INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur de
l'Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Thomas Richez

Anneaux tautologiques sur les variétés Jacobiennes de courbes avec automorphismes et les variétés de Prym généralisées

Soutenue le 12 mai 2017
devant la commission d'examen

Rutger Noot, directeur de thèse
Ben Moonen, rapporteur
Angela Ortega, rapporteur
Robert Laterveer, examinateur
Johannes Nagel, examinateur

www-irma.u-strasbg.fr

Institut de Recherche Mathématique Avancée

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg et C.N.R.S.
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex

Anneaux tautologiques sur les variétés Jacobiennes de courbes avec automorphismes et les variétés de Prym généralisées

Thomas Richez

10 mai 2017

Et toute science, quand nous l'entendons non comme un instrument de pouvoir et de domination, mais comme aventure de connaissance de notre espèce à travers les âges, n'est autre chose que cette harmonie, plus ou moins vaste et plus ou moins riche d'une époque à l'autre, qui se déploie au cours des générations et des siècles, par le délicat contrepoint de tous les thèmes apparus tour à tour, comme appelés du néant, pour se joindre en elle et s'y entrelacer.

Alexandre GROTHENDIECK.

Remerciements

Je tiens avant toute chose à remercier avec la plus grande sincérité mon directeur de thèse, Rutger Noot, aussi bien pour tout ce qu'il m'a apporté mathématiquement que son côté profondément humain. Je peux dire aujourd'hui sans la moindre hésitation que ces trois dernières années n'auraient pas été aussi agréables sans votre disponibilité, votre gentillesse et la justesse de vos raisonnements. Vous avez su me guider et m'encourager dans les « périodes de creux » tout en me laissant la liberté dont j'avais besoin pour organiser mon travail et pour explorer au mieux les pistes qui me venaient à l'esprit. Pour tout ceci, et plus encore, je vous dis un grand MERCI... infiniment...

Merci aussi à Ben Moonen et Angela Ortega qui m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse. Je remercie également Robert Laterveer et Johannes Nagel d'avoir accepté de faire parti de mon jury.

Cette soutenance de thèse, c'est aussi l'accomplissement de 9 années d'étude passées à l'Université de Strasbourg (anciennement Université Louis Pasteur). Tout au long de ces années, j'ai eu la chance de suivre des cours que j'ai toujours considérés comme étant de qualité (avec parfois une touche d'exotisme...). Le parcours « Mathématiques renforcées », puis le Magistère mais aussi la « Prépa Agreg » m'ont apporté beaucoup. Aussi, je souhaite remercier chacun des enseignants que j'ai été amené à connaître et qui ont su me transmettre l'envie d'en apprendre toujours plus et de développer cette rigueur, cette logique mathématique que j'estime au plus haut point. Cette envie, je l'ai découverte alors même que j'étais tout petit – au CE2 pour autant que je m'en souvienne – et s'est considérablement développée au lycée. Mon professeur de Première et Terminale S, M. Sliss, a indéniablement marqué mon approche des mathématiques mais aussi ma manière d'enseigner. Je n'oublierai jamais la passion et la générosité avec laquelle il abordait cet art que sont les Mathématiques.

Plus généralement, je me suis toujours senti très à l'aise au sein de l'UFR Math-Info. C'est sans nul doute grâce à toutes ces personnes qui, chaque jour, contribuent au bon fonctionnement de notre Université. Qu'elles en soient remerciées. À ce titre, je remercie tout particulièrement Fabienne Grauss pour son travail à la scolarité mais surtout pour nous avoir toujours soutenus, des étudiants et moi.

Et puis, il y a eu ces trois fameuses années de thèse. Trois années durant lesquelles j'ai été amené à enseigner le cours d'algèbre L1S1. Ç'aura été une expérience vraiment enrichissante et valorisante. J'en profite à ce sujet pour remercier Rémy Debalme – responsable de la L1 et du cours d'algèbre S1 – pour sa très grande sympathie.

J'en viens à présent à la partie que beaucoup attendent, je le sais. Arnaud, Markus, Suraj ; spéciale dédicace à la Team du 114. Une Team fantôme en première année (paraît-il...). Cette très bonne humeur dans notre bureau a su se développer en seconde année et encore davantage en troisième. Rien de tel qu'un bon burger ou des wings pour créer des liens. J'en veux Djo ! J'en

veux... Merci aussi à Audrey et Amandine pour avoir supporté mes nombreux passages dans leur bureau. C'est toujours agréable de voir un bureau rempli même si ce n'est pas le sien... Je pense également aux pauses du midi prolongées par les parties d'échecs avec Guillaume le grand, alias Guillaume 1. Spécial thanks bien évidemment pour ma petite Ranine préférée. Et puis, j'ai une pensée particulière pour tous les autres doctorants. Certains se sont déjà envolés vers de nouveaux horizons. D'autres sont arrivés plus récemment mais tous ont contribué à leur manière à la bonne ambiance générale. Je pense notamment (sans ordre particulier) à Guillaume 2, mais aussi Jérôme, Alex, Frédéric, Amaury, Florian, Simon, Elena, Mohamad, Pierre, Stéphane, Claire, Antoine, Kien, Auguste, Nicolas, Cuong, Nassima, Philippe, Yohann, Clément, Arthur, Valéria, Shanshan, Xing, Lukas, Vincent, Giosue, Romain, Laura.

Je remercie enfin mes parents qui m'ont toujours soutenu et été présents toutes ces années. Vous m'avez apporté tout ce dont je pouvais rêver et m'avez toujours permis d'aborder mes études dans les meilleures conditions possibles. Je ne vous en remercierai jamais assez. Je vous aime. Je pense aussi à ma sœur chérie et à mon filleul, qui un jour j'espère pourra lire et comprendre les quelques pages à venir. Je vous aime également. Mes études terminées, c'est une nouvelle vie qui débute et je ferai tout pour continuer à vous rendre fiers dans les autres domaines moins « scolaires »...

Table des matières

Résumé 5

Notations 7

Introduction 9

1 Cadre de travail et premières motivations 11
1.1 Cycles algébriques et relations d'équivalence . . . 11
1.1.1 Relations d'équivalence rationnelle, algébrique et homologique . . . 11
1.1.2 Morphismes et théorie de l'intersection . . . 13
1.2 Cycles algébriques sur une variété abélienne . . . 14
1.2.1 Produit de Pontryagin . . . 14
1.2.2 Transformée de Fourier . . . 14
1.2.3 Décomposition de Beauville . . . 15
1.3 Variétés Jacobiennes . . . 16
1.3.1 Définition, autodualité et propriété d'Albanese . . . 16
1.3.2 Anneau tautologique $R(C;J)$ de Beauville . . . 18
1.4 Variétés de Prym généralisées . . . 19
1.4.1 Généralités . . . 19
1.4.2 Revêtements Galoisiens n-cycliques . . . 20
1.4.3 Anneau tautologique $R(\psi_{Z*}C;Z)$ de Arap . . . 20

2 Tautological rings on Jacobian varieties of curves with automorphisms 23
2.1 Introduction . . . 23
2.2 Preliminaries . . . 26
2.3 Functoriality of tautological rings $R(C;J)$ . . . 32
2.3.1 Notations . . . 32
2.3.2 Functoriality of tautological rings $R(C;J)$ . . . 34
2.3.3 The special case of n-cyclic Galois coverings . . . 36
2.4 The tautological ring $R_G(C;J)$ . . . 40
2.4.1 Key-theorem . . . 40
2.4.2 Interpretation in terms of tautological rings . . . 45
2.4.3 Tautological divisors, Néron-Severi group and symmetric endomorphisms . . . 46
2.5 The tautological ring $R_G(\psi_{Y*}C;Y)$ . . . 47

2.6 The tautological ring $R_H^{\sigma}(\psi_{Z*}C; Z)$ 49
2.6.1 Key-theorem 49
2.6.2 Interpretation in terms of tautological rings 53
2.6.3 Some remarks about relations between generators in $\mathrm{A}(Y)$ and $\mathrm{A}(Z)$ 54
2.6.4 Outlooks 56

3 Anneaux tautologiques sur les variétés de Prym généralisées associées aux revêtements Galoisiens n-cycliques par une courbe hyperelliptique 57
3.1 Introduction 57
3.1.1 Généralités 57
3.1.2 Exemples de courbes hyperelliptiques avec automorphismes 58
3.2 Générateurs de $R_\sigma(C; J)$ et $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ 59
3.2.1 Réduction à un système fini de générateurs 59
3.2.2 Interprétation des cycles Γ_i et γ_i sur C^2 et involution de Rosati 61
3.2.3 Action de l'involution de Rosati au niveau des correspondances sur C^2 64
3.3 Générateurs et relations dans $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ lorsque σ est d'ordre p est premier 65
3.3.1 Premiers résultats : les cas $p = 2$ et $p = 3$ 65
3.3.2 Transformée de Fourier des ω_i dans $\mathrm{A}(Z)$ 68
3.3.3 Méthodes générales pour étudier les relations entre les ω_i 75
3.3.4 Relations en codimension maximale entre les ω_i 79
3.3.5 Relations en codimension quelconque entre les ω_i 87
3.3.6 Applications : structure de $\mathbb{Q}$-algèbre de $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ en petite dimension . . 93
3.4 Programmation des calculs avec Sage 94
3.4.1 Code source du programme calculant les relations du type $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$ . . . 94
3.4.2 Code source du programme complet 96
3.4.3 Autres applications numériques 103
3.5 Compléments concernant l'étude des relations entre les ω_i 109
3.5.1 Retour sur les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta)$ 109
3.5.2 Retour sur le degré des monômes de la forme $\omega_0^{d-q}\omega_k^q$ 114
3.5.3 Retour sur les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2i} + \sigma^{2j}, \eta)$ 118
3.5.4 Retour sur l'obtention des structures de $\mathbb{Q}$-algèbre de $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ 123

4 Sous-variétés spéciales des variétés de Prym généralisées associées aux revêtements Galoisiens n-cycliques 131
4.1 Introduction 131
4.2 Classes de cohomologie de $[V]$ et des $[V_i]$ dans $\mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(Z)$ 133
4.2.1 Classe de $[V]$ dans $\mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(Z)$ 133
4.2.2 Classe des $[V_i]$ dans $\mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(Z)$ 136
4.3 Classe d'équivalence algébrique de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-g'-r}(Z)$ 141
4.3.1 Notations 141
4.3.2 Théorème principal 143
4.3.3 Formules particulières pour $[V]_{(t)}$ lorsque $r = 1$ 147
4.3.4 Formules particulières pour $[V]_{(0)}$ lorsque $r \geqslant 1$ 148
4.3.5 Exemples 153

Bibliographie 156

Résumé

De manière générale, on étudie dans cette thèse les cycles algébriques sur les variétés Jacobiennes de courbes complexes projectives lisses qui admettent des automorphismes non triviaux. Il s'agit plus précisément d'introduire et d'étudier de nouveaux anneaux tautologiques associés à des groupes d'automorphismes de la courbe. On montre que ces $\mathbb{Q}$-algèbres naturelles de cycles algébriques sur les Jacobiennes se restreignent en des familles de cycles sur certaines sous-variétés spéciales de la Jacobienne et que celles-ci méritent encore le nom d'anneaux tautologiques sur ces sous-variétés. On étudie en détail le cas des courbes hyperelliptiques ; situation dans laquelle les algèbres introduites admettent un nombre fini de générateurs, et en particulier sont de dimension finie. On peut alors être très précis dans l'étude des relations entre ces générateurs. Enfin, on montre que ces anneaux tautologiques apparaissent naturellement dans un autre contexte : celui des systèmes linéaires complets sans point de base.

Mots clés : cycles algébriques, anneaux tautologiques, Jacobiennes, automorphismes, transformée de Fourier, variétés de Prym généralisées.

Notations

$[\![a, b]\!]$	ensemble des entiers compris entre les réels a et b
$\#E$	cardinal d'un ensemble E
$\lfloor x \rfloor$	fonction partie entière de x
$\lceil x \rceil$	fonction plafond de x
Φ_p	p-ème polynôme cyclotomique rationnel
C	courbe complexe complète et non-singulière
$g(C)$	genre de C
$\mathrm{K}(C)$	corps des fonctions de C
$\mathrm{Aut}(C)$	groupe d'automorphismes de C
$C^{(d)}$	d-ème puissance symétrique de C
$J(C)$	variété Jacobienne de C
f^P	plongement de C dans $J(C)$ déterminé par un point rationnel P de C
$\mathcal{Z}^i(X)$	ensemble des cycles algébriques de codimension i sur une variété X
$\mathcal{Z}_i(X)$	ensemble des cycles algébriques de dimension i sur une variété X
$\cdot$	produit d'intersection pour les cycles algébriques
$*$	produit de Pontryagin pour les cycles algébriques
$\mathrm{Div}(X)$	groupe des diviseurs (de Weil) sur une variété X
$\mathrm{CH}(X)$	anneau de Chow d'une variété X
$\mathrm{A}(X)$	$\mathbb{Q}$-algèbre des classes de cycles algébriques sur une variété X modulo équivalence algébrique
$\mathrm{Pic}(X)$	groupe de Picard de X
$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$	groupe de Néron-Severi rationnel d'une variété X
Δ_C	cycle algébrique déterminé par la diagonale de C^2
$\widehat{X}$	duale d'une variété abélienne X
$\widehat{f}$	homomorphisme dual d'un homomorphisme de variétés abéliennes
$\mathcal{P}_{X \times \widehat{X}}$	faisceau de Poincaré sur une variété abélienne X
$l_{X \times \widehat{X}}$	classe de cycle algébrique dans $A^1(X \times \widehat{X})$ déterminée par $\mathcal{P}_{X \times \widehat{X}}$
$\mathcal{F}_X$	transformée de Fourier pour les cycles algébriques sur une variété abélienne X
χ	caractéristique d'Euler
$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathcal{I})$	$\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs $\mathcal{I}$

Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier les cycles algébriques sur les variétés Jacobiennes de courbes complexes projectives lisses qui admettent des automorphismes. Il s'agit plus précisément d'introduire et d'étudier de nouveaux anneaux tautologiques associés à des groupes d'automorphismes de la courbe.

Anneau tautologique

La notion d'anneau tautologique a été pour la première fois introduite et étudiée par Arnaud Beauville dans [Bea04]. L'idée est la suivante. Soit C une courbe complexe projective lisse de genre $g = g(C) \geqslant 1$. On note $J = J(C)$ sa variété Jacobienne et $\mathrm{A}(J)$ l'anneau des cycles algébriques sur J modulo équivalence algébrique tensorisé par $\mathbb{Q}$. Un point rationnel P étant fixé sur C, on dispose d'un plongement $f^P : C \hookrightarrow J$. On obtient de cette manière un cycle exceptionnel et tout à fait naturel dans $\mathrm{A}^{g-1}(J)$: celui associé à la courbe image $f^P(C) \subset J$. Pour alléger les notations, on notera encore C cette classe de cycle qui, grâce à l'équivalence algébrique, est indépendante du choix du point P. Pour plus de clarté introduisons déjà une notation.

Notation : Soit X une variété abélienne et $\mathcal{J} \subset \mathrm{A}(X)$ une famille de cycles sur X. On note par $\mathrm{Taut}_X(\mathcal{J})$ l'anneau tautologique engendré par $\mathcal{J}$, c'est-à-dire le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathrm{A}(X)$ contenant $\mathcal{J}$ et fermé pour les opérations naturelles de $\mathrm{A}(X)$; à savoir les produits d'intersection et de Pontryagin, les pull-backs et push-forwards par les opérateurs k_*, k^* induits pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par les homothéties $k = k_X : x \mapsto kx$ de X.

Beauville a étudié l'anneau $R(C; J) := \mathrm{Taut}_J(\{C\})$ grâce à un outil important : la transformée de Fourier pour les cycles algébriques. La puissance de cet outil, pour ce qui nous intéresse, réside entre autres dans la compatibilité de la transformée de Fourier avec les produits d'intersection et de Pontryagin mais aussi compatibilité vis-à-vis des pull-backs et push-forwards des cycles. Beauville a alors montré que cette $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\mathrm{A}(J)$ est engendrée

1. pour le produit de Pontryagin par les composantes homogènes $C_{(i)} \in \mathrm{A}^{g-1}(J)_{(i)}$ apparaissant dans la décomposition de Beauville [Bea86] du cycle C,
2. pour le produit d'intersection par la transformée de Fourier des cycles $C_{(i)}$. Ces cycles seront notés $-N^{i+1}(w)$ pour des raisons qui apparaîtront plus clairement dans la suite.

Après avoir présenté de manière plus détaillée le cadre de travail de cette thèse au chapitre 1, on s'attachera dès le chapitre 2 à étudier le comportement fonctoriel des anneaux $R(C; J)$. Plus précisément, supposons que l'on ait un morphisme fini $f : C \to C'$ entre courbes complexes projectives lisses. Celui-ci induit deux (homo)morphismes de variétés abéliennes $f^* : J(C') \to J(C)$ et $N_f : J(C) \to J(C')$ (morphisme d'Albanese). On étudiera l'action de ces morphismes par pull-back et push-forward sur les cycles tautologiques associés à C et C'. Le cas plus intéressant pour nous est celui des revêtements Galoisiens cycliques $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ déterminés par un automorphisme $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, il apparaît naturellement dans $\mathrm{A}(J(C))$ des push-forwards de C par des polynômes en l'automorphisme σ (ou plus précisément polynômes en l'automorphisme d'Albanese encore noté $\sigma = N_\sigma \in \mathrm{Aut}(J(C))$). De ce point de vue, on sera naturellement amené à étudier la plus petite extension de $R(C; J(C))$ stable par les pull-backs et push-forwards par les polynômes en σ. On montrera que cette extension $R_\sigma(C; J(C)) \subset \mathrm{A}(J(C))$ mérite encore le nom d'anneau tautologique sur $J(C)$. Plus généralement, on introduira dans ce chapitre 2 des anneaux tautologiques $R_G(C; J(C))$ sur $J(C)$ associés à n'importe quel groupe (fini) d'automorphismes $G \subset \mathrm{Aut}(C)$. Ces anneaux tautologiques sont engendrés pour le produit d'intersection par les $\pi^* N^i(w)$ pour $\pi \in \mathbb{Z}[G]$.

En fait, l'étude de la fonctorialité de l'anneau $R(C; J(C))$ (mais aussi des $R_G(C; J(C))$) nous amènera à considérer la sous-variété abélienne $Y := \mathrm{Im}(f^*) \subset J(C)$, sous-variété isogène à $J(C')$. On considérera également une sous-variété abélienne Z complémentaire de Y dans $J(C)$. On montrera que, sous-certaines hypothèses faibles sur G, les anneaux $R_G(C; J(C))$ se restreignent en des familles de cycles dans $\mathrm{A}(Y)$ et $\mathrm{A}(Z)$ qui méritent eux-aussi d'être qualifiées d'anneaux tautologiques sur Y et Z. On vient ainsi généraliser un théorème de Maxim Arap [Ara12, Theorem 1] qui a mis en évidence un anneau tautologique sur Z (analogue à l'anneau $R(C; J(C))$ sur les Jacobiennes) dans le cas particulier où Z est une variété de Prym.

Dans le chapitre 3, on étudiera en détail ces anneaux tautologiques sur J et Z associés à un automorphisme σ d'ordre p premier lorsque la courbe C est supposée hyperelliptique. Dans ce cas, on montre que ces $\mathbb{Q}$-algèbres sont engendrées par un nombre fini d'éléments. On présentera alors dans ce chapitre une méthode pour étudier les relations entre ces générateurs ; obtenant ainsi la structure d'algèbre complète (générateurs et relations) pour les anneaux tautologiques sur Z au moins lorsque Z est de petite dimension.

Le dernier chapitre, le 4, montrera que ces anneaux tautologiques sur les variétés de Prym généralisées Z apparaissent aussi dans un autre contexte. Il s'agira de généraliser des résultats de Beauville [Bea82] et de Arap [Ara12] en montrant que tout système linéaire complet g^r_d sans point de base sur $C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ (avec σ d'ordre n quelconque sans point fixe) détermine des sous-variétés spéciales sur Z dont les classes de cycles sont des cycles tautologiques sur Z. On donnera des formules explicites pour décomposer ces classes en termes de générateurs de l'anneau tautologique sur Z.

Conventions

Les variétés considérées dans cette thèse sont des variétés complexes (bien que ce ne soit pas toujours essentiel). Les courbes considérées seront systématiquement supposées complexes projectives et lisses. Le terme de point désignera (sauf mention contraire) un point rationnel ou de manière équivalente sur $\mathbb{C}$, un point fermé. Lorsqu'on parlera de morphismes de variétés abéliennes, on sous-entendra homomorphismes de variétés abéliennes. Un morphisme p_i défini sur un produit de variétés désignera classiquement la projection sur le i-ème facteur. Parfois, on notera aussi $p = p_1 : X \times Y \to X$ et $q = p_2 : X \times Y \to Y$.

CHAPITRE 1

Cadre de travail et premières motivations

On précise dans ce chapitre le cadre de travail dans lequel ce texte s'inscrit. C'est l'occasion d'introduire un certain nombre de notations, de rappeler les résultats connus et de commencer à motiver l'étude à venir.

1.1 Cycles algébriques et relations d'équivalence

Pour plus de détails concernant cette section, une référence incontournable est [Ful98]. On pourra toutefois s'intéresser dans un premier temps à [Mur14] pour obtenir une approche plus globale et succincte des cycles algébriques et des relations d'équivalence.

1.1.1 Relations d'équivalence rationnelle, algébrique et homologique

Cycles algébriques : Soient X une variété complexe projective lisse de dimension g et $i \in [\![0, g]\!]$. On note $\mathcal{Z}^i(X) = \mathcal{Z}_{g-i}(X)$ le groupe des cycles de codimension i (ou de manière équivalente de dimension $g-i$) sur X ; c'est-à-dire le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les sous-variétés irréductibles de X de codimension i.

Exemple 1.1.1 : $\mathcal{Z}^1(X) = \mathrm{Div}(X)$ est le groupe des diviseurs (de Weil) sur X.

Étant donnée une sous-variété V de X, on notera (sauf mention explicite du contraire) $[V]$ le cycle algébrique déterminé par V. Plus généralement, si on considère un sous-schéma V dont les composantes irréductibles sont $V_1, \ldots, V_r$, on note $[V] = \sum_{i=1}^r m_i[V_i]$ où m_i est la multiplicité de V_i dans V ; à savoir la longueur de l'anneau $\mathcal{O}_{V,V_i}$.

Anneau de Chow : Soient p_1, p_2 les deux projections de $X \times \mathbb{P}^1$ sur X et $\mathbb{P}^1$ respectivement. Étant donnée une sous-variété irréductible V de $X \times \mathbb{P}^1$ qui se projette de manière dominante sur $\mathbb{P}^1$, on définit pour tout point $t \in \mathbb{P}^1$:

$$V(t) := p_1\big(V \cdot (X \times \{t\})\big).$$

Un cycle $Z \in \mathcal{Z}^i(X)$ est dit rationnellement équivalent à zéro, et on note $Z \in \mathrm{Rat}^i(X)$, s'il existe une correspondance $\gamma \in \mathcal{Z}^i(X \times \mathbb{P}^1)$ et deux points $a, b \in \mathbb{P}^1$ tels que

$$Z = \gamma(b) - \gamma(a).$$

On dit alors de deux cycles $\alpha, \beta \in \mathcal{Z}^i(X)$ qu'ils sont rationnellement équivalents si leur différence est rationnellement équivalente à zéro, c'est-à-dire $\alpha - \beta \in \mathrm{Rat}^i(X)$. Ceci définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{Z}^i(X)$. Le quotient sera noté

$$\mathrm{CH}_{g-i}(X) = \mathrm{CH}^i(X) := \frac{\mathcal{Z}^i(X)}{\mathrm{Rat}^i(X)}.$$

Le groupe de Chow de X est par définition

$$\mathrm{CH}(X) := \bigoplus_{i=0}^{g} \mathrm{CH}^i(X).$$

On dispose d'un produit d'intersection bien défini sur $\mathrm{CH}(X)$ qui le munit d'une structure d'anneau commutatif dont l'élément neutre est $[X]$. On parlera de l'anneau de Chow de X pour faire référence à cette structure d'anneau pour le produit d'intersection $(\mathrm{CH}(X), +, \cdot)$. Notons que la graduation de l'anneau de Chow selon la codimension est compatible avec le produit d'intersection dans le sens où

$$\mathrm{CH}^i(X) \cdot \mathrm{CH}^j(X) \subset \mathrm{CH}^{i+j}(X).$$

Équivalence algébrique : On définit de manière analogue une autre relation adéquate sur $\mathcal{Z}^i(X)$: l'équivalence algébrique (voir par exemple [Mur14, Sous-section 1.3] ou encore [BL04, Remark 16.1.1] pour une définition de relation adéquate). Pour cela, il suffit de reprendre la définition d'équivalence rationnelle et de remplacer $\mathbb{P}^1$ par une courbe projective lisse C. On définit ainsi le sous-groupe $\mathrm{Alg}^i(X) \subset \mathcal{Z}^i(X)$ des cycles algébriquement équivalents à zéro, puis

$$\mathrm{A}^i(X) = \mathrm{A}_{g-i}(X) = \frac{\mathcal{Z}^i(X)}{\mathrm{Alg}^i(X)}.$$

On peut donc considérer l'anneau des cycles algébriques modulo équivalence algébrique :

$$\mathrm{A}(X) := \bigoplus_{i=0}^{g} \mathrm{A}^i(X).$$

En particulier, tout les points d'une courbe complexe projective lisse C sont algébriquement équivalents entre eux de sorte que $\mathrm{A}^1(C) \simeq \mathbb{Z}$ via l'application degré $\deg : \mathrm{A}^1(C) \to \mathbb{Z}$.

Équivalence homologique : On se fixe une cohomologie de Weil $\mathrm{H}^{\cdot}(X)$ sur X ; c'est-à-dire une cohomologie avec les bonnes propriétés usuelles (décomposition de Künneth, application classe de cycles, etc. [Mur14, Sous-section 2.3]). Puisque l'on travaille sur $\mathbb{C}$, pour nous ce sera la cohomologie singulière à coefficients entiers (ou rationnels) de X. Avec une cohomologie de Weil vient une application classe de cycles

$$cl_X : \mathcal{Z}^i(X) \to \mathrm{H}^{2i}(X).$$

On définit

$$\mathrm{Hom}^i(X) := \mathrm{Ker}\left(cl_X : \mathcal{Z}^i(X) \to \mathrm{H}^{2i}(X)\right).$$

La relation d'équivalence rationnelle est la plus fine des relations adéquates. On a les inclusions suivantes :

$$\mathrm{Rat}^i(X) \subset \mathrm{Alg}^i(X) \subset \mathrm{Hom}^i(X).$$

L'application cl_X passe donc au quotient à travers $\mathrm{CH}(X)$ et $\mathrm{A}(X)$.

Convention : Dans tout ce qui suit, on notera encore

$$\mathrm{CH}(X) = \mathrm{CH}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}(X) = \mathrm{A}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

On travaillera donc avec des (classes de) cycles à coefficients rationnels.

1.1.2 Morphismes et théorie de l'intersection

Push-forward et pull-back : Si $f : X \to Y$ est un morphisme propre entre variétés projectives lisses, on dispose d'un morphisme de groupes

$$f_* : \mathcal{Z}_i(X) \longrightarrow \mathcal{Z}_i(Y).$$

défini de la manière suivante. Soit V une sous-variété irréductible de X,

$$f_*[V] = \begin{cases} \deg(f_{|V})[f(V)] & \text{si } f_{|V} : V \to f(V) \text{ est génériquement fini,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce morphisme induit un morphisme de push-forward f_* au niveau des anneaux de Chow mais aussi au niveau des anneaux des cycles modulo équivalence algébrique.

Tout morphisme plat $f : X \to Y$ induit un morphisme de groupes

$$f^* : \mathcal{Z}^i(Y) \longrightarrow \mathcal{Z}^i(X)$$

déterminé par $f^*[V] = [f^{-1}(V)]$. Sans hypothèse de platitude sur f (grâce au lemme de déplacement de Chow), on obtient même un morphisme d'anneaux au niveau des anneaux de Chow et modulo équivalence algébrique.

Rappelons à présent deux résultats importants :

Proposition 1.1.2 (Formule de projection) **-** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre entre variétés projectives lisses. Alors pour tout $x \in \mathrm{CH}(X)$ et $y \in \mathrm{CH}(Y)$, on a*

$$f_*(x \cdot f^*y) = f_*x \cdot y.$$

Proposition 1.1.3 (Formule de changement de base) **-** *Considérons un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

entre variétés projectives lisses avec f propre et g plat. Alors pour tout cycle $x \in \mathrm{CH}(X)$, on a

$$f'_*g'^*x = g^*f_*x.$$

Correspondances : Signalons enfin que tout correspondance (de codimension p) $Z \in \mathrm{CH}^p(X \times Y)$ induit aussi un morphisme

$$Z_* : \mathrm{CH}_i(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^{p-i}(Y)$$

défini par

$$\forall \alpha \in \mathrm{CH}_i(X), \quad Z_*(\alpha) := p_{2*}(Z \cdot p_1^*\alpha).$$

1.2 Cycles algébriques sur une variété abélienne

1.2.1 Produit de Pontryagin

On considère à présent une variété abélienne complexe X toujours de dimension $g = g(X)$. On note $m : X \times X \to X$ sa loi de groupe et $\widehat{X}$ sa variété abélienne duale. En plus du produit d'intersection sur $\mathrm{CH}(X)$, on dispose d'un second produit : le produit de Pontryagin défini de la manière suivante

$$\forall x, y \in \mathrm{CH}(X), \qquad x * y := m_*(p_1^* x \cdot p_2^* y) = m_*(x \times y).$$

Intuitivement (et ensemblistement), considérer le produit de Pontryagin de deux cycles revient à sommer (au sens loi de la variété abélienne) les points de ces deux cycles. Précisément, si V et W sont deux sous-variétés irréductibles de X, alors

$$[V] * [W] = \deg(m_{|V \times W})[V + W]$$

si $m_{|V\times W} : V \times W \to V + W$ est génériquement fini, sinon ce produit est nul. En particulier, le produit de Pontryagin est homogène de degré $-g$:

$$\mathrm{CH}^i(X) * \mathrm{CH}^j(X) \subset \mathrm{CH}^{i+j-g}(X).$$

Ce produit de Pontryagin est lui aussi bien défini dans $\mathrm{A}(X)$ et on notera qu'il est compatible avec les push-forwards de cycles par des homomorphismes de variétés abéliennes.

1.2.2 Transformée de Fourier

Un outil clé pour obtenir bon nombre de résultats présentés dans cette thèse est la transformée de Fourier pour les cycles algébriques sur une variété abélienne X. On notera dans tout ce qui suit $l = l_{X\times\widehat{X}}$ la classe du cycle du fibré de Poincaré $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{X\times\widehat{X}}$ sur $X \times \widehat{X}$. La transformée de Fourier $\mathcal{F}_X$ sur X est alors définie comme étant le morphisme induit par la correspondance

$$e^{l_{X\times\widehat{X}}} = \sum_{n=0}^{2g} \frac{1}{n!} l^n_{X\times\widehat{X}} \in \mathrm{CH}(X \times \widehat{X}).$$

Plus explicitement, on a pour tout $x \in \mathrm{CH}(X)$,

$$\mathcal{F}_X(x) := p_{2*}(p_1^* x \cdot e^{l_{X\times\widehat{X}}}).$$

Cette transformée de Fourier possède de nombreuses propriétés, notamment :

1. Identifiant canoniquement X avec la variété biduale $\widehat{\widehat{X}}$ (ce que l'on fera systématiquement), on obtient une transformée de Fourier $\mathcal{F}_{\widehat{X}} : \mathrm{CH}(\widehat{X}) \to \mathrm{CH}(X)$ sur $\widehat{X}$. Elle vérifie l'importante formule d'inversion de Fourier suivante :

$$\mathcal{F}_{\widehat{X}} \circ \mathcal{F}_X = (-1)^g(-1_X)^*.$$

2. Pour tous cycles x, y sur X, on a

$$\mathcal{F}_X(x \cdot y) = (-1)^g \mathcal{F}_X(x) * \mathcal{F}_X(y) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_X(x * y) = \mathcal{F}_X(x) \cdot \mathcal{F}_X(y).$$

On pourra se référer à [Bea83] pour obtenir bien d'autres propriétés sur cet outil.

1.2.3 Décomposition de Beauville

La transformée de Fourier fournit par exemple une preuve élégante du théorème suivant démontré en 1986 par Arnaud Beauville dans [Bea86]. Ce résultat affirme que les opérateurs k_* et k^* induits sur $\mathrm{CH}(X)$ (mais aussi $\mathrm{A}(X)$) par les homothéties $k = k_X : X \to X$ pour $k \in \mathbb{Z}$ se codiagonalisent.

Théorème 1.2.1 (Décomposition de Beauville) **-** *Pour $s \in \mathbb{Z}$, on note $\mathrm{CH}^p(X)_{(s)}$ le sous-espace de $\mathrm{CH}^p(X)$ formé des classes x telles que $k^*x = k^{2p-s}x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (ou de manière équivalente $k_*x = k^{2g-2p+s}x$). On a*

$$\mathrm{CH}^p(X) = \bigoplus_{s=p-g}^{s=p} \mathrm{CH}^p(X)_{(s)}.$$

Esquisse de la preuve du théorème : Soit $x \in \mathrm{CH}^p(X)$ un cycle de codimension pure $p \in [\![0, g]\!]$. On souhaite décomposer x comme une somme de composantes homogènes $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ pour certains cycles x_q dans certains sous-espaces $\mathrm{CH}^p(X)_{(s)}$. Pour cela, on commence par appliquer $\mathcal{F}_X$ à x. Le cycle $y := \mathcal{F}_X(x)$ se décompose sous la forme $y = y_0 + y_1 + \ldots + y_g$ où chaque $y_q \in \mathrm{CH}^q(\widehat{X})$. Le premier argument clé consiste à vérifier que la composante y_q appartient même à $\mathrm{CH}^q(\widehat{X})_{p+q-g}$. La seconde étape consiste à repasser à x grâce à la formule d'inversion de Fourier : les composantes x_q cherchées sont au signe près les transformées de Fourier $\mathcal{F}_{\widehat{X}}(y_q)$ des y_q. Ce sont encore des cycles homogènes relativement à la bigraduation de Beauville puisque la transformée de Fourier est compatible avec les sous-espaces $\mathrm{CH}^p(X)_{(s)}$:

$$\mathcal{F}_X(\mathrm{CH}^p(X)_{(s)}) = \mathrm{CH}^{g-p+s}(\widehat{X})_{(s)}.$$

Schématiquement, on peut visualiser la stratégie de la preuve sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
x \in \mathrm{CH}^p(X) \arrow[rr, "\mathcal{F}_X"] \arrow[d, equal, "?"'] & & y \in \bigoplus_{q=0}^g \mathrm{CH}^q(\widehat{X}) \arrow[d, equal] \\
\sum_{q=0}^g x_q \in \bigoplus_{q=0}^g \mathrm{CH}^p(X)_{(p+q-g)} & & \sum_{q=0}^g y_q \in \bigoplus_{q=0}^g \mathrm{CH}^q(\widehat{X})_{(p+q-g)} \arrow[ll, "(-1)^g(-1)^*\mathcal{F}_{\widehat{X}}"']
\end{tikzcd}$$

Remarque 1.2.2 : Ce résultat de décomposition a été par la suite généralisé par Deninger et Murre [DM91] au cas des schémas abéliens.

