text{gr}(\mathfrak{h})$  sont engendrées par leur composante de degré un. On suppose aussi que  $\text{gr}_1(\mathfrak{g})$  et  $\text{gr}_1(\mathfrak{h})$  sont de dimension finie et qu'on a un isomorphisme  $f_1 : \text{gr}_1(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr}_1(\mathfrak{h})$ . S'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées :*

$$f : \mathfrak{g} \hat{\otimes} \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{h} \hat{\otimes} \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad \text{gr}_1(f) = f_1 \hat{\otimes} \text{id}_{\mathbb{C}},$$

*alors  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie filtrées.*

On commence cette section par une sous-section pour rappeler certaines notions et fixer des conventions.

#### 4.1.1 Schémas en groupes (conventions)

Soit  $\mathbb{k}$  un corps de caractéristique nulle. On suit les conventions et définitions de [12] et [29]. Un schéma affine  $X$  sur  $\mathbb{k}$ , où ( $\mathbb{k}$ -schéma affine) est vu comme un foncteur représentable de la catégorie des  $\mathbb{k}$ -algèbres ( $\mathbb{k}$ -anneaux) dans la catégorie des ensembles.  $X$  est un  $\mathbb{k}$ -schéma algébrique s'il est représenté par un  $\mathbb{k}$ -anneau finiment engendré.

Un  $\mathbb{k}$ -schéma affine en groupes  $\mathbf{G}$  est un foncteur des  $\mathbb{k}$ -algèbres dans la catégorie des groupes. Le foncteur  $\mathbf{G}$  est dit algébrique si le  $\mathbb{k}$ -schéma sous-jacent est algébrique. Pour simplifier on utilise les expressions  $\mathbb{k}$ -groupe affine et  $\mathbb{k}$ -groupe algébrique. Un morphisme entre  $\mathbb{k}$ -groupe affine et une transformation naturelle.

**Exemple 4.1.2.** *Pour  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel. On définit le  $\mathbb{k}$ -schéma affine  $\mathbf{GL}(V)$ , par :*

$$\mathbf{GL}(V)(R) = \mathrm{GL}_R(V \otimes_{\mathbb{k}} R),$$

pour  $R$  un  $\mathbb{k}$ -Anneau.

Une représentation linéaire de  $G$  sur  $V$  est un morphisme de  $\mathbb{k}$ -groupes  $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ , elle est de dimension finie si  $V$  l'est. Une représentation  $\rho$  : est dite fidèle si  $\rho$  est un monomorphisme, c'est à dire :

$$\mathbf{G}(R) \xrightarrow{\rho(R)} \mathbf{GL}(V)(R)$$

est injectif pour toute  $\mathbb{k}$ -algèbre  $R$ .

**Définition 4.1.3.** *Un  $\mathbb{k}$ -schéma en groupes algébrique est unipotent, s'il existe une représentation linéaire fidèle de dimension finie  $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}(V)$  et un drapeau :*

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k = V,$$

stable sous  $\mathbf{G}$  et tel que  $\mathbf{G}$  opère trivialement sur les quotients  $V_{i+1}/V_i$ .

La définition ci-dessus est équivalente à celle de [29] et l'équivalence est établit dans [12] (page 487).

A un  $\mathbb{k}$ -groupe algébrique  $\mathbf{G}$ , on associe naturellement une  $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie  $\mathrm{Lie}(G)$ . Lorsque  $G$  est unipotent  $\mathrm{Lie}(G)$  est nilpotente et pour  $R$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre :

$$\exp : \mathrm{Lie}(G) \otimes R \rightarrow \mathbf{G}(R),$$

est une bijection qui satisfait la formule de Campbell-Baker-Hausdorff.

On appelle la limite d'un système projectifs de  $\mathbb{k}$ -groupes algébriques unipotents :

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{U}_2 \longrightarrow \mathbf{U}_1,$$

un  $\mathbb{k}$ -schéma en groupes pro-unipotent.

**Remarque 4.1.4.** *Soit  $\Gamma$  un groupe abstrait finiment engendré. Le complété pro-unipotent  $\Gamma^{un}$  de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{k}$  est un  $\mathbb{k}$ -groupe pro-unipotent avec un morphisme  $i : \Gamma \rightarrow \Gamma^{un}(\mathbb{k})$  tel que pour tout morphisme  $f : \Gamma \rightarrow \mathbf{U}(\mathbb{k})$  avec  $\mathbf{U}$  un  $\mathbb{k}$ -groupe pro-unipotent,*

il existe un unique morphisme  $\hat{f} : \Gamma^{un} \rightarrow \mathbf{U}$  de  $\mathbb{k}$ -groupes qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{i} & \Gamma^{un}(\mathbb{k}) \\ f \downarrow & \swarrow \hat{f}(\mathbb{k}) & \\ \mathbf{U}(\mathbb{k}) & & \end{array}$$

L'algèbre de Lie du groupe  $\Gamma^{un}$  est l'algèbre de Lie de Malcev de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{k}$  ([23]) et  $\Gamma^{un}(\mathbb{k})$  est le groupe  $\mathcal{G}(\mathbb{k}[\Gamma]^\wedge)$ .

#### 4.1.2 Preuve de la proposition 4.1.1

On va montrer la proposition 4.1.1. Pour ce faire, on construit un toseur  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  sous un  $\mathbb{Q}$ -schéma en groupes pro-unipotent  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g})$ . Ensuite on utilise un résultat d'existence de points rationnels de toseurs sous l'action de groupes unipotents.

Dans la suite  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sont des algèbres de Lie comme dans la proposition 4.1.1. Pour  $i \geq 2$ , on pose :

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}/F_i\mathfrak{g} \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}/F_i\mathfrak{h}.$$

Comme  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sont complète, on a :

$$\mathfrak{g} = \varprojlim_i \mathfrak{g}_i \quad \text{et} \quad \mathfrak{h} = \varprojlim_i \mathfrak{h}_i.$$

#### Le schéma $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$

On va construire un  $\mathbb{Q}$ -schéma affine  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  qui est "en gros" constitué d'isomorphismes d'algèbres de Lie filtrées entre  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$ .

La filtration  $F_\bullet\mathfrak{g}$  (resp.  $F_\bullet\mathfrak{h}$ ) induit une filtration d'algèbres de Lie sur l'algèbre de Lie nilpotente  $\mathfrak{g}_i$  (resp.  $\mathfrak{h}_i$ ) :

**Proposition 4.1.5.** *L'image de  $F_r\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g}_i$  est  $\mathcal{C}_r\mathfrak{g}_i$ , le  $r$ -ième terme de la suite centrale descendante de  $\mathfrak{g}_i$ . Il en est de même pour  $F_r\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{h}_i$ .*

*Démonstration.* On suppose dans la proposition 4.1.1 que  $\text{gr}(\mathfrak{g})$  est engendrée par sa composante de degré un. Ceci implique que :  $F_r\mathfrak{g} = \mathcal{C}_r\mathfrak{g} + F_{r+1}\mathfrak{g}$  et on a donc :

$$F_r\mathfrak{g} = \mathcal{C}_r\mathfrak{g} + F_{r+s}\mathfrak{g}, \quad \text{pour } r, s \geq 1. \quad (A)$$

Comme le  $r$ -ième terme de la suite centrale descendante est espace caractéristique, l'image de  $\mathcal{C}_r\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g}_i$  est  $\mathcal{C}_r\mathfrak{g}_i$ . De plus, pour  $s > i$ ,  $F_{r+s}\mathfrak{g}$  est envoyé sur 0 dans  $\mathfrak{g}_i$ . On déduit de ce qui précède (compte tenu de (A)) que l'image de  $F_r\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g}_i$  est  $\mathcal{C}_r\mathfrak{g}_i$ . Ce qui montre la proposition.  $\square$

La proposition montre que  $\mathfrak{g}_i^{ab}$  (l'abélianisée de  $\mathfrak{g}_i$ ) est isomorphe à  $\mathfrak{g}_2 = \text{gr}_1(\mathfrak{g})$ . De même, on a  $\mathfrak{h}_i^{ab} \simeq \mathfrak{h}_2 = \text{gr}_1(\mathfrak{h})$ . Ainsi, pour  $R$  un  $\mathbb{Q}$ -anneau, un morphisme d'algèbres de Lie  $L : \mathfrak{g}_i \otimes R \rightarrow \mathfrak{h}_i \otimes R$ , induit naturellement un morphisme :

$$\text{gr}_1(L) : \mathfrak{g}_2 \otimes R \rightarrow \mathfrak{h}_2 \otimes R.$$

Pour  $i \geq 1$ , on définit le  $\mathbb{Q}$ -schéma algébrique  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ , donné par :

$$\text{Iso}_1(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)(R) = \{ \text{isomorphismes } L : \mathfrak{g}_i \otimes R \rightarrow \mathfrak{h}_i \otimes R \mid \text{gr}(L) = f_1 \otimes \text{id}_R \},$$

où  $f_1 : \text{gr}_1(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr}_1(\mathfrak{h})$  est l'isomorphisme de la proposition 4.1.1, pour  $R$  une  $\mathbb{Q}$ -algèbre.