On obtient ainsi une bigraduation de $\mathrm{CH}(X)$ qui se trouve être compatible avec les produits d'intersection et de Pontryagin ainsi que vis-à-vis des pull-backs et push-forwards :

1. Si $x \in \mathrm{CH}^p(X)_{(s)}$ et $y \in \mathrm{CH}^q(X)_{(t)}$, alors
$$x \cdot y \in \mathrm{CH}^{p+q}(X)_{(s+t)} \qquad \text{et} \qquad x * y \in \mathrm{CH}^{p+q-g}(X)_{(s+t)}.$$
2. Si $f : X \to Y$ est un homomorphisme de variétés abéliennes, alors
$$f^* \mathrm{CH}^p(Y)_{(s)} \subset \mathrm{CH}^p(X)_{(s)} \qquad \text{et} \qquad f_* \mathrm{CH}^p(X)_{(s)} \subset \mathrm{CH}^{p+\dim(Y)-\dim(X)}(Y)_{(s)}.$$

Beauville a conjecturé que seuls les indices (s) avec s positifs interviennent :

Conjecture 1.2.3 (Beauville) **:** On a $\mathrm{CH}^p(X)_{(s)} = 0$ pour $s < 0$.

Cette conjecture est vraie pour $p \in \{0, 1, g-2, g-1, g\}$.

Remarque 1.2.4 : Le cas $p = 1$ dans le théorème 1.2.1 est simplement la décomposition bien connue

$$\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathrm{Pic}^0_{\mathbb{Q}}(X) \oplus \mathrm{Pic}^s_{\mathbb{Q}}(X) = \mathrm{CH}^1(X)_{(1)} \oplus \mathrm{CH}^1(X)_{(0)}$$

où $\mathrm{Pic}^s_{\mathbb{Q}}(X) \simeq \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$ est le sous-espace de $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(X)$ formé par les diviseurs symétriques.

1.3 Variétés Jacobiennes

Pour plus de détails quant à cette partie, on pourra se référer (par exemple) à [Mil86].

1.3.1 Définition, autodualité et propriété d'Albanese

Définition : Étant donnée une courbe complexe projective lisse C, la composante neutre $\mathrm{Pic}^0(C)$ du schéma de Picard est munie d'une structure de schéma en groupe. C'est une variété abélienne appelée la (variété) Jacobienne de la courbe C [Mil86, Theorem 1.1] et dont la dimension est égale au genre $g = g(C)$ de C [Mil86, Proposition 2.1]. On la notera $J(C)$ ou plus simplement J lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté pour identifier la courbe. Autrement dit, la variété J vient paramétrer les classes d'isomorphie de faisceaux inversibles de degré 0 sur C.

Appelons *correspondance divisorielle* entre deux schémas pointés (S, s) et (T, t) sur $\mathbb{C}$ un élément $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S \times T)$ dont les restrictions $\mathcal{L}_{|S\times\{t\}}$ et $\mathcal{L}_{|\{s\}\times T}$ le long de $S \times \{t\}$ et $\{s\} \times T$ sont triviales. La Jacobienne de C vérifie alors la propriété universelle suivante [Mil86, Theorem 1.2] :

Soit P un point de C fixé. Il existe une correspondance divisorielle $\mathcal{M}^P$ entre (C, P) et $(J, 0)$ telle que pour toute correspondance divisorielle $\mathcal{L}$ entre (C, P) et un $\mathbb{C}$-schéma pointé (T, t), il existe un unique morphisme $\varphi : T \to J$ tel que $\varphi(t) = 0$ et $(1 \times \varphi)^*\mathcal{M}^P \simeq \mathcal{L}$.

Par ailleurs, on fixera systématiquement un point P sur C. On disposera ainsi d'un plongement naturel (aussi appelé application d'Abel) $f^P : C \hookrightarrow J$ donné sur les points par

$$f^P(Q) := \mathcal{L}_C(Q - P)$$

où l'on a noté $\mathcal{L}_C(Q - P)$ la classe de faisceau inversible déterminée par le diviseur $Q - P$ sur C. Plus généralement, ce plongement induit pour tout entier $d \geqslant 1$ un morphisme de la d-ème puissance symétrique de la courbe à valeurs dans la Jacobienne :

$$u_d : C^{(d)} \longrightarrow J(C).$$

Identifiant les points de $C^{(d)}$ avec des diviseurs effectifs E de degré d sur C, le morphisme u_d est donné par $u_d(E) := \mathcal{L}_C(E - dP)$. En particulier, on a $u_1 = f^P$. On montre enfin lorsque $d \leqslant g(C)$ que l'application u_d induit un morphisme birationnel sur son image [Mil86, Théorème 5.1.(a)]

$$W_d = W^{g-d} := \underbrace{f^P(C) + \ldots + f^P(C)}_{d\,fois} \subset J.$$

On notera dans ce qui suit $w^{g-d} \in \mathrm{A}^{g-d}(J)$ la classe de cycle déterminée par W^{g-d}. Remarquez que modulo équivalence algébrique, ces classes de cycle w^{g-d} sont indépendantes du choix du point rationnel P fixé puisqu'un choix différent n'a pour seul effet que de translater les variétés images W^{g-d}.

Autodualité : De manière relativement classique et naturelle, la classe w^{g-1} déterminée par $f^P(C)$ sera simplement notée C afin de ne pas alourdir le texte. Dans ce cas, on peut écrire

$$w^{g-k} = \frac{1}{k!} C^{*k} = \frac{1}{k!} \underbrace{C * C * \ldots * C}_{k\,fois} \in \mathrm{A}^{g-k}(J).$$

La classe $w^1 = \theta$ est quant à elle celle d'un diviseur Theta de la Jacobienne : c'est la classe de cycle d'une polarisation principale Θ sur J. Les variétés Jacobiennes sont donc autoduales. Précisément, étant donné un diviseur D sur J, on définit le morphisme

$$\varphi_D : J \longrightarrow \widehat{J} \simeq \mathrm{Pic}^0(J)$$

donné sur les points par

$$\varphi_D(x) := t_x^* \mathcal{L}_J(D) \otimes \mathcal{L}_J(D)^\vee$$

où $\mathcal{L}_J(D)^\vee$ désigne le faisceau inversible dual de $\mathcal{L}_J(D)$ (ou plus précisément sa classe dans $\mathrm{Pic}^0(J)$). Le morphisme φ_D (qui est en fait un homomorphisme de variétés abéliennes de part le théorème du carré) ne dépend que de la classe d'équivalence algébrique de D. Autrement dit, on dispose d'un morphisme $D \mapsto \mathrm{Hom}(J, \widehat{J})$ du groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(J)$ de J à valeur dans $\mathrm{Hom}(J, \widehat{J})$. Avec ces notations, on montre [Mil86, Lemma 6.9] que φ_Θ est inversible et que son inverse n'est autre que l'opposé du morphisme $f^{P\vee} : \widehat{J} \to J$ induit sur les points par

$$f^{P*} : \mathrm{Pic}^0(J) \simeq \widehat{J}(\mathbb{C}) \to J(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Pic}^0(C).$$

Citons encore les propriétés suivantes que l'on retrouvera dans [Mil86, Summary 6.11] :

1. Notons $\mathcal{L}^P := \mathcal{L}(\Delta_C - P \times C - C \times P) \in \mathrm{Pic}(C^2)$ où Δ_C désigne la diagonale de C^2. Le faisceau inversible $\mathcal{M}^P \in \mathrm{Pic}(C \times J)$ vérifie $(1 \times f^P)^* \mathcal{M}^P \simeq \mathcal{L}^P$.
2. $\mathcal{M}^P \simeq (f^P \times (-1))^*(1 \times \varphi_\Theta)^* \mathcal{P}_{J \times \widehat{J}} \simeq (f^P \times (-1))^* \mathcal{P}_{J \times J} \simeq (f^P \times 1)^* \mathcal{P}^\vee_{J \times J}$.
3. $\mathcal{L}^P \simeq (f^P \times f^P)^* \mathcal{P}^\vee_{J \times J} \simeq (f^P \times f^P)^*(p_1^* \mathcal{L}_J(\Theta) \otimes p_2^* \mathcal{L}_J(\Theta) \otimes m^* \mathcal{L}_J(\Theta)^\vee)$.

On réutilisera ces formules par la suite.

Remarque 1.3.1 : Il existe une autre convention tout aussi répandue qui consiste à définir le morphisme φ_D sur les points par $\varphi_D(x) = \mathcal{L}_J(D) \otimes t_x^* \mathcal{L}_J(D)^\vee$. Autrement dit, on considère $-\varphi_D$ au lieu de φ_D. Un des avantages de cette autre convention réside essentiellement dans le fait que le morphisme $f^{P\vee}$ induit par f^{P*} est alors directement l'inverse de φ_Θ (et non pas son opposé).

Propriété d'Albanese : La variété Jacobienne d'une courbe complexe projective lisse coïncide avec sa variété d'Albanese caractérisée par la propriété universelle suivante [Mil86, Proposition 6.1] :

Soit P un point de C fixé. Pour toute application $\varphi : C \to A$ de C dans une variété abélienne envoyant P sur 0, il existe unique homomorphisme $N_\varphi : J \to A$ tel que $\varphi = N_\varphi \circ f^P$.

En particulier, chaque automorphisme $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ se prolonge en un élément $N_\sigma \in \mathrm{Aut}(J)$ que l'on notera encore σ et faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f^P"'] & C \arrow[r, "f^{\sigma(P)}"] & J. \\ J \arrow[urr, dotted, "N_\sigma"'] & & \end{tikzcd}$$

On vérifie aisément que ce prolongement est bien indépendant du point rationnel P fixé et que l'application ainsi définie de $\mathrm{Aut}(C) \to \mathrm{Aut}(J)$ est un morphisme de groupes.

1.3.2 Anneau tautologique $R(C;J)$ de Beauville

Arnaud Beauville a étudié dans son article [Bea04] le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel $R(C;J)$ de $\mathrm{A}(J)$ contenant la classe de cycle $C \in \mathrm{A}^{g-1}(J)$ et stable par les opérateurs naturels dont on dispose sur $\mathrm{A}(J)$; à savoir le produit d'intersection, le produit de Pontryagin mais aussi tous les opérateurs k_* et k^* induits par les homothéties de la Jacobienne pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En ce sens, la $\mathbb{Q}$-algèbre (pour le produit d'intersection ou le produit de Pontryagin) $R(C;J)$ est qualifiée d'anneau tautologique puisqu'il s'agit de déterminer quels sont les cycles de la Jacobienne naturellement engendrés par C.

Beauville a alors montré que $R(C;J)$ est engendré en tant que $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\mathrm{A}(J)$

1. pour le produit d'intersection par $w^1, w^2, \ldots, w^g$,
2. pour le produit de Pontryagin par les composantes homogènes $C_{(0)}, C_{(1)}, \ldots, C_{(g-1)}$ apparaissant dans la décomposition de Beauville de la classe du cycle $w^{g-1} = C$.

Il est par ailleurs intéressant de mettre en évidence un autre système de générateurs pour le produit d'intersection. Il s'agit du système obtenu de la manière suivante. Considérons le polynôme $\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{g} X_i^k$. C'est un polynôme symétrique en les indéterminées $X_1, \ldots, X_g$. Par suite, c'est un polynôme N^k en les polynômes symétriques élémentaires usuels $\sigma_1, \ldots, \sigma_g$:

$$\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{g} X_i^k = N^k\left(\sigma_1(X_1, \ldots, X_g), \ldots, \sigma_g(X_1, \ldots, X_g)\right).$$

Si λ_i sont les racines formelles du polynôme

$$\lambda^g - w^1\lambda^{g-1} + \ldots + (-1)^g w^g = 0,$$

les relations coefficients-racines montrent que $\sigma_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_g) = w^j$ et on définit alors

$$N^k(w) := N^k(w^1, w^2, \ldots, w^g) \in \mathrm{A}^k(J).$$

Formellement, on a donc défini

$$N^k(w) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{g} \lambda_i^k$$

On reconnaît là des sommes de Newton (à coefficient multiplicatif près) et les relations coefficients-racines fournissent par exemple les égalités suivantes :

$$N^1(w) = w^1 = \theta, \quad 2N^2(w) = (w^1)^2 - 2w^2, \quad 6N^3(w) = (w^1)^3 - 3w^2w^1 + 3w^3.$$

Puisque l'on travaille en caractéristique 0, ces mêmes formules montrent que $N^k(w)$ est un polynôme en $w^1, \ldots, w^k$ et réciproquement. En particulier, on a $N^k(w) \in \mathrm{A}^k(J)$ et les classes de cycles $N^k(w)$ et w^k engendrent la même $\mathbb{Q}$-algèbre (pour le produit d'intersection). L'intérêt d'introduire ces cycles $N^k(w)$ est contenu dans l'égalité suivante [Bea04, Corollary 3.4] :

$$N^k(w) = -\mathcal{F}_J(C_{(k-1)}) \in \mathrm{A}^k(J)_{(k-1)}$$

après identification de J et $\widehat{J}$ via la polarisation principale φ_Θ.

Ceci étant dit, la première problématique étudiée dans cette thèse est la suivante. Considérons une courbe C admettant un automorphisme σ (ou plusieurs). Celui-ci induit naturellement par propriété d'Albanese de J un automorphisme $\sigma \in \mathrm{Aut}(J)$.

Problématique 1 : Comment se comporte l'anneau tautologique $R(C;J)$ vis-à-vis de l'automorphisme $\sigma \in \mathrm{Aut}(J)$? Peut-on mettre en évidence un anneau tautologique dans $\mathrm{A}(J)$ naturellement associé à un ou plusieurs automorphismes ? Plus généralement, quelle(s) conséquence(s) a l'existence d'un ou plusieurs automorphismes de C sur l'anneau $\mathrm{A}(J)$?

Une première idée naturelle (mais qui s'avère très vite sans intérêt) est de faire agir le groupe d'automorphismes engendré par σ par pull-back et push-forward sur l'anneau $R(C;J)$. Or σ étant induit par un automorphisme de la courbe C, il est immédiat qu'en tant que classe de cycles dans $\mathrm{A}(J)$ on a pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sigma^{k*}C = (\sigma^{-k})_*C = C,$$

puis, par unicité de la décomposition de Beauville de C,

$$\sigma^{k*}C_{(i)} = (\sigma^{-k})_*C_{(i)} = C_{(i)}.$$

Les push-forwards induits par les puissances de σ étant compatibles avec le produit de Pontryagin, les opérateurs σ_*^k (et donc aussi σ^{k*}) fixent point par point l'algèbre (pour le produit de Pontryagin) engendrée par les $C_{(i)}$; à savoir l'anneau tautologique $R(C;J)$ tout entier.

Cette approche est donc insuffisante. Pour combler cette lacune, l'idée sera de faire « agir » par pull-back et push-forward non plus simplement le groupe d'automorphismes $\langle\sigma\rangle \subset (\mathrm{Aut}(J), \circ)$ sur $R(C;J)$ mais le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[\langle\sigma\rangle] \subset (\mathrm{End}(J), +, \circ)$ (qui n'est rien d'autre que l'anneau des polynômes en σ lorsque σ est d'ordre fini ; hypothèse que l'on fera par la suite et qui est automatiquement vérifiée lorsque $g \geqslant 2$). La suite de cette thèse viendra appuyer encore davantage le caractère tout à fait naturel de cette approche.

1.4 Variétés de Prym généralisées

1.4.1 Généralités

On considère à présent un morphisme fini $f : C \to C'$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ entre courbes complexes projectives lisses de genre respectif $g = g(C) \geqslant 1$ et $g' = g(C') \geqslant 0$. On dispose donc de deux anneaux tautologiques $R(C;J(C))$ et $R(C';J(C'))$ dans $\mathrm{A}(J(C))$ et $\mathrm{A}(J(C'))$ respectivement. On notera de manière concise $J = J(C)$ et $J' = J(C')$. Le morphisme f induit deux morphismes de variétés abéliennes :

$$\begin{aligned} &N_f : J \to J' : \mathcal{L}_C\left(\sum n_i P_i\right) \mapsto \mathcal{L}_{C'}\left(\sum n_i f(P_i)\right)\\ &\overline{f} := f^* : J' \to J : \mathcal{L} \mapsto f^*\mathcal{L}. \end{aligned}$$

Problématique 2 : Quels liens existent-ils entre les anneaux tautologiques $R(C;J)$ et $R(C';J')$? Plus précisément, quelle est l'action par pull-back et push-forward des morphismes N_f et $\overline{f}$ sur les cycles tautologiques associés à C et C' ?

Autrement dit, on se pose la question de la fonctorialité des anneaux tautologiques $R(C;J)$. L'intuition suggère que le lien entre $R(C;J)$ et $R(C',J')$ se fait au niveau de la sous-variété abélienne $Y := \mathrm{Im}(\overline{f}) \subset J$. On s'intéressera également à une sous-variété abélienne Z, complémentaire de Y dans J (voir Chapitre 2, Sous-section 2.3.1 pour plus de détails à ce sujet).

Lorsque f est un revêtement double étale ou ramifié en exactement deux points, la variété Z n'est rien d'autre que la variété de Prym associée à f. En ce sens, on qualifiera les variétés Z de variétés de Prym généralisées.

1.4.2 Revêtements Galoisiens n-cycliques

Dans cette thèse, on s'intéresse en tout premier lieu aux courbes avec automorphismes. Ceci justifie que l'on précise à présent le cas où le revêtement $f : C \to C'$ est associé à un automorphisme de la courbe C. Rappelons deux définitions.

Définition 1.4.1 Un *revêtement Galoisien fini* est un morphisme fini $f : C \to C'$ entre courbes complexes projectives lisses C et C' tel qu'il existe un isomorphisme $C' \simeq C/\operatorname{Aut}(f)$ où

$$\operatorname{Aut}(f) := \{\mu \in \operatorname{Aut}(C) \mid f \circ \mu = f\}$$

désigne le groupe d'automorphismes du revêtement. Cela revient à dire que l'extension des corps de fonctions $\mathrm{K}(C)/\mathrm{K}(C')$ est Galoisienne.

Dans ce cas, le corps de fonctions $\mathrm{K}(C')$ de C' est donné par le sous-corps des invariants $\mathrm{K}(C)^{\operatorname{Aut}(f)} \subset \mathrm{K}(C)$ pour le groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\mathrm{K}(C)/\mathrm{K}(C')) \simeq \operatorname{Aut}(f)$.

Définition 1.4.2 Soit $f : C \to C'$ un revêtement Galoisien entre courbes. On dit que f est un *revêtement Galoisien n-cyclique* si $\operatorname{Aut}(f) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on considérera systématiquement un générateur $\sigma \in \operatorname{Aut}(f)$ de sorte que $C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$.

Remarque 1.4.3 : Soit C une courbe projective lisse munie d'un automorphisme $\sigma \in \operatorname{Aut}(C)$. Alors la courbe $C/\langle\sigma\rangle$ est aussi lisse. En effet, il s'agit de vérifier que la courbe $C/\langle\sigma\rangle$ est normale. Puisque la lissité est une notion locale, on peut suppose que $C = \operatorname{Spec}(A)$ est affine de sorte que $C' = \operatorname{Spec}(\mathrm{A}^{\langle\sigma\rangle})$. On vérifie alors facilement que $\mathrm{A}^{\langle\sigma\rangle}$ est intégralement clos dans $\mathrm{K}(C') = \operatorname{Frac}(\mathrm{A}^{\langle\sigma\rangle}) = \mathrm{K}(C)^{\langle\sigma\rangle}$ en utilisant la lissité de C.

1.4.3 Anneau tautologique $R(\psi_{Z*}C; Z)$ de Arap

Étant donné un revêtement Galoisien n-cyclique $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$, il se pose maintenant les questions suivantes :

Problématique 3 : Que peut-on dire des restrictions à Y et Z de l'anneau tautologique $R(C; J)$? des anneaux tautologiques sur J associées à un ou plusieurs automorphismes de C ? Ces restrictions induisent-elles une notion raisonnable d'anneaux tautologiques (associés à un ou plusieurs automorphismes) sur Y et Z ?

Dans [Ara12, Theorem 1] Maxim Arap apporte un premier élément de réponse à cette problématique dans le cas particulier où Z est une variété de Prym. Il montre que l'on dispose d'un anneau tautologique $R(\psi_{Z*}C; Z) \subset \mathrm{A}(Z)$ engendré pour le produit de Pontryagin par les cycles $\psi_{Z*}C_{(i)}$ (et pour le produit d'intersection par la transformée de Fourier de ces cycles). On généralisera de plusieurs manières ce théorème de Arap. On obtiendra ainsi des anneaux tautologiques sur Z (et Y) dont on connaîtra un système au plus dénombrable de générateurs.

Problématique 4 : Jusqu'où peut-on pousser l'étude des ces nouveaux anneaux tautologiques sur Z associés à des automorphismes ? Peut-on étudier précisément les relations entre les générateurs de ces $\mathbb{Q}$-sous-algèbres de $\mathrm{A}(Z)$?

On répondra de manière détaillée à cette problématique dans le cas où C est hyperelliptique et l'automorphisme est d'ordre premier. Plus généralement, on accordera une importance toute particulière à montrer que ces nouveaux anneaux tautologiques associés à des automorphismes apparaissent naturellement en géométrie algébrique. On verra notamment que les anneaux sur Z apparaissent dès lors que l'on dispose d'un système linéaire complet sans point de base sur C'.

CHAPITRE 2

Tautological rings on Jacobian varieties of curves with automorphisms

Abstract [1] Let J be the Jacobian of a smooth projective complex curve C which admits non-trivial automorphisms, and let $\mathrm{A}(J)$ be the ring of algebraic cycles on J with rational coefficients modulo algebraic equivalence. We present new tautological rings in $\mathrm{A}(J)$ which extend in a natural way the tautological ring studied by Beauville in [Bea04]. We then show there exist tautological rings induced on special complementary abelian subvarieties of J.

Keywords Algebraic cycles · Tautological rings · Jacobians · Automorphisms · Fourier transforms

Mathematics Subject Classification (2010) 14C15 · 14C25 · 14H37 · 14H40

2.1 Introduction

In this paper we consider varieties over $\mathbb{C}$. Let X be an abelian variety of dimension $g \geqslant 1$. We denote by m its group law and by $\widehat{X}$ the dual variety. We consider the ring $\mathrm{A}^{\cdot}(X)$ of algebraic cycles on X with rational coefficients modulo algebraic equivalence. Beauville showed in [Bea86] that there exists a bigraduation on $\mathrm{A}(X)$. Specifically, we have

$$\mathrm{A}^p(X) = \bigoplus_{s=p-g}^{p} \mathrm{A}^p(X)_{(s)}$$

where p refers to the codimension grading and s refers to eigenspaces of the operators k_* and k^* induced by the homotheties $k = k_X$ on X for any $k \in \mathbb{Z}$. These eigenspaces are characterized by $x \in \mathrm{A}^p(X)_{(s)}$ if and only if for all $k \in \mathbb{Z}$, $k^*x = k^{2p-s}x$ (or equivalently $k_*x = k^{2g-2p+s}x$). Note that this bigraduation is compatible with the intersection and Pontryagin products on X denoted respectively by $\cdot : \mathrm{A}^p(X)_{(s)} \times \mathrm{A}^q(X)_{(t)} \to \mathrm{A}^{p+q}(X)_{(s+t)}$ and $* : \mathrm{A}^p(X)_{(s)} \times \mathrm{A}^q(X)_{(t)} \to \mathrm{A}^{p+q-g}(X)_{(s+t)}$. An important tool to study this structure on $\mathrm{A}(X)$ which will play a major role in the sequel is the Fourier transform $\mathcal{F}_X : \mathrm{A}(X) \to \mathrm{A}(\widehat{X})$ on X. This map is defined as follows. Consider the Poincaré line bundle $\mathcal{P}_{X\times\widehat{X}}$ on $X \times \widehat{X}$ and its cycle class $l_{X\times\widehat{X}} := c_1(\mathcal{P}_{X\times\widehat{X}})$ in $\mathrm{A}^1(X \times \widehat{X})$. For any cycle $x \in \mathrm{A}(X)$, we put $\mathcal{F}_X(x) := p_{2*}(p_1^*x \cdot e^{l_{X\times\widehat{X}}})$ where p_1 and p_2 are the natural projections of $X \times \widehat{X}$ to X and $\widehat{X}$ respectively. Recall the following important facts (see [Bea83]) :

1. [Ric16]

1. Identifying X with its bidual variety $\widehat{\widehat{X}}$ (as we will always do), we get a Fourier transform $\mathcal{F}_{\widehat{X}} : \mathrm{A}(\widehat{X}) \to \mathrm{A}(X)$ on $\widehat{X}$. It satisfies the relation
$$\mathcal{F}_{\widehat{X}} \circ \mathcal{F}_X = (-1)^g(-1_X)^*.$$
2. For all cycles x, y on X, we have
$$\mathcal{F}_X(x \cdot y) = (-1)^g \mathcal{F}_X(x) * \mathcal{F}_X(y) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{F}_X(x * y) = \mathcal{F}_X(x) \cdot \mathcal{F}_X(y).$$

The reader should refer to [Bea83] for an overview of many other properties of the Fourier transform. In §2.2 we present slight generalizations of these properties. This section will be used in §2.5 and §2.6 when we will work with non principal polarizations.

In §2.3 we consider a smooth projective curve C of genus $g(C) = g \geqslant 1$ whose Jacobian will be denoted by $J = J(C)$. We fix a rational point P on C to embed the curve in its Jacobian via the usual map $f^P : C \hookrightarrow J(C)$ defined on points by $Q \mapsto \mathcal{L}_C(Q-P)$. This map allows us to consider the cycle class defined by C, and still denoted by C, in $\mathrm{A}^{g-1}(J)$. Note that this class does not depend on the choice of P since we are working modulo algebraic equivalence. Let us introduce the following notation. Let $\mathcal{J} \subset \mathrm{A}(X)$ be a family of cycles on X. We denote by $\mathrm{Taut}_X(\mathcal{J})$ the tautological ring generated by $\mathcal{J}$, that is to say the smallest $\mathbb{Q}$-vector subspace of $\mathrm{A}(X)$ containing $\mathcal{J}$ and closed under natural operations on $\mathrm{A}(X)$; namely intersection and Pontryagin products, and operators k_*, k^* for all $k \in \mathbb{Z}$.

In [Bea04] Beauville studied the tautological ring $R(C; J) := \mathrm{Taut}_J(\{C\})$. He proved that the $\mathbb{Q}$-algebra $R(C; J)$ is generated for the intersection product by the classes
$$w^i = \frac{1}{(g-i)!} C^{*(g-i)} \in \mathrm{A}^i(J), \qquad i \in [\![0, g]\!]$$
of the subvarieties W_{g-i} parametrizing effective divisors on C of degree $g - i$. Another system of generators is given by Newton polynomials in the w^i, denoted by $N^i(w) \in \mathrm{A}^i(J)_{(i-1)}$. When $R(C; J)$ is endowed with its structure of algebra for the Pontryagin product, a set of generators is given by the Fourier transforms of the $N^i(w)$, which are (up to a sign) the components $C_{(i)} \in \mathrm{A}^{g-1}(J)_{(i)}$ appearing in Beauville's decomposition of $C \in \mathrm{A}^{g-1}(J)$. The aim of §2.3 is to clarify the functorial behaviour of this tautological ring $R(C; J)$. In Section 2.3 we consider a finite morphism of curves $f : C \to C'$ and we explain the action of the induced morphism $f^* : J(C') \to J(C)$ and the Albanese morphism $N_f : J(C) \to J(C')$ on $R(C; J(C))$ and $R(C'; J(C'))$. For a morphism of curves f, the abelian subvariety $Y := \mathrm{Im}(f^*)$ of $J(C)$ with canonical embedding $\iota_Y : Y \hookrightarrow J(C)$ plays a crucial role. Indeed Y is isogenous to $J(C')$ via the corestriction map $j = f^* : J(C') \to Y$. We will also associate to Y (as we will do for any abelian subvariety of $J(C)$) its norm-endomorphism $N_Y : J(C) \to J(C)$ and the map $\psi_Y \in \mathrm{Hom}(J(C), Y)$ defined by $N_Y = \iota_Y \circ \psi_Y$ (see [BL04, §5.3]). When $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ is a cyclic Galois covering for some $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ of finite order, one highlights naturally in $\mathrm{A}(J(C))$ some cycle classes of the form $P(\sigma)_* C$ where $P(\sigma) \in \mathbb{Z}[\sigma]$ is a polynomial in the automorphism σ or more accurately a polynomial in the Albanese morphism still denoted by $\sigma = N_\sigma \in \mathrm{Aut}(J(C))$.

This leads us to §2.4 where we consider a curve C with a finite automorphism group $G \subset \mathrm{Aut}(C)$. We will prove the following main result :

Theorem 2.1.1. *Let C be a smooth projective complex curve of genus $g \geqslant 1$ and G a finite group of automorphisms of C. Then the tautological ring*
$$R_G(C; J) := \mathrm{Taut}_J\Big(\{\pi_* C \in \mathrm{A}(J) \mid \pi \in \mathbb{Z}[G] \subset \mathrm{End}(J)\}\Big)$$
is generated as $\mathbb{Q}$-subalgebra of $\mathrm{A}(J)$

1. *for the intersection product by all* $\pi^* N^i(w)$*,*
2. *for the Pontryagin product by all* $\pi_* C_{(i-1)}$

with $\pi \in \mathbb{Z}[G]$ *and* $i \in [\![1, g-1]\!]$.

In case of a cyclic automorphism group $G = \langle\sigma\rangle$, we will put $R_\sigma(C;J) := R_{\langle\sigma\rangle}(C;J)$. Furthermore, each subgroup K of G determines a subtautological ring $R_K(C;J) \subset R_G(C;J)$. For example, with $K = \{\mathrm{Id}\}$ we get $R(C;J) \subset R_G(C;J)$. Actually, the tautological ring $R_G(C;J)$ is the smallest $\mathbb{Q}$-algebra extension of $R(C;J)$ which is stable under intersection product, Pontryagin product and pull-backs and push-forwards by elements in $\mathbb{Z}[G] \subset \mathrm{End}(J)$. This is a very natural characterization which may have been chosen at first to define these tautological rings :

Corollary 2.1.2. *The tautological ring* $R_G(C;J)$ *is the smallest* $\mathbb{Q}$*-algebra extension of* $R(C;J)$ *for the intersection product (resp. Pontryagin product) which is stable under pull-backs (resp. push-forwards) by polynomials in* $\mathbb{Z}[G] \subset \mathrm{End}(J)$.

Now let us stress why the adjective *tautological* is still appropriate to such rings $R_G(C;J)$. If one considers a curve without non-trivial automorphism, we are interested in the smallest $\mathbb{Q}$-vector subspace of $\mathrm{A}(J)$ which contains the cycle class C, and closed under both products, pull-backs and push-forwards by scalars in $\mathbb{Z} \subset \mathrm{End}(J)$ (that is constant polynomials). This ring is precisely Beauville's tautological ring $R(C;J)$. But if C has a non-trivial automorphism group G, the same natural idea leads us to study the smallest $\mathbb{Q}$-vector subspace of $\mathrm{A}(J)$ which contains the class C, and closed under both products, pull-backs and push-forwards by elements in $\mathbb{Z}[G]$; that is $R_G(C;J)$. Besides, having all these tautological and subtautological rings associated to groups and subgroups of automorphisms strengthens the following idea : for a Jacobian variety with non-trivial automorphisms, the ring $\mathrm{A}(J)$ carries a much richer structure than that of a generic Jacobian ; which is already an interesting fact in itself.

In the next section, that is §2.5, we will explore the link between tautological rings of $J(C/\langle\sigma\rangle)$ and $J(C)$. These rings are closely related as pointed out in

Theorem 2.1.3. *Let* $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ *be a* n*-cyclic Galois covering associated to an automorphism* $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ *of order* $n \in \mathbb{N}^*$*. We consider a finite group of automorphisms* $G \subset \mathrm{Aut}(C)$ *and we suppose that each* $g \in G$ *commutes with* σ *so that there is an automorphism* $\widetilde{g} \in \mathrm{Aut}(C')$ *satisfying the relation* $f \circ g = \widetilde{g} \circ f$*. We denote by* $\widetilde{G} \subset \mathrm{Aut}(C')$ *the group of automorphisms induced that way on* C'*. Then the tautological ring*

$$R_G(\psi_{Y*}C;Y) := \mathrm{Taut}_Y\left(\{\pi_*\psi_{Y*}C \in \mathrm{A}(Y) \mid \pi \in \mathbb{Z}[G]\}\right)$$

is generated as $\mathbb{Q}$*-subalgebra of* $\mathrm{A}(Y)$

1. *for the intersection product by all* $\pi^*\iota_Y^* N^{i+1}(w) = \iota_Y^*\pi^* N^{i+1}(w)$*,*
2. *for the Pontryagin product by all* $\pi_*\psi_{Y*}C_{(i)} = \psi_{Y*}\pi_* C_{(i)}$

with $\pi \in \mathbb{Z}[G]$ *and* $i \in [\![0, g(C')-1]\!]$*. Therefore, the isogeny* $j = f^* : J(C') \to Y$ *induces an isomorphism (as* $\mathbb{Q}$*-vector spaces)*

$$\begin{aligned} R_{\widetilde{G}}(C';J(C')) \simeq j_* R_{\widetilde{G}}(C';J(C')) &= \mathrm{Taut}_Y\left(j_* R_{\widetilde{G}}(C';J(C'))\right) \\ &= \iota_Y^* R_G(C;J(C)) = \psi_{Y*}R_G(C;J(C)) = R_G(\psi_{Y*}C;Y). \end{aligned}$$

The last part of this article, that is §2.6, is dedicated to tautological rings induced on the natural abelian subvariety Z of $J(C)$, the complementary abelian variety to Y with respect to the Theta polarization on $J(C)$ (see [BL04, Section 5.3]). We will prove

Theorem 2.1.4. *Let $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ be a n-cyclic Galois covering associated to an automorphism $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ of order $n \in \mathbb{N}^*$. We consider a finite group of automorphisms $H \subset \mathrm{Aut}(C)$ and we suppose that $\sigma \in H$ is central in H. Then the tautological ring*

$$R_H^\sigma(\psi_{Z*}C; Z) := \mathrm{Taut}_Z\left(\{\pi_*\psi_{Z*}C \in \mathrm{A}(Z) \mid \pi \in \mathbb{Z}[H]\}\right)$$

is generated as $\mathbb{Q}$-subalgebra of $\mathrm{A}(Z)$

1. *for the intersection product by all $\pi^*\iota_Z^* N^i(w) = \iota_Z^*\pi^* N^i(w)$,*
2. *for the Pontryagin product by all $\pi_*\psi_{Z*}C_{(i-1)} = \psi_{Z*}\pi_*C_{(i-1)}$*

with $\pi \in \mathbb{Z}[H]$ and all $i \in [\![1, \dim Z - 1]\!]$. In other words,

$$R_H^\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \iota_Z^* R_H(C; J(C)) = \psi_{Z*}R_H(C; J(C)).$$

In particular, considering the case of a cyclic automorphism group $H = \langle\sigma\rangle$ leads to :

Theorem 2.1.5. *Let $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ be a n-cyclic Galois covering associated to an automorphism $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ of order $n \in \mathbb{N}^*$. Then the tautological ring*

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) := \mathrm{Taut}_Z\left(\{P(\sigma)_*\psi_{Z*}C \in \mathrm{A}(Z) \mid P \in \mathbb{Z}[X]\}\right)$$

is generated as $\mathbb{Q}$-subalgebra of $\mathrm{A}(Z)$

1. *for the intersection product by all $P(\sigma)^*\iota_Z^* N^i(w) = \iota_Z^* P(\sigma)^* N^i(w)$,*
2. *for the Pontryagin product by all $P(\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(i-1)} = \psi_{Z*}P(\sigma)_*C_{(i-1)}$*

with $P \in \mathbb{Z}[X]$ and all $i \in [\![1, \dim Z - 1]\!]$. In particular,

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \iota_Z^* R_\sigma(C; J(C)) = \psi_{Z*}R_\sigma(C; J(C)).$$

This theorem 2.1.5 yields a generalization of a theorem proved by Arap [Ara12] who gave the analogue in $\mathrm{A}(Z)$ of Beauville's tautological ring $R(C; J(C))$ in the special case where Z is a Prym variety. That is essentially when $f : C \to C'$ is of degree 2 and either étale or ramified in exactly two points (see [BL04, Theorem 12.3.3]). We finish with a few examples which provide a full explicit structure for the algebra $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) \subset \mathrm{A}(Z)$ when σ is of order 2 and C is a k-gonal curve with $k \in \{2, 3, 4, 5\}$.