**Proposition-Définition 4.1.6.** *Les schémas  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$  forment naturellement un système projectif :*

$$\cdots \rightarrow \text{Iso}_1(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2) \rightarrow \text{Iso}_1(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1);$$

on notera  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  la limite de ce système. Pour  $R$  un  $\mathbb{Q}$ -anneau,  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})(R)$  est l'ensemble des isomorphismes d'algèbres de Lie filtrées  $\mathfrak{g} \hat{\otimes} R \rightarrow \mathfrak{h} \hat{\otimes} R$  qui induisent l'isomorphisme  $f_1 \hat{\otimes} \text{id}_R$ .

*Démonstration.* L'image des idéaux  $F_k \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$  (respectivement  $F_k \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ ) dans  $\mathfrak{g}_i$  (respectivement  $\mathfrak{h}_i$ ) étant des idéaux caractéristiques  $\mathcal{C}_k \mathfrak{g}_i$  (proposition 4.1.5), les  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$  forment un système projectif comme annoncé.

Enfin, un isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées  $L : \mathfrak{g} \hat{\otimes} R \rightarrow \mathfrak{h} \hat{\otimes} R$  est entièrement déterminé par la donnée d'isomorphismes  $L_j$  faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & \mathfrak{g}_i \otimes R & \longleftarrow & \mathfrak{g}_{i+1} \otimes R & \longleftarrow & \mathfrak{g}_{i+2} \otimes R & \longleftarrow & \cdots \\ & & L_i \downarrow & & L_{i+1} \downarrow & & L_{i+2} \downarrow & & \\ \cdots & \longleftarrow & \mathfrak{h}_i \otimes R & \longleftarrow & \mathfrak{h}_{i+1} \otimes R & \longleftarrow & \mathfrak{h}_{i+2} \otimes R & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les projections canoniques. Enfin, Si  $L$  induit  $f_1 \otimes \text{id}_R : \mathfrak{g}_2 \otimes R \rightarrow \mathfrak{h}_2 \otimes R$ , alors chacun des  $L_i$  induit  $f_1 \otimes \text{id}_R : \mathfrak{g}_2 \otimes R \otimes \mathfrak{h}_2 \otimes R$ , via les identifications canoniques  $\mathfrak{g}_i^{ab} \simeq \mathfrak{g}_2$  et  $\mathfrak{h}_i^{ab} \simeq \mathfrak{h}_2$  et réciproquement si les  $L_i$  induisent  $f_1 \otimes \text{id}_R$ , alors  $L$  induit  $f_1 \otimes \text{id}_R$  aussi. Ce qui montre la dernière assertion de la proposition et achève la démonstration.  $\square$

### Le schéma en groupes $\text{Aut}_1(\mathfrak{g})$

Pour  $i \geq 1$ , on définit le  $\mathbb{Q}$ -schéma en groupes algébrique  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}_i)$  par :

$$\text{Aut}_1(\mathfrak{g}_i) = \text{Iso}_1(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i), \quad \text{pour } \mathfrak{h} = \mathfrak{g} \text{ et } f_1 = \text{id}_{\mathfrak{g}_2}.$$

De même, on pose  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}) = \text{Iso}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ , pour  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ .

**Proposition 4.1.7.** *Les  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}_i)$  sont des  $\mathbb{Q}$ -groupes algébriques unipotents, ils forment naturellement un système projectif :*

$$\cdots \longrightarrow \text{Aut}_1(\mathfrak{g}_2) \longrightarrow \text{Aut}_1(\mathfrak{g}_1),$$

de limite  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g})$  pro-unipotent. Pour un  $\mathbb{Q}$ -anneau  $R$ ,  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g})(R)$  est l'ensemble des automorphismes d'algèbre de Lie filtrée de  $\mathfrak{g} \hat{\otimes} R$  induisant  $\text{id}_{\mathfrak{g}_2} \otimes \text{id}_R$  sur  $\mathfrak{g}_2 \simeq \mathfrak{g}_i^{ab}$ .

*Démonstration.* Le monomorphisme naturel  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}_i) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}_i)$  fournit une représentation linéaire fidèle de dimension finie de  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}_i)$ , lequel est algébrique. Le drapeau  $\mathcal{C}_{n_i} \mathfrak{g}_i \subset \mathcal{C}_{n_i-1} \mathfrak{g}_i \subset \cdots \subset \mathcal{C}_0 \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i$  ( $n_i$  est la classe de nilpotence de  $\mathfrak{g}_i$ ) est stable par  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}_i)$ . Comme  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}_i)$  induit une action triviale sur  $\mathfrak{g}_i^{ab} = \mathfrak{g}_i / \mathcal{C}_2 \mathfrak{g}_i$ , il agit trivialement sur  $\mathcal{C}_k \mathfrak{g}_i / \mathcal{C}_{k+1} \mathfrak{g}_i$ , pour  $1 \leq k < n_i$ . Ce qui montre que  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}_i)$  est unipotent.