2.2 Preliminaries

The Fourier transform on abelian varieties will be central in almost all following results. Therefore we start with some properties of this map. The following proposition is a slight but useful generalization of Beauville's result ([Bea83, Proposition 3.(iii)] or [BL04, Proposition 16.3.4] ; see also [MP10, Formula (3.7.1)]). It will help us to work with Fourier transform and pull-backs or push-forwards by arbitrary morphisms of abelian varieties.

Remark 2.2.1. By definition a morphism of abelian varieties respects the group structure.

Proposition 2.2.2. *Let X, Y be two abelian varieties and $\alpha : Y \to X$ a morphism of abelian varieties. Then*

$$\mathcal{F}_X \circ \alpha_* = \widehat{\alpha}^* \circ \mathcal{F}_Y \qquad \text{and} \qquad \mathcal{F}_Y \circ \alpha^* = (-1)^{\dim X - \dim Y}\widehat{\alpha}_* \circ \mathcal{F}_X.$$

In particular, if α is an isogeny or if $X = Y$, we have

$$\mathcal{F}_X \circ \alpha_* = \widehat{\alpha}^* \circ \mathcal{F}_Y \qquad \text{and} \qquad \mathcal{F}_Y \circ \alpha^* = \widehat{\alpha}_* \circ \mathcal{F}_X.$$

Proof. We start with the proof of the first equality. The idea is to use the following universal property of Poincaré line bundles :
$$(\alpha \times 1_{\widehat{X}})^*\mathcal{P}_{X\times\widehat{X}} \simeq (1_Y \times \widehat{\alpha})^*\mathcal{P}_{Y\times\widehat{Y}}.$$
Passing to cycle classes, we obtain
$$(\alpha \times 1_{\widehat{X}})^* l_{X\times\widehat{X}} = (1_Y \times \widehat{\alpha})^* l_{Y\times\widehat{Y}}.$$
Then passing to the exponential and using the fact that pull-backs are compatible with the intersection product, we get
$$(\alpha \times 1_{\widehat{X}})^* e^{l_{X\times\widehat{X}}} = (1_Y \times \widehat{\alpha})^* e^{l_{Y\times\widehat{Y}}} \in \mathrm{A}(Y \times \widehat{X}).$$
Moreover by definition of the Fourier transform on X, we have
$$\mathcal{F}_X \alpha_*(y) := (e^{l_{X\times\widehat{X}}})_* \alpha_*(y)$$
where $(e^{l_{X\times\widehat{X}}})_* : \mathrm{A}(X) \to \mathrm{A}(\widehat{X})$ denotes the morphism induced by the correspondence $e^{l_{X\times\widehat{X}}}$ from X to $\widehat{X}$ (see [Ful98, Chapter 16] or [BL04, Section 16.2]). Then using Equation (16.4) of [BL04] p527 or [Ful98, Propositions 16.1.1 and 16.1.2], we have
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_X \alpha_*(y) &= (e^{l_{X\times\widehat{X}}})_* \alpha_*(y)\\ &= \left((\alpha \times 1_{\widehat{X}})^* e^{l_{X\times\widehat{X}}}\right)_*(y) = \left((1_Y \times \widehat{\alpha})^* e^{l_{Y\times\widehat{Y}}}\right)_*(y)\\ &= \widehat{\alpha}^*(e^{l_{Y\times\widehat{Y}}})_*(y) = \widehat{\alpha}^*\mathcal{F}_Y(y)\end{aligned}$$
which completes the proof of the first statement.

We then prove the second equality by applying the first one with $\widehat{\alpha} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$:
$$\mathcal{F}_{\widehat{Y}}\widehat{\alpha}_* = \widehat{\widehat{\alpha}}^*\mathcal{F}_{\widehat{X}} = \alpha^*\mathcal{F}_{\widehat{X}}$$
when identifying X and $\widehat{\widehat{X}}$ by biduality. The other main tool is to use inversion formulas for the Fourier transforms on X and Y. Moreover, as α is a morphism of abelian varieties, we immediately have $f \circ (-1_Y) = (-1_X) \circ \alpha$. Now it remains to put together these arguments :
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Y\alpha^* &= \mathcal{F}_Y\alpha^*(-1)^{\dim X}(-1_X)^*\mathcal{F}_{\widehat{X}}\mathcal{F}_X && \text{(inversion formula for } \mathcal{F}_X)\\ &= (-1)^{\dim X}\mathcal{F}_Y(-1_Y)^*\alpha^*\mathcal{F}_{\widehat{X}}\mathcal{F}_X && (\mathbb{Q}\text{-linarity of } \mathcal{F}_Y \text{ and } \alpha^* \text{ and } \alpha\circ(-1_Y) = (-1_X)\circ\alpha)\\ &= (-1)^{\dim X}\mathcal{F}_Y(-1_Y)_*\alpha^*\mathcal{F}_{\widehat{X}}\mathcal{F}_X && ((-1_Y)^* = (-1_Y)_* \text{ because } -1_Y \text{ is an involution})\\ &= (-1)^{\dim X}(-1_{\widehat{Y}})^*\mathcal{F}_Y\alpha^*\mathcal{F}_{\widehat{X}}\mathcal{F}_X && (\text{applying first equality with } -1_Y \text{ and } \widehat{-1_Y} = -1_{\widehat{Y}})\\ &= (-1)^{\dim X}(-1_{\widehat{Y}})^*\mathcal{F}_Y\mathcal{F}_{\widehat{Y}}\widehat{\alpha}_*\mathcal{F}_X && (\text{applying first equality with } \widehat{\alpha})\\ &= (-1)^{\dim X-\dim Y}(-1)^{\dim Y}(-1_{\widehat{Y}})^*\mathcal{F}_Y\mathcal{F}_{\widehat{Y}}\widehat{\alpha}_*\mathcal{F}_X\\ &= (-1)^{\dim X-\dim Y}\widehat{\alpha}_*\mathcal{F}_X && (\text{inversion formula for } \mathcal{F}_Y).\end{aligned}$$
In particular, if $\alpha : Y \to X$ is an isogeny or if $X = Y$, we have $\dim X = \dim Y$ and we get the last part of the proposition. □

The different results presented in this paper involve polarized (but not necessarily principally polarized) abelian varieties (X, ξ). For such a polarization, we consider the isogeny
$$\varphi_\xi : X \to \mathrm{Pic}^0(X) \simeq \widehat{X}$$

given on points by

$$\varphi_\xi(x) = t_x^*\mathcal{L}_X(\xi) \otimes \mathcal{L}_X(\xi)^\vee$$

where $\mathcal{L}_X(\xi)^\vee$ denotes the (class) of the dual invertible sheaf associated to the (class) of the ample divisor ξ. It is known that there exists an inverse isogeny up to scalar, denoted by $\psi_\xi \in \mathrm{Hom}(\widehat{X}, X)$. These morphisms satisfy relations

$$\psi_\xi \circ \varphi_\xi = n_X \qquad \text{and} \qquad \varphi_\xi \circ \psi_\xi = n_{\widehat{X}}$$

for some $n \in \mathbb{N}^*$. Recall that the dual map of φ_ξ satisfies $\widehat{\varphi_\xi} = \varphi_\xi$ ([BL04, Corollary 2.4.6]) and thus $\widehat{\psi_\xi} = \psi_\xi$ too. Having said that, we will often consider the map $\varphi_\xi^*\mathcal{F}_X : \mathrm{A}(X) \to \mathrm{A}(X)$ (or the map $\psi_{\xi*}\mathcal{F}_X : \mathrm{A}(X) \to \mathrm{A}(X)$) instead of $\mathcal{F}_X$.

The following proposition give us some properties of the operator $\varphi_\xi^*\mathcal{F}_X$ as in [Bea04, §2.4 - 2.7]. It allows us to link (more deeply) the Fourier transform on X and the Pontryagin product.

Proposition 2.2.3. *Keeping above notations, we consider the operator $\mathcal{F} := \varphi_\xi^*\mathcal{F}_X$. It satisfies the following properties :*

1. *Inversion formula : $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \deg(\varphi_\xi)(-1)^{\dim X}(-1_X)^*$.*
2. *We have for all $x, y \in \mathrm{A}(X)$,*

$$\mathcal{F}(x * y) = \mathcal{F}(x) \cdot \mathcal{F}(y) \qquad \textit{and} \qquad \mathcal{F}(x \cdot y) = \frac{(-1)^{\dim X}}{\deg(\varphi_\xi)}\mathcal{F}(x) * \mathcal{F}(y).$$

3. *$\mathcal{F}(\mathrm{A}^p(X)_{(s)}) = \mathrm{A}^{\dim X - p + s}(X)_{(s)}$.*
4. *Let $x \in \mathrm{A}(X)$. We put $\overline{x} := (-1)^*x$. Then*

$$\mathcal{F}(x) = e^{-\xi} \cdot ((\overline{x} \cdot e^{-\xi}) * e^{\xi}) \in \mathrm{A}(X).$$

Proof.

1. It is known that $\mathcal{F}_{\widehat{X}} \circ \mathcal{F}_X = (-1)^{\dim X}(-1_X)^*$. Therefore, using that $\varphi_{\xi*}\varphi_\xi^* = \deg(\varphi_\xi)$, $\widehat{\varphi_\xi} = \varphi_\xi$ and the compatibility between $\mathcal{F}_X$ and isogenies (Proposition 2.2.2), we get

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \varphi_\xi^*\mathcal{F}_X\varphi_\xi^*\mathcal{F}_X = \mathcal{F}_{\widehat{X}}\varphi_{\xi*}\varphi_\xi^*\mathcal{F}_X = \deg(\varphi_\xi)(-1)^{\dim X}(-1_X)^*.$$

2. Since pull-backs commute with the intersection product, we immediately get

$$\mathcal{F}(x * y) = \varphi_\xi^*\mathcal{F}_X(x * y) = \varphi_\xi^*(\mathcal{F}_X(x) \cdot \mathcal{F}_X(y)) = (\varphi_\xi^*\mathcal{F}_X(x)) \cdot (\varphi_\xi^*\mathcal{F}_X(y)) = \mathcal{F}(x) \cdot \mathcal{F}(y).$$

   We deduce the other equality from the inversion formula.

3. According to [Bea86, Proposition 2], we have

$$\mathcal{F}(\mathrm{A}^p(X)_{(s)}) = \varphi_\xi^*\mathrm{A}^{g-p+s}(\widehat{X})_{(s)} \subset \mathrm{A}^{g-p+s}(X)_{(s)}.$$

   Once again, we obtain the result thanks to the first assertion.

4. Keeping the notation $l_{X \times \widehat{X}}$ for the cycle class in $\mathrm{A}^1(X \times \widehat{X})$ of the Poincaré line bundle $\mathcal{P}_{X \times \widehat{X}}$ on $X \times \widehat{X}$, we have according to [Mum08, p131]

$$(1 \times \varphi_\xi)^* l_{X \times \widehat{X}} = m^*\xi - p^*\xi - q^*\xi$$

   where $p, q : X \times X \to X$ denote natural projections. We then use the flat base change formula

$$\mathcal{F}(x) = \varphi_\xi^* p_{2*}(p_1^*x \cdot e^{l_{X \times \widehat{X}}}) = q_*(1 \times \varphi_\xi)^*(p_1^*x \cdot e^{l_{X \times \widehat{X}}})$$

where $p_1 : X \times \widehat{X} \to X$ and $p_2 : X \times \widehat{X} \to \widehat{X}$. Thus

$$\mathcal{F}(x) = q_* \left((1 \times \varphi_\xi)^* p_1^* x \cdot e^{(1\times\varphi_\xi)^* l_{X\times\widehat{X}}} \right) = q_*(p^* x \cdot e^{m^*\xi - p^*\xi - q^*\xi}).$$

The next step consists in introducing the involution $w(a,b) = (-a, a+b)$ on $X \times X$. We immediately check the exactness of following relations

$$p \circ w = -p, \quad q \circ w = m, \quad m \circ w = q.$$

Therefore,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x) &= e^{-\xi} \cdot (q_* w_*) w^* (p^*(x \cdot e^{-\xi}) \cdot e^{m^*\xi}) \\ &= e^{-\xi} \cdot m_*(p^*(-1)^*(x \cdot e^{-\xi}) \cdot e^{q^*\xi}) \\ &= e^{-\xi} \cdot m_*(p^*(\overline{x} \cdot e^{-\xi}) \cdot q^* e^{\xi})\end{aligned}$$

because $\xi \in \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathrm{A}^1(X)_{(0)}$ is symmetric (that is $(-1)^*\xi = \xi$). This yields the result by definition of the Pontryagin product.

□

We use this proposition to deduce the following corollary (inspired by [Bea83, Lemme 1] or [Bea83, Proposition 5]). It will be used only once, to prove Proposition 2.2.5.

Corollary 2.2.4. *Let $\xi \in \mathrm{A}^1(X)_{(0)}$ be a polarization on an abelian variety X. Then*

$$\varphi_\xi^* \mathcal{F}_X(e^\xi) = \chi(\xi) e^{-\xi}$$

where χ denotes the Euler characteristic. Accordingly,

$$e^\xi = \frac{(-1)^{\dim X}}{\chi(\xi)} \varphi_\xi^* \mathcal{F}_X(e^{-\xi}).$$

Proof. Thanks to Proposition 2.2.3 (4) and since $(-1)^*\xi = \xi$, we have

$$\varphi_\xi^* \mathcal{F}_X(e^\xi) = e^{-\xi} \cdot ((e^{(-1)^*\xi} \cdot e^{-\xi}) * e^\xi) = e^{-\xi} \cdot ((e^\xi \cdot e^{-\xi}) * e^\xi) = e^{-\xi} \cdot ([X] * e^\xi).$$

Thus, for codimension reasons and by using the Riemann-Roch theorem for abelian varieties (see [Mum08, p150]), we obtain

$$\begin{aligned}\varphi_\xi^* \mathcal{F}_X(e^\xi) &= e^{-\xi} \cdot \left([X] * \frac{1}{(\dim X)!} \xi^{\dim X} \right) = \chi(\xi) e^{-\xi} \cdot ([X] * [o]) \\ &= \chi(\xi) e^{-\xi} \cdot [X] = \chi(\xi) e^{-\xi},\end{aligned}$$

where $[o]$ denotes the class of a point in X. Hence the first part of the corollary. Moreover, using the inversion formula (see Proposition 2.2.3 (1)), we get

$$\deg(\varphi_\xi)(-1)^{\dim X}(-1)^* e^\xi = \varphi_\xi^* \mathcal{F}_X \varphi_\xi^* \mathcal{F}_X(e^\xi) = \chi(\xi) \varphi_\xi^* \mathcal{F}_X(e^{-\xi}).$$

Since $\deg(\varphi_\xi) = \chi(\xi)^2$ (see [Mum08, p150]) and $(-1)^* e^\xi = e^\xi$ (because ξ is symmetric), we obtain the second part of this corollary. □

Proposition 2.2.5. *Let T be a bigraded $\mathbb{Q}$-subalgebra (for the intersection product) of $\mathrm{A}(X)$. We suppose that T contains the class of the polarization ξ on X. The following statements are equivalent :*

1. *$T * T \subset T$.*
2. *$\varphi_\xi^* \mathcal{F}_X(T) \subset T$.*
3. *$\varphi_\xi^* \mathcal{F}_X \varphi_\xi^* \mathcal{F}_X(T) \subset \varphi_\xi^* \mathcal{F}_X(T)$.*
4. *$\xi \cdot \varphi_\xi^* \mathcal{F}_X(T) \subset \varphi_\xi^* \mathcal{F}_X(T)$.*

Proof. Let us note $\mathcal{F} := \varphi_\xi^* \mathcal{F}_X : \mathrm{A}(X) \to \mathrm{A}(X)$.

(1) $\Rightarrow$ (2) We assume that T is stable under Pontryagin product. Let $x \in T$. According to Proposition 2.2.3 (4), we have

$$\mathcal{F}(x) = e^{-\xi} \cdot ((\overline{x} \cdot e^{-\xi}) * e^{\xi}) \in T$$

because on the one hand $\overline{x} := (-1)^* x \in T$ (since T is bigraded) and on the other both $e^{-\xi}$ and e^{ξ} belong to T (since $\xi \in T$ by hypothesis and T is stable under intersection product).

(2) $\Rightarrow$ (1) Let $x, y \in T$. Thanks to Proposition 2.2.3 (1) and (2), we have

$$\begin{aligned} x * y &= \frac{(-1)^{\dim X}}{\deg(\varphi_\xi)}(-1)^* \mathcal{F}\mathcal{F}(x * y) = \frac{(-1)^{\dim X}}{\deg(\varphi_\xi)}(-1)^* \mathcal{F}(\mathcal{F}(x) \cdot \mathcal{F}(y)) \\ &\in \mathcal{F}(\mathcal{F}(T) \cdot \mathcal{F}(T)) \subset \mathcal{F}(T \cdot T) \subset \mathcal{F}(T) \end{aligned}$$

since by hypothesis $\mathcal{F}(T) \subset T$ and the algebras T and $\mathcal{F}(T)$ are bigraded.

(2) $\Rightarrow$ (3) If $\mathcal{F}(T) \subset T$, then we immediately get $\mathcal{F}\mathcal{F}(T) \subset \mathcal{F}(T)$ by applying $\mathcal{F}$.

(3) $\Rightarrow$ (2) We assume that $\mathcal{F}\mathcal{F}(T) \subset \mathcal{F}(T)$. Since T is a bigraded $\mathbb{Q}$-vector space, the inversion formula for $\mathcal{F}$ shows that we actually have $T \subset \mathcal{F}(T)$. Applying $\mathcal{F}$ to this inclusion, we get the reversed one, that is statement (2). In particular, we have (2) if and only if we have (3) if and only if $\mathcal{F}(T) = T$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Now we assume that $\mathcal{F}\mathcal{F}(T) \subset \mathcal{F}(T)$ or equivalently $\mathcal{F}(T) = T$. Therefore, since $\xi \in T$ and T is stable by intersection by hypothesis, we have assertion (4) as claimed.

(4) $\Rightarrow$ (3) Assume that $\xi \cdot \mathcal{F}(T) \subset \mathcal{F}(T)$. We are going to show that $\mathcal{F}\mathcal{F}(T) \subset \mathcal{F}(T)$. So let us consider a cycle $x \in \mathcal{F}(T)$. The main idea is to use Proposition 2.2.3 (4). We first have $\overline{x} := (-1)^* x \in \mathcal{F}(T)$. Then

$$\overline{x} \cdot e^{-\xi} \in e^{-\xi} \cdot \mathcal{F}(T) \subset \mathcal{F}(T).$$

Corollary 2.2.4 shows that $e^{\xi} \in \mathcal{F}(T)$. At this moment we have used one more time the hypothesis that $\xi \in T$ (as it implies that $e^{-\xi} \in T$ too). Consequently, we obtain

$$(\overline{x} \cdot e^{-\xi}) * e^{\xi} \in \mathcal{F}(T) * \mathcal{F}(T) \subset \mathcal{F}(T \cdot T) \subset \mathcal{F}(T).$$

And finally

$$\mathcal{F}(x) = e^{-\xi} \cdot ((\overline{x} \cdot e^{-\xi}) * e^{\xi}) \in e^{-\xi} \cdot \mathcal{F}(T) \subset \mathcal{F}(T)$$

by using the hypothesis (4). Hence the claimed inclusion $\mathcal{F}\mathcal{F}(T) \subset \mathcal{F}(T)$; which completes the proof of this proposition. $\square$

Remark 2.2.6. Note that it is essential in this proof that the polarization ξ belongs to T.

The two next results will be used several times to exchange pull-backs and push-forwards by isogenies. Indeed it will be very convenient to work with pull-backs (resp. push-forwards) when subalgebras of $\mathrm{A}(X)$ are endowed with the intersection product (resp. Pontryagin product).

Lemma 2.2.7. *Let $\alpha : X \to Y$ be an isogeny between two abelian varieties X and Y. There exists an isogeny $\beta : Y \to X$ and an integer $n \in \mathbb{N}^*$ such that $\alpha \circ \beta = n_Y$ and $\beta \circ \alpha = n_X$. Then for all $y \in \mathrm{A}(Y)$ we have*

$$\beta_* y = \frac{1}{\deg(\alpha)} n_{X*} \alpha^* y.$$

Therefore, if $y \in \mathrm{A}^i(Y)_{(s)}$ for some indices i and s, then $\beta_* y \in \mathrm{A}^i(X)_{(s)}$ is proportional to $\alpha^* y$ (and is nonzero if $y \neq 0$).

Proof. Let $y \in \mathrm{A}(Y)$. Since $\beta \circ \alpha = n_X$ and α is a finite flat morphism of degree $\deg(\alpha) \neq 0$, we have

$$n_{X*}\alpha^* y = \beta_* \alpha_* \alpha^* y = \beta_*(\deg(\alpha) y) = \deg(\alpha)\beta_* y,$$

which means that

$$\beta_* y = \frac{1}{\deg(\alpha)} n_{X*}\alpha^* y.$$

Therefore if $y \in \mathrm{A}^i(Y)_{(s)}$ it is known that $\alpha^* y \in \mathrm{A}^i(X)_{(s)}$ is still homogeneous (because α commutes with the multiplication by n on X and Y) and so

$$\beta_* y = \frac{n^{2\dim X - 2i + s}}{\deg(\alpha)} \alpha^* y$$

is proportional to $\alpha^* y$. Finally, as β_* and α^* are isomorphisms between $\mathrm{A}(X)$ et $\mathrm{A}(Y)$ (because α and β are isogenies and we work with algebraic cycles with rational coefficients), $\beta_* y$ is nonzero when $y \neq 0$ (and vice versa). □

Corollary 2.2.8. *Let $\alpha : X \to Y$ be an isogeny between two abelian varieties X and Y. There exists an isogeny $\beta : Y \to X$ and an integer $n \in \mathbb{N}^*$ such that $\alpha \circ \beta = n_Y$ and $\beta \circ \alpha = n_X$. Let T (resp. T') be a bigraded $\mathbb{Q}$-vector subspace of $\mathrm{A}^\cdot(Y)$ (resp. of $\mathrm{A}^\cdot(X)$). Then*

1. $\alpha^* T = \beta_* T$
2. $\beta^* T' = \alpha_* T'$.

Proof. We only prove the first statement as the second one can be obtained in a similar way. By hypothesis T is bigraded which means that every $y \in T$ can be (uniquely) written as $y = \sum_{i,s} y_{i,s}$ for some $y_{i,s} \in T^i_{(s)} := T \cap \mathrm{A}^i(Y)_{(s)}$. The result then follows on from Lemma 2.2.7 applied to each $y_{i,s}$:

$$\alpha^* y = \sum_{i,s} \alpha^* y_{i,s} = \sum_{i,s} \lambda_{i,s}\beta_* y_{i,s} = \beta_* \left(\sum_{i,s} \lambda_{i,s} y_{i,s} \right) \in \beta_* T$$

for some nonzero $\lambda_{i,s} \in \mathbb{Q}$ (if $y_{i,s} = 0$ we can assume that $\lambda_{i,s} = 1$). Note that we have used here in an essential way that each component $y_{i,s} \in \mathrm{A}^i(Y)_{(s)}$ defines a class which already belongs to T. So we have proven that $\alpha^* T \subset \beta_* T$. The reverse inclusion can be obtained similarly because if $y = \sum_{i,s} y_{i,s} \in T$ for some $y_{i,s} \in T^i_{(s)}$, then we have

$$\beta_* y = \sum_{i,s} \frac{1}{\lambda_{i,s}} \alpha^* y_{i,s} = \alpha^* \left(\sum_{i,s} \frac{1}{\lambda_{i,s}} y_{i,s} \right) \in \alpha^* T.$$

This shows that $\alpha^* T = \beta_* T$. □

Combining Proposition 2.2.5 and Corollary 2.2.8, we immediately get

Proposition 2.2.9. *Let T be a bigraded $\mathbb{Q}$-subalgebra (for the intersection product) of $\mathrm{A}(X)$. We suppose that T contains the class of the polarization ξ on X. The following statements are equivalent :*

1. $T * T \subset T$.
2. $\psi_{\xi *}\mathcal{F}_X(T) \subset T$.
3. $\psi_{\xi *}\mathcal{F}_X \psi_{\xi *}\mathcal{F}_X(T) \subset \psi_{\xi *}\mathcal{F}_X(T)$.

4. $\xi \cdot \psi_{\xi *}\mathcal{F}_X(T) \subset \psi_{\xi *}\mathcal{F}_X(T)$.

Proof. The equivalence with Proposition 2.2.5 follows from the equality

$$\varphi_\xi^* \mathcal{F}_X(T) = \psi_{\xi *}\mathcal{F}_X(T)$$

which holds thanks to Corollary 2.2.8 applied to the bigraded $\mathbb{Q}$-vector space $\mathcal{F}_X(T)$ and isogenies φ_ξ and ψ_ξ. □

2.3 Functoriality of tautological rings $R(C; J)$

2.3.1 Notations

In this subsection we present all notations and previous results useful for our work. A more detailed approach of the following notions can be found in [BL04, Sections 5.3, 12.1, 12.3]. Let C and C' be two smooth projective complex curves of genus $g = g(C) \geqslant 1$ and $g' = g(C') \geqslant 1$. We put as always $J = J(C)$ and $J' = J(C')$ for their Jacobians endowed with usual principal polarizations Θ and Θ'. We avoid the case $g' = 0$ (that is $C' \simeq \mathbb{P}^1$) to spare us some case distinctions when $\mathrm{A}(J') = \{0\}$. We suppose that we have a finite morphism $f : C \to C'$ of degree $n \in \mathbb{N}^*$. This morphism induces morphisms of abelian varieties :

$$N_f : J \to J' : \mathcal{L}_C\left(\sum n_i P_i\right) \mapsto \mathcal{L}_{C'}\left(\sum n_i f(P_i)\right)$$
$$\overline{f} := f^* : J' \to J : \mathcal{L} \mapsto f^*\mathcal{L}.$$

Note that $N_f : J \to J'$ is the Albanese morphism induced by f which makes commute the following diagram :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "f^P"'] & C' \arrow[d, hook, "f^{P'}"] \\ J \arrow[r, "N_f"'] & J' \end{tikzcd} \qquad (\star)$$

where P is any fixed rational point on C and $P' := f(P) \in C'$. In particular, as C and C' generate J and J' respectively (as abelian varieties), the surjectivity of f implies the surjectivity of N_f.

Denote by $Y := \mathrm{Im}(\overline{f}) \subset J$ (see [BL04]). The map $\overline{f}$ factors through an isogeny $j : J' \to Y$ followed by the canonical embedding $\iota_Y : Y \hookrightarrow J$. Also consider the polarization $\varphi_{\iota_Y^*\Theta}$ on Y (a priori non principal) induced by Θ. Denote also by $e(Y)$ the exponent of Y, that is the exponent of the finite group $\mathrm{Ker}\, \varphi_{\iota_Y^*\Theta}$. It is known (see for example [BL04, Proposition 1.2.6]) that the map

$$\psi_{\iota_Y^*\Theta} := e(Y)\varphi_{\iota_Y^*\Theta}^{-1} : \widehat{Y} \to Y \in \mathrm{Hom}(\widehat{Y}, Y) \otimes \mathbb{Q}$$

is a morphism (that is it belongs to $\mathrm{Hom}(\widehat{Y}, Y)$) and even an isogeny. Consider the following elements

$$N_Y := \iota_Y \psi_{\iota_Y^*\Theta} \widehat{\iota_Y} \varphi_\Theta \in \mathrm{End}(J) \qquad \text{and} \qquad \varepsilon_Y := \iota_Y \varphi_{\iota_Y^*\Theta}^{-1} \widehat{\iota_Y} \varphi_\Theta \in \mathrm{End}^0(J) := \mathrm{End}(J) \otimes \mathbb{Q}.$$

By definition, we have

$$N_Y = e(Y)\varepsilon_Y.$$

Denote by $R : \mathrm{End}^0(J) \to \mathrm{End}^0(J)$ the Rosati involution on J with respect to the Theta polarization :

$$R(f) := \varphi_\Theta^{-1} \circ \widehat{f} \circ \varphi_\Theta.$$

According to Lemma 5.3.1 of [BL04] we have

$$R(N_Y) = N_Y \qquad \text{and} \qquad N_Y^2 = e(Y)N_Y.$$

This implies immediately that $R(\varepsilon_Y) = \varepsilon_Y$ and $\varepsilon_Y^2 = \varepsilon_Y$. In other words, N_Y is symmetric and ε_Y is a symmetric idempotent element of $\mathrm{End}^0(J)$. Note that these morphisms are (in particular) linked by the following facts :

(1) $\widehat{N_f} = \overline{f}$ after identifying Jacobians and duals [BL04, Equation (2) p331],
(2) $N_f\overline{f} = n \cdot \mathrm{Id}_{J'}$ by definition of N_f and $\overline{f}$,
(3) $\overline{f}N_f = \frac{n}{e(Y)}N_Y$ [BL04, Proposition 12.3.2] and in particular, since $\frac{n}{e(Y)}N_Y = n\varepsilon_Y \in \mathrm{End}(J)$, we deduce that $e(Y)$ divides n thanks to [BL04, Proposition 12.1.1],
(4) $N_{Y|Y} = e(Y) \cdot \mathrm{Id}_Y$ [BL04, p125],
(5) $Y = \mathrm{Im}(\overline{f}) = \mathrm{Im}(\overline{f}N_f) = \mathrm{Im}(N_Y)$ is isogenous to J'.

Besides, the map $Y \mapsto \varepsilon_Y$ defines a bijection between the set of abelian subvarieties of J and symmetric idempotents in $\mathrm{End}^0(J)$ [BL04, Theorem 5.3.2]. This yields a natural subvariety of J, denoted by Z, which is complementary to Y (with respect to the Theta polarization on J). This subvariety is associated to the symmetric idempotent element $1 - \varepsilon_Y$ and satisfies

$$Z = \mathrm{Im}(N_Z) = \mathrm{Ker}(N_Y)^0 = \mathrm{Ker}(N_f)^0 = \mathrm{Ker}(\widehat{\iota_Y}) \simeq \widehat{J/Y}$$

where N_Z is the norm-endomorphism of J associated to Z. It is defined similarly to N_Y.

Since (J, Θ) is principally polarized, the complementary subvarieties Y and Z have same exponent [BL04, Corollary 12.1.2]. Finally, let us recall the following relations [BL04, p125]

$$N_{Y|Z} = 0 \qquad \text{and} \qquad N_Y N_Z = 0 \qquad \text{and} \qquad N_Y + N_Z = e(Y) \cdot \mathrm{Id}_J\,.$$

This provides an isogeny $\mu := \iota_Y + \iota_Z : Y \times Z \to J$ [BL04, Corollary 5.3.6].

At this point, it is useful to look at the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
& J' \arrow[r, "j"] \arrow[rrr, bend left, "\overline{f}"] \arrow[dl, "n"'] \arrow[dd, "\varphi_{\overline{f}^*\Theta}"] & Y \arrow[rr, hook, "\iota_Y"] \arrow[dr, "e(Y)"] \arrow[dd, "\varphi_{\iota_Y^*\Theta}"] & & J \arrow[dllll, bend left, "N_f"'] \arrow[dd, "\varphi_\Theta"] \\
J' \arrow[dr, "\varphi_{\Theta'}"'] & & & Y & \\
& \widehat{J'} & \widehat{Y} \arrow[l, "\widehat{j}"] \arrow[ur, "\psi_{\iota_Y^*\Theta}"'] & & \widehat{J}. \arrow[ll, "\widehat{\iota_Y}"] \arrow[lll, bend left, "\widehat{\overline{f}}"]
\end{tikzcd}$$

Note that commutativity is justified by the identities $(1)-(5)$ recalled above and following relations :

(6) $\varphi_{\iota_Y^*\Theta} = \widehat{\iota_Y}\varphi_\Theta\iota_Y$: this can be checked immediately on points since for an arbitrary point $y \in Y$, we have

$$\varphi_{\iota_Y^*\Theta}(y) := t_y^*\iota_Y^*\mathcal{L}_J(\Theta) \otimes \iota_Y^*\mathcal{L}_J(\Theta)^\vee = \iota_Y^*\left(t_{\iota_Y(y)}^*\mathcal{L}_J(\Theta) \otimes \mathcal{L}_J(\Theta)^\vee\right) =: \iota_Y^*\varphi_\Theta(\iota_Y(y)).$$

(7) In the same way, $\varphi_{\overline{f}^*\Theta} = \widehat{\overline{f}}\varphi_\Theta\overline{f}$.
(8) Lemma 12.3.1 of [BL04] states that

$$\varphi_{\overline{f}^*\Theta} = \varphi_{n\Theta'} = n\varphi_{\Theta'}.$$

We now have all necessary tools to study the functoriality of tautological rings $R(C;J)$.

2.3.2 Functoriality of tautological rings $R(C;J)$

Let us start with a very simple proposition which is the key to all following results in this section.

Proposition 2.3.1. *Let $f : C \to C'$ be a finite morphism of degree n. We have*

$$(N_f)_*C = nC' \qquad \text{and} \qquad \overline{f}_*C' = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{e(Y)}N_Y\right)_* C = \frac{1}{n}\varepsilon_{Y*}n_*C.$$

Proof. Considering the commutative diagram ($\star$), we have

$$(N_f)_*C = \deg(f)C' = nC' \in \mathrm{A}^{g'-1}(J').$$

Then using relation (3), we get

$$n\overline{f}_*C' = \overline{f}_*(N_f)_*C = (\overline{f}N_f)_*C = \left(\frac{n}{e(Y)}N_Y\right)_* C.$$

But $\frac{n}{e(Y)}N_Y := \frac{n}{e(Y)}e(Y)\varepsilon_Y = n\varepsilon_Y = \varepsilon_Y n.$ ☐

This proposition immediately implies :

Corollary 2.3.2. *Let $f : C \to C'$ be a finite morphism of degree n. For all $i \in [\![0, g-1]\!]$ we have*

$$(N_f)_*C_{(i)} = nC'_{(i)} \in \mathrm{A}^{g'-1}(J')_{(i)}.$$

Furthermore put $i_0 := \max\{i \mid C'_{(i)} \neq 0\}$. Then for all $i_0 < i \leqslant g$, we have $(N_f)_*C_{(i)} = 0$. Also if $C_{(i)} = 0$ for some i, then $C'_{(i)} = 0$.

Proof. Decomposing $C = C_{(0)} + \ldots + C_{(g-1)}$ and $C' = C'_{(0)} + \ldots + C'_{(g'-1)}$, the equality $(N_f)_*C = nC'$ gives

$$\sum_{i=0}^{g-1}(N_f)_*C_{(i)} = \sum_{i=0}^{g'-1} nC'_{(i)}.$$

Since $(N_f)_*C_{(i)} \in \mathrm{A}^{g'-1}(J')_{(i)}$ [Bea86, Proposition 2.c], we have by uniqueness in Beauville's decomposition :

$$(N_f)_*C_{(i)} = nC'_{(i)} \in \mathrm{A}^{g'-1}(J')_{(i)}.$$

The second part of this corollary follows easily from the first one. ☐

Now we can easily deduce results concerning tautological rings since the cycles $C_{(i)}$ and $C'_{(i)}$ are generators of algebras $R(C;J)$ and $R(C';J')$ for the Pontryagin product.

Corollary 2.3.3. *Let $f : C \to C'$ be a finite morphism. The map $(N_f)_*$ induces a surjective morphism*

$$(N_f)_* : R(C;J) \twoheadrightarrow R(C';J').$$

In particular, $R(C';J')$ is a quotient of $R(C;J)$.

Proof. Since push-forwards are ring morphisms when we consider $\mathrm{A}(J)$ and $\mathrm{A}(J')$ endowed with the Pontryagin product, and since the $C'_{(i)} \in \mathrm{Im}((N_f)_*)$ generate $R(C';J')$ as $\mathbb{Q}$-subalgebra of $\mathrm{A}(J')$ for the Pontryagin product, we deduce from Corollary 2.3.2 the surjectivity of the morphism

$$(N_f)_* : R(C;J) \twoheadrightarrow R(C';J').$$

☐

Remark 2.3.4. $(N_f)_*$ is a surjective morphism as $\mathbb{Q}$-linear map and is also a morphism of $\mathbb{Q}$-algebra when we endow $\mathrm{A}(J)$ and $\mathrm{A}(J')$ with the Pontryagin product. Similarly, the next corollary gives a surjective morphism as $\mathbb{Q}$-linear map and also as morphism of $\mathbb{Q}$-algebra when we consider the intersection product.

By Fourier duality we get the equivalent corollary :

Corollary 2.3.5. *Let $f : C \to C'$ be a finite morphism. The map $\overline{f}^*$ induces a surjective morphism*

$$\overline{f}^* : R(C; J) \twoheadrightarrow R(C'; J').$$

Proof. Let $x \in R(C; J)$. According to relation (1), we have $\widehat{\overline{f}} = N_f$ (after identifying Jacobians with their duals). Thus we deduce thanks to inversion formulas for the Fourier transforms on J and J' and thanks to Proposition 2.2.2 applied to the morphism $\overline{f} : J' \to J$ with $X = J$ and $Y = J'$ that

$$\overline{f}^* x = (-1)^{g'}(-1_{J'})^* \mathcal{F}_{\widehat{J'}} \mathcal{F}_{J'} \overline{f}^* x = (-1)^{g'}(-1_{J'})^* \mathcal{F}_{\widehat{J'}} (-1)^{g-g'} \widehat{\overline{f}}_* \mathcal{F}_J(x).$$

Then keeping the identifications of $J' \simeq \widehat{J'}$ and $J \simeq \widehat{J}$, we get

$$\overline{f}^* x = (-1)^g (-1_{J'})^* \mathcal{F}_{J'} (N_f)_* \mathcal{F}_J(x) \in R(C'; J')$$

because on the one hand $(N_f)_* R(C; J) \subset R(C'; J')$ (Corollary 2.3.3) and on the other both $R(C; J)$ and $R(C'; J')$ are $\mathbb{Q}$-vector subspaces stable under Fourier transform and under operators k^*. This proves the existence of

$$\overline{f}^* : R(C; J) \longrightarrow R(C'; J').$$

The surjectivity of $\overline{f}^*$ follows from the surjectivity of $(N_f)_*$ (Corollary 2.3.3). Indeed if $y \in R(C'; J')$, then there exists an $z \in R(C'; J')$ such that $y = \mathcal{F}_{J'}(z)$ (by stability of $R(C'; J')$ under $(-1)^*$, $\mathcal{F}_{J'}$ and inversion formula). Consequently, for some $x \in R(C; J)$ such that $(N_f)_* x = z$, we still have thanks to Proposition 2.2.2

$$y = \mathcal{F}_{J'}(z) = \mathcal{F}_{J'}((N_f)_* x) = \widehat{N_f}^* \mathcal{F}_J(x) = \overline{f}^* \mathcal{F}_J(x) \in \overline{f}^* R(C; J)$$

because $R(C; J)$ is stable under $\mathcal{F}_J$. □

Now we would like to consider, roughly, $R(C'; J')$ from the point of view of $\mathrm{A}(J)$. That is we are interested in the rings $\overline{f}_* R(C'; J') \subset \mathrm{A}(J)$ and $(N_f)^* R(C'; J') \subset \mathrm{A}(J)$. The intuition suggests that cycles in $\overline{f}_* R(C'; J')$ and $(N_f)^* R(C'; J')$ should be with support on Y (recall that Y is the subvariety of J isogenous to J'). The next two results explain this fact.

Proposition 2.3.6. *Let $f : C \to C'$ be a finite morphism. The isogeny $j : J' \to Y$, corestriction map of $\overline{f} = f^*$, induces an isomorphism*

$$j_* : R(C'; J') \xrightarrow{\simeq} j_* R(C'; J') = \iota_Y^* R(C; J) \subset \mathrm{A}(Y).$$

Proof. The morphism $j : J' \to Y$ is an isogeny (in particular, it is finite and flat). Therefore

$$j_* j^* = \deg(j) \cdot \mathrm{Id}_{\mathrm{A}(Y)} : \mathrm{A}(Y) \to \mathrm{A}(Y).$$

So applying j_* to the relation of the previous corollary, we deduce

$$j_* R(C'; J') = j_* \overline{f}^* R(C; J) = j_*(\iota_Y \circ j)^* R(C; J) = j_* j^* \iota_Y^* R(C; J) = \deg(j) \iota_Y^* R(C; J) = \iota_Y^* R(C; J).$$

Moreover, as j is an isogeny, there exists an isogeny $h : Y \to J'$ such that $h \circ j = d_{J'}$ and $j \circ h = d_Y$ for some $d \in \mathbb{N}^*$. In particular, $j_* \left(\frac{1}{d} h\right)_* = \mathrm{Id}_{\mathrm{A}(Y)}$ and $\left(\frac{1}{d} h\right)_* j_* = \mathrm{Id}_{\mathrm{A}(J')}$, so that j_* is an isomorphism. □

Corollary 2.3.7. *Let $f : C \to C'$ be a finite morphism. The map $\overline{f} : J' \to J$ induces a surjective morphism*

$$\overline{f}_* : R(C'; J') \twoheadrightarrow \iota_{Y*}\iota_Y^* R(C; J) = [Y] \cdot R(C; J) \subset \mathrm{A}(J).$$

By Fourier duality we obtain similarly a surjective morphism

$$N_f^* : R(C'; J') \twoheadrightarrow \psi_Y^* \psi_{Y*} R(C; J) = \varphi_\Theta^* \mathcal{F}_J([Y]) * R(C; J)$$

with $\psi_Y := \psi_{\iota_Y^*\Theta} \circ \widehat{\iota_Y} \circ \varphi_\Theta \in \mathrm{Hom}(J, Y)$.

Proof. The first assertion is a direct consequence of Proposition 2.3.6 because $\overline{f}_* = \iota_{Y*} \circ j_*$. See also [Ful98, Example 8.1.1]. The second statement can be deduced from the first one by using Proposition 2.2.2 and the fact that Fourier transforms on J and J' respectively induce automorphisms of $R(C; J)$ and $R(C'; J')$. Indeed, recall [Bea04] that $\varphi_{\Theta'}^* \mathcal{F}_{J'}(R(C'; J')) = R(C'; J')$ and similarly $\varphi_\Theta^* \mathcal{F}_J(R(C; J)) = R(C; J)$. Then, we have on the one hand

$$\varphi_\Theta^* \mathcal{F}_J(\overline{f}_* R(C'; J')) = \varphi_\Theta^* \widehat{\overline{f}}^* \mathcal{F}_{J'}(R(C'; J')) = \varphi_\Theta^* \widehat{\overline{f}}^* \varphi_{\Theta'}^{-1*} \varphi_{\Theta'}^* \mathcal{F}_{J'}(R(C'; J')) = N_f^* R(C'; J').$$

And on the other hand,

$$\begin{aligned} \varphi_\Theta^* \mathcal{F}_J(\iota_{Y*}\iota_Y^* R(C; J)) &= (-1)^{g-g'} \varphi_\Theta^* \widehat{\iota_Y}^* \widehat{\iota_Y}_* \mathcal{F}_J(R(C; J)) = \varphi_\Theta^* \widehat{\iota_Y}^* \widehat{\iota_Y}_* \varphi_{\Theta*} \varphi_\Theta^* \mathcal{F}_J(R(C; J)) \\ &= \varphi_\Theta^* \widehat{\iota_Y}^* \widehat{\iota_Y}_* \varphi_{\Theta*} R(C; J). \end{aligned}$$

Besides, we have

$$\varphi_{\iota_Y^*\Theta *} \varphi_{\iota_Y^*\Theta}^* \widehat{\iota_Y}_* \varphi_{\Theta*} R(C; J) = \deg(\varphi_{\iota_Y^*\Theta}) \widehat{\iota_Y}_* \varphi_{\Theta*} R(C; J) = \widehat{\iota_Y}_* \varphi_{\Theta*} R(C; J)$$

and using Corollary 2.2.8 twice, we get

$$\psi_{\iota_Y^*\Theta}^* \psi_{\iota_Y^*\Theta *} \widehat{\iota_Y}_* \varphi_{\Theta*} R(C; J) = \widehat{\iota_Y}_* \varphi_{\Theta*} R(C; J).$$

Therefore we obtain

$$N_f^* R(C'; J') = \varphi_\Theta^* \widehat{\iota_Y}^* \psi_{\iota_Y^*\Theta}^* \psi_{\iota_Y^*\Theta *} \widehat{\iota_Y}_* \varphi_{\Theta*} R(C; J) = \psi_Y^* \psi_{Y*} R(C; J).$$

Finally, the last assertion follows from the equalities (obtained thanks to Proposition 2.2.3)

$$\varphi_\Theta^* \mathcal{F}_J([Y] \cdot R(C; J)) = (-1)^g \varphi_\Theta^* \mathcal{F}_J([Y]) * \varphi_\Theta^* \mathcal{F}_J(R(C; J)) = \varphi_\Theta^* \mathcal{F}_J([Y]) * R(C; J).$$

□

2.3.3 The special case of n-cyclic Galois coverings

In this section we get more explicit results when the covering $f : C \to C'$ is associated to an automorphism of the curve C. We start with definitions.

Definition 2.3.8. A *finite Galois covering* is a finite morphism $f : C \to C'$ of smooth projective complex curves C and C' such that there is an isomorphism $C' \simeq C/\mathrm{Aut}(f)$ where

$$\mathrm{Aut}(f) := \{\mu \in \mathrm{Aut}(C) \mid f \circ \mu = f\}$$

denotes the automorphism group of the Galois covering. This amounts to say that the function field extension $\mathrm{K}(C)/\mathrm{K}(C')$ is Galois.

The function field $\mathrm{K}(C')$ is then given by the subfield of invariants $\mathrm{K}(C)^{\mathrm{Aut}(f)} \subset \mathrm{K}(C)$ according to the Galois group $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}(C)/\mathrm{K}(C')) \simeq \mathrm{Aut}(f)$.

Definition 2.3.9. Let $f : C \to C'$ be a Galois covering of smooth projective complex curves. We say that f is a *n-cyclic Galois covering* if $\mathrm{Aut}(f) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. In that case, we will usually consider a generator $\sigma \in \mathrm{Aut}(f)$ so that $C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$.

Remark 2.3.10. Let C be a smooth projective curve endowed with an automorphism $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$. Then the curve $C/\langle\sigma\rangle$ is still smooth. Indeed we have to check that the curve $C/\langle\sigma\rangle$ is normal. Because normality is a local matter, we can assume that $C = \mathrm{Spec}(A)$ is affine so that $C' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}^{\langle\sigma\rangle})$. We then easily check that $\mathrm{A}^{\langle\sigma\rangle}$ is integrally closed in $\mathrm{K}(C') = \mathrm{Frac}(\mathrm{A}^{\langle\sigma\rangle}) = \mathrm{K}(C)^{\langle\sigma\rangle}$ using the fact that C is smooth.

We start with a lemma which specifies general facts concerning the subvariety Y and the automorphism σ defining a cyclic Galois covering $f : C \to C/\langle\sigma\rangle$.

Lemma 2.3.11. *Let $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ be an n-cyclic Galois covering associated to an automorphism $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ of order $n \in \mathbb{N}^*$ (with possibly $g(C') = 0$). Then*

1. *$\overline{f} : J' \to J$ induces an isogeny $j : J' \to Y := \mathrm{Im}(\overline{f}) \subset J$ of degree dividing n. Furthermore this isogeny is an isomorphism if and only if f does not factorize via a cyclic étale covering $f' : C'' \to C'$ of degree $\geqslant 2$.*
2. *$\overline{f}N_f = \Phi_n(\sigma)$ with $\Phi_n(X) = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$. Therefore $N_Y = \frac{e(Y)}{n}\Phi_n(\sigma)$.*
3. *$Y = \mathrm{Ker}(\sigma - 1)^0$.*
4. *We have the equality $e(Y) = 1$ if and only if $Y = J(C)$ or $Y = \{0\}$ if and only if $n = 1$ or $C' \simeq \mathbb{P}^1$.*

Proof.

1. According to [BL04, Proposition 11.4.3], j is an isomorphism (that is to say $\overline{f}$ is injective) if and only if f does not factorize via a cyclic étale covering of degree $\geqslant 2$. More precisely (see [BL04, Corollary 11.4.4]), when $\overline{f}$ is non injective, f factorizes via a cyclic étale covering $f_e : C_e \to C'$ of degree $\geqslant 2$ and such that $\deg(j) := \#\,\mathrm{Ker}(\overline{f}) = \#\,\mathrm{Ker}(f_e^*)$. Since f_e is a cyclic étale covering, we also have $\#\,\mathrm{Ker}(f_e^*) = \deg(f_e)$, which divides $n = \deg(f)$ by multiplicativity of the degree map.
2. Relation (3) of Section 2.3.1 states that
$$\overline{f}N_f = \frac{n}{e(Y)}N_Y.$$
But the fibres of $f : C \to C'$ are cyclic orbits for the action of $\langle\sigma\rangle$ on C (because f is Galois). Then for every point $z \in J$ represented by $\mathcal{L}_C(\sum n_i P_i)$, we have
$$\begin{aligned}\frac{n}{e(Y)}N_Y(z) &= \overline{f}N_f\left(\mathcal{L}_C(\textstyle\sum n_i P_i)\right) = \overline{f}\left(\mathcal{L}_{C'}(\textstyle\sum n_i f(P_i))\right)\\ &= \mathcal{L}_C\left(\textstyle\sum n_i(P_i + \sigma(P_i) + \ldots + \sigma^{n-1}(P_i))\right)\\ &= z + \sigma(z) + \ldots + \sigma^{n-1}(z) = \Phi_n(\sigma)(z).\end{aligned}$$
So $\frac{n}{e(Y)}N_Y = \Phi_n(\sigma)$ that is $N_Y = \frac{e(Y)}{n}\Phi_n(\sigma)$.
3. We now have to justify the equality $Y := \mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(\sigma - 1)^0$. In order to do this, let us begin by noting that a point $x \in J$ (corresponding to a class of invertible sheaf $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(C)$)

belongs to $\mathrm{Ker}(\sigma - 1)$ if and only if $\sigma^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$. Indeed, the Albanese morphism $\sigma : J \to J$ is the inverse map of $\sigma^* = \overline{\sigma} : \mathrm{Pic}^0(C) \to \mathrm{Pic}^0(C)$ (thanks to relation 2.3.1 (2)). Then we have

$$\sigma(x) = x \iff \sigma^{-1}(x) = x \iff \sigma^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}.$$

Moreover, $f \circ \sigma = f$ (by definition of the quotient $C/\langle\sigma\rangle$). Then each element $\mathcal{L} := f^*\mathcal{M} \in \mathrm{Im}(f^*)$ is invariant under σ^*. Indeed, one has

$$\sigma^*\mathcal{L} \simeq \sigma^* f^*\mathcal{M} \simeq f^*\mathcal{M} \simeq \mathcal{L}.$$

Thus we have proven that $\mathrm{Im}(f^*) \subset \mathrm{Ker}(\sigma - 1)$ and by the connectedness of $\mathrm{Im}(f^*)$, we even obtain $\mathrm{Im}(f^*) \subset \mathrm{Ker}(\sigma - 1)^0$. This leads us to following inclusions (using assertion (2))

$$Y \subset \mathrm{Ker}(\sigma - 1)^0 \subset \mathrm{Ker}(e(Y) - N_Y)^0 = \mathrm{Ker}(N_Z)^0.$$

But we know that $Y = \mathrm{Ker}(N_Z)^0$, which can be proven by the following argument

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Ker}(N_Z)^0 &= \dim J(C) - \dim \mathrm{Im}(N_Z) = \dim J(C) - \dim Z \\ &= g(C) - (\dim J(C) - \dim Y) = g(C) - g(C) + \dim Y = \dim Y.\end{aligned}$$

Hence the previous inclusions are in fact equalities :

$$Y = \mathrm{Ker}(\sigma - 1)^0 = \mathrm{Ker}(e(Y) - N_Y)^0 = \mathrm{Ker}(N_Z)^0.$$

4. As (J, Θ) is a principally polarized abelian variety, Y and $Z = \mathrm{Im}(e(Y) - N_Y)$ have same exponent $e(Y) = e(Z)$ (see Subsection 2.3.1 or more directly [BL04, Corollary 12.1.2]. If this exponent is equal to 1, then the polarizations induced by Θ on Y and Z, namely $\varphi_{\iota_Y^*\Theta}$ and $\varphi_{\iota_Z^*\Theta}$, are principal polarizations. So Lemma 12.1.6 of [BL04] implies that the isogeny

$$\mu := \iota_Y + \iota_Z : (Y \times Z, \mu^*\Theta = p_Y^*\iota_Y^*\Theta + p_Z^*\iota_Z^*\Theta) \to (J, \Theta)$$

which is of degree $\#(Y \cap Z) = \#\,\mathrm{Ker}(\varphi_{\iota_Y^*\Theta}) = 1$ is an isomorphism of principally polarized abelian varieties. Since Θ is irreducible, we have $Y = \{0\}$ or $Z = \{0\}$. The first case means that $C' \simeq C/\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{P}^1$ because Y is isogenous to $J(C/\langle\sigma\rangle)$. The second case means that $J = Y = \mathrm{Ker}(\sigma - 1)^0$ (according to assertion (3)) ; that is $\sigma = 1$.

□

Remark 2.3.12. The dimension argument used to prove assertion (3) of this lemma can be replaced by the construction of a section to the inclusion $Y \hookrightarrow \mathrm{Ker}(\sigma - 1)^0$. This can be achieved thanks to a descent lemma (see [DN89, Théorème 2.3]).

The next (easy) lemma will be widely used in the sequel.

Lemma 2.3.13. *Let $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ be an automorphism of C. As before, we denote by σ the Albanese automorphism induced in $\mathrm{End}(J)$ and R the Rosati involution on $\mathrm{End}^0(J)$ (with respect to the Theta polarization). Then $R(\sigma) = \sigma^{-1}$. Accordingly, we have for all $P \in \mathbb{Q}[X]$*

$$R(P(\sigma)) = P(\sigma^{-1}).$$

Proof. Consider a point x on J. Then by definition of the Rosati involution, we have

$$\begin{aligned}\varphi_\Theta \circ R(\sigma)(x) &= \widehat{\sigma} \circ \varphi_\Theta(x) = \sigma^*\left(t_x^*\mathcal{L}_J(\Theta) \otimes \mathcal{L}_J(\Theta)^\vee\right) \\ &= t_{\sigma^{-1}(x)}^*\sigma^*\mathcal{L}_J(\Theta) \otimes \sigma^*\mathcal{L}_J(\Theta)^\vee = \varphi_{\sigma^*\Theta}(\sigma^{-1}(x)) = \varphi_\Theta(\sigma^{-1}(x))\end{aligned}$$

because $\sigma^*\theta = \theta \in \mathrm{A}^1(J)$ (since σ defines an automorphism of the curve). Thus we have $R(\sigma)(x) = \sigma^{-1}(x)$ for all point x, which proves the first statement.

The last assertion follows immediately since the Rosati involution defines an anti-morphism of the ring $(\mathrm{End}^0(J), +, \circ)$. □

Proposition 2.3.14. *Let $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ be an n-cyclic Galois covering associated to an automorphism $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ of order $n \in \mathbb{N}^*$. The map $\overline{f}$ induces a surjective morphism*

$$\overline{f}_* : R(C'; J') \twoheadrightarrow \Phi_n(\sigma)_* R(C; J).$$

More precisely, the following equality holds

$$\overline{f}_* C' = \frac{1}{n}\Phi_n(\sigma)_* C.$$

Likewise, N_f induces a surjective morphism

$$N_f^* : R(C'; J') \twoheadrightarrow \Phi_n(\sigma)^* R(C; J).$$

Proof. Recall that $\overline{f}N_f = \Phi_n(\sigma)$ by Lemma 2.3.11 (2). Consider a cycle $y \in R(C'; J')$. By Corollary 2.3.3 $(N_f)_* : R(C; J) \to R(C'; J')$ is surjective so there exists $x \in R(C; J)$ such that $(N_f)_* x = y$. Hence

$$\overline{f}_* y = \overline{f}_*(N_f)_* x = (\overline{f}N_f)_* x = \Phi_n(\sigma)_* x \in \Phi_n(\sigma)_* R(C; J).$$

Conversely, for all $x \in R(C; J)$,

$$\Phi_n(\sigma)_* x = \overline{f}_*(N_f)_* x = \overline{f}_* y \in \overline{f}_* R(C; J)$$

where $y := (N_f)_* x \in R(C'; J')$. Using $C' = \frac{1}{n}(N_f)_* C$ (Proposition 2.3.1), we obtain

$$\overline{f}_* C' = \frac{1}{n}\overline{f}_*(N_f)_* C = \frac{1}{n}\Phi_n(\sigma)_* C.$$

Then note that Rosati involution fixes $\Phi_n(\sigma)$. Indeed, according to Lemma 2.3.13, we have

$$R(\Phi_n(\sigma)) = \Phi_n(\sigma^{-1}) = \Phi_n(\sigma) \in \mathrm{End}(J).$$

To get the second statement about N_f^* and thus conclude the proof, it remains to use this fact, Proposition 2.2.2, assertion (1) of Subsection 2.3.1 and the fact that Fourier transforms on J and J' induce automorphisms of $R(C; J)$ and $R(C'; J')$ respectively. □

Corollary 2.3.15. *Let $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ be an n-cyclic Galois covering associated to an automorphism $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ of order $n \in \mathbb{N}^*$. For all indices $i \in [\![0, g'-1]\!]$, we have*

$$\overline{f}_* C'_{(i)} = \frac{1}{n}\Phi_n(\sigma)_* C_{(i)} \in \mathrm{A}^{g-1}(J)_{(i)}.$$

Proof. With Proposition 2.3.14 we have

$$\sum_{i=0}^{g'-1} \overline{f}_* C'_{(i)} = \overline{f}_* C' = \frac{1}{n}\Phi_n(\sigma)_* C = \sum_{i=0}^{g-1} \frac{1}{n}\Phi_n(\sigma)_* C_{(i)}.$$

By uniqueness of Beauville's decomposition, we deduce the result since

$$\Phi_n(\sigma)_* C_{(i)} \in \Phi_n(\sigma)_* \mathrm{A}^{g-1}(J)_{(i)} \subset \mathrm{A}^{g-1}(J)_{(i)}$$

(see [Bea86, Proposition 2.c]). □

At this point, we would like to stress that push-forwards by polynomials in the automorphism appear naturally when considering tautological rings associated to curves with automorphisms. This may be the main idea to keep in mind about this whole section on Galois coverings. It raises the question to get a better understanding of cycle classes of the form $P(\sigma)_* C$ and motivates the study of the tautological ring containing all of them. This is the purpose of the rest of this paper.

2.4 The tautological ring $R_G(C; J)$

Let C be a smooth projective complex curve of genus $g \geqslant 1$. Until the end of this section we assume that we have a finite automorphism group $G \subset \mathrm{Aut}(C)$. We use the same notation G for the corresponding subgroup of $\mathrm{Aut}(J)$ and we shall note by $\mathbb{Z}[G]$ the subring of $(\mathrm{End}(J), +, \circ)$ formed by polynomials in elements of G, that is the image in $\mathrm{End}(J)$ of the group ring $\mathbb{Z}[G]$. Note that if G is an abelian group generated by automorphisms $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ of finite order, then $\mathbb{Z}[G]$ identifies with $\mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_s] \subset \mathrm{End}(J)$.

Remark 2.4.1. Recall that if $g \geqslant 2$, then any $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ is finite.

Now we want to prove Theorem 2.1.1 which provides a set of generators for the tautological ring

$$R_G(C; J) := \mathrm{Taut}_J\left(\{\pi_* C \in \mathrm{A}(J) \mid \pi \in \mathbb{Z}[G]\}\right).$$

The main difficulty is to show that the algebra for the intersection product generated by cycles of the form $\pi^* N^i(w)$ is stable under Pontryagin product too. Thus we first prove the following :

2.4.1 Key-theorem

Theorem 2.4.2. *Let $S_G := S_G(C; J) \subset \mathrm{A}(J)$ be the $\mathbb{Q}$-subalgebra (for the intersection product) generated by the $\pi^* N^i(w)$ for $\pi \in \mathbb{Z}[G]$ and $i \in [\![1, g-1]\!]$. Then S_G is stable under the Pontryagin product.*

To prove this theorem we will use Beauville's strategy [Bea04] which essentially consists in using the Fourier transform on J and more specifically we will use implication (4) $\Rightarrow$ (1) of Proposition 2.2.5. To be brief, we will denote by $\mathcal{F}$ the automorphism $\varphi_\Theta^* \mathcal{F}_J : \mathrm{A}(J) \to \mathrm{A}(J)$. We always identify J and $\widehat{J}$ via the principal polarization φ_Θ. In particular, we will consider the Poincaré line bundle on $J \times J$, namely :

$$\mathcal{P}_{J\times J} := (1 \times \varphi_\Theta)^* \mathcal{P}_{J\times \hat{J}}$$

and its cycle class $l_{J\times J} = m^*\theta - p^*\theta - q^*\theta \in \mathrm{A}^1(J \times J)$.

Remark 2.4.3. In his paper [Bea04] Beauville uses the relation $l_{J\times J} = p^*\theta + q^*\theta - m^*\theta$ for the class of the Poincaré line bundle on $J \times J$. This equality is given by a different choice for the principal polarization of J. Namely, he uses the polarization $-\varphi_\Theta$ to identify J and $\widehat{J}$. In this article, we have chosen the principal polarization φ_Θ as Milne did in [Mil86]. As always we fix a rational point P on C to embed the curve C in $J = J(C)$. With our convention, we recall some relations whose proofs can be found in [Mil86] (see Summary 6.11).

1. We put $\mathcal{L}^P := \mathcal{L}(\Delta_C - P \times C - C \times P) \in \mathrm{Pic}(C^2)$.
2. There is an invertible sheaf $\mathcal{M}^P \in \mathrm{Pic}(C \times J)$ such that $(1 \times f^P)^* \mathcal{M}^P \simeq \mathcal{L}^P$.
3. $\mathcal{M}^P \simeq (f^P \times (-1))^* (1 \times \varphi_\Theta)^* \mathcal{P}_{J\times \hat{J}} \simeq (f^P \times (-1))^* \mathcal{P}_{J\times J} \simeq (f^P \times 1)^* \mathcal{P}_{J\times J}^\vee$.
4. $\mathcal{L}^P \simeq (f^P \times f^P)^* \mathcal{P}_{J\times J}^\vee \simeq (f^P \times f^P)^* (p^* \mathcal{L}_J(\Theta) \otimes q^* \mathcal{L}_J(\Theta) \otimes m^* \mathcal{L}_J(\Theta)^\vee)$.
5. There is a map $f^{P\vee} : \widehat{J} \to J$ such that $(f^P \times 1)^* \mathcal{P}_{J\times \hat{J}} \simeq (1 \times f^{P\vee})^* \mathcal{M}^P$. On points, $f^{P\vee}$ is induced by $f^{P*} : \mathrm{Pic}(J) \to \mathrm{Pic}(C)$.
6. $f^{P\vee} = -\varphi_\Theta^{-1}$.

Proof of Theorem 2.4.2. We decompose the proof of Theorem 2.4.2 in several steps.

Step 1 By definition S_G is generated as $\mathbb{Q}$-algebra (for the intersection product) by classes $\pi^* N^i(w)$ with $i \in [\![1, g]\!]$ and $\pi \in \mathbb{Z}[G]$. Since $\pi^* N^g(w)$ is a multiple of the class of a point and $N^1(w)^g = \theta^g = g! \cdot P$, it suffices to consider indices $i \in [\![1, g-1]\!]$.

Moreover, thanks to Proposition 2.2.2 applied with $X = Y = J$ and $\alpha = \pi$, we have

$$\mathcal{F}(\pi^* N^i(w)) = R(\pi)_* \mathcal{F}(N^i(w)) = (-1)^{g+i} R(\pi)_* C_{(i-1)}.$$

Thus $\mathcal{F}(S_G)$ is generated as $\mathbb{Q}$-vector space by products of the form

$$(R(\pi_1)_* C_{(i_1-1)}) * (R(\pi_2)_* C_{(i_2-1)}) * \ldots * (R(\pi_r)_* C_{(i_r-1)}).$$

By Lemma 2.3.13, we get that each $R(\pi) \in \mathbb{Z}[G]$. Precisely, if π is a finite sum $\pi = \sum_{g \in G} a_g \circ g$ with coefficients $a_g \in \mathbb{Z}$, then $R(\pi) = \sum_{g \in G} a_g \circ g^{-1}$. In other words, the Rosati involution induces an involution of $\mathbb{Z}[G]$. Consequently, $\mathcal{F}(S_G)$ is generated as $\mathbb{Q}$-vector space by products

$$(\pi_{1*} C_{(i_1-1)}) * (\pi_{2*} C_{(i_2-1)}) * \ldots * (\pi_{r*} C_{(i_r-1)})$$

for $\pi_j \in \mathbb{Z}[G]$ and integers $i_j \in [\![1, g-1]\!]$. The following lemma is inspired by Lemma 4.2 of [Bea04].

Lemma 2.4.4. *$\mathcal{F}(S_G)$ is generated as $\mathbb{Q}$-vector space by the classes of the form*

$$(k_{1*}\pi_{1*}C) * \ldots * (k_{r*}\pi_{r*}C)$$

for all sequences $(k_1, \ldots, k_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ and all $\pi_j \in \mathbb{Z}[G]$. Therefore it is generated as $\mathbb{Q}$-vector space by classes of the form

$$(\pi_{1*}C) * \ldots * (\pi_{r*}C)$$

for $\pi_j \in \mathbb{Z}[G]$.

Proof of Lemma 2.4.4. This lemma depends in an essential way on the following equality

$$\begin{aligned}&(k_{1*}\pi_{1*}C) * \ldots * (k_{r*}\pi_{r*}C)\\ &= (k_1 \cdots k_r)^2 \sum_{s_1, \ldots, s_r} k_1^{s_1} \cdots k_r^{s_r} (\pi_{1*} C_{(s_1)}) * \ldots * (\pi_{r*} C_{(s_r)}) \in \mathcal{F}(S_G).\end{aligned}$$

We then have to choose some k_i wisely (by considering an invertible Vandermonde matrix) in order to invert some of these relations. The second statement is a direct consequence of the first one since if π_j has integer coefficients and $k_j \in \mathbb{N}^*$, then $k_j \pi_j$ has still integer coefficients. ☐

This lemma proves exactly that $\mathcal{F}(S_G)$ is generated as $\mathbb{Q}$-vector space by the products

$$(\pi_{1*}C) * (\pi_{2*}C) * \ldots * (\pi_{r*}C)$$

for the nonzero $\pi_j \in \mathbb{Z}[G]$.

Step 2 According to Proposition 2.2.5 (that we can apply since $\theta = N^1(w) \in S_G$), it remains essentially to prove that $\theta \cdot \mathcal{F}(S_G) \subset \mathcal{F}(S_G)$. Actually we will show that for all nonzero $\pi_1, \ldots, \pi_r \in \mathbb{Z}[G]$ the class

$$\theta \cdot [(\pi_{1*}C) * \ldots * (\pi_{r*}C)]$$

belongs to $\mathcal{F}(S_G)$.