Comme  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g})$  n'est autre que  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  pour  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$  et  $f_1 = \text{id}_{\mathfrak{g}_2}$  le reste de la proposition est une conséquence de la proposition 4.1.6 et de la définition d'un groupe pro-unipotent.  $\square$

### Existence de points rationnels de $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et conclusion

Ayant construit  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  et  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g})$ , on peut montrer la proposition 4.1.1

**Définition 4.1.8.** *Un  $\mathbb{Q}$ -torseur est un  $\mathbb{Q}$ -schéma  $X$ , muni d'une action à gauche d'un  $\mathbb{Q}$ -schéma en groupes  $H$  telle que l'action de  $H(\mathbb{k})$  sur  $X(\mathbb{k})$  est libre et transitive quand  $X(\mathbb{k})$  est non-vide. On dit que  $X$  est un toseur sous  $H$ .*

Soit  $\cdots \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1$  un système projectif de  $\mathbb{Q}$ -schémas,  $X = \varprojlim X_i$  sa limite projective et  $H = \varprojlim H_i$  un  $\mathbb{Q}$ -schéma en groupes pro-unipotent.

**Proposition 4.1.9** ([15]). *Supposons que les  $X_i$  forment un système de toseurs compatibles sous les  $H_i$  et que  $X(\mathbb{C})$  est non vide, alors  $X(\mathbb{Q})$  est non vide.*

**Proposition 4.1.10.** *Chaque  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$  est un toseur sous l'action de  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}_i)$ . Les  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$  sous les  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}_i)$  forment un système compatible de toseurs. Leur limite inverse est  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  qui est un toseur sous l'action de  $\text{Aut}_1(\mathfrak{g})$ .*

*Démonstration.* Immédiat.  $\square$

Dans la proposition 4.1.1, on suppose qu'on a un isomorphisme :

$$f : \mathfrak{g} \hat{\otimes} \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{h} \hat{\otimes} \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad \text{gr}(f) = f_1 \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}.$$

Ce qui est équivalent à supposer que  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})(\mathbb{C})$  est non vide. Ainsi, en appliquant les propositions 4.1.9 et 4.1.10, on trouve que  $\text{Iso}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$  et donc il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées  $f_{\mathbb{Q}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  qui induit  $f_1 : \text{gr}_1(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr}_1(\mathfrak{h})$ . Ce qui achève la démonstration de 4.1.1.



## 4.2 Preuve du théorème A

Cette section est consacrée à la preuve du théorème A énoncé dans l'introduction.

Rappelons que  $Lie_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  est l'algèbre de Lie de Malcev sur  $\mathbb{k}$  du groupe  $\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . Cette algèbre de Lie est naturellement munie d'une filtration  $F_{\bullet} Lie_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  décrite dans le chapitre précédent. L'algèbre de Lie graduée

$$\text{gr } Lie_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$$

est le gradué associé de  $Lie_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  pour la filtration  $F_{\bullet} Lie_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . On notera :

$$\hat{\text{gr}} Lie_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \quad \text{et} \quad \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{k}}$$

les complétés respectifs de  $\text{gr } Lie_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  et  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$  pour le degré. Voici une reformulation du théorème A avec les notations qu'on vient d'introduire :

**Théorème 4.2.1.** *Pour  $\mathbb{k}$  un corps de caractéristique nulle, les algèbres de Lie filtrées :*

$$Lie_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1), \quad \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{k}} \quad \text{et} \quad \hat{\text{gr}} Lie_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$$

*sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie filtrées, c'est à dire : les filtrations de ces algèbres de Lie correspondent via les isomorphismes.*

On va commencer par construire deux morphismes :  $Lie_{\mathbb{C}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \rightarrow \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$  et  $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{k}} \rightarrow \hat{\text{gr}} Lie_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . Remarquons d'abord, que :

**Lemme 4.2.2.** *L'ensemble  $\mathcal{P}(\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}})$  des primitifs de  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{k}}$  est naturellement isomorphe à  $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{k}}$ . Les filtrations de ces deux algèbres de Lie complètes coïncident.*

**Proposition 4.2.3.** *On a un morphisme surjectif (provenant de la connexion  $KZ_n$  associée à  $G$ ) d'algèbres de Lie filtrées  $\theta_{\rho} : Lie_{\mathbb{C}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \rightarrow \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$  donné par :*

$$\text{gr}(\theta_{\rho})[\log(x_{ij}^g)]_1 = X_{ij}(g) \quad \text{et} \quad \text{gr}(\theta_{\rho})[\log(x_k^q)]_1 = X_k(q),$$

pour  $i, j, k \in [1, n]$ , avec  $i \neq j$ ,  $g \in G$  et  $q \in (\mathbb{P}_*^1)^c$ .