If $r = 0$, we have $\theta = N^1(w) \in R(C; J) = \mathcal{F}(R(C; J)) \subset \mathcal{F}(S_G)$. Also note that if $r = 1$, $\theta \cdot \pi_{1*}C \in \mathrm{A}^g(J)$ is a multiple of the class of a point. Therefore it is a multiple of $\mathcal{F}([J]) \in \mathcal{F}(S_G)$. Thus we suppose from now on that $r \geqslant 2$ in which case we consider the following map :

$$u : C^r \xrightarrow{\Phi} J^r \xrightarrow{K} J^r \xrightarrow{m} J$$

with $\Phi := f^P \times \ldots \times f^P$ (r times), $K := \pi_1 \times \ldots \times \pi_r$ and where $m : J^r \to J$ is induced by the multiplication on J. Then the cycle

$$\theta \cdot [(\pi_{1*}C) * \ldots * (\pi_{r*}C)]$$

is a multiple of $u_* u^* \theta$ (by the projection formula). We now introduce projections $p_i : J^r \to J$ and $p_{ij} : J^r \to J^2$. In the same way we consider projections $q_i : C^r \to C$ and $q_{ij} : C^r \to C^2$. As in [Bea04] we have

$$m^*\theta = \sum_i p_i^*\theta + \sum_{i<j} p_{ij}^* l_{J\times J}.$$

Considering that

1. $p_i \circ K \circ \Phi = \pi_i \circ p_i \circ \Phi = \pi_i \circ f^P \circ q_i$,
2. $p_{ij} \circ K \circ \Phi = (\pi_i \times \pi_j) \circ p_{ij} \circ \Phi = (\pi_i \times \pi_j) \circ (f^P \times f^P) \circ q_{ij}$,

we get

$$\begin{aligned} u^*\theta = \Phi^* K^* m^* \theta &= \Phi^* K^* \left(\sum_i p_i^*\theta + \sum_{i<j} p_{ij}^* l_{J\times J} \right) \\ &= \sum_i q_i^* f^{P*} \pi_i^* \theta + \sum_{i<j} q_{ij}^* (f^P \times f^P)^* (\pi_i \times \pi_j)^* l_{J\times J}. \end{aligned}$$

It implies that $u^*\theta$ is a linear combination of classes of the form

$$q_i^* f^{P*} \pi_i^* \theta \qquad \text{and} \qquad q_{ij}^* (f^P \times f^P)^* (\pi_i \times \pi_j)^* l_{J\times J}.$$

Thus $u_* u^* \theta$ is a linear combination of classes of the form

$$u_* q_i^* f^{P*} \pi_i^* \theta \qquad \text{and} \qquad u_* q_{ij}^* (f^P \times f^P)^* (\pi_i \times \pi_j)^* l_{J\times J}.$$

Step 3 The class $f^{P*}\pi_i^*\theta$ is a divisor class (modulo algebraic equivalence) on the curve C. Thus it is a multiple of the class of a point. Therefore, $q_i^* f^{P*} \pi_i^* \theta$ is a multiple of the class $C \times \ldots \times C \times P \times C \times \ldots \times C$ (where the factor P is in ith place). So we obtain that $u_* q_i^* f^{P*} \pi_i^* \theta$ is proportional to

$$(\pi_{1*}C) * \ldots * \widetilde{(\pi_{i*}C)} * \ldots * (\pi_{r*}C) \in \mathcal{F}(S_G)$$

where the $\breve{}$ means that we omit the emphasized factor.

Step 4 The main part of this proof rests in the study of classes $(f^P \times f^P)^* (\pi_i \times \pi_j)^* l_{J\times J}$. Put $\mathcal{M} := (f^P \times f^P)^* (\pi_i \times \pi_j)^* \mathcal{P}_{J\times J} \in \mathrm{Pic}(C \times C)$. In order to study this invertible sheaf, we are going to study its fibres and then glue them.

Let M be a point on C. Define $j_M : N \in C \mapsto (N, M) \in C^2$ and similarly $\tilde{j}_V : U \in J \mapsto (U, V) \in J^2$ where V is a given point on J. Then we easily check that

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{|C\times M} &\simeq j_M^* (f^P \times f^P)^* (\pi_i \times \pi_j)^* \mathcal{P}_{J\times J} \\ &\simeq f^{P*} \pi_i^* \tilde{j}^*_{\pi_j f^P(M)} \left(m^* \mathcal{L}_J(\Theta) \otimes p^* \mathcal{L}_J(\Theta)^\vee \otimes q^* \mathcal{L}_J(\Theta)^\vee \right) \\ &\simeq f^{P*} \pi_i^* \left(t^*_{\pi_j f^P(M)} \mathcal{L}_J(\Theta) \otimes \mathcal{L}_J(\Theta)^\vee \right). \end{aligned}$$

Therefore the isomorphism class of $\mathcal{M}_{|C\times M}$ corresponds to the point

$$f^{P*} \pi_i^* \varphi_\Theta(\pi_j f^P(M)) \in \mathrm{Pic}^0(C).$$

Then note that we have by definition of the Rosati involution R the equality

$$\widehat{\pi}_i \circ \varphi_\Theta = \varphi_\Theta \circ R(\pi_i).$$

Thus we get

$$f^{P*}\varphi_\Theta(R(\pi_i)\pi_j f^P(M)) = f^{P*}\varphi_\Theta(\pi f^P(M))$$

where $\pi := R(\pi_i) \circ \pi_j \in \mathbb{Z}[G]$. Since π has integer coefficients and φ_Θ is a morphism of abelian varieties, it suffices essentially to study the case where π is a monomial, that is $\pi \in G$. Indeed, any polynomial with integer coefficients is (by definition) a sum of monomials. Precisely, let us decompose π as a finite sum

$$\pi = \sum_{\beta=1}^{l} a_{g_\beta} g_\beta$$

with coefficients $a_{g_\beta} \in \mathbb{Z}$ non all zero and $g_\beta \in G$. Moreover put $N := \sum_\beta |a_{g_\beta}| \in \mathbb{N}^*$. Then, we can consider the map

$$S := (\underbrace{sgn(a_{g_1})g_1, \ldots, sgn(a_{g_1})g_1}_{|a_{g_1}| \text{ times}}, \underbrace{sgn(a_{g_2})g_2, \ldots, sgn(a_{g_2})g_2}_{|a_{g_2}| \text{ times}}, \ldots) : J \to J^N$$

where $sgn : \mathbb{Z} \to \{\pm 1\}$ denotes the sign map. Note that with these notations, we have

$$\pi = m \circ S : J \to J$$

where $m : J^N \to J$ is still the map deduced from the multiplication map on J. We also have a map :

$$n : [\![1, N]\!] \to [\![1, l]\!]$$

defined in such a way that

$$\forall \alpha \in [\![1, N]\!], \qquad p_\alpha \circ S = sgn(a_{g_{n(\alpha)}})g_{n(\alpha)}$$

where $p_\alpha : J^N \to J$ is here the αth projection.

Example 2.4.5. If $s = 2$ and $\pi = 2 - \sigma_1\sigma_2^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2$ for some automorphisms σ_1, σ_2, then

1. $N = 5$, $l = 3$,
2. $g_{n(1)} = g_{n(2)} = 1$, $g_{n(3)} = \sigma_1\sigma_2^2$ and $g_{n(4)} = g_{n(5)} = \sigma_1^2\sigma_2^2$,
3. $S = (1, 1, -\sigma_1\sigma_2^2, \sigma_1^2\sigma_2^2, \sigma_1^2\sigma_2^2)$.

Thus the following equality holds in $\mathrm{Pic}^0(J)$

$$\varphi_\Theta(\pi f^P(M)) = \sum_{\alpha=1}^{N} sgn(a_{g_{n(\alpha)}})\varphi_\Theta(g_{n(\alpha)} f^P(M)).$$

Now recall that any $g \in G$ satisfies the following Albanese property :

$$g \circ f^P = f^{g(P)} \circ g.$$

Consequently, we have

$$\varphi_\Theta(\pi f^P(M)) = \sum_{\alpha=1}^{N} sgn(a_{g_{n(\alpha)}})\varphi_\Theta(f^{g_{n(\alpha)}(P)} g_{n(\alpha)}(M)).$$

In order to have compact notations, we chose to denote from now on until the end of this proof by $\varphi_\Theta(U)$ the invertible sheaf $t_U^*\mathcal{L}_J(\Theta)\otimes\mathcal{L}_J(\Theta)^\vee$ for an arbitrary point $U\in J$ (and not its class in the Picard group). Therefore, considering the relation

$$f^P = t_{\mathcal{L}_C(g_{n(\alpha)}(P)-P)}\circ f^{g_{n(\alpha)}(P)}$$

where $t_{\mathcal{L}_C(g_{n(\alpha)}(P)-P)} : J \to J$ denotes the translation by the point of J corresponding to the line bundle $\mathcal{L}_C(g_{n(\alpha)}(P)-P)\in \mathrm{Pic}^0(C)$ and since $\varphi_\Theta(f^{g_{n(\alpha)}(P)}g_{n(\alpha)}(M))\in\mathrm{Pic}^0(J)$ is translation-invariant (see [Mum08, II.8.i p74]), one obtains that

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{|C\times M} &\simeq \bigotimes_{\alpha=1}^N f^{P*}\varphi_\Theta(f^{g_{n(\alpha)}(P)}g_{n(\alpha)}(M))^{sgn(a_{g_{n(\alpha)}})}\\ &\simeq \bigotimes_{\alpha=1}^N f^{g_{n(\alpha)}(P)*}\varphi_\Theta(f^{g_{n(\alpha)}(P)}g_{n(\alpha)}(M))^{sgn(a_{g_{n(\alpha)}})}.\end{aligned}$$

Moreover, we know from relations of Remark 2.4.3 that

$$(f^P\times f^P)^*\mathcal{P}_{J\times J}\simeq(\mathcal{L}^P)^\vee := \mathcal{L}_{C^2}(P\times C + C\times P-\Delta_C).$$

It is then straightforward to get that for all points $U,V\in C$,

$$\left(\mathcal{L}^{U\vee}\right)_{|V\times C}\simeq\left(\mathcal{L}^{U\vee}\right)_{|C\times V}\simeq f^{U*}\varphi_\Theta(f^U(V))$$

(put $\pi_i=\pi_j=1$, $P=U$ and $M=V$ in previous formulas). It follows that for all points M in C

$$\mathcal{M}_{|C\times M}\simeq\bigotimes_{\alpha=1}^N\left(\mathcal{L}^{g_{n(\alpha)}(P)\vee}_{|C\times g_{n(\alpha)}(M)}\right)^{sgn(a_{g_{n(\alpha)}})}\simeq\bigotimes_{\alpha=1}^N\left((1\times g_{n(\alpha)})^*\mathcal{L}^{g_{n(\alpha)}(P)}\right)^{-sgn(a_{g_{n(\alpha)}})}_{|C\times M}$$

because $j_{g_{n(\alpha)}(M)}=(1\times g_{n(\alpha)})\circ j_M$. According to the Seesaw principle [Mum08, Corollary 6 p54], we deduce the existence of a line bundle $\mathcal{N}$ on C such that

$$\begin{aligned}\mathcal{M}&\simeq\left(\bigotimes_{\alpha=1}^N(1\times g_{n(\alpha)})^*\left(\mathcal{L}^{g_{n(\alpha)}(P)}\right)^{-sgn(a_{g_{n(\alpha)}})}\right)\otimes q^*\mathcal{N}\\ &\simeq\left(\bigotimes_{\alpha=1}^N(1\times g_{n(\alpha)})^*\mathcal{L}_{C^2}\left(sgn(a_{g_{n(\alpha)}})(g_{n(\alpha)}(P)\times C + C\times g_{n(\alpha)}(P)-\Delta_C)\right)\right)\otimes q^*\mathcal{N}\end{aligned}$$

where $q: C\times C\to C$ denotes the second projection. Therefore, passing to algebraic cycle classes, we get that $(f^P\times f^P)^*(\pi_i\times\pi_j)^*l_{J\times J}$ is a linear combination of classes of the form

1. $(1\times g)^*(g(P)\times C)=P\times C$ (because all points on the curve C are algebraically equivalent and each monomial $g\in G$ is still an automorphism),
2. $(1\times g)^*(C\times g(P))=C\times P$,
3. $(1\times g)^*\Delta_C$,
4. $q^*(\deg(\mathcal{N})\cdot P)=\deg(\mathcal{N})(C\times P)$

for some automorphisms $g\in G$.

Remark 2.4.6. Note that there appear naturally cycle classes of the form $(1\times g)^*\Delta_C$, that is essentially graphs of automorphisms.

Finally, $q_{ij}^*(f^P\times f^P)^*(\pi_i\times\pi_j)^*l_{J\times J}$ is a linear combination of

1. $q_{ij}^*(P\times C)=q_i^*P$,

2. $q_{ij}^*(C \times P) = q_j^* P$,
3. $q_{ij}^*(1 \times g)^* \Delta_C$

and so $u_* q_{ij}^* (f^P \times f^P)^* (\pi_i \times \pi_j)^* l_{J \times J}$ is a linear combination of the following classes

1. $(\pi_{1*}C) * \ldots * \widetilde{(\pi_{i*}C)} * \ldots * (\pi_{r*}C) \in \mathcal{F}(S_G)$,
2. $(\pi_{1*}C) * \ldots * \widetilde{(\pi_{j*}C)} * \ldots * (\pi_{r*}C) \in \mathcal{F}(S_G)$,
3. $(\pi_{1*}C) * \ldots * \widetilde{(\pi_{i*}C)} * \ldots * \widetilde{(\pi_{j*}C)} * \ldots * (\pi_{r*}C) * (\underbrace{\pi_i + \pi_j g^{-1}}_{=:\ \pi_{r+1}})_* C \in \mathcal{F}(S_G)$.

Conclusion So we proved that each cycle class

$$\theta \cdot [(\pi_{1*}C) * \ldots * (\pi_{r*}C)] \in \mathcal{F}(S_G)$$

defines an element in $\mathcal{F}(S_G)$ as (rational) linear combination of classes all belonging to the $\mathbb{Q}$-vector space $\mathcal{F}(S_G)$. Thus $\mathcal{F}(S_G)$ is stable under intersection with the (principal) polarization θ, so stable under $\mathcal{F}$. Therefore this fact also holds for S_G, which we know now that is stable under Pontryagin product. This completes the proof of this key-theorem. □

2.4.2 Interpretation in terms of tautological rings

Theorem 2.4.2 yields all we need to prove Theorem 2.1.1. The hard part has already been done. It is now easy to conclude.

Proof of Theorem 2.1.1. By definition, tautological ring $R_G(C;J)$ is the smallest $\mathbb{Q}$-vector subspace of $\mathrm{A}(J)$ containing every $\pi_* C$ where $\pi \in \mathbb{Z}[G]$ and stable under intersection product, Pontryagin product and operators k_*, k^*. Therefore it contains the $\mathbb{Q}$-algebra (for the Pontryagin product) generated by thes classes $\pi_* C$. According to Theorem 2.4.2 and Lemma 2.4.4 this $\mathbb{Q}$-algebra is none other than $\mathcal{F}(S_G(C;J))$, which equals $S_G(C;J)$ thanks to Proposition 2.2.5. So we have

$$R_G(C;J) \supset S_G(C;J).$$

Also since $S_G(C;J) = \mathcal{F}(S_G(C;J))$ contains each $\pi_* C$ and is closed under intersection product, Pontryagin product and also under the operators k_* and k^* (because $S_G(C;J)$ is generated by homogeneous classes $\pi^* N^i(w)$ in $\mathrm{A}^i(J)_{(i-1)}$), one has

$$R_G(C;J) \subset S_G(C;J).$$

So we get the equality $R_G(C;J) = S_G(C;J)$. □

We now have a tautological ring on J associated to the group of automorphisms $G \subset \mathrm{Aut}(C)$. This ring is all the more natural if one considers Corollary 2.1.2. Let us prove it now.

Proof of Corollary 2.1.2. Here again we decompose the proof in several steps.

Step 1 The algebra $R(C;J)$ introduced by Beauville is generated (for the intersection product) by $N^1(w) = \theta, \ldots, N^g(w)$ according to [Bea04] (and even by $N^1(w), \ldots, N^{g-1}(w)$). So if S is an arbitrary algebra extension of $R(C;J)$ stable under all pull-backs by polynomials in $\mathbb{Z}[G]$, then necessarily $\mathbb{Z}[G]^* R(C;J) \subset S$ and in particular, S contains each $\pi^* N^i(w)$ for all $\pi \in \mathbb{Z}[G]$ and $i \in [\![1, g]\!]$. Thus, $R_G(C;J) \subset S$.

Step 2 Since $R_G(C;J)$ contains each $\pi^* N^i(w)$, it follows that $R_G(C;J)$ contains each generator $N^i(w)$ of the algebra $R(C;J)$. That is why we trivially have the inclusion $R(C;J) \subset R_G(C;J)$.

Step 3 Now $R_G(C;J)$ is generated as $\mathbb{Q}$-vector space by classes of the form

$$\pi_1^* N^{i_1}(w) \cdot \ldots \cdot \pi_k^* N^{i_k}(w).$$

Moreover, if we pull-back each one of these cycles by elements in $\mathbb{Z}[G]$, we still have a cycle in $R_G(C;J)$ of the same form. Indeed, for all $\pi \in \mathbb{Z}[G]$ and all $x, y \in \mathrm{A}(J)$, we have

$$\pi^*(x \cdot y) = \pi^* x \cdot \pi^* y.$$

Therefore, $R_G(C;J)$ is stable under all pull-backs by elements in $\mathbb{Z}[G]$.

Conclusion In other words $R_G(C;J)$ is an algebra extension of $R(C;J)$ (for the intersection product) stable under all pull-backs by polynomials in $\mathbb{Z}[G] \subset \mathrm{End}(J)$ and contained in every extension S of $R(C;J)$ with this property. Thus $R_G(C;J)$ is the smallest $\mathbb{Q}$-algebra extension of $R(C;J)$ (for the intersection product) which is stable under pull-backs by polynomials in $\mathbb{Z}[G]$.

Similarly we prove that the tautological ring $R_G(C;J)$ is the smallest $\mathbb{Q}$-algebra extension of $R(C;J)$ (for the Pontryagin product) which is stable under push-forwards by polynomials in $\mathbb{Z}[G]$. $\square$

This proves the following interpretation of the tautological ring $R_G(C;J)$. It is the smallest $\mathbb{Q}$-vector subspace of $\mathrm{A}(J)$ containing the cycle class C and closed under intersection product, Pontryagin product, pull-backs and push-forwards by polynomials in $\mathbb{Z}[G]$. Actually, since the generators $\pi^* N^i(w)$ and $\pi_* C_{(i-1)}$ are homogeneous with respect to Beauville's decomposition, the tautological ring $R_G(C;J)$ is even closed under pull-backs and push-forwards by polynomials in $\mathbb{Q}[G] \subset \mathrm{End}^0(J)$.

2.4.3 Tautological divisors, Néron-Severi group and symmetric endomorphisms

Let $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ and $G = \langle \sigma \rangle \subset \mathrm{Aut}(C)$. It is well-known that the Theta polarization induces an isomorphism between the rational Néron-Severi group of J and the set of symmetric endomorphisms of J (see [Mum08, p190]) :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(J) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{End}^{(s)}(J) = \{f \in \mathrm{End}^0(J) \mid R(f) = f\} \\ D & \mapsto & \varphi_\Theta^{-1} \circ \varphi_D. \end{array}$$

Under this bijection, for any $\pi \in \mathbb{Z}[G]$ the divisor class $\pi^* N^1(w) = \pi^*\theta \in R_\sigma(C;J)$ corresponds to the symmetric endomorphism $R(\pi) \circ \pi$. Indeed, we easily check on points that $\varphi_{\pi^*\Theta} = \widehat{\pi} \circ \varphi_\Theta \circ \pi$. In particular, if π is symmetric, then $\pi^*\theta$ corresponds to $\pi^2 \in \mathrm{End}^{(s)}(J)$.

For example, for any integer i the divisor class

$$\gamma_i := (\sigma^i + \sigma^{-i})^* \theta$$

is associated to the endomorphism $(\sigma^i + \sigma^{-i})^2 = \sigma^{2i} + \sigma^{-2i} + 2$. Also, let $\Gamma_i \in \mathrm{A}^1(J)$ be the divisor class corresponding to $\sigma^i + \sigma^{-i} \in \mathrm{End}^{(s)}(J)$. We then have the relation

$$\gamma_i = \Gamma_{2i} + 2\theta \in \mathrm{A}^1(J) \cap R_\sigma(C;J).$$

We leave it to the reader to verify that these cycle classes γ_i and Γ_i are both related to the graphs Γ_{σ^i} and $\Gamma_{\sigma^{-i}}$ in $\mathrm{A}^1(C^2)$ of σ^i and σ^{-i}. For example, we can obtain some relations of the form

$$f^{2*}\Gamma_i = k(C \times P) + k(P \times C) - \Gamma_{\sigma^i} - \Gamma_{\sigma^i} \in \mathrm{A}^1(C^2)$$

for some integer k where $f^2 := m \circ (f^P \times f^P) : C \times C \to J$. This can be seen by using the proof of Theorem 2.4.2, Step 4. More generally, any divisor class of the form $\pi^*\theta$ can be related to graphs of elements in G. Here again, we see how natural this tautological ring $R_\sigma(C;J)$ is.

2.5 The tautological ring $R_G(\psi_{Y*}C;Y)$

From now on and until the end of this paper we consider a n-cyclic Galois covering $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ associated to an automorphism $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ of finite order $n \in \mathbb{N}^*$. Moreover, we fix a finite automorphism group $G \subset \mathrm{Aut}(C)$ and we suppose that each $g \in G$ commutes with σ. Therefore, each $g \in G$ determines an automorphism $\widetilde{g} \in \mathrm{Aut}(C')$ fitting into the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C' \arrow[d, "\widetilde{g}"] \\ C \arrow[r, "f"'] & C'. \end{tikzcd}$$

Also, let us denote by $\widetilde{G}$ the subgroup of $\mathrm{Aut}(C')$ formed by all these automorphisms $\widetilde{g}$ with $g \in G$. The covering $f : C \to C'$ determines two complementary abelian subvarieties Y and Z of $J = J(C)$ as in §2.3. We recall that we denote by η the polarization on Y induced by Θ and

$$\psi_Y := \psi_\eta \circ \widehat{\iota_Y} \circ \varphi_\Theta \in \mathrm{Hom}(J, Y)$$

which is polynomial in σ (according to Lemma 2.3.11 (2)). In this section we study the tautological ring induced on Y by $R_G(C; J)$. This is the aim of Theorem 2.1.3.

Proof of Theorem 2.1.3. In order to ease notations, put $J' = J(C')$. Since $j : J' \to Y$ is an isogeny, it induces an isomorphism (of $\mathbb{Q}$-vector spaces) between $R_{\widetilde{G}}(C'; J') \subset \mathrm{A}(J')$ and its image $j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J')$ in $\mathrm{A}(Y)$. As push-forwards commute with Pontryagin products, j is even an isomorphism of $\mathbb{Q}$-algebras when we consider $R_{\widetilde{G}}(C'; J')$ endowed with the Pontryagin product. In particular, $j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J')$ is a $\mathbb{Q}$-vector subspace of $\mathrm{A}(Y)$ which is stable under Pontryagin product but also under operators k_* and k^* (because $R_{\widetilde{G}}(C'; J')$ has these properties and j is a morphism of abelian varieties). Also, there exists an isogeny $u : Y \to J'$ such that $u \circ j = k_{J'}$ and $j \circ u = k_Y$ for some integer $k \in \mathbb{N}^*$. According to Corollary 2.2.8, we get

$$R_{\widetilde{G}}(C'; J') \simeq j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J') = u^* R_{\widetilde{G}}(C'; J').$$

It follows that $j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J') = u^* R_{\widetilde{G}}(C'; J')$ is stable under intersection product too (because $R_{\widetilde{G}}(C'; J')$ has this property and pull-backs commute with intersection product). Up to now, we have proven that

$$R_{\widetilde{G}}(C'; J') \simeq j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J') = \mathrm{Taut}_Y\left(j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J')\right).$$

According to Proposition 2.3.1, we have $(N_f)_* C = nC'$. Thus, we get for all $\widetilde{\pi} \in \mathbb{Z}[\widetilde{G}]$

$$\widetilde{\pi}_* (N_f)_* C = n \widetilde{\pi}_* C'.$$

But we have for all $g \in G$, $f \circ g = \widetilde{g} \circ f$ so that more generally when considering Albanese morphisms, we have for all $\pi \in \mathbb{Z}[G]$

$$N_f \circ \pi = \widetilde{\pi} \circ N_f$$

where if $\pi = \sum_{g\in G} a_g \circ g$, then $\widetilde{\pi} = \sum_{g\in G} a_g \circ \widetilde{g} \in \mathbb{Z}[\widetilde{G}]$ with $\widetilde{g}$ the automorphism induced on $C/\langle\sigma\rangle$ (or its Jacobian). Consequently, we obtain

$$(N_f)_* \pi_* C = n \widetilde{\pi}_* C'.$$

From this equality we deduce as in Corollary 2.3.2 that for each i,

$$(N_f)_* \pi_* C_{(i)} = n \widetilde{\pi}_* C'_{(i)}.$$

Then as in Corollary 2.3.3, we get a surjection

$$(N_f)_* : R_G(C; J) \twoheadrightarrow R_{\widetilde{G}}(C'; J').$$

Similarly, we obtain by Fourier transform a surjective morphism (see Corollary 2.3.5)

$$\overline{f}^* : R_G(C; J) \twoheadrightarrow R_{\widetilde{G}}(C'; J').$$

We now repeat the argument used in Proposition 2.3.6 :

$$j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J') = j_* \overline{f}^* R_G(C; J) = j_*(\iota_Y \circ j)^* R_G(C; J) = j_* j^* \iota_Y^* R_G(C; J) = \iota_Y^* R_G(C; J)$$

because $j_* j^* = \deg(j) \cdot \mathrm{Id}_{\mathrm{A}(Y)}$. Accordingly,

$$R_{\widetilde{G}}(C'; J') \simeq j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J') = \iota_Y^* R_G(C; J) = \mathrm{Taut}_Y\left(j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J')\right).$$

It remains to show the following equalities :

$$\mathrm{Taut}_Y\left(j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J')\right) = \psi_{Y*} R_G(C; J) = R_G(\psi_{Y*} C; Y).$$

As the bigraded $\mathbb{Q}$-algebra

$$\iota_Y^* R_G(C; J) = j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J')$$

contains the induced polarization $\eta = \iota_Y^* \theta$ and is stable under both products, the assertions (2) and (3) of Proposition 2.2.9 prove that

$$\iota_Y^* R_G(C; J) = \psi_{\eta *} \mathcal{F}_Y \psi_{\eta *} \mathcal{F}_Y\left(\iota_Y^* R_G(C; J)\right) \underset{Prop.2.2.9}{=} \psi_{\eta *} \mathcal{F}_Y\left(\iota_Y^* R_G(C; J)\right).$$

Let us get a more explicit description of the generators $\psi_{\eta *} \mathcal{F}_Y\left(\iota_Y^* R_G(C; J)\right)$. Using Proposition 2.2.2, Lemma 2.3.13 and the fact that ψ_Y commute with any $\pi \in \mathbb{Z}[G]$, the following equalities are satisfied :

$$\begin{aligned}
& \psi_{\eta *} \mathcal{F}_Y(\iota_Y^* \pi^* N^i(w)) \\
= \; & (-1)^{g-g'} \psi_{\eta *} \widehat{\iota_Y}_* \widehat{\pi}_* \mathcal{F}_J(N^i(w)) \\
= \; & (-1)^{g+i+(g-g')} \psi_{\eta *} \widehat{\iota_Y}_* \widehat{\pi}_* \varphi_{\Theta *} C_{(i-1)} \\
= \; & (-1)^{i-g'} \psi_{\eta *} \widehat{\iota_Y}_* \varphi_{\Theta *} \varphi_{\Theta *}^{-1} \widehat{\pi}_* \varphi_{\Theta *} C_{(i-1)} \\
= \; & (-1)^{i-g'} \psi_{\eta *} \widehat{\iota_Y}_* \varphi_{\Theta *} R(\pi)_* C_{(i-1)} \\
= \; & (-1)^{i-g'} (\psi_\eta \widehat{\iota_Y} \varphi_\Theta)_* R(\pi)_* C_{(i-1)} \\
= \; & (-1)^{i-g'} \psi_{Y*} R(\pi)_* C_{(i-1)} \\
= \; & (-1)^{i-g'} R(\pi)_* \psi_{Y*} C_{(i-1)}
\end{aligned}$$

where we recall that the Rosati involution R induces a surjection $R : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$ (see the proof of Theorem 2.4.2, Step 1). It follows that $\psi_{\eta *} \mathcal{F}_Y\left(\iota_Y^* R_G(C; J)\right)$ is generated as $\mathbb{Q}$-vector space by the products of the form

$$(\pi_{1*} \psi_{Y*} C_{(i_1-1)}) * \ldots * (\pi_{r*} \psi_{Y*} C_{(i_r-1)}).$$

Actually, using the argument of the proof of Lemma 2.4.4, we get that $\psi_{\eta *} \mathcal{F}_Y\left(\iota_Y^* R_G(C; J)\right)$ is the algebra (for the Pontryagin product) generated by all $\pi_* \psi_{Y*} C$ for polynomials $\pi \in \mathbb{Z}[G]$. Since the

Pontryagin product commutes with push-forwards and as we already noted that ψ_{Y*} (which is a polynomial in σ) commutes with each $\pi \in \mathbb{Z}[G]$, we immediately get the equalities

$$\mathrm{Taut}_Y\left(j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J')\right) = \iota_Y^* R_G(C; J) = \psi_{\eta*}\mathcal{F}_Y\left(\iota_Y^* R_G(C; J)\right) = \psi_{Y*} R_G(C; J).$$

Moreover this shows not only that

$$\mathrm{Taut}_Y\left(j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J')\right) \supset \mathrm{Taut}_Y\left(\{\pi_*\psi_{Y*}C \in \mathrm{A}(Y) \mid \pi \in \mathbb{Z}[G]\}\right) =: R_G(\psi_{Y*}C; Y)$$

but also the reverse inclusion. Indeed,

$$R_G(\psi_{Y*}C; Y) := \mathrm{Taut}_Y\left(\{\pi_*\psi_{Y*}C \in \mathrm{A}(Y) \mid \pi \in \mathbb{Z}[G]\}\right)$$

contains (by definition) the algebra for the Pontryagin product generated by all $\pi_*\psi_{Y*}C$, which equals $\mathrm{Taut}_Y\left(j_* R_{\widetilde{G}}(C'; J')\right)$. This completes the proof of Theorem 2.1.3. □

In fact, it is quite reasonable that we were able to deduce Theorem 2.1.3 from Theorem 2.1.1 since Y is closely related to the Jacobian $J(C') \simeq J(C/\langle\sigma\rangle)$ on which all technical issues have been solved previously. Also note that if we denote by $H \subset \mathrm{Aut}(C)$ the group generated by σ and G (in such a way that σ is central in H), then we have

$$\iota_Y^* R_H(C; J) = \iota_Y^* R_G(C; J).$$

Indeed, we have as subrings of $\mathrm{End}(Y)$

$$\mathbb{Z}[H] = \mathbb{Z}[G] \subset \mathrm{End}(Y)$$

since $Y = \mathrm{Ker}(\sigma - 1)^0$ (according to Lemma 2.3.11). This remark is not true in general in the next section in which we will work with cycles supported on $Z = \mathrm{Ker}(N_Y)^0$. Thus we will need to consider (in general) elements in $\mathbb{Z}[H]$ and not only in $\mathbb{Z}[G]$.

2.6 The tautological ring $R_H^\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$

We want to obtain a tautological ring in $\mathrm{A}(Z)$ as we just did in $\mathrm{A}(Y)$. The basic strategy remains identical to Theorem 2.4.2 except that we have to manage the fact that Z has no reason to be (isogenous to) a Jacobian. Nevertheless, considering the induced polarization on Z, also denoted by $\eta := \iota_Z^*\theta \in \mathrm{A}^1(Z)$, and noting that this polarization is closely related to canonical principal polarizations of $J = J(C)$ and $J' = J(C') \simeq J(C/\langle\sigma\rangle)$ (associated to $\theta \in \mathrm{A}^1(J)$ and $\theta' \in \mathrm{A}^1(J')$), we can solve this problem. As in the previous section, put $\psi_Z := \psi_\eta \circ \widehat{\iota_Z} \circ \varphi_\Theta$. We have $N_Z = \iota_Z \circ \psi_Z$ and these morphisms are polynomials in σ. Also consider a finite automorphism group $H \subset \mathrm{Aut}(C)$ such that $\sigma \in H$ is central.

2.6.1 Key-theorem

Theorem 2.6.1. *Let $S_H^\sigma = S_H^\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ be the $\mathbb{Q}$-subalgebra of $\mathrm{A}(Z)$ (for the intersection product) generated by the $\pi^*\iota_Z^* N^i(w)$ for $\pi \in \mathbb{Z}[H]$ and $i \in [\![1, \dim Z - 1]\!]$. Then S_H^σ is stable under the Pontryagin product.*

Remark 2.6.2. Note here the particular role played by σ because Z depends on σ and, in general, σ is non-trivial in $\mathrm{Aut}(Z)$.

Proof. As for Theorem 2.4.2, we decompose the proof in several steps.

Step 1 According to Theorem 2.1.1, the algebra S_H^σ is none other than the restriction $\iota_Z^* R_H(C;J)$ of the corresponding tautological ring on J. The strategy of the proof is again to use implication (4) $\Rightarrow$ (1) of Proposition 2.2.9 (note that Proposition 2.2.9 applies because $\eta := \iota_Z^*\theta = \iota_Z^* N^1(w) \in S_H^\sigma$). Thus we have to show that

$$\eta \cdot \psi_{\eta *}\mathcal{F}_Z(S_H^\sigma) \subset \psi_{\eta *}\mathcal{F}_Z(S_H^\sigma).$$

Using the same arguments as in the proof of Theorem 2.1.3, we get

$$\psi_{\eta *}\mathcal{F}_Z(\iota_Z^*\pi^* N^i(w)) = (-1)^{i-\dim Z} R(\pi)_* \psi_{Z*} C_{(i-1)}.$$

It follows that $\psi_{\eta *}\mathcal{F}_Z(S_H^\sigma)$ is generated as $\mathbb{Q}$-vector space by products of the form

$$(\pi_{1*}\psi_{Z*}C_{(i_1-1)}) * \ldots * (\pi_{r*}\psi_{Z*}C_{(i_r-1)})$$

hence by products of the form

$$(\pi_{1*}\psi_{Z*}C) * \ldots * (\pi_{r*}\psi_{Z*}C)$$

with nonzero $\pi_j \in \mathbb{Z}[H]$.

Step 2 For any nonzero element $\pi_j \in \mathbb{Z}[H]$ we study the class of the cycle

$$\eta \cdot \left[(\pi_{1*}\psi_{Z*}C) * \ldots * (\pi_{r*}\psi_{Z*}C)\right].$$

The same argument as in the proof of Theorem 2.4.2 shows that this cycle is a linear combination of elements of the form

$$u_* q_i^* f^{P*}\psi_Z^*\pi_i^*\eta \qquad \text{and} \qquad u_* q_{ij}^*(f^P \times f^P)^*(\psi_Z \times \psi_Z)^*(\pi_i \times \pi_j)^* l_{Z\times Z}$$

where

1. $l_{Z\times Z} := (1\times\varphi_\eta)^* l_{Z\times\hat{Z}} = m^*\eta - p^*\eta - q^*\eta \in \mathrm{A}^1(Z\times Z)$
2. the map $u : C^r \to Z$ is defined by the composition

$$u : C^r \xrightarrow{\Phi} J^r \xrightarrow{\Psi} Z^r \xrightarrow{K} Z^r \xrightarrow{m} Z$$

with $\Phi := f^P \times \ldots \times f^P$ (r times), $\Psi := \psi_Z \times \ldots \times \psi_Z$, $K := \pi_1 \times \ldots \times \pi_r$ and where $m : Z^r \to Z$ is induced by the multiplication on Z.

Step 3 The cycle $f^{P*}\psi_Z^*\pi_i^*\eta$ is a divisor class (modulo algebraic equivalence) on the curve C. Thus it is a multiple of the class of a point. Therefore, $f^{P*}\psi_Z^*\pi^*\eta$ is a multiple of the cycle $C \times \ldots \times C \times P \times C \times \ldots \times C$ (where the factor P is in ith position). So $u_* q_i^* f^{P*}\psi_Z^*\pi_i^*\eta$ is proportional to

$$(\pi_{1*}\psi_{Z*}C) * \ldots * (\widehat{\pi_{i*}\psi_{Z*}}C) * \ldots * (\pi_{r*}\psi_{Z*}C) \in \psi_{\eta *}\mathcal{F}_Z(S_H^\sigma).$$

Step 4 We now have to study the class

$$(f^P \times f^P)^*(\psi_Z \times \psi_Z)^*(\pi_i \times \pi_j)^* l_{Z\times Z}.$$

Since σ is central in H, we have

$$(\pi_i \times \pi_j)\circ(\psi_Z \times \psi_Z) = (\psi_Z \times \psi_Z)\circ(\pi_i \times \pi_j).$$

Thus we obtain

$$(f^P \times f^P)^*(\psi_Z \times \psi_Z)^*(\pi_i \times \pi_j)^* l_{Z\times Z} = (f^P \times f^P)^*(\pi_i \times \pi_j)^*(\psi_Z \times \psi_Z)^* l_{Z\times Z}.$$

The key-argument is the following (see [BL04, Proposition 12.3.4]) :

$$\begin{aligned} e(Y)^2\theta = e(Y)^*\theta &= N_Y^*\theta + N_Z^*\theta \\ &= \left(\frac{e(Y)}{n}\overline{f}N_f\right)^* \theta + (\iota_Z\psi_Z)^*\theta \\ &= \frac{e(Y)^2}{n^2}N_f^*\overline{f}^*\theta + \psi_Z^*\eta \\ &= \frac{e(Y)^2}{n}N_f^*\theta' + \psi_Z^*\eta. \end{aligned}$$

These different equalities are justified by facts recalled in Section 2.3.1 ; namely :

1. $N_Y + N_Z = e(Y)\cdot \mathrm{Id}_J$,
2. $\overline{f}N_f = \frac{n}{e(Y)}N_Y$,
3. $\overline{f}^*\theta = n\theta' \in \mathrm{A}^1(J')$.

In other words, we have

$$\psi_Z^*\eta = e(Y)^2\theta - \frac{e(Y)^2}{n}N_f^*\theta'.$$

Thus,

$$\begin{aligned} & (f^P \times f^P)^*(\pi_i \times \pi_j)^*(\psi_Z \times \psi_Z)^* l_{Z\times Z} \\ = \quad & e(Y)^2(f^P \times f^P)^*(\pi_i \times \pi_j)^* l_{J\times J} - \frac{e(Y)^2}{n}(f^P \times f^P)^*(\pi_i \times \pi_j)^*(N_f \times N_f)^* l_{J'\times J'}. \end{aligned}$$

Step 5 The cycle class $(f^P \times f^P)^*(\pi_i \times \pi_j)^* l_{J\times J}$ has already been studied in the proof of Theorem 2.4.2. It is a linear combination of

$$P \times C, \qquad C \times P \qquad \text{and} \qquad (1\times h)^*\Delta_C$$

for $h \in H$. It follows that $q_{ij}^*(f^P \times f^P)^*(\pi_i \times \pi_j)^* l_{J\times J}$ is a linear combination of

1. $q_{ij}^*(P \times C) = q_i^* P$,
2. $q_{ij}^*(C \times P) = q_j^* P$,
3. $q_{ij}^*(1\times h)^*\Delta_C$.

So $u_* q_{ij}^*(f^P \times f^P)^*(\pi_i \times \pi_j)^* l_{J\times J}$ is as usual a linear combination of

1. $(\pi_{1*}\psi_{Z*}C) * \ldots * (\widecheck{\pi_{i*}\psi_{Z*}}C) * \ldots * (\pi_{r*}\psi_{Z*}C) \in \psi_{\eta*}\mathcal{F}_Z(S_H^\sigma)$,
2. $(\pi_{1*}\psi_{Z*}C) * \ldots * (\widecheck{\pi_{j*}\psi_{Z*}}C) * \ldots * (\pi_{r*}\psi_{Z*}C) \in \psi_{\eta*}\mathcal{F}_Z(S_H^\sigma)$,
3. $(\pi_{1*}\psi_{Z*}C) * \ldots * (\widecheck{\pi_{i*}\psi_{Z*}}C) * \ldots * (\widecheck{\pi_{j*}\psi_{Z*}}C) * \ldots * (\pi_{r*}\psi_{Z*}C) * (\underbrace{\pi_i + \pi_j h^{-1}}_{=:\ \pi_{r+1}})_*\psi_{Z*}C$

   which also defines a cycle in $\psi_{\eta*}\mathcal{F}_Z(S_H^\sigma)$.

Step 6 We now study the class $(f^P \times f^P)^*(\pi_i \times \pi_j)^*(N_f \times N_f)^* l_{J' \times J'}$. As in [Ara12], we use the following equality :

$$N_f \circ f^P = f^{f(P)} \circ f.$$

Nevertheless, we first have to commute the map N_f with polynomials in $\mathbb{Z}[H]$. To be more precise, since by hypothesis σ is central in H, there exist for all $h \in H$ an automorphism $\widetilde{h} \in \mathrm{Aut}(C')$ such that $f \circ h = \widetilde{h} \circ f$. These automorphisms $\widetilde{h}$ extend to automorphisms of $J(C')$ which we still denote by $\widetilde{h}$. We consider the group $\widetilde{H}$ formed by these automorphisms.

Remark 2.6.3. Note that we have $\widetilde{\sigma} = 1_{J(C')}$.

As in Section 2.5, each $\pi \in \mathbb{Z}[H]$ induces an element $\widetilde{\pi} \in \mathbb{Z}[\widetilde{H}]$ and for all k, we have the relation

$$N_f \circ \pi_k = \widetilde{\pi_k} \circ N_f.$$

Thus we have

$$\begin{aligned} & (f^P \times f^P)^*(\pi_i \times \pi_j)^*(N_f \times N_f)^* l_{J' \times J'} \\ = \ & (f^P \times f^P)^*(N_f \times N_f)^*(\widetilde{\pi}_i \times \widetilde{\pi}_j)^* l_{J' \times J'} \\ = \ & (f \times f)^*(f^{f(P)} \times f^{f(P)})^*(\widetilde{\pi}_i \times \widetilde{\pi}_j)^* l_{J' \times J'}. \end{aligned}$$

Now the same argument as in Step 5 shows that this cycle class is a linear combination of

1. $(f \times f)^*(f(P) \times C') = n(P \times C)$ (because all points on C are algebraically equivalent and because $f : C \to C'$ is of degree n),
2. $(f \times f)^*(C' \times f(P)) = n(C \times P)$ for the same reason,
3. and finally, since each $\widetilde{h} \in \widetilde{H} \subset \mathrm{Aut}(C')$ is induced by some $h \in H \subset \mathrm{Aut}(C)$, we also have cycles of the form

$$\begin{aligned} (f \times f)^*(1 \times \widetilde{h})^* \Delta_{C'} &= (1 \times h)^*(f \times f)^* \Delta_{C'} \\ &= (1 \times h)^*(\Delta_C + (1 \times \sigma)^* \Delta_C + \ldots + (1 \times \sigma^{n-1})^* \Delta_C) \end{aligned}$$

   for some elements $h \in H$.

So far, we proved that $u_* q_{ij}^* (f^P \times f^P)^*(\pi_i \times \pi_j)^*(N_f \times N_f)^* l_{J' \times J'}$ is a linear combination of cycles all in $\psi_{\eta *}\mathcal{F}_Z(S_H^\sigma)$. To be precise, the classes we obtain are on the one hand of the form

$$(\pi_{1*}\psi_{Z*}C) * \ldots * (\widetilde{\pi_{i*}\psi_{Z*}}C) * \ldots * (\pi_{r*}\psi_{Z*}C)$$

and on the other, we get for $k \in [\![0, n-1]\!]$ classes of the form :

$$(\pi_{1*}\psi_{Z*}C) * \ldots * (\widetilde{\pi_{i*}\psi_{Z*}}C) * \ldots * (\widetilde{\pi_{j*}\psi_{Z*}}C) * \ldots * (\pi_{r*}\psi_{Z*}C) * (\pi_i + \pi_j h^{-1}\sigma^{-k})_* \psi_{Z*}C.$$

Conclusion All this implies that

$$\eta \cdot [(\pi_{1*}\psi_{Z*}C) * \ldots * (\pi_{r*}\psi_{Z*}C)] \in \psi_{\eta *}\mathcal{F}_Z(S_H^\sigma)$$

as (rational) linear combination of cycles which all belong to $\psi_{\eta *}\mathcal{F}_Z(S_H^\sigma)$. In other words, $\psi_{\eta *}\mathcal{F}_Z(S_H^\sigma)$ is stable by intersection with η so that Proposition 2.2.9 shows that S_H^σ is stable under Pontryagin product. This completes the proof. $\square$

2.6.2 Interpretation in terms of tautological rings

Theorem 2.6.1 immediately implies Theorem 2.1.4, just as we deduced Theorem 2.1.1 from Theorem 2.4.2. At the same time, we obtain Theorem 2.1.5. $\square$

We now consider some special cases of Theorem 2.1.4. We first consider the case where σ is of order 2. In that case

$$Z = \mathrm{Ker}(N_Y)^0 = \mathrm{Ker}(\Phi_2(\sigma))^0 = \mathrm{Ker}(1+\sigma)^0$$

and thus $\sigma_{|Z} = -1_Z$. This implies that the image of $\mathbb{Z}[H]$ in $\mathrm{End}(Z)$ does not depend on σ. Therefore, as in Section 2.5, σ does not need to belong to H : we just have to assume that each automorphism of H commutes with σ. That being said, Theorem 2.1.4 leads to

Theorem 2.6.4. *Let $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ be a double covering. In particular, this implies that $Z = \mathrm{Ker}(1+\sigma)^0$ and $\sigma_{|Z} = -1_Z$. We consider a finite group of automorphisms $G \subset \mathrm{Aut}(C)$ and we suppose that each $g \in G$ commutes with σ. Then the tautological ring $R_G^\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ is generated as $\mathbb{Q}$-subalgebra of $\mathrm{A}(Z)$*

1. *for the intersection product by all $\pi^*\iota_Z^*N^i(w) = \iota_Z^*\pi^*N^i(w)$,*
2. *for the Pontryagin product by all $\pi_*\psi_{Z*}C_{(i-1)} = \psi_{Z*}\pi_*C_{(i-1)}$*

with $\pi \in \mathbb{Z}[G]$ and $i \in [\![1, \dim Z - 1]\!]$ odd. As a result, we get the tautological ring :

$$R_G^\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \iota_Z^* R_G(C; J) = \psi_{Z*}R_G(C; J).$$

Note that in this theorem we can restrict to consider odd indices i because of

Lemma 2.6.5. *With the above notations and assumptions of Theorem 2.6.4, the cycle class of $\psi_{Z*}C \in \mathrm{A}(Z)$ is symmetric. Therefore, each $\psi_{Z*}C_{(2i+1)} = 0$ in $\mathrm{A}^{\dim Z-1}(Z)_{(2i+1)}$.*

Proof. The following diagram is commutative

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f^P"] \arrow[d, "\sigma"'] & J \arrow[r, "\psi_Z"] \arrow[d, "\sigma"] & Z \arrow[d, "-1"] \\ C \arrow[r, "f^{\sigma(P)}"'] & J \arrow[r, "\psi_Z"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Indeed commutativity of the left square follows from the definition of Albanese morphism. Whereas commutativity of the right hand square is justified by $\sigma_{|Z} = -1_Z$ (because $Z = \mathrm{Ker}(1+\sigma)^0$). A diagram chase gives

$$(-1)_*\psi_{Z*}f_*^P C = \psi_{Z*}f_*^{\sigma(P)}\sigma_* C.$$

Since $(-1)^* = (-1)_* : \mathrm{A}(Z) \to \mathrm{A}(Z)$ and $\sigma_* C = C$ (because $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$), we have

$$(-1)^*\psi_{Z*}f_*^P C = \psi_{Z*}f_*^{\sigma(P)} C.$$

But we are working modulo algebraic equivalence so that we can translate cycles without changing the cycle class :

$$f_*^{\sigma(P)} C = f_*^P C \in \mathrm{A}^{g-1}(J(C)).$$

Thus we have

$$(-1)^*\psi_{Z*}f_*^P C = \psi_{Z*}f_*^P C$$

which means that $\psi_{Z*}f_*^P C$ (which we denoted by $\psi_{Z*}C$) is symmetric. Therefore (see [Bea83, Corollary 1])

$$\psi_{Z*}f_*^P C \in \bigoplus_i \mathrm{A}^{\dim Z-1}(Z)_{(2i)}$$

and we have proven our lemma. $\square$

Also, if one only considers the automorphism σ of order 2 (that is if we are interested in the restriction of Beauville's tautological ring $R(C; J)$ to the subvariety $Z = \mathrm{Ker}(1+\sigma)^0$), we immediately deduce :

Corollary 2.6.6. *Let $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ be a double covering. Then the tautological ring*

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) := \mathrm{Taut}_Z\left(\{P(\sigma)_*\psi_{Z*}C \in \mathrm{A}(Z) \mid P \in \mathbb{Z}[X]\}\right)$$

is generated as $\mathbb{Q}$-subalgebra of $\mathrm{A}(Z)$

1. *for the intersection product by all $\iota_Z^* N^i(w)$,*
2. *for the Pontryagin product by all $\psi_{Z*}C_{(i-1)}$*

for all odd indices $i \in [\![1, \dim Z - 1]\!]$. Consequently, we get the tautological ring

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \iota_Z^* R(C; J) = \psi_{Z*}R(C; J).$$

This corollary provides a generalization of Arap's theorem [Ara12, Theorem 4]. His result deals with double coverings which are étale or ramified in exactly two points so that Z is in fact a Prym variety (and in particular principally polarized which simplifies the proofs of Propositions 2.2.5 and 2.2.9).

2.6.3 Some remarks about relations between generators in $\mathrm{A}(Y)$ and $\mathrm{A}(Z)$

Until now we studied tautological rings on J, Y and Z. These rings on Y and Z are obtained as restrictions of analogous tautological rings on J. In particular, we can deduce relations between generators in $\mathrm{A}(Y)$ or $\mathrm{A}(Z)$ by projecting known relations in $\mathrm{A}(J)$. By projecting we essentially mean applying ι_Y^* or ι_Z^* (resp. ψ_{Y*} or ψ_{Z*}) if one considers relations for the intersection product (resp. Pontryagin product).

We recall a theorem of Colombo and van Geemen [CvG93] which states that if C is a k-gonal curve, then $C_{(i)} = 0$ for all $i \geqslant k-1$. By Fourier duality, this is equivalent to $N^i(w) = 0$ for all $i \geqslant k$. This means that in all previous results involving classes $N^i(w)$ we could restrict ourself to indices $i \in [\![1, \mathrm{gon}(C) - 1]\!]$ where $\mathrm{gon}(C)$ is defined as the smallest positive integer d such that there exists a finite morphism of degree d from C to $\mathbb{P}^1$.

Thus we can obtain two corollaries as in Beauville [Bea04] for tautological ring $R(C; J)$ for hyperelliptic and trigonal curves. These corollaries describe the explicit $\mathbb{Q}$-algebra structure (for the intersection product) of tautological rings $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) \subset \mathrm{A}(Z)$ whence σ is of order 2 for k-gonal curves with $k \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Corollary 2.6.7. *Let $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ be a double covering. We suppose that C is hyperelliptic or trigonal and we denote by $\eta := \iota_Z^*\theta$ the induced polarization on Z. Also put $d := \dim Z$. Then*

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \mathbb{Q}[\eta]/(\eta^{d+1}).$$

Proof. If C is hyperelliptic, then the only nonzero $N^i(w)$ is $N^1(w) = \theta$. Thus $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ is generated by $\iota_Z^*\theta = \eta$. If C is trigonal, the only nonzero generators are $N^1(w) = \theta$ and $N^2(w)$. However, projections $\iota_Z^* N^{2i}(w)$ of $N^{2i}(w)$ in $\mathrm{A}(Z)$ are 0 in $\mathrm{A}(Z)$ (because the projection $\psi_{Z*}C = \psi_{Z*}C_{(0)} + \psi_{Z*}C_{(1)}$ is symmetric according to Lemma 2.6.5). □

Remark 2.6.8. Since on any curve of genus g there exists a g_d^1 with $d \leqslant \lfloor \frac{g+3}{2} \rfloor$ (see [ACGH85, Chapter 5, Theorem 1.1]), this corollary applies (in particular) to curves of genus $\leqslant 4$.

Corollary 2.6.9. *Let $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ be a double covering. We suppose that C is 4-gonal or 5-gonal. We put $\eta := \iota_Z^*\theta \in \mathrm{A}^1(Z)_{(0)}$ and $\mu := \iota_Z^* N^3(w) \in \mathrm{A}^3(Z)_{(2)}$. We continue to write $d := \dim Z$. Then $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z) \subset \mathrm{A}(Z)$ is the algebra generated by η and μ (for the intersection product). Moreover, there exists a positive integer $k \leqslant \frac{d}{5}$ such that*

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z) = \mathbb{Q}[\eta,\mu]/(\eta^{d+1}, \eta^{d-4}\mu, \dots, \eta^{d-5k+1}\mu^k, \mu^{k+1}).$$

Proof. The fact that $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ is generated by η and μ follows from previous theorems. We have to find all the relations between these generators. Note that we have $\eta^k\mu^s \in \mathrm{A}^p(Z)_{(s)}$ if and only if $k+3s=p$. Consequently $\eta^{p-3s}\mu^s$ is the only one of these monomials in

$$R^p_{(s)} := R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z) \cap \mathrm{A}^p(Z)_{(s)}.$$

We deduce that this monomial generates $R^p_{(s)}$ as $\mathbb{Q}$-vector space and that the only possible relations are also monomials. It remains to establish an exhaustive list of which monomials $\eta^r\mu^s$ are trivial. To do so, we are going to use the Fourier transform on Z to juggle with generators for the intersection product (the $\iota_Z^* N^i(w)$) and generators for the Pontryagin product (the $\psi_{Z*}C_{(i)}$).

As $\mathbb{Q}$-algebra for the Pontryagin product, $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ is generated by

$$\psi_{\eta*}\mathcal{F}_Z(\eta) = (-1)^{g+1}\psi_{Z*}C_{(0)} \qquad \text{and} \qquad \psi_{\eta*}\mathcal{F}_Z(\mu) = (-1)^{g+3}\psi_{Z*}C_{(2)},$$

hence by $\psi_{Z*}C_{(0)}$ and $\psi_{Z*}C_{(2)}$. It follows that $R^p_{(s)}$ is generated by a monomial of the form $\psi_{Z*}C_{(0)}^{*a} * \psi_{Z*}C_{(2)}^{*b}$. Precisely, since

$$\psi_{\eta*}\mathcal{F}_Z \mathrm{A}^r(Z)_{(s)} = \mathrm{A}^{d-r+s}(Z)_{(s)}$$

and since $d-r+s=p$ if and only if $r = d-p+s$, $R^p_{(s)}$ is generated by

$$\psi_{\eta*}\mathcal{F}_Z(\underbrace{\eta^{(d-p+s)-3s}\cdot\mu^s}_{\in R^{d-p+s}_{(s)}}),$$

that is the cycle class $\psi_{Z*}C_{(0)}^{*(d-p-2s)} * \psi_{Z*}C_{(2)}^{*s}$. In particular, $R^p_{(s)}$ is zero if $p+2s>d$, which can be rewritten as $(p-3s)+5s>d$. It follows that $\eta^r\mu^s = 0 \in R^p_{(s)}$ $(r = p-3s)$ if $r+5s>d$.

Let us stress that $\eta^r\mu^s$ and $\psi_{Z*}C_{(0)}^{*(d-r-5s)} * \psi_{Z*}C_{(2)}^{*s}$ both generate $R^{r+3s}_{(s)}$ (as $\mathbb{Q}$-vector space). This implies that

$$\eta^r\mu^s = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi_{Z*}C_{(0)}^{*(d-r-5s)} * \psi_{Z*}C_{(2)}^{*s} = 0.$$

Consider the smallest positive integer k such that $\mu^k \neq 0$ and $\mu^{k+1} = 0$. If $5k>d$, then $\mu^k = \eta^0\mu^k = 0$ according to this last inequality $(0+5k>d)$. Therefore, we must have $5k \leqslant d$. It remains to establish that $\eta^r\mu^s \neq 0$ for all positive integers r,s satisfying $r+5s \leqslant d$ and $s \leqslant k$. Suppose this is not true, that is to say suppose that $\eta^r\mu^s = 0$ for some integers r,s with $r+5s \leqslant d$ and $s \leqslant k$. Since $\eta^r\mu^s = 0$, the first part of the proof implies that $R^{r+3s}_{(s)} = 0$. So any generator of this subspace is trivial too. In particular, it means that $\psi_{Z*}C_{(0)}^{*(d-r-5s)} * \psi_{Z*}C_{(2)}^{*s} = 0$. Taking the Pontryagin product of $\psi_{Z*}C_{(0)}^{*(d-r-5s)} * \psi_{Z*}C_{(2)}^{*s}$ with $\psi_{Z*}C_{(0)}^{*r}$, we get $\psi_{Z*}C_{(0)}^{*(d-5s)} * \psi_{Z*}C_{(2)}^{*s} = 0$, or in other words $R^{3s}_{(s)} = 0$. As this space is generated (when adopting the point of view of the intersection product) by $\eta^0\mu^s = \mu^s$, this implies that $\mu^s = 0$, which is in contradiction with the minimality of k.

To conclude, the relations $\eta^r\mu^s = 0$ hold if and only if $s>k$ or $r+5s>d$. This first case $(s>k)$ provides the relation

$$\mu^{k+1} = 0$$

whereas the other relations have to be considered for $r \geqslant d - 5s + 1$ and $s \in \{0, \ldots, k\}$. These ones are obtained from

$$\eta^{d-5\times 0+1}\mu^0, \eta^{d-5\times 1+1}\mu^1, \ldots, \eta^{d-5k+1}\mu^k,$$

that is to say η^{d+1}, $\eta^{d-4}\mu, \ldots, \eta^{d-5k+1}\mu^k$. $\square$

Remark 2.6.10. This corollary applies (in particular) to curves of genus $g \leqslant 8$ because such curves are d-gonal with $d \leqslant \lfloor \frac{8+3}{2} \rfloor = 5$.

2.6.4 Outlooks

In general, finding a (complete) system of non-trivial relations between the $\pi^* N^i(w)$ is a hard task. Actually, it is already tough to study relations between the $N^i(w)$ (or the $C_{(i)}$) as shown by papers by Polishchuk, Colombo and van Geemen, and Herbaut for example. Apart some special cases, we do not know whether tautological rings defined in this article are of finite dimension over $\mathbb{Q}$. Also it would be interesting to lift these tautological rings modulo rational equivalence as it has been done for $R(C; J)$ by Polishchuk. Furthermore, there is another important matter which would deserve to be studied. We know that different automorphism groups may determine the same tautological ring (e.g. on a hyperelliptic curve C endowed with its hyperelliptic involution ι, consider the trivial group $\{\mathrm{Id}\}$ and $G = \{\mathrm{Id}, \iota\}$). However, we can wonder whether non-isomorphic group algebras $\mathbb{Z}[G_1]$ and $\mathbb{Z}[G_2]$ (seen as subrings of $\mathrm{End}(J)$) always determine non-isomorphic tautological rings $R_{G_1}(C; J)$ and $R_{G_2}(C; J)$.

Acknowledgements

This article is part of my thesis written at the University of Strasbourg. I would like to thank my PhD advisor Professor Rutger Noot for his continual support and numerous suggestions which contributed to the improvement of this paper.

CHAPITRE 3

Anneaux tautologiques sur les variétés de Prym généralisées associées aux revêtements Galoisiens n-cycliques par une courbe hyperelliptique

3.1 Introduction

3.1.1 Généralités

Soit C une courbe complexe projective lisse de genre $g = g(C) \geqslant 1$ munie d'un automorphisme $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ d'ordre fini $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle (Théorème 2.1.1) que l'on dispose d'un anneau tautologique

$$R_\sigma(C; J) := \mathrm{Taut}_J\left(\{P(\sigma)_* C \in \mathrm{A}(J) \mid P(\sigma) \in \mathbb{Z}[\sigma]\}\right)$$

engendré en tant que $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\mathrm{A}(J)$ pour le produit d'intersection (resp. produit de Pontryagin) par les $P(\sigma)^* N^i(w)$ (resp. par les $P(\sigma)_* C_{(i-1)}$) avec $P(\sigma) \in \mathbb{Z}[\sigma]$ et $i \in [\![1, g-1]\!]$.

Par ailleurs, considérons un revêtement Galoisien n-cyclique $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$. Là encore, on dispose d'un anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) \subset \mathrm{A}(Z)$ sur Z où $\psi_Z \in \mathrm{Hom}(J, Z)$ est un morphisme surjectif, polynomial en σ. La sous-variété abélienne $\iota_Z : Z \hookrightarrow J$ est d'exposant noté $e(Z) = e(Y)$ divisant n (cf. Sous-section 2.3.1) et la dimension de Z est encore notée $d := \dim Z = g - g'$. On considère tout particulièrement la polarisation induite $\eta := \iota_Z^* \theta \in \mathrm{A}^1(Z)_{(0)}$. On rappelle (Théorème 2.1.5) que l'anneau tautologique

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) := \mathrm{Taut}_Z\left(\{P(\sigma)_* \psi_{Z*} C \in \mathrm{A}(Z) \mid P(\sigma) \in \mathbb{Z}[\sigma]\}\right)$$

est engendré en tant que $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\mathrm{A}(Z)$ pour le produit d'intersection (resp. produit de Pontryagin) par les $P(\sigma)^* \iota_Z^* N^i(w) = \iota_Z^* P(\sigma)^* N^i(w)$ (resp. par les $P(\sigma)_* \psi_{Z*} C_{(i-1)} = \psi_{Z*} P(\sigma)_* C_{(i-1)}$) avec $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $i \in [\![1, d-1]\!]$ et qu'à ce titre, on a

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \iota_Z^* R_\sigma(C; J) = \psi_{Z*} R_\sigma(C; J).$$

Dans ce chapitre, on étudie ces $\mathbb{Q}$-algèbres lorsque C est hyperelliptique. Il s'agira de montrer que ces anneaux tautologiques sont alors de dimension finie, puis on étudiera plus en profondeur les relations entre les générateurs sur Z lorsque $n = p$ est un nombre premier. On terminera par des exemples explicites quand la variété Z est de petite dimension.

3.1.2 Exemples de courbes hyperelliptiques avec automorphismes

Signalons tout d'abord que les courbes hyperelliptiques avec automorphismes sont nombreuses. Les résultats de structure présentés dans la suite pour l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ s'appliquent donc à une multitude de courbes. Nous en donnons maintenant plusieurs exemples en nous appuyant sur l'article [Sch71] qui classifie justement de telles courbes.

Les exemples qui suivent se concentrent sur les automorphismes d'ordre premier $p > 2$. Remarquons que la dimension de Z, notée $d = g - g'$, dépend du genre de C et $C/\langle\sigma\rangle$ mais peut aussi être reliée au nombre $\nu \in \mathbb{N}$ de points fixes de σ. En effet, la formule de Hurwitz appliquée à la projection naturelle $C \to C/\langle\sigma\rangle$ fournit l'égalité

$$2g - 2 = p(2g' - 2) + \nu(p - 1),$$

soit

$$d = g - g' = (p - 1)\left(\frac{\nu}{2} - 1 + g'\right).$$

En particulier, ceci prouve déjà que $p - 1$ divise $2d$ ou encore que $\frac{p-1}{2}$ divise d.

Courbes de la forme $y^2 = x(x^p - a_1^p)(x^p - a_2^p)\cdots(x^p - a_{2i}^p)$

Dans l'article [Sch71] de John Schiller, les courbes hyperelliptiques complexes C admettant une équation de la forme $y^2 = x(x^p - a_1^p)(x^p - a_2^p)\cdots(x^p - a_{2i}^p)$ sont référencées sous le cas 1.1. Ce sont des courbes qui admettent un automorphisme σ d'ordre p donné par

$$\sigma(x, y) = (\zeta_p x, \sqrt{\zeta_p} y)$$

où ζ_p est une racine primitive p-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$. On a dans ce cas $g = i \cdot p$. On vérifie que la courbe quotient $C/\langle\sigma\rangle$ admet pour équation $\overline{y}^2 = \overline{x}(\overline{x} - a_1^p)(\overline{x} - a_2^p)\cdots(\overline{x} - a_{2i}^p)$ et est donc de genre $g' = i$. Ainsi, la variété de Prym généralisée Z déterminée par σ est de dimension $d = i(p - 1)$.

Courbes de la forme $y^2 = x(x^p - a_1^p)(x^p - a_2^p)\cdots(x^p - a_{2i+1}^p)$

Les courbes C admettant pour équation $y^2 = x(x^p - a_1^p)(x^p - a_2^p)\cdots(x^p - a_{2i+1}^p)$ sont référencées sous les cas 1.2 et 3.2 dans [Sch71]. Ces courbes admettent aussi l'automorphisme d'ordre p suivant :

$$\sigma(x, y) = (\zeta_p x, \sqrt{\zeta_p} y).$$

Une telle courbe C est alors de genre $g = i \cdot p + \frac{p-1}{2}$ tandis que la courbe $C/\langle\sigma\rangle$ dont l'équation est $\overline{y}^2 = \overline{x}(\overline{x} - a_1^p)(\overline{x} - a_2^p)\cdots(\overline{x} - a_{2i+1}^p)$ est quant à elle de genre $g' = i$. Par suite, la variété abélienne Z est de dimension $d = \left(i + \frac{1}{2}\right)(p - 1)$.

Courbes de la forme $y^2 = (x^p - a_1^p)(x^p - a_2^p)\cdots(x^p - a_{2i}^p)$

La troisième et dernière famille de courbes hyperelliptiques que l'on présente ici correspond au cas 3.1 de [Sch71]. Il s'agit des courbes qui peuvent être décrites par une équation de la forme $y^2 = (x^p - a_1^p)(x^p - a_2^p)\cdots(x^p - a_{2i}^p)$. Celles-ci admettent l'automorphisme d'ordre p suivant :

$$\sigma(x, y) = (\zeta_p x, y).$$

On montre alors que la courbe $C/\langle\sigma\rangle$ a pour équation $\overline{y}^2 = (\overline{x}-a_1^p)(\overline{x}-a_2^p)\cdots(\overline{x}-a_{2i}^p)$. En conclusion, on a $g = i \cdot p - 1$, $g' = i - 1$ et donc $d = i(p - 1)$.

Le cas particulier $C/\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{P}^1$

Terminons cette introduction en insistant sur les courbes hyperelliptiques C admettant un automorphisme σ d'ordre p premier tel que $C/\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{P}^1$. Pour de telles courbes, les revêtements Galoisiens p-cycliques $f : C \to C' \simeq \mathbb{P}^1$ sont nécessairement ramifiés (conséquence de la formule de Hurwitz). Ce cas correspond à la situation $Z = J$ ou de manière équivalente

$$\Phi_p(\sigma) = 1 + \sigma + \ldots + \sigma^{p-1} = 0_J$$

dans $\mathrm{End}(J)$. On a alors $d = g$, $g' = 0$, $e(Y) = e(Z) = 1$ et $\eta = \theta$.

Cette situation se produit pour les courbes de la forme $y^2 = (x^p - a^p)(x^p - b^p)$ [Sch71, Cas 3.1] mais aussi $y^2 = x(x^p - a^p)$ [Sch71, Cas 3.2]. Notons enfin que la condition $\Phi_p(\sigma) = 0_J$ peut se vérifier directement au niveau des différentielles. Détaillons cet argument pour une courbe C de la forme $y^2 = (x^p - a^p)(x^p - b^p)$. D'après [Koo91], une base des différentielles sur C est donnée par

$$\frac{dx}{y}, \quad \frac{xdx}{y}, \ldots, \frac{x^{g-1}dx}{y}.$$

Ces différentielles sont des vecteurs propres pour σ^* associés aux valeurs propres respectives $\zeta, \zeta^2, \ldots,$ $\zeta^g = \zeta^{p-1}$. En particulier, 1 n'est pas valeur propre et on a comme prévu la relation $\Phi_p(\sigma) = 0$.

3.2 Générateurs de $R_\sigma(C; J)$ et $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$

3.2.1 Réduction à un système fini de générateurs

Abordons à présent l'étude des générateurs des anneaux tautologiques $R_\sigma(C; J)$ et $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$, un automorphisme $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ d'ordre fini $n \in \mathbb{N}^*$ étant fixé. On commence par une généralisation du corollaire 2 de [Mum08, p58-59].

Lemme 3.2.1 - *Soient $k \geqslant 3$ un entier, X une variété, Y une variété abélienne et $f_1, \ldots, f_k : X \to Y$ des morphismes. Alors pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(Y)$, on a*

$$(f_1 + \ldots + f_k)^*\mathcal{L} \simeq \left(\bigotimes_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (f_i + f_j)^*\mathcal{L} \right) \otimes \left(\bigotimes_{1 \leqslant i \leqslant k} f_i^*\mathcal{L}^{-(k-2)} \right).$$

Démonstration. Ce résultat se démontre facilement par récurrence sur $k \geqslant 3$. □

Remarque 3.2.2 : Lorsque $k = 1, 2$, c'est-à-dire lorsque dans le formule pour $k = 3$ un ou deux des morphismes sont nuls, cette formule est triviale.