*Démonstration.* On a vu dans le deuxième chapitre que la connexion  $KZ_n$  associée à  $G$  fournit une représentation (voir "équation" (2.8) ) de monodromie :

$$\rho_{\tilde{Q}} : \pi_1(C_n^G(\mathbb{P}_*^1), Q) \rightarrow \mathcal{G}(\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}),$$

où  $\mathcal{G}(\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}})$  est le groupe des éléments diagonaux de  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$ . L'application  $\rho_{\tilde{Q}}$  est un antimorphisme. On note  $\rho : \pi_1(C_n^G(\mathbb{P}_*^1), Q) \rightarrow \mathcal{G}(\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}})$ , le morphisme de groupes donné par :

$$\rho(\gamma) = \rho_{\tilde{Q}}(\gamma)^{-1}, \quad \text{pour } \gamma \in \pi_1(C_n^G(\mathbb{P}_*^1), Q).$$

Le morphisme d'algèbres  $\mathbb{k}[\rho] : \mathbb{k}[\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)] \rightarrow \hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$  envoie les diagonaux de  $\mathbb{k}[\rho]$  sur les diagonaux de  $\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$  et donc il respecte les corproduits. De plus, il respecte les augmentations des deux algèbres. Ceci montre qu'il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf complètes :

$$\widehat{\mathbb{k}[\rho]} : \mathbb{k}[\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)]^{\wedge} \longrightarrow \hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$$

complété de  $\mathbb{k}[\rho]$ . En restreignant  $\widehat{\mathbb{k}[\rho]}$  aux primitifs, on obtient le morphisme :

$$\mathcal{P}(\widehat{\mathbb{k}[\rho]}): \text{Lie}_{\mathbb{C}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \rightarrow \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}},$$

où on utilise l'isomorphisme naturel  $\mathcal{P}(\hat{\mathcal{U}}\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}) \simeq \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$  du lemme 4.2.2. On pose  $f_{\rho} := \mathcal{P}(\widehat{\mathbb{k}[\rho]})$ . Par construction de  $f_{\rho}$ , on a :

$$f_{\rho}(\log(\gamma)) = \log(f_{\rho}(\gamma)), \quad (A)$$

pour  $\gamma \in \pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  (voir le diagramme 3.5 du chapitre précédent).

On a montré, dans la proposition 2.4.7 du chapitre deux, que :

$$\rho_{\tilde{Q}}(x_{ij}^g) = 1 - 2i\pi X_{ij}(g) + R_{ij}(g), \quad \rho_{\tilde{Q}}(x_k^p) = 1 - 2i\pi X_k(p) + R_k(p),$$

où  $R_{ij}(g)$  et  $R_k(p)$  ne comportent que des termes de degré supérieur ou égale à deux.

En appliquant (A) à ces formules, on trouve que :

$$f_{\rho}(\log(x_{ij}^g)) = 2i\pi X_{ij}(g) + r_{ij}(g), \quad f_{\rho}(\log(x_k^p)) = 2i\pi X_k(p) + r_k(p), \quad (B),$$

où  $r_{ij}(g)$  et  $r_k(p)$  ne comportent que des termes de degré supérieur ou égale à deux.

Soit  $L_{2i\pi} : \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$  l'automorphisme de Lie, donné par :

$$X_{ij}(g) \mapsto \frac{1}{2i\pi} X_{ij}(g) \quad \text{et} \quad X_k(p) \mapsto \frac{1}{2i\pi} X_k(p).$$

Les égalités de (B) impliquent les égalités suivantes :

$$\text{gr}(L_{2i\pi} \circ f_{\rho})[\log(x_{ij}^g)]_1 = X_{ij}(g) \quad \text{et} \quad \text{gr}(L_{2i\pi} \circ f_{\rho})[\log(x_k^p)]_1 = X_k(p).$$

On prend donc  $\theta_{\rho} = L_{2i\pi} \circ f_{\rho}$ .