L'intérêt fondamental de ce lemme est de nous permettre de « casser » les polynômes (à coefficients entiers) en σ par lesquels on tire en arrière le cycle $N^1(w) = \theta$. Ceci nous amène au résultat suivant :

Proposition 3.2.3 - *Soit C une courbe hyperelliptique admettant un automorphisme σ d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Alors l'anneau tautologique $R_\sigma(C; J) \subset \mathrm{A}(J)$ est engendré en tant que $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\mathrm{A}(J)$ pour le produit d'intersection par les classes de cycles suivantes :*

1. *si n est pair :*

$$\gamma_i := (1 + \sigma^{2i})^*\theta = (\sigma^i + \sigma^{-i})^*\theta \quad \textit{et} \quad \tilde{\gamma}_i := (1 + \sigma^{2i+1})^*\theta \quad \textit{pour } i \in \left[\!\left[0, \frac{n}{2} - 1\right]\!\right],$$

2. si n est impair :

$$\gamma_i := (1+\sigma^{2i})^*\theta = (\sigma^i + \sigma^{-i})^*\theta \quad \textit{pour } i \in \left[\!\left[0, \frac{n-1}{2}\right]\!\right].$$

En particulier, $R_\sigma(C;J)$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Puisque C est hyperelliptique (c'est-à-dire 2-gonale), on a $C = C_{(0)} \in \mathrm{A}^1(J)$ de sorte que d'après le théorème 2.1.1 rappelé en introduction $R_\sigma(C;J)$ est engendré par les classes de cycles de la forme

$$(a_0 + a_1\sigma + \ldots + a_{n-1}\sigma^{n-1})^*\theta, \qquad \text{avec } \forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Le lemme 3.2.1 permet de casser ces cycles sous la forme d'une combinaison linéaire entière en les classes de cycles

$$(\sigma^k \pm \sigma^l)^*\theta = (\sigma^k \circ (1 \pm \sigma^{l-k}))^*\theta = (1 \pm \sigma^{l-k})^*\sigma^{k*}\theta = (1 \pm \sigma^{l-k})^*\theta \qquad \text{avec } (k,l) \in [\![0, n-1]\!]^2$$

car pour tout entier $u \in \mathbb{Z}$, $\sigma^{u*}\theta = \theta$. Par ailleurs, pour tout entier u, on a

$$\theta = (1 + \sigma^u - \sigma^u)^*\theta = (1+\sigma^u)^*\theta + (1-\sigma^u)^*\theta - 3\theta,$$

de sorte qu'on peut même ne considérer comme générateurs que les $(1+\sigma^{l-k})^*\theta$. Par suite, puisque θ est symétrique, on a lorsque $l - k = 2i$ est pair

$$\gamma_i := (1+\sigma^{2i})^*\theta = (\sigma^i \circ (\sigma^i + \sigma^{-i}))^*\theta = (\sigma^i + \sigma^{-i})^*\sigma^{i*}\theta = (\sigma^i + \sigma^{-i})^*\theta.$$

Ceci prouve l'assertion lorsque n est pair. Lorsque n est impair, on peut pousser le raisonnement un peu plus loin. En utilisant l'imparité de n et le fait que $\sigma^n = 1$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma_i} &:= (1+\sigma^{2i+1})^*\theta = (1+\sigma^{2i+n+1})^*\theta = (1+\sigma^{2\left(i+\frac{n+1}{2}\right)})^*\theta \\ &= (\sigma^{i+\frac{n+1}{2}} \circ (\sigma^{i+\frac{n+1}{2}} + \sigma^{-(i+\frac{n+1}{2})}))^*\theta \\ &= (\sigma^{i+\frac{n+1}{2}} + \sigma^{-(i+\frac{n+1}{2})})^*\sigma^{(i+\frac{n+1}{2})*}\theta = \gamma_{i+\frac{n+1}{2}}.\end{aligned}$$

Comme pour tout entier j on a la symétrie $\gamma_j = \gamma_{n-j} = \gamma_{-j}$, on obtient le résultat annoncé. □

Remarque 3.2.4 :

1. Par dualité de Fourier, on en déduit classiquement un système fini de générateurs de la $\mathbb{Q}$-algèbre $R_\sigma(C;J)$ pour le produit de Pontryagin.
2. On a un résultat analogue pour les anneaux tautologiques $R_G(C;J)$ où G est un groupe fini d'automorphismes de C. Dans ce cas, on se ramène à un système fini de générateurs de la forme $(1+g)^*\theta$ où $g \in G$.

En restreignant à Z l'anneau tautologique $R_\sigma(C;J) \subset \mathrm{A}(J)$, on obtient instantanément un résultat analogue pour l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z) \subset \mathrm{A}(Z)$.

Corollaire 3.2.5 - *Soit $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ un revêtement Galoisien n-cyclique. On suppose que C est hyperelliptique. Alors l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ est engendré en tant que $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\mathrm{A}(Z)$ pour le produit d'intersection par les classes de cycles suivantes :*

1. si n est pair :

$$(1+\sigma^i)^*\eta \quad \textit{pour } i \in [\![0, n-1]\!],$$

2. si n est impair :

$$(1+\sigma^{2i})^*\eta = (\sigma^i+\sigma^{-i})^*\eta \quad \textit{pour } i \in \left[\!\!\left[0, \frac{n-1}{2}\right]\!\!\right].$$

En particulier, $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 3.2.3 précédente : les générateurs (pour le produit d'intersection par exemple) de $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z) = \iota_Z^* R_\sigma(C;J)$ sont les restrictions à Z des générateurs de l'anneau tautologique ambiant $R_\sigma(C;J) \subset \mathrm{A}(J)$. □

3.2.2 Interprétation des cycles Γ_i et γ_i sur C^2 et involution de Rosati

Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ un automorphisme d'ordre p premier (éventuellement égal à 2). On rappelle que la polarisation (principale) $\theta \in \mathrm{A}^1(J)_{(0)}$ induit un isomorphisme entre le groupe de Néron-Severi rationnel $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(J) = \mathrm{A}^1(J)_{(0)}$ et l'ensemble des endomorphismes symétriques de J (pour l'involution de Rosati sur J définie par $R(f) := \varphi_\Theta^{-1} \circ \widehat{f} \circ \varphi_\Theta$) [Mum08, p190] :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(J) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{End}^{(s)}(J) = \{f \in \mathrm{End}^0(J) \mid R(f) = f\} \\ D & \mapsto & \varphi_\Theta^{-1} \circ \varphi_D. \end{array}$$

Suivant cette bijection, pour tout $P(\sigma) \in \mathbb{Z}[\sigma] \subset \mathrm{End}(J)$ la classe du diviseur $P(\sigma)^*\theta \in R_\sigma(C;J)$ correspond à l'élément symétrique $R(P(\sigma)) \circ P(\sigma)$. En effet, on vérifie sur les points que

$$\varphi_{P(\sigma)^*D} = \widehat{P(\sigma)} \circ \varphi_\Theta \circ P(\sigma).$$

En particulier, si $P(\sigma)$ est symétrique, alors $P(\sigma)^*\theta$ correspond à $P(\sigma)^2 \in \mathrm{End}^{(s)}(J)$.

On note $\Gamma_i \in \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(J)$ la classe de diviseur correspondant à l'endomorphisme symétrique $\sigma^i + \sigma^{-i}$ pour tout entier i. En particulier, on a $\Gamma_{n-i} = \Gamma_i$ et $\Gamma_0 = 2\theta$. De plus, on a $\gamma_i = \Gamma_{2i} + \Gamma_0$ car

$$(\sigma^i + \sigma^{-i})^2 = \sigma^{2i} + \sigma^{-2i} + 2_J \in \mathrm{End}(J).$$

Montrons à présent que les cycles Γ_i (et donc indirectement les γ_i) qui sont apparus naturellement à la section précédente sont tout aussi naturellement reliés aux graphes des automorphismes σ^i et σ^{-i}.

Interprétation géométrique des Γ_i et γ_i sur C^2

D'après [Mil08, Corollary III.6.3 p104], on a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(J) & \longrightarrow & \{\text{classes d'isomorphismes de correspondances divisorielles entre } (C,P) \text{ et } (C,P)\} \\ \psi & \mapsto & \mathcal{L}_\psi := (1 \times (\psi \circ f^P))^*\mathcal{M}^P \in \mathrm{Pic}(C \times C) \end{array}$$

entre l'ensemble des endomorphismes de J et l'ensemble des (classes d'équivalence linéaire de) faisceaux inversibles $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(C \times C)$ tels que $\mathcal{L}_{|C\times P} \simeq \mathcal{L}_{|P\times C} \simeq \mathcal{O}_C$; un point rationnel P étant toujours fixé sur C. De cette manière, l'endomorphisme symétrique $\sigma^i + \sigma^{-i} \in \mathrm{End}^{(s)}(J)$ détermine naturellement la correspondance

$$\mathcal{L}_{\sigma^i+\sigma^{-i}} := (1 \times ((\sigma^i + \sigma^{-i}) \circ f^P))^*\mathcal{M}^P \in \mathrm{Pic}(C \times C).$$

Notons $\mathcal{P}_{J\times J} := (1\times\varphi_\Theta)^*\mathcal{P}_{J\times\hat{J}}$ le faisceau de Poincaré sur $J\times J$. On a (cf. preuve du théorème 2.4.2) les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\sigma^i+\sigma^{-i}} &= (1\times f^P)^*(1\times(\sigma^i+\sigma^{-i}))^*\mathcal{M}^P\\ &\simeq (1\times f^P)^*(1\times(\sigma^i+\sigma^{-i}))^*(f^P\times 1)^*\mathcal{P}^\vee_{J\times J}\\ &\simeq (f^P\times f^P)^*(1\times(\sigma^i+\sigma^{-i}))^*\mathcal{P}^\vee_{J\times J}\\ &\simeq (1\times\sigma^i)^*\mathcal{L}^{\sigma^i(P)}\otimes(1\times\sigma^{-i})^*\mathcal{L}^{\sigma^{-i}(P)}\otimes q^*\mathcal{N}\end{aligned}$$

où $q : C\times C\to C$ est la seconde projection, $\mathcal{N}\in\mathrm{Pic}(C)$ et où pour tout point $Q\in C$, on a posé $\mathcal{L}^Q := \mathcal{L}_{C\times C}(\Delta_C - C\times Q - Q\times C)$.

Remarque 3.2.6 : Si σ admet un point fixe et si le point rationnel P fixé sur C est un tel point fixe, alors le fibré $\mathcal{N}$ est trivial. En effet, on a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{N} \simeq (q^*\mathcal{N})_{|P\times C} &\simeq \left(\mathcal{L}_{\sigma^i+\sigma^{-i}}\otimes(1\times\sigma^i)^*(\mathcal{L}^P)^\vee\otimes(1\times\sigma^{-i})^*(\mathcal{L}^P)^\vee\right)_{|P\times C}\\ &\simeq (\mathcal{L}_{\sigma^i+\sigma^{-i}})_{|P\times C}\otimes(1\times\sigma^i)^*(\mathcal{L}^P_{|P\times C})^\vee\otimes(1\times\sigma^{-i})^*(\mathcal{L}^P_{|P\times C})^\vee\\ &\simeq (\mathcal{L}_{\sigma^i+\sigma^{-i}})_{|P\times C}\simeq(1\times f^P)^*(1\times(\sigma^i+\sigma^{-i}))^*\left(\mathcal{M}^P_{|P\times J}\right)\simeq\mathcal{O}_C\end{aligned}$$

car $\mathcal{L}^P_{|P\times C}\simeq\mathcal{O}_C$ et parce qu'on a aussi grâce à la remarque 2.4.3 :

$$\mathcal{M}^P_{|P\times J}\simeq\left((f^P\times 1)^*\mathcal{P}^\vee_{J\times J}\right)_{|P\times J}\simeq\left(\mathcal{P}^\vee_{J\times J}\right)_{|f^P(P)\times J}\simeq\left(\mathcal{P}^\vee_{J\times J}\right)_{|0\times J}\simeq\mathcal{O}_J.$$

En passant aux classes d'équivalence algébrique de diviseurs sur C^2 et en notant Γ_{σ^k} les graphes des σ^k, on obtient

$$\begin{aligned}l_{\sigma^i+\sigma^{-i}} &= \Gamma^*_{\sigma^i}\Delta_C+\Gamma^*_{\sigma^{-i}}\Delta_C - 2(P\times C)-(2-\deg\mathcal{N})(C\times P)\\ &= \Gamma_{\sigma^i}+\Gamma_{\sigma^{-i}}-2(P\times C)-(2-\deg\mathcal{N})(C\times P)\in\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(C^2)\end{aligned}$$

car tous les points de C sont algébriquement équivalents entre eux.

Par ailleurs, on dispose d'une application $f^2 : C^2\to J$ qui est donnée sur les points par

$$(M,N)\mapsto\mathcal{L}_C(M+N-2P).$$

Il s'agit à présent d'étudier le lien entre $f^{2*}\Gamma_i$ et la correspondance divisorielle $\mathcal{L}_{\sigma^i+\sigma^{-i}}$. Essentiellement une correspondance divisorielle est une correspondance que l'on a trivialisée le long des fibres $C\times P$ et $P\times C$ (et en fait le long de n'importe quelle fibre $C\times Q$ et $Q\times C$ puisqu'on travaille modulo équivalence algébrique). Ainsi, on s'attend à ce que $f^{2*}\Gamma_i$ soit égal à la correspondance divisorielle associée aux $\sigma^i+\sigma^{-i}$, plus deux termes de bord (les parties à priori non triviales de $f^{2*}\Gamma_i$ le long $C\times P$ et $P\times C$). On a en fait la propriété suivante :

Proposition 3.2.7 - *Soit $D\in\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(J)$. On note $g=\varphi_\Theta^{-1}\circ\varphi_D\in\mathrm{End}^{(s)}(J)$ l'élément de $\mathrm{End}^{(s)}(J)$ associé à D. Alors*

$$f^{2*}\mathcal{L}_J(D)\simeq p^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes q^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes\mathcal{L}_g^\vee$$

Démonstration. En utilisant les formules rappelées dans la remarque 2.4.3, on a les isomorphismes de faisceaux inversibles suivants :

$$\begin{aligned}
f^{2*}\mathcal{L}_J(D) &= (m\circ(f^P\times f^P))^*\mathcal{L}_J(D)\simeq (f^P\times f^P)^*m^*\mathcal{L}_J(D)\\
&\simeq (f^P\times f^P)^*\left(p^*\mathcal{L}_J(D)\otimes q^*\mathcal{L}_J(D)\otimes(1\times\varphi_D)^*\mathcal{P}_{J\times\hat{J}}\right)\\
&\simeq p^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes q^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes\left[(1\times(\varphi_D f^P))^*(f^P\times 1)^*\mathcal{P}^\vee_{J\times\hat{J}}\right]^\vee\\
&\simeq p^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes q^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes\left[(1\times(\varphi_D f^P))^*(f^P\times 1)^*(1\times(-1))^*\mathcal{P}_{J\times\hat{J}}\right]^\vee\\
&\simeq p^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes q^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes\left[(1\times(\varphi_D f^P))^*(1\times(-1))^*(f^P\times 1)^*\mathcal{P}_{J\times\hat{J}}\right]^\vee\\
&\simeq p^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes q^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes\left[(1\times(\varphi_D f^P))^*(1\times(-1))^*(1\times f^{P\vee})^*\mathcal{M}^P\right]^\vee\\
&\simeq p^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes q^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes\left[(1\times(\varphi_D f^P))^*(1\times(-f^{P\vee}))^*\mathcal{M}^P\right]^\vee\\
&\simeq p^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes q^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes\left[(1\times(\varphi_\Theta^{-1}\varphi_D f^P))^*\mathcal{M}^P\right]^\vee\\
&\simeq p^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes q^*f^{P*}\mathcal{L}_J(D)\otimes\mathcal{L}_g^\vee;
\end{aligned}$$

ce qui est exactement le résultat annoncé. $\square$

Exemple 3.2.8 ($f^{2*}\Gamma_i$ et $f^{2*}\gamma_i$) **:** Pour $D=\Gamma_i$, on a dans $\mathrm{A}^1(C\times C)$

$$f^{2*}\Gamma_i = p^*f^{P*}\Gamma_i + q^*f^{P*}\Gamma_i - l_{\sigma^i+\sigma^{-i}}.$$

Notons aussi que $p^*f^{P*}\Gamma_i$ est un multiple de $P\times C$ (puisque $f^{P*}\Gamma_i$ est une classe d'équivalence algébrique de diviseurs sur la courbe C). De même $q^*f^{P*}\Gamma_i$ est un multiple de $C\times P$. En conclusion, les éléments $\Gamma_i\in\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(J)$ déterminent des éléments de $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(C^2)$, combinaisons linéaires entières des graphes Γ_{σ^i} et $\Gamma_{\sigma^{-i}}$ avec des composantes « de bord » $C\times P$ et $P\times C$. Il en est donc de même de $\gamma_i=\Gamma_{2i}+\Gamma_0$.

Plus généralement, toute classe de la forme $P(\sigma)^*\theta$ peut être reliée de cette façon aux graphes des σ^k apparaissant dans $P(\sigma)$.

Interprétation cohomologique des $\mathcal{L}_{\sigma^i+\sigma^{-i}}$ sur C^2

Terminons en donnant une interprétation cohomologique de ces classes de diviseurs dans $\mathrm{H}^2(C^2,\mathbb{Q})$. La décomposition de Künneth de $\mathrm{H}^2(C^2,\mathbb{Q})$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^2(C\times C,\mathbb{Q}) &\simeq \left[\mathrm{H}^2(C,\mathbb{Q})\otimes\mathrm{H}^0(C,\mathbb{Q})\right]\oplus\left[\mathrm{H}^1(C,\mathbb{Q})\otimes\mathrm{H}^1(C,\mathbb{Q})\right]\oplus\left[\mathrm{H}^0(C,\mathbb{Q})\otimes\mathrm{H}^2(C,\mathbb{Q})\right]\\
&=: \mathrm{H}^{(2,0)}(C,\mathbb{Q})\oplus\mathrm{H}^{(1,1)}(C,\mathbb{Q})\oplus\mathrm{H}^{(0,2)}(C,\mathbb{Q}),
\end{aligned}$$

où l'on a noté $\mathrm{H}^{(i,j)}(C,\mathbb{Q}):=\mathrm{H}^i(C,\mathbb{Q})\otimes\mathrm{H}^j(C,\mathbb{Q})$ (à ne pas confondre avec une structure de Hodge).

Remarquons le fait suivant. Puisque C est une courbe lisse, $\mathrm{H}^2(C,\mathbb{Q})\simeq\mathbb{Q}$: tout élément est un multiple de la classe d'un point $[P]$. En fait, on a déjà

$$\mathrm{CH}^1(C)/\sim_{alg}=\mathrm{CH}_0(C)/\sim_{alg}\simeq\mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, ce coefficient multiplicatif est égal au degré d'un représentant de la classe du diviseur sur C considéré. Si on identifie maintenant $\mathrm{H}^{(2,0)}(C,\mathbb{Q})$ avec un sous-espace de $\mathrm{H}^2(C\times C,\mathbb{Q})$, la composante d'une classe de diviseurs $[D]\in\mathrm{H}^2(C\times C,\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{H}^{(2,0)}(C,\mathbb{Q})$ est simplement la multiplicité d'intersection $D\cdot(C\times P)$, ou encore $\deg(D_{|C\times P})$.

Mais alors si $[D]=[\Gamma_{\sigma^i}]$ est la classe du graphe d'un automorphisme, cette multiplicité doit être égale à 1 : l'intersection $\Gamma_{\sigma^i}\cdot(C\times P)$ s'identifie au point schématique simple $(\sigma^{-i}(P),P)$

(intersection simple car σ^i est un automorphisme). Autrement dit, la composante du graphe $[\Gamma_{\sigma^i}]$ dans $\mathrm{H}^{(2,0)}(C,\mathbb{Q})$ est exactement $P \times C$, et de même celle dans $\mathrm{H}^{(0,2)}(C,\mathbb{Q})$ est juste $C \times P$.

Ce qui apparaît alors, c'est que la classe de cohomologie de la correspondance divisorielle $[\mathcal{L}_{\sigma^i+\sigma^{-i}}]$ dans $\mathrm{H}^2(C^2,\mathbb{Q})$ est exactement la composante principale des graphes $[\Gamma_{\sigma^i}]+[\Gamma_{\sigma^{-i}}]$ dans $\mathrm{H}^{(1,1)}(C,\mathbb{Q})$. Par conséquent, la composante principale de $[f^{2*}\Gamma_i]$ dans $\mathrm{H}^{(1,1)}(C,\mathbb{Q})$ est, au signe près, exactement la composante principale des graphes $[\Gamma_{\sigma^i}] + [\Gamma_{\sigma^{-i}}]$.

Terminons cette partie par un fait général reliant l'involution de Rosati pour les endomorphismes et l'involution usuelle dont on dispose au niveau des correspondances sur C^2.

3.2.3 Action de l'involution de Rosati au niveau des correspondances sur C^2

Une polarisation principale φ_Θ de J étant fixée, on dispose de l'involution de Rosati de $\mathrm{End}(J)$. Par ailleurs, on dispose d'une bijection

$$g \in \mathrm{End}(J) \longrightarrow \mathcal{L}_g \in \mathrm{Corr}_{div}(C^2)$$

qui envoie un endomorphisme g sur sa correspondance divisorielle associée. On dispose également sur $\mathrm{Corr}_{div}(C^2)$ d'une involution naturelle donnée par

$$\alpha \in \mathrm{Corr}_{div}(C^2) \mapsto h^*\alpha \in \mathrm{Corr}_{div}(C^2)$$

où $h : (x,y) \in C^2 \mapsto (y,x) \in C^2$. La proposition suivante établit un lien entre ces deux involutions.

Proposition 3.2.9 - *L'involution de Rosati de* $\mathrm{End}(J)$ *et l'involution induite par h sur* $\mathrm{Corr}_{div}(C^2)$ *sont compatibles avec la bijection $g \in \mathrm{End}(J) \mapsto \mathcal{L}_g \in \mathrm{Corr}_{div}(C^2)$. Autrement dit, pour tout endomorphisme $g \in \mathrm{End}(J)$, on a*

$$\mathcal{L}_{R(g)} \simeq h^*\mathcal{L}_g.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{R(g)} &:= (1 \times (\varphi_\Theta^{-1}\widehat{g}\varphi_\Theta f^P))^*\mathcal{M}^P \\
&\simeq (1 \times f^P)^*(1 \times \varphi_\Theta)^*(1 \times \widehat{g})^*(1 \times \varphi_\Theta^{-1})^*\mathcal{M}^P \\
&\simeq (1 \times f^P)^*(1 \times \varphi_\Theta)^*(1 \times \widehat{g})^*(f^P \times (-1))^*\mathcal{P}_{J\times\widehat{J}}
\end{aligned}$$

car $\varphi_\Theta^{-1} = -f^{P\vee}$ et $(1 \times \varphi_\Theta^{-1})^*\mathcal{M}^P \simeq (1 \times (-f^{P\vee}))^*\mathcal{M}^P \simeq (f^P \times (-1))^*\mathcal{P}_{J\times\widehat{J}}$ (cf. Section 1.3.1 ou encore Remarque 2.4.3). Ainsi,

$$\mathcal{L}_{R(g)} \simeq (f^P \times f^P)^*(1 \times \varphi_\Theta)^*(1 \times \widehat{g})^*\mathcal{P}_{J\times\widehat{J}}^\vee.$$

Comme $(1 \times \widehat{g})^*\mathcal{P}_{J\times\widehat{J}} \simeq (g \times 1)^*\mathcal{P}_{J\times\widehat{J}}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{R(g)} &\simeq (f^P \times f^P)^*(1 \times \varphi_\Theta)^*(g \times 1)^*\mathcal{P}_{J\times\widehat{J}}^\vee \\
&\simeq ((gf^P) \times f^P)^*(1 \times \varphi_\Theta)^*\mathcal{P}_{J\times\widehat{J}}^\vee \\
&\simeq ((gf^P) \times f^P)^*\mathcal{P}_{J\times J}^\vee \\
&\simeq ((gf^P) \times 1)^*(1 \times f^P)^*\mathcal{P}_{J\times J}^\vee
\end{aligned}$$

où $\mathcal{P}_{J\times J}^\vee := (1 \times \varphi_\Theta)^*\mathcal{P}_{J\times\widehat{J}}^\vee = m^*\mathcal{L}_J(\Theta)^\vee \otimes p^*\mathcal{L}_J(\Theta) \otimes q^*\mathcal{L}_J(\Theta)$. Enfin, de l'isomorphisme

$$\mathcal{M}^P \simeq (f^P \times (-1))^*\mathcal{P}_{J\times J} \simeq (f^P \times 1)^*\mathcal{P}_{J\times J}^\vee,$$

il vient

$$h^*\mathcal{M}^P \simeq h^*(f^P \times 1)^*\mathcal{P}^\vee_{J\times J} \simeq (1\times f^P)^*h^*\mathcal{P}^\vee_{J\times J} \simeq (1\times f^P)^*\mathcal{P}^\vee_{J\times J}$$

(car on a clairement $h^*\mathcal{P}_{J\times J} \simeq \mathcal{P}_{J\times J}$ de par la définition de $\mathcal{P}_{J\times J}$). On conclut donc que

$$\mathcal{L}_{R(g)} \simeq ((gf^P)\times 1)^*h^*\mathcal{M}^P \simeq h^*(1\times (gf^P))^*\mathcal{M}^P \simeq h^*\mathcal{L}_g,$$

ce qui démontre la proposition. □

Corollaire 3.2.10 - *Un endomorphisme $g \in \mathrm{End}(J)$ est symétrique si et seulement si la correspondance divisorielle $\mathcal{L}_g \in \mathrm{Corr}_{div}(C^2)$ est invariante sous l'action de h^*.*

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition précédente. □

Conséquence 3.2.11 : On a vu dans la sous-partie précédente que

$$\mathcal{L}_{\sigma^i+\sigma^{-i}} \simeq (1\times\sigma^i)^*\mathcal{L}^{\sigma^i(P)} \otimes (1\times\sigma^{-i})^*\mathcal{L}^{\sigma^{-i}(P)} \otimes q^*\mathcal{N}$$

où $q : C\times C \to C$ est la seconde projection et $\mathcal{N} \in \mathrm{Pic}(C)$ est un certain fibré sur C. Puisque $\sigma^i + \sigma^{-i}$ est symétrique, ce dernier corollaire montre qu'on a même $\mathcal{N} \in \mathrm{Pic}^0(C)$. En effet, on a

$$\mathcal{L}_{\sigma^i+\sigma^{-i}} = \mathcal{L}_{R(\sigma^i+\sigma^{-1})} = h^*\mathcal{L}_{\sigma^i+\sigma^{-i}},$$

ce qui signifie en termes de classes d'équivalence algébrique de diviseurs sur C^2 :

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{\sigma^i} + \Gamma_{\sigma^{-i}} - 2(P\times C) - (2-\deg\mathcal{N})(C\times P)\\
&= l_{\sigma^i+\sigma^{-i}} = h^*l_{\sigma^i+\sigma^{-i}}\\
&= h^*\Gamma_{\sigma^i} + h^*\Gamma_{\sigma^{-i}} - 2h^*(P\times C) - (2-\deg\mathcal{N})h^*(C\times P)\\
&= \Gamma_{\sigma^{-i}} + \Gamma_{\sigma^i} - 2(C\times P) - (2-\deg\mathcal{N})(P\times C);
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\deg\mathcal{N}\big(C\times P - P\times C\big) = 0 \in \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(C^2)$. Comme $C\times P$ et $P\times C$ ne déterminent pas la même classe modulo équivalence algébrique (car ce n'est déjà pas le cas modulo équivalence homologique), on en déduit le résultat annoncé.

Maintenant que l'on comprend un peu mieux le caractère naturel de ces cycles Γ_i et γ_i sur J, abordons la partie centrale de ce chapitre. On étudie dans la suite les relations entre les générateurs de $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ lorsque σ est un automorphisme d'ordre premier. Comme on va le voir, il est possible d'être très précis dans l'étude de ces relations dans $\mathrm{A}(Z)$.

3.3 Générateurs et relations dans $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ lorsque σ est d'ordre p est premier

On suppose dans toute cette partie que σ est d'ordre $n = p$ un nombre premier et on notera dans tout ce qui suit $d := \dim Z = g - g'$. L'objectif de cette longue partie est d'étudier les relations entre les $\iota_Z^*\gamma_i$. On donnera régulièrement des applications numériques des résultats obtenus.

3.3.1 Premiers résultats : les cas $p = 2$ et $p = 3$

Le cas le plus simple : $p = 2$

Le cas $p = 2$ a déjà été traité (Corollary 2.6.7). Par esprit de synthèse, rappelons tout de même brièvement ce résultat.

Proposition 3.3.1 - *Soit $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ un revêtement double. On suppose que C est hyperelliptique ou trigonale et on note $\eta := \iota_Z^*\theta$ la polarisation induite sur Z. Notons aussi $d := \dim Z$. Alors*

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \mathbb{Q}[\eta]/(\eta^{d+1}).$$

En particulier,

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \iota_Z^* R(C; J) = \psi_{Z*}R(C; J).$$

Les classes de cycle Ω_i et ω_i : une relation linéaire

Maintenant que le cas $p = 2$ est traité, on supposera dans tout ce qui suit que σ est un automorphisme d'ordre $p \geqslant 3$ premier. En particulier, p est impair. Comme avant, la polarisation $\eta := \iota_Z^*\theta \in \mathrm{A}^1(Z)_{(0)}$ induit un isomorphisme entre le groupe de Néron-Severi rationnel $\mathrm{NS}_\mathbb{Q}(Z) = \mathrm{A}^1(Z)_{(0)}$ et l'ensemble des endomorphismes symétriques de Z (pour l'involution de Rosati sur Z définie par $R(f) := \varphi_\eta^{-1} \circ \widehat{f} \circ \varphi_\eta$ [Mum08, p190] :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{NS}_\mathbb{Q}(Z) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{End}^{(s)}(Z) = \{f \in \mathrm{End}^0(Z) \mid R(f) = f\} \\ D & \mapsto & \varphi_\eta^{-1} \circ \varphi_D. \end{array}$$

Comme dans le cas des Jacobiennes, pour tout $P(\sigma) \in \mathbb{Z}[\sigma] \subset \mathrm{End}(Z)$ la classe du diviseur $P(\sigma)^*\eta \in R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ correspond à l'élément symétrique $R(P(\sigma)) \circ P(\sigma)$ ou plus simplement $P(\sigma)^2$ si $P(\sigma)$ est symétrique.

Par analogie avec la section précédente, on note $\Omega_i \in \mathrm{NS}_\mathbb{Q}(Z)$ la classe de diviseur correspondant à l'endomorphisme symétrique $\sigma^i + \sigma^{-i} \in \mathrm{End}(Z)$ pour tout entier i. En particulier, on a $\Omega_{n-i} = \Omega_i$ et $\Omega_0 = 2\eta$.

Proposition 3.3.2 - *Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ d'ordre $p > 2$ premier. Alors on a la relation suivante dans $\mathrm{A}^1(Z)$*

$$\frac{1}{2}\Omega_0 + \Omega_1 + \ldots + \Omega_{\frac{p-1}{2}} = 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$\Omega_1 + \ldots + \Omega_{\frac{p-1}{2}} = -\eta.$$

Démonstration. On commence par utiliser les faits rappelés dans la sous-section 2.3.1 ainsi que le lemme 2.3.11 afin de justifier que $Z = \mathrm{Ker}(\Phi_p(\sigma))^0$, c'est-à-dire qu'en tant qu'endomorphisme de Z on a l'égalité

$$1 + \sigma + \ldots + \sigma^{p-1} = 0_Z \in \mathrm{End}(Z).$$

Puisque p est premier, $e(Y)$ est égal à 1 ou p (car $e(Y)$ divise p). Le premier cas $e(Y) = 1$ ne se produit que lorsque $Y = \mathrm{Ker}(\sigma - 1)^0 = J$, ce qui est exclu car σ est d'ordre $p > 1$; ou lorsque

$$Y = \mathrm{Im}(\overline{f}N_f) = \mathrm{Im}(\Phi_p(\sigma)) = \{0\},$$

et alors $Z = J = \mathrm{Ker}(\Phi_p(\sigma))^0$. Le second cas $e(Y) = p$ implique directement $N_Y = \overline{f}N_f = \Phi_p(\sigma)$ et là encore $Z = \mathrm{Ker}(N_Y)^0 = \mathrm{Ker}(\Phi_p(\sigma))^0$.

On obtient ensuite le résultat en rassemblant les endomorphismes symétriques $\sigma^i + \sigma^{p-i} = \sigma^i + \sigma^{-i}$ dans la relation polynomiale $1 + \sigma + \ldots + \sigma^{p-1} = 0_Z$ et en suivant l'isomorphisme de groupes $\mathrm{NS}_\mathbb{Q}(Z) \simeq \mathrm{End}^{(s)}(Z)$. A noter que l'on utilise ici que p est impair. $\square$

A présent, on pose $\omega_0 = \eta$ et pour $i \in [\![1, p-1]\!]$ (c'est-à-dire pour p ne divisant pas i),

$$\omega_i = (\sigma^i + \sigma^{-i})^*\eta = \Omega_{2i} + \Omega_0 \in \mathrm{NS}_\mathbb{Q}(Z)$$

car $(\sigma^i + \sigma^{-i})^*\eta$ correspond à l'endomorphisme symétrique $(\sigma^i + \sigma^{-i})^2 = \sigma^{2i} + \sigma^{-2i} + 2_Z$.

Remarque 3.3.3 :

1. Attention ici au changement de notation par rapport aux parties précédentes : on n'a pas défini ω_0 comme étant
$$(\sigma^0 + \sigma^{-0})^*\eta = 2^*\eta = 4\eta$$
pour éviter d'avoir un coefficient 4 dans les futures relations aux dénominateurs.
2. $\omega_0 = \frac{1}{4}\iota_Z^*\gamma_0$ et pour $i \in [\![1, p-1]\!]$, $\omega_i = \iota_Z^*\gamma_i$.

La relation entre les Ω_i obtenue dans la proposition 3.3.2 se traduit immédiatement en termes de ω_i.

Lemme 3.3.4 - *Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ d'ordre $p > 2$ premier. Alors on a la relation suivante dans $\mathrm{A}^1(Z)$*
$$(2-p)\,\omega_0 + \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \omega_i = 0.$$

Démonstration. Il s'agit d'une réécriture de la proposition 3.3.2 en termes de ω_i :
$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\Omega_0 + \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \Omega_i = 0 \\
\iff \quad & \left(\frac{1}{2} - \frac{p-1}{2}\right)\Omega_0 + (\Omega_1 + \Omega_0) + (\Omega_2 + \Omega_0) + (\Omega_3 + \Omega_0) + (\Omega_4 + \Omega_0) + \ldots = 0 \\
\iff \quad & \frac{2-p}{2}\Omega_0 + (\Omega_{p-1} + \Omega_0) + \omega_1 + (\Omega_{p-3} + \Omega_0) + \omega_2 + \ldots = 0 \\
\iff \quad & (2-p)\omega_0 + \omega_{\frac{p-1}{2}} + \omega_1 + \omega_{\frac{p-3}{2}} + \omega_2 + \ldots = 0 \\
\iff \quad & (2-p)\omega_0 + \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \omega_i = 0.
\end{aligned}$$

□

Ce lemme nous permet ainsi de préciser le corollaire 3.2.5 en réduisant de un cycle le système de générateurs connu jusque là pour l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$:

Proposition 3.3.5 - *Soient C hyperelliptique de genre $g \geqslant 1$ et $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ d'ordre $p > 2$ premier. L'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) \subset \mathrm{A}(Z)$ est engendré pour le produit d'intersection par les ω_i pour $i \in [\![0, \frac{p-3}{2}]\!]$.*

Démonstration. D'après le corollaire 3.2.5, $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est engendré par $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\frac{p-1}{2}}$. Le lemme 3.3.4 précédent montre que cette algèbre est déjà engendrée par $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\frac{p-3}{2}}$. □

Le cas $p = 3$

Proposition 3.3.6 - *Soit $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ un revêtement Galoisien cyclique de degré 3 avec C hyperelliptique. On note $\eta := \iota_Z^*\theta \in \mathrm{A}^1(Z)_{(0)}$ et $d := \dim Z$. Alors*
$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \mathbb{Q}[\eta]/(\eta^{d+1}).$$

En particulier,
$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \iota_Z^* R(C; J) = \psi_{Z*}R(C; J).$$

Démonstration. Puisque $p = 3$, la proposition précédente montre que $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est engendré par $\omega_0 = \eta$. Le résultat est alors immédiat. $\square$

En d'autres mots, si $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ est un revêtement Galoisien double ou triple avec C hyperelliptique, l'algèbre $\iota_Z^* R(C; J)$ est déjà stable par les pull-backs et push-forwards par $\mathbb{Z}[\sigma]$. Ainsi, pour un automorphisme d'ordre 2 ou 3, on n'élargit pas l'anneau $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \iota_Z^* R(C; J) \subset \mathrm{A}(Z)$ en faisant agir les polynômes en σ par pull-back et push-forward. La situation est beaucoup plus complexe pour les $p > 3$ premiers ; ce que l'on étudie dans la suite.