Enfin, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{C}}$  est engendré par les  $X_{ij}(g)$  et les  $X_k(p)$ . Or,  $X_{ij}(g)$  et les  $X_k(p)$  se trouvent dans l'image de  $\text{gr}(\theta_{\rho}) = \text{gr}(L_{2i\pi} \circ f_{\rho})$  et donc  $\text{gr}(\theta_{\rho})$  est surjectif. La surjectivité de  $\text{gr}(\theta_{\rho})$  implique la surjectivité de  $\theta_{\rho}$  car  $\text{Lie}_{\mathbb{C}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  et  $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$  sont complètes. Ce qui montre la proposition.  $\square$

**Proposition 4.2.4.** *On a un morphisme surjectif d'algèbres de Lie filtrées  $\hat{\varphi}_{\mathbb{k}} : \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{k}} \rightarrow \hat{\text{gr}}\text{Lie}_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  donné par :*

$$X_{ij}(g) \mapsto [\log(x_{ij}^g)]_1 \quad , \quad X_k(p) \mapsto [\log(x_k^p)]_1,$$

pour  $i, j, k \in [1, n]$ , avec  $i \neq j$ ,  $g \in G$  et  $p \in (\mathbb{P}_*^1)^c$ .

*Démonstration.* Le morphisme  $\hat{\varphi}_{\mathbb{k}}$  est le complété de  $\varphi_{\mathbb{k}}$  de la proposition 3.2.4 pour le degré.  $\square$

On note  $f_{\mathbb{C}}$  la composée des flèches :

$$\text{Lie}_{\mathbb{C}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \xrightarrow{\theta_{\rho}} \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\hat{\varphi}_{\mathbb{C}}} \hat{\text{gr}}\text{Lie}_{\mathbb{C}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1),$$

obtenues dans les deux dernières propositions 4.2.3 et 4.2.4.

Par construction de  $\theta_{\rho}$  et  $\hat{\varphi}_{\mathbb{C}}$ , on a :

$$\text{gr}(f_{\mathbb{C}})[\log(x_{ij}^g)]_1 = [\log(x_{ij}^g)]_1 \quad \text{et} \quad \text{gr}(f_{\mathbb{C}})[\log(x_k^p)]_1 = [\log(x_k^p)]_1,$$

Or, on montre dans la proposition 3.2.1 que l'algèbre de Lie  $\text{gr}\text{Lie}_{\mathbb{C}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)_{\mathbb{C}}$  est engendrée par les classes  $[\log(x_{ij}^g)]_1$  et  $[\log(x_k^p)]_1$  pour  $i, j, k \in [1, n]$ , avec  $i \neq j$ ,  $g \in G$  et  $p \in (\mathbb{P}_*^1)^c$ . Par conséquent,  $\text{gr}(f_{\mathbb{C}})$  est l'identité et donc  $f_{\mathbb{C}}$  est un isomorphisme qui induit l'identité sur  $\text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{C}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$ . Ceci montre que  $\theta_{\rho}$  et  $\hat{\varphi}_{\mathbb{C}}$  sont des isomorphismes.

Comme  $\hat{\varphi}_{\mathbb{C}} = \hat{\varphi}_{\mathbb{k}} \hat{\otimes}_{\mathbb{k}} \text{id}_{\mathbb{C}}$ ,  $\hat{\varphi}_{\mathbb{k}}$  est un isomorphisme pour tout  $\mathbb{k}$ . Ce qui prouve que les algèbres de Lie :

$$\hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{k}} \quad \text{et} \quad \hat{\text{gr}}\text{Lie}_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$$

sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie filtrées.

Montrons l'isomorphisme entre  $\text{Lie}_{\mathbb{C}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  et  $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}}$ . On note  $(\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{Q}})_1$  la composante de degré un de  $\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{Q}}$ , et

$$\theta_{\mathbb{Q}}^1 : \text{gr}_1 \text{Lie}_{\mathbb{Q}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \rightarrow (\mathfrak{p}_n(G)_{\mathbb{Q}})_1,$$

l'inverse de l'isomorphisme  $\text{gr}_1(\hat{\varphi}_{\mathbb{Q}})$ . L'application  $\theta_{\mathbb{Q}}^1$  est donnée par :

$$[\log(x_{ij}^g)]_1 \mapsto X_{ij}(g) \quad \text{et} \quad [\log(x_k^p)]_1 \mapsto X_k(p),$$

pour  $i, j, k \in [1, n]$ , avec  $i \neq j$ ,  $g \in G$  et  $p \in (\mathbb{P}_*^1)^c$ .

Comme  $\text{Lie}_{\mathbb{C}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) = \text{Lie}_{\mathbb{Q}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \hat{\otimes} \mathbb{C}$  et  $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{C}} = \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes} \mathbb{C}$ , l'application  $\theta_{\rho}$  est un isomorphisme :

$$\text{Lie}_{\mathbb{Q}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \hat{\otimes} \mathbb{C} \xrightarrow[\theta_{\rho}]{\simeq} \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes} \mathbb{C}$$

De plus  $\text{gr}_1(\theta_\rho) = \theta_{\mathbb{Q}}^1 \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}$ . Ainsi, en appliquant la proposition 4.1.1, pour :

$$\mathfrak{g} = \text{Lie}_{\mathbb{Q}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1), \quad \mathfrak{h} = \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{Q}}, \quad f = \theta_p \quad \text{et} \quad f_1 = \theta_{\mathbb{Q}}^1.$$

On trouve que  $\text{Lie}_{\mathbb{Q}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)$  et  $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{Q}}$  sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie filtrées ; notons  $\theta_\rho(\mathbb{Q})$  "cet isomorphisme".

Enfin, on a  $\text{Lie}_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)_{\mathbb{k}} = \text{Lie}_{\mathbb{Q}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1) \hat{\otimes} \mathbb{k}$  et  $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{k}} = \hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes} \mathbb{k}$ . L'application  $f_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes} \text{id}_{\mathbb{k}}$  est donc un isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées entre  $\text{Lie}_{\mathbb{k}}\pi_1 C_n^G(\mathbb{P}_*^1)_{\mathbb{k}}$  et  $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)_{\mathbb{k}}$ , pour tout  $\mathbb{k}$  de caractéristique nul. Ce qui achève la preuve du théorème 4.2.1.



# Bibliographie

- [1] Vladimir Arnold. The cohomology ring of the group of dyed braids. *Mat. Zametki*, 5 :227–231, 1969.
- [2] Emile Artin. Theory of braids. *Ann. of Math. (2)*, 48 :101–126, 1947.
- [3] Paolo Bellingeri. On presentations of surface braid groups. *J. Algebra*, 274(2) :543–563, 2004.
- [4] Roman Bezrukavnikov. Koszul DG-algebras arising from configuration spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 4(2) :119–135, 1994.
- [5] Joan Birman. On braid groups. *Comm. Pure Appl. Math.*, 22 :41–72, 1969.
- [6] Joan Birman. *Braids, links, and mapping class groups*. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974.
- [7] Egbert Brieskorn. Sur les groupes de tresses. pages 21–44. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 317, 1973.
- [8] Adrien Brochier. A Kohno-Drinfeld theorem for the monodromy of cyclotomic KZ connections. *Comm. Math. Phys.*, 311(1) :55–96, 2012.
- [9] Damien Calaque, Benjamin Enriquez, and Pavel Etingof. Universal KZB Equations : The Elliptic Case. In *Algebra, Arithmetic, and Geometry*, volume 269 of *Progr. Math.*, pages 165–266. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.
- [10] Daniel Cohen. Monodromy of fiber-type arrangements and orbit configuration spaces. *Forum Math.*, 13(4) :505–530, 2001.
- [11] Fred Cohen, Toshitake Kohno, and Miguel Xicoténcatl. Orbit configuration spaces associated to discrete subgroups of  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . *J. Pure Appl. Algebra*, 213(12) :2289–2300, 2009.
- [12] Michel Demazure and Pierre Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*. Masson & Cie, Éditeur, Paris ; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970.
- [13] Vladimir Drinfeld. On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . *Leningrad Math. J.*, 2(4) :829–860, 1991.
- [14] Benjamin Enriquez. Quasi-reflection algebras and cyclotomic associators. *Selecta Math. (N.S.)*, 13(3) :391–463, 2007.
- [15] Benjamin Enriquez. Elliptic associators. *Selecta Math. (N.S.)*, 20(2) :491–584, 2014.

- [16] Benjamin Enriquez. Flat connections on configuration spaces and braid groups of surfaces. *Adv. Math.*, 252 :204–226, 2014.
- [17] Benjamin Enriquez and Pavel Etingof. Quantization of classical dynamical r-matrices with nonabelian base. *Comm. Math. Phys.*, 254(3) :603–650, 2005.
- [18] Pavel Etingof and Olivier Schiffmann. *Lectures on quantum groups*. Lectures in Mathematical Physics. International Press, Somerville, MA, second edition, 2002.
- [19] Edward Fadell and Sufian Hussein. *Geometry and topology of configuration spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [20] Edward Fadell and Lee Neuwirth. Configuration spaces. *Math. Scand.*, 10 :111–118, 1962.
- [21] William Fulton and Robert MacPherson. A compactification of configuration spaces. *Ann. of Math. (2)*, 139(1) :183–225, 1994.
- [22] Karl Gruenberg. *Cohomological topics in group theory*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 143. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [23] Richard Hain. Completions of mapping class groups and the cycle  $C - C^-$ . In *Mapping class groups and moduli spaces of Riemann surfaces (Göttingen, 1991/Seattle, WA, 1991)*, volume 150 of *Contemp. Math.*, pages 75–105. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [24] Christian Kassel. Quantum groups. In *Algebra and operator theory (Tashkent, 1997)*, pages 213–236. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
- [25] Ludmil Katzarkov, Ernesto Lupercio, and Francisco Turrubiates, editors. *The influence of Solomon Lefschetz in geometry and topology*, volume 621 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014. 50 years of mathematics at CINVESTAV.
- [26] Vadim Knizhnik and Alexander Zamolodchikov. Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions. *Nuclear Phys. B*, 247(1) :83–103, 1984.
- [27] Toshitake Kohno. On the holonomy Lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of hypersurfaces. *Nagoya Math. J.*, 92 :21–37, 1983.
- [28] Igor Kriz. On the rational homotopy type of configuration spaces. *Ann. of Math. (2)*, 139(2) :227–237, 1994.
- [29] James Milne. *Basic Theory of Affine Group Schemes*, 2012.
- [30] Peter Orlik and Louis Solomon. Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Invent. Math.*, 56(2) :167–189, 1980.
- [31] Stefan Papadima and Alexandru Suciu. Geometric and algebraic aspects of 1-formality. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.)*, 52(100)(3) :355–375, 2009.
- [32] Frederic Paulin. Groupes et géométries, cours de seconde année de maîtrise, [http://www.math.u-psud.fr/paulin/notescours/cours\\_georiem.pdf](http://www.math.u-psud.fr/paulin/notescours/cours_georiem.pdf).

- [33] Daniel Quillen. Rational homotopy theory. *Ann. of Math. (2)*, 90 :205–295, 1969.
- [34] Vladimir Vershinin. On braid groups in handlebodies. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 39(4) :755–764, i, 1998.
- [35] Miguel Xicotencatl. *Orbit configuration spaces, infinitesimal braid relations in homology and equivariant loop spaces*. University of Rochester, 1997. Ph.D. Thesis.
- [36] Miguel Xicotencatl. On orbit configuration spaces and the rational cohomology of  $F(\mathbf{R}P^n, k)$ . In *Une dégustation topologique [Topological morsels] : homotopy theory in the Swiss Alps (Arolla, 1999)*, volume 265 of *Contemp. Math.*, pages 233–249. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.



# Formalité pour certains espaces de configurations tordus et connexions de type Knizhnik – Zamolodochikov.

## Résumé

Pour  $X$  un espace topologique, l'algèbre de Lie de Malcev de son groupe fondamental (ou algèbre de Lie de Malcev de  $X$ ) fait partie des invariants étudiés en homotopie rationnelle. Un espace est dit 1-formel si cette algèbre de Lie est quadratique. Les connexions de type Knizhnik-Zamolodochikov peuvent permettre d'établir des résultats de "formalité" des espaces de configurations de points sur les surfaces. On s'intéresse à une famille d'espaces  $X$  qui sont des espaces de configurations de points sur la sphère, tordus par l'action d'un groupe fini d'homographies. On étudie le groupe fondamental de  $X$  et on construit une connexion de type Knizhnik-Zamolodochikov qui permet de calculer l'algèbre de Lie de Malcev de  $X$  et de démontrer sa 1-formalité.

Mots-clés : Espaces de configurations tordus, relations entre tresses, connexions de type Knizhnik-Zamolodochikov, 1-formalité, Algèbre de Lie de Malcev.

## Résumé en anglais

The Malcev Lie algebra of the fundamental group of  $X$  (or Malcev Lie algebra of  $X$ ) is an algebraic invariant of the space  $X$  studied in rational homotopy theory. The space  $X$  is 1-formal if its Malcev algebra is quadratic. One can use Knizhnik–Zamolodchikov-type connections to obtain "formality" (1-formality or filtered formality) results for configuration spaces of surfaces. In the thesis we consider a family of orbit configuration spaces  $X$  of the complex projective line associated to finite groups of homographies. We study the fundamental group of  $X$  and construct Knizhnik–Zamolodchikov-type connections. This allows us to give a presentation of the Malcev Lie algebra of  $X$  and to prove the 1-formality of  $X$ .

Keywords : orbit configuration spaces, relations between braids, Knizhnik–Zamolodchikov-type connections, 1-formality, Malcev Lie algebra.