3.3.2 Transformée de Fourier des ω_i dans $\mathrm{A}(Z)$

Avant d'étudier le cas des automorphismes d'ordre premier supérieur, faisons une parenthèse sur la transformée de Fourier des ω_i ; ceci afin de mieux comprendre ces classes de diviseurs.

Préliminaires techniques

On commence par quelques généralités concernant les bien connus polynômes de Tchebychev.

Définition 3.3.7 (Polynômes de Tchebychev) On définit les *polynômes de Tchebychev* de première espèce pour $n \in \mathbb{N}$ par récurrence :

$$T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X, \qquad \forall n \geqslant 2,\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

On peut montrer que $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ est le polynôme de degré n vérifiant

$$\forall \varphi \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\varphi)) = \cos(n\varphi).$$

Définition 3.3.8 On définit de la même manière pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme

$$T_n'(X) := 2T_n\left(\frac{X}{2}\right).$$

Les polynômes $T_n'(X)$ vérifient la relation de récurrence

$$T_0'(X) = 2, \quad T_1'(X) = X, \qquad \forall n \geqslant 2,\ T_{n+2}'(X) = XT_{n+1}'(X) - T_n'(X).$$

et pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$,

$$T_n'(2\cos\varphi) = 2T_n(\cos\varphi) = 2\cos(n\varphi).$$

Remarque 3.3.9 : On prendra garde à ne pas confondre les polynômes T_n' avec la dérivé formelle des polynômes T_n.

Lemme 3.3.10 - *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $T_{2n}'(0) = 2(-1)^n$ et $T_{2n+1}'(0) = 0$.*

Démonstration. Les formules sont vraies pour T_0' et T_1'. Le résultat découle alors de la formule de récurrence : $T_{n+2}'(0) = -T_n'(0)$. $\square$

Corollaire 3.3.11 - *Soit $p \geqslant 1$ un entier impair.*

$$1 + \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} T_i'(0) = \begin{cases} 1 & si\ p \equiv 1 \mod 8\ ou\ p \equiv 3 \mod 8, \\ -1 & si\ p \equiv -1 \mod 8\ ou\ p \equiv -3 \mod 8. \end{cases}$$

Démonstration. Si $p \equiv 1 \mod 8$, p est de la forme $8k+1$ pour un certain entier k. Par conséquent, $\frac{p-1}{2} = 4k$ est divisible par 4 et alors

$$1 + \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} T_i'(0) = 1 + \sum_{i=1}^{4k} T_i'(0) = 1 + \sum_{i=1}^{2k} T_{2i}'(0) = 1 + 2\sum_{i=1}^{2k}(-1)^i = 1 + 2 \times 0 = 1.$$

Les autres cas sont analogues. □

Ceci nous amène au lemme suivant :

Lemme 3.3.12 - *Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ d'ordre $p > 2$ premier. Soit $j \in [\![1, p-1]\!]$. Alors $\sigma^j + \sigma^{-j} \in \mathrm{Aut}(Z)$. Plus précisément, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ à coefficients positifs, indépendant de j et que l'on peut calculer explicitement tel que*

$$(\sigma^j + \sigma^{-j})^{-1} = Q(\sigma^j) \in \mathrm{Aut}(Z) \subset \mathrm{End}(Z).$$

Démonstration. Si p est premier et p ne divise pas j, alors σ^j vérifie aussi la relation $1 + \sigma^j + \ldots + \sigma^{j(p-1)} = 0_Z$ dans $\mathrm{End}(Z)$. Par suite, il suffit de montrer le résultat pour $j = 1$; ce que l'on fait à présent.

Puisque dans $\mathrm{End}(Z)$, on a $1 + \sigma + \ldots + \sigma^{p-1} = 0$, on peut identifier $\mathbb{Q}[\zeta_p] \simeq \mathbb{Q}[\sigma] \subset \mathrm{End}^0(Z)$ (où $\zeta_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$). Autrement dit, $\mathbb{Q}[\sigma]$ est un corps. En particulier, $\sigma + \sigma^{-1}$ est inversible dans $\mathrm{End}^0(Z)$: c'est une isogénie et il s'agit de voir que $(\sigma + \sigma^{-1})^{-1}$ est déjà défini dans $\mathrm{End}(Z)$. Dans la suite de la démonstration, on fera indifféremment référence à σ ou ζ_p.

Remarquons que $(\sigma + \sigma^{-1})^{-1} \in \mathrm{End}^0(Z)$ peut se calculer explicitement. L'idée est de déterminer le polynôme minimal de $\sigma + \sigma^{-1}$ afin de pouvoir exprimer son inverse comme un polynôme en σ.

Notons $\Phi_p(X) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{p-1}$ le p-ième polynôme cyclotomique. C'est le polynôme minimal de $\sigma \in \mathrm{End}^0(Z)$ sur $\mathbb{Q}$. De plus,

$$[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = \deg(\Phi_p) = p - 1 \qquad \text{et} \qquad [\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})] = 2$$

de sorte que $[\mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1}) : \mathbb{Q}] = \frac{p-1}{2}$. Dans ce cas, le polynôme minimal de $\zeta_p + \zeta_p^{-1}$ (sur $\mathbb{Q}$) est de degré $\frac{p-1}{2}$ (à ce moment là on utilise l'hypothèse $p > 2$). On constate par ailleurs que l'on peut écrire

$$\Phi_p(X) = X^{\frac{p-1}{2}} P\left(X + \frac{1}{X}\right),$$

où $P \in \mathbb{Q}[X]$ est un polynôme unitaire avec $\deg(P) = \frac{p-1}{2}$. Comme $\Phi_p(\zeta_p) = 0$ et $\zeta_p^{\frac{p-1}{2}} \neq 0$, on en déduit que $P\left(X + \frac{1}{X}\right)$ est annulateur de ζ_p, ou encore P est annulateur de $\zeta_p + \zeta_p^{-1}$. Autrement dit, P n'est rien d'autre que le polynôme minimal de $\zeta_p + \zeta_p^{-1}$ (ou $\sigma + \sigma^{-1}$). Notons que ce polynôme minimal est aussi celui de $\zeta_p^j + \zeta_p^{-j}$ (ou encore celui de $\sigma^j + \sigma^{-j}$) : il ne dépend pas de j.

La relation précédente se réécrit,

$$P\left(X + \frac{1}{X}\right) = \frac{\Phi_p(X)}{X^{\frac{p-1}{2}}} = 1 + \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(X^i + \frac{1}{X^i}\right).$$

Or pour $n \geqslant 1$, $X^n + X^{-n}$ est un polynôme à coefficients entiers en $X + \frac{1}{X}$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{in\varphi} + \frac{1}{e^{in\varphi}} = 2\cos(n\varphi) = T_n'(2\cos(\varphi)) = T_n'\left(e^{i\varphi} + \frac{1}{e^{i\varphi}}\right),$$

de sorte que

$$X^n + \frac{1}{X^n} = T'_n\left(X + \frac{1}{X}\right) \in \mathbb{Z}\left[X + X^{-1}\right].$$

Ainsi,

$$P\left(X + \frac{1}{X}\right) = 1 + \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} T'_i\left(X + \frac{1}{X}\right)$$

ou encore

$$P\left(X\right) = 1 + \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} T'_i\left(X\right) \in \mathbb{Z}[X].$$

Comme $P(0) = \pm 1$ d'après le corollaire 3.3.11, il s'ensuit qu'on peut toujours écrire

$$\frac{1}{P(0)}P(X) = 1 - XQ(X),$$

avec $Q \in \mathbb{Z}[X]$ non nul de degré $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = \frac{p-3}{2}$. Finalement,

$$0_Z = \frac{1}{P(0)}P(\sigma + \sigma^{-1}) = 1_Z - (\sigma + \sigma^{-1})Q(\sigma + \sigma^{-1})$$

et

$$(\sigma + \sigma^{-1})^{-1} = Q(\sigma + \sigma^{-1}) \in \mathrm{End}(Z).$$

Puisque $\sigma^{-1} = \sigma^{p-1}$, l'inverse de $\sigma + \sigma^{-1}$ dans $\mathrm{End}(Z)$ est donné par $Q_2(\sigma) \in \mathbb{Z}[\sigma]$ où

$$Q_2(X) := Q(X + X^{p-1}) \in \mathbb{Z}[X].$$

On a également pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$,

$$-\sigma^i = 1 + \sigma + \ldots + \sigma^{i-1} + \sigma^{i+1} + \ldots + \sigma^{p-1} \in \mathrm{End}(Z),$$

ce qui nous autorise à supposer que les coefficients de Q_2 sont dans $\mathbb{N}$. En effet, si un (ou plusieurs) des coefficients de Q_2, disons a_i, est négatif, il suffit de changer Q_2 en le polynôme

$$Q_2(X) - a_i\Phi_p(X)$$

ce qui revient à remplacer le terme a_iX^i de $Q_2(X)$ par $-a_i(1+X+\ldots+X^{i-1}+X^{i+1}+\ldots+X^{p-1})$ et permet de remplacer i-ième coefficient négatif de Q_2 par 0 (le rendant donc positif) sans affecter ni le signe des autres coefficients déjà positifs ni le fait que $Q_2(\sigma) = (\sigma + \sigma^{-1})^{-1}$. Ce dernier polynôme Q_2 convient ; ce qui achève la preuve du lemme. □

Remarque 3.3.13 : D'un point de vue purement calculatoire, le calcul explicite de l'inverse de $\sigma^i + \sigma^{-i} \in \mathrm{End}(Z)$ peut se faire à l'aide d'un logiciel. Par exemple avec Sage, le code suivant affiche cet inverse (dans le cas $p = 5$ et $i = 1$) :

```
p = 5                                   # Ordre de l'automorphisme s
i = 1
Q.<x> = QQ[]                            # Anneaux Q[x]
Qp.<s> = Q.quo(cyclotomic_polynomial(p))   # Corps cyclotomique Q(s)
show((s^i + s^(-i))^(-1))               # Affichage de l'inverse de s^i + s^(-i)
```

La prochaine proposition précise quant à elle le degré de la polarisation η induite sur Z par θ.

Proposition 3.3.14 - *On considère toujours un revêtement Galoisien p-cyclique $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ où $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ est d'ordre p premier (éventuellement égal à 2) et on note $\chi(\eta)$ la caractéristique d'Euler de η. Alors*

$$\chi(\eta) = \begin{cases} p^{g'-1} & \textit{si } f \textit{ est étale,} \\ p^{g'} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

En particulier,

$$\deg \eta^d = d! \cdot \chi(\eta) = \begin{cases} d! \cdot p^{g'-1} & \textit{si } f \textit{ est étale,} \\ d! \cdot p^{g'} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. En s'appuyant sur [Ort03, Proposition 2.1], le type de la polarisation η lorsque f est étale est $(\underbrace{1,\dots,1}_{(p-2)(g'-1)}, \underbrace{p,\dots,p}_{g'-1})$, auquel cas $\chi(\eta) = p^{g'-1}$. Maintenant, supposons que f est ramifié. Puisque f est de degré p premier, il ne se factorise pas à travers un revêtement étale cyclique non trivial. D'après [BL04, Proposition 11.4.3], on en déduit que $\overline{f} := f^* : J' \to J$ est injectif. Autrement dit, $\overline{f}$ induit un isomorphisme de J' sur Y et la polarisation induite par θ sur Y est égale à p fois une polarisation principale sur Y (car $\overline{f}^*\theta = p\theta'$). Finalement, $\iota_Y^*\theta$ est de type $(\underbrace{p,p,\dots,p}_{g'})$ puis, grâce au corollaire 12.1.5 de [BL04], η est de type $(1,\dots,1,\underbrace{p,\dots,p}_{g'})$; ce qui fournit le résultat concernant $\chi(\eta)$. La seconde assertion est une conséquence immédiate du théorème de Riemann-Roch pour les variétés abéliennes [Mum08, p150]. □

Après ces quelques préliminaires techniques passons à l'étude de la transformée de Fourier des ω_i.

Etude des $\mathcal{F}(\omega_i)$

On note $\mathcal{F} : \psi_{\eta*}\mathcal{F}_Z : \mathrm{A}(Z) \to \mathrm{A}(Z)$ la transformée de Fourier sur Z après identification $\mathrm{A}(Z) \simeq \mathrm{A}(\widehat{Z})$ via l'isogénie $\psi_\eta := e(Z)\varphi_\eta^{-1} \in \mathrm{Hom}(\widehat{Z}, Z)$.

Remarque 3.3.15 : On a $e(Y) = e(Z) = 1$ si $Z = \{0\}$ ou $Z = J$. Sinon $e(Y) = e(Z) = p$.

On a par définition $\omega_0 = \eta$. La transformée de Fourier de ω_0 est donc bien connu :

Proposition 3.3.16 - *On a les égalités*

$$\mathcal{F}(\omega_0) = (-1)^{d+1}\psi_{Z*}C_{(0)} = (-1)^{d+1}\frac{e(Z)^2}{\chi(\eta)}\frac{\eta^{d-1}}{(d-1)!}.$$

Démonstration. Grâce à la proposition 2.2.2, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\omega_0) &= \psi_{\eta*}\mathcal{F}_Z(\iota_Z^*\theta) = (-1)^{d-g}\psi_{\eta*}\widehat{\iota_Z}_*\mathcal{F}_J(\theta) = (-1)^{d-g}\psi_{\eta*}\widehat{\iota_Z}_*\varphi_{\theta*}\varphi_\theta^*\mathcal{F}_J(\theta) \\ &= (-1)^{d-g+g+1}\psi_{Z*}C_{(0)} = (-1)^{d+1}\psi_{Z*}C_{(0)}.\end{aligned}$$

D'un autre côté, en utilisant [Bea83, Proposition 5], on a

$$\begin{aligned}\psi_{Z*}C_{(0)} &= (-1)^{d+1}\psi_{\eta*}\mathcal{F}_Z(\eta) = (-1)^{d+1}\psi_{\eta*}\varphi_{\eta*}\frac{(-1)^{d-1}}{\chi(\eta)}\frac{\eta^{d-1}}{(d-1)!} \\ &= \frac{1}{\chi(\eta)}e(Z)_*\frac{\eta^{d-1}}{(d-1)!} = \frac{e(Z)^2}{\chi(\eta)}\frac{\eta^{d-1}}{(d-1)!}.\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Il nous reste à déterminer $\mathcal{F}(\omega_i)$ pour $i \in [\![1, p-1]\!]$. Pour cela, on aura besoin des préliminaires précédents.

Théorème 3.3.17 - *On suppose que $p > 2$ est premier. Alors pour tout entier $i \in [\![1, p-1]\!]$,*

$$\mathcal{F}(\omega_i) = (-1)^{d+1}(\sigma^i + \sigma^{-i})_* \psi_{Z*} C_{(0)}.$$

Par conséquent, $\chi(\eta)(d-1)!\mathcal{F}(\omega_i)$ appartient au $\mathbb{Z}$-module engendré par les produits d'intersection de la forme

$$\omega_{i_1}\omega_{i_2}\cdots\omega_{i_{d-1}} \in \mathrm{A}^{d-1}(Z)_{(0)}, \qquad 0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{d-1} \leqslant \frac{p-3}{2}.$$

De plus, on peut exprimer explicitement les $\mathcal{F}(\omega_i)$ en fonction de ces produits en les ω_j.

Démonstration. Pour tout entier i, l'endomorphisme $\sigma^i + \sigma^{-i} \in \mathrm{End}^{(s)}(Z)$ est symétrique, c'est-à-dire

$$R(\sigma^i + \sigma^{-i}) = \sigma^{-i} + \sigma^i = \sigma^i + \sigma^{-i}$$

où $R : \mathrm{End}^0(Z) \to \mathrm{End}^0(Z)$ désigne l'involution de Rosati sur Z relativement à la polarisation η. On vérifie en effet que $R(\sigma) = \sigma^{-1}$. Par conséquent, les mêmes arguments que pour la proposition 3.3.16 précédente montrent que

$$\mathcal{F}(\omega_i) := \mathcal{F}((\sigma^i + \sigma^{-i})^*\eta) = R(\sigma^i + \sigma^{-i})_*\mathcal{F}(\eta) = (\sigma^i + \sigma^{-i})_*\mathcal{F}(\eta) = (-1)^{d+1}(\sigma^i + \sigma^{-i})_*\psi_{Z*}C_{(0)}.$$

Comme $\psi_{Z*}C_{(0)} = \frac{e(Z)^2}{\chi(\eta)}\frac{\eta^{d-1}}{(d-1)!}$, on en déduit que

$$\mathcal{F}(\omega_i) = (-1)^{d+1}\frac{e(Z)^2}{\chi(\eta)}(\sigma^i + \sigma^{-i})_*\frac{\eta^{d-1}}{(d-1)!}$$

Or d'après le lemme 3.3.12, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ à coefficients entiers positifs, indépendant de i et que l'on peut calculer explicitement tel que

$$(\sigma^i + \sigma^{-i})^{-1} = Q(\sigma^i) \in \mathrm{Aut}(Z).$$

On obtient dans ce cas

$$\mathcal{F}(\omega_i) = (-1)^{d+1}\frac{e(Z)^2}{\chi(\eta)}Q(\sigma^i)^*\frac{\eta^{d-1}}{(d-1)!}$$

et puisque les pull-backs commutent au produit d'intersection, il vient

$$\mathcal{F}(\omega_i) = \frac{(-1)^{d+1}e(Z)^2}{\chi(\eta)(d-1)!}\left(Q(\sigma^i)^*\eta\right)^{d-1}.$$

Or $Q(\sigma^i)^*\eta \in R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) \cap \mathrm{A}^1(Z)$, c'est donc une combinaison rationnelle et même entière (car Q est à coefficients entiers) en $\omega_0, \ldots, \omega_{\frac{p-3}{2}}$ d'après le corollaire 3.2.5 (2). Noter qu'une telle combinaison s'obtient explicitement en utilisant le lemme 3.2.1 puisque Q est connu. Finalement, $\mathcal{F}(\omega_i)$ est un polynôme homogène de degré $d-1$ à coefficients entiers en les $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\frac{p-3}{2}}$. Plus précisément, $\chi(\eta)(d-1)!\mathcal{F}(\omega_i)$ appartient au $\mathbb{Z}$-module engendré par les produits d'intersection de la forme

$$\omega_{i_1}\omega_{i_2}\cdots\omega_{i_{d-1}} \in \mathrm{A}^{d-1}(Z)_{(0)}, \qquad 0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{d-1} \leqslant \frac{p-3}{2};$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Exemples

Notons que si σ est un automorphisme d'ordre p premier vérifiant $\Phi_p(\sigma) = 0$ sur une variété abélienne de dimension d, alors $p-1$ divise $2d$ (car $[\mathbb{Q}(\sigma) : \mathbb{Q}] = p-1$) et en particulier $p-1 \leqslant 2d$. Ainsi, le cas $p = 3$ est à étudier pour $d \geqslant 1$, le cas $p = 5$ est lui à étudier pour $d \geqslant 2$, le cas $p = 7$ est à étudier pour $d \geqslant 3$, etc...

Exemple 3.3.18 ($d \geqslant 1$ et $p = 3$) **:** On suppose ici que $d \geqslant 1$ et $p = 3$. On a

1. $\mathcal{F}(\omega_0) = (-1)^{d+1}\psi_{Z*}C_{(0)} = \frac{(-1)^{d+1}e(Z)^2}{\chi(\eta)(d-1)!}\omega_0^{d-1}$ (Proposition 3.3.16),
2. $\mathcal{F}(\omega_1) = \mathcal{F}(\omega_0) = \frac{(-1)^{d+1}e(Z)^2}{\chi(\eta)(d-1)!}\omega_0^{d-1}$ grâce au lemme 3.3.4.

Exemple 3.3.19 ($d \geqslant 2$ et $p = 5$) **:** On suppose ici que $d \geqslant 2$ et $p = 5$. Avec les notations introduites dans la démonstration du lemme 3.3.12, on a

$$P(X) = -1 + X + X^2,$$

de sorte que $Q(X) = 1 + X$ et donc

$$(\sigma + \sigma^{-1})^{-1} = 1 + \sigma + \sigma^{-1} = 1 + \sigma + \sigma^4 = -\sigma^2 - \sigma^3 = -(\sigma^2 + \sigma^{-2}).$$

Dans ce cas :

1. $\mathcal{F}(\omega_0) = (-1)^{d+1}\psi_{Z*}C_{(0)} = \frac{(-1)^{d+1}e(Z)^2}{\chi(\eta)(d-1)!}\omega_0^{d-1}$ comme toujours.
2. De même,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\omega_1) &= \mathcal{F}((\sigma+\sigma^{-1})^*\eta) = (-1)^{d+1}(\sigma^2+\sigma^{-2})^*(-1)^*\psi_{Z*}C_{(0)} = (-1)^{d+1}(\sigma^2+\sigma^{-2})^*\psi_{Z*}C_{(0)} \\ &= \frac{(-1)^{d+1}e(Z)^2}{\chi(\eta)(d-1)!}((\sigma^2+\sigma^{-2})^*\eta)^{d-1} = \frac{(-1)^{d+1}e(Z)^2}{\chi(\eta)(d-1)!}\omega_2^{d-1}.\end{aligned}$$

3. Pour $\mathcal{F}(\omega_2)$, le même raisonnement montre d'une part

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\omega_2) &= (-1)^{d+1}(\sigma^2+\sigma^{-2})_*\psi_{Z*}C_{(0)} = (-1)^{d+1}(\sigma+\sigma^{-1})^*(-1)^*\psi_{Z*}C_{(0)} \\ &= (-1)^{d+1}(\sigma+\sigma^{-1})^*\psi_{Z*}C_{(0)} = \frac{(-1)^{d+1}e(Z)^2}{\chi(\eta)(d-1)!}((\sigma+\sigma^{-1})^*\eta)^{d-1} = \frac{(-1)^{d+1}e(Z)^2}{\chi(\eta)(d-1)!}\omega_1^{d-1}\end{aligned}$$

et d'autre part, par le lemme 3.3.4,

$$\mathcal{F}(\omega_2) = \mathcal{F}(3\omega_0 - \omega_1) = 3\mathcal{F}(\omega_0) - \mathcal{F}(\omega_1) = \frac{(-1)^{d+1}e(Z)^2}{\chi(\eta)(d-1)!}(3\omega_0^{d-1} - \omega_2^{d-1}).$$

La transformée de Fourier nous permet donc d'obtenir une relation non triviale en codimension $d-1$:

$$-3\omega_0^{d-1} + \omega_1^{d-1} + \omega_2^{d-1} = 0.$$

Par ailleurs, en réinjectant la formule $\omega_2 = 3\omega_0 - \omega_1$ dans celle-ci, on obtient une relation (non triviale si $d > 2$) entre ω_0 et ω_1 (cf. Exemple 3.3.22).

Exemple 3.3.20 ($(d,p) = (3,7)$) **:** On suppose ici que $d = 3$ et $p = 7$. L'inverse de $\sigma^i + \sigma^{-i}$ est $-(1 + \sigma^{3i} + \sigma^{4i})$. Alors :

1. $\mathcal{F}(\omega_0) = \psi_{Z*}C_{(0)} = \frac{e(Z)^2}{2\chi(\eta)}\omega_0^2$.

2. Pour $\mathcal{F}(\omega_1)$, on trouve en utilisant le lemme 3.2.1 ainsi que le fait que pour tout entier k, $\sigma^{k*}\eta = \eta$:

$$\begin{aligned}
\frac{2\chi(\eta)}{e(Z)^2}\mathcal{F}(\omega_1) &= (1+\sigma^3+\sigma^{-3})^*\eta^2 = \left[(1+\sigma^3+\sigma^{-3})^*\eta\right]^2 \\
&= \left[(1+\sigma^3)^*\eta + (1+\sigma^{-3})^*\eta + (\sigma^3+\sigma^{-3})^*\eta - 1^*\eta - \sigma^{3*}\eta - \sigma^{-3*}\eta\right]^2 \\
&= \left[2(1+\sigma^{-3})^*\eta + \omega_3 - 3\omega_0\right]^2 = \left[2(1+\sigma^4)^*\eta + \omega_3 - 3\omega_0\right]^2 \\
&= (2\omega_2+\omega_3-3\omega_0)^2 = (2\omega_0-\omega_1+\omega_2)^2 \qquad \text{par le lemme 3.3.4} \\
&= 4\omega_0^2 - 4\omega_0\omega_1 + 4\omega_0\omega_2 + \omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2,
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathcal{F}(\omega_1) = \frac{e(Z)^2}{\chi(\eta)}\left(2\omega_0^2 - 2\omega_0\omega_1 + 2\omega_0\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 - \omega_1\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_2^2\right).$$

3. Pour $\mathcal{F}(\omega_2)$, on a de même :

$$\begin{aligned}
\frac{2\chi(\eta)}{e(Z)^2}\mathcal{F}(\omega_2) &= (1+\sigma+\sigma^{-1})^*\eta^2 = \left[(1+\sigma+\sigma^{-1})^*\eta\right]^2 \\
&= (2\omega_3+\omega_1-3\omega_2)^2 = (7\omega_0-\omega_1-2\omega_2)^2 \qquad \text{par le lemme 3.3.4} \\
&= 49\omega_0^2 - 14\omega_0\omega_1 - 28\omega_0\omega_2 + \omega_1^2 + 4\omega_1\omega_2 + 4\omega_2^2,
\end{aligned}$$

et dans ce cas

$$\mathcal{F}(\omega_2) = \frac{e(Z)^2}{\chi(\eta)}\left(\frac{49}{2}\omega_0^2 - 7\omega_0\omega_1 - 14\omega_0\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + 2\omega_2^2\right).$$

4. Pour $\mathcal{F}(\omega_3)$, on a de manière analogue :

$$\begin{aligned}
\frac{2\chi(\eta)}{e(Z)^2}\mathcal{F}(\omega_3) &= (1+\sigma^2+\sigma^{-2})^*\eta^2 = \left[(1+\sigma^2+\sigma^{-2})^*\eta\right]^2 \\
&= (-3\omega_0+2\omega_1+\omega_2)^2 \\
&= 9\omega_0^2 - 12\omega_0\omega_1 - 6\omega_0\omega_2 + 4\omega_1^2 + 4\omega_1\omega_2 + \omega_2^2,
\end{aligned}$$

et donc

$$\mathcal{F}(\omega_3) = \frac{e(Z)^2}{\chi(\eta)}\left(\frac{9}{2}\omega_0^2 - 6\omega_0\omega_1 - 3\omega_0\omega_2 + 2\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_2^2\right).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\frac{2\chi(\eta)}{e(Z)^2}\mathcal{F}(\omega_3) &= \frac{2\chi(\eta)}{e(Z)^2}\left(\mathcal{F}(5\omega_0-\omega_1-\omega_2)\right) = \frac{2\chi(\eta)}{e(Z)^2}\left(5\mathcal{F}(\omega_0)-\mathcal{F}(\omega_1)-\mathcal{F}(\omega_2)\right) \\
&= 5\omega_0^2 - \left(4\omega_0^2 - 4\omega_0\omega_1 + 4\omega_0\omega_2 + \omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2\right) \\
&\qquad - \left(49\omega_0^2 - 14\omega_0\omega_1 - 28\omega_0\omega_2 + \omega_1^2 + 4\omega_1\omega_2 + 4\omega_2^2\right) \\
&= -48\omega_0^2 + 18\omega_0\omega_1 + 24\omega_0\omega_2 - 2\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 - 5\omega_2^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$9\omega_0^2 - 12\omega_0\omega_1 - 6\omega_0\omega_2 + 4\omega_1^2 + 4\omega_1\omega_2 + \omega_2^2 = -48\omega_0^2 + 18\omega_0\omega_1 + 24\omega_0\omega_2 - 2\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 - 5\omega_2^2.$$

Autrement dit, on obtient la relation non triviale suivante :

$$57\omega_0^2 - 30\omega_0\omega_1 - 30\omega_0\omega_2 + 6\omega_1^2 + 6\omega_1\omega_2 + 6\omega_2^2 = 0$$

ou plus simplement en divisant par 3 :

$$19\omega_0^2 - 10\omega_0\omega_1 - 10\omega_0\omega_2 + 2\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + 2\omega_2^2 = 0.$$

Il s'agit à présent d'étudier de manière plus générale les relations entre les cycles ω_i. On va montrer comment obtenir d'autres relations non triviales et, à terme, on donnera même une liste complète de toutes les relations existantes entre les ω_i en petite dimension d.

3.3.3 Méthodes générales pour étudier les relations entre les ω_i

Dans cette partie, on présente quelques méthodes pour étudier les relations entre les ω_i. Notez qu'une relation en codimension $k \in [\![0, \dim Z]\!]$ est déterminée par un polynôme homogène de degré k en les ω_i.

Les deux premières méthodes que l'on présente s'appuient sur le principe suivant :

Fait 3.3.21 : Soit $T : R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z) \to R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ un opérateur dont on sait exprimer l'image de tout polynôme en les ω_i sous la forme d'un polynôme en les ω_i et tel que $T(0) = 0$. On peut appliquer T à une relation entre les ω_i pour obtenir encore une relation (en générale nouvelle) entre les ω_i.

En utilisant la transformée de Fourier d'une relation

Comme on vient de le voir dans les exemples 3.3.19 et 3.3.20, on peut obtenir de nouvelles relations en utilisant la transformée de Fourier. L'idée est la suivante.

Méthode : Soit $\mathcal{R}^k$ une relation entre les $\omega_i \in \mathrm{A}^1(Z)_{(0)}$ en codimension $k \in [\![0, \dim Z]\!]$. Supposons que l'on sache exprimer $\mathcal{R}^{d-k} := \mathcal{F}(\mathcal{R}^k)$ comme un polynôme homogène de degré $d-k$ en les ω_i. Alors $\mathcal{R}^{d-k}$ est une relation (en général non triviale) en codimension $d-k$ entre les ω_i.

Cette méthode s'applique en particulier à la relation $\mathcal{R}^1 : (2-p)\omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_{\frac{p-1}{2}} = 0$ donnée par le lemme 3.3.4 :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{F}\left((2-p)\omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_{\frac{p-1}{2}}\right) \\ &= (2-p)\mathcal{F}(\omega_0) + \mathcal{F}(\omega_1) + \ldots + \mathcal{F}(\omega_{\frac{p-1}{2}}) \\ &= \text{ polynôme nul ou homogène de degré } d-1 \text{ en } \omega_0, \ldots, \omega_{\frac{p-3}{2}} \qquad \text{(par le théorème 3.3.17).} \end{aligned}$$

Exemple 3.3.22 ($d \geqslant 2$ et $p = 5$) **:** L'exemple 3.3.19 qui calculait les $\mathcal{F}(\omega_i)$ pour $d \geqslant 2$ et $p = 5$ a fourni la relation suivante :

$$-3\omega_0^{d-1} + \omega_1^{d-1} + \omega_2^{d-1} = 0.$$

De sorte que pour $(d,p) = (2,5)$, la relation en codimension $2-1 = 1$ obtenue entre $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ est juste $-3\omega_0 + \omega_1 + \omega_2$ (c'est le lemme 3.3.4) et le fait de substituer $\omega_2 = 3\omega_0 - \omega_1$ nous donne bien sûr la relation triviale entre ω_0 et ω_1. Ainsi pour $(d,p) = (2,5)$, cette méthode n'apporte rien de plus. En revanche pour $(d,p) = (4,5)$, on obtient une relation non triviale :

$$\begin{aligned} 0 &= -3\omega_0^3 + \omega_1^3 + \omega_2^3 \\ &= -3\omega_0^3 + \omega_1^3 + (3\omega_0 - \omega_1)^3 \\ &= -3\omega_0^3 + \omega_1^3 + 27\omega_0^3 - 27\omega_0^2\omega_1 + 9\omega_0\omega_1^2 - \omega_1^3 \\ &= 24\omega_0^3 - 27\omega_0^2\omega_1 + 9\omega_0\omega_1^2. \end{aligned}$$

En simplifiant par 3, on a donc obtenu la relation non triviale

$$8\omega_0^3 - 9\omega_0^2\omega_1 + 3\omega_0\omega_1^2 = 0.$$

Exemple 3.3.23 $((d,p) = (3,7))$ **:** Dans l'exemple 3.3.20, on a déjà obtenu par cette méthode (présentée très légèrement différemment) la relation

$$19\omega_0^2 - 10\omega_0\omega_1 - 10\omega_0\omega_2 + 2\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + 2\omega_2^2 = 0.$$

Bien qu'intéressante cette méthode reste tout de même limitée par les faits suivants :

1. il est nécessaire de connaître initialement une relation,
2. il faut pouvoir exprimer explicitement la transformée de Fourier de la relation de départ en termes de produits d'intersection des ω_i ; ce qui est généralement (très) difficile.

La méthode suivante est un peu plus performante et accessible. Elle propose notamment d'éliminer cette seconde contrainte.

En faisant agir les $\sigma^i + \sigma^{-i}$ par pull-back sur une relation

Si C est une courbe admettant un automorphisme σ d'ordre $p > 2$ premier, alors on peut en particulier faire agir $\mathbb{Z}[\sigma] \subset \mathrm{End}(Z)$ sur $\mathrm{A}(Z)$ par pull-back et puisque $(\mathbb{Z}[\sigma], \circ)$ est commutatif, cette action induite est même covariante.

La méthode présentée dans cette partie s'appuie sur le fait suivant que l'on a déjà utilisé pour obtenir le corollaire 3.2.5 : pour tout générateur ω_i de $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ et tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$, le cycle $P(\sigma)^*\omega_i$ est une $\mathbb{Z}$-combinaison linéaire en les $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\frac{p-3}{2}}$. Par ailleurs, on peut calculer explicitement ces combinaisons linéaires.

Méthode : Soit $\mathcal{R}^k$ une relation entre les ω_i en codimension $k \in [\![0, \dim Z]\!]$. Alors pour tout $P(\sigma) \in \mathbb{Z}[\sigma]$, $P(\sigma)^*\mathcal{R}^k$ est encore une relation en codimension k entre les ω_i ; relation que l'on peut calculer explicitement comme on vient de le rappeler.

Remarque 3.3.24 : Le lemme 3.2.1 montre en fait que l'action par pull-back de $\mathrm{End}(Z)$ sur les ω_i est essentiellement connue dès lors que l'on connaît celle des $\sigma^j + \sigma^{-j}$ avec $j \in [\![1, \frac{p-3}{2}]\!]$ sur ces mêmes ω_i.

Exemple 3.3.25 $(p = 5)$ **:** Si $p = 5$, alors

1. $(\sigma + \sigma^{-1})^*\omega_0 = \omega_1$,
2. $(\sigma + \sigma^{-1})^*\omega_1 = -4\omega_0 + 4\omega_1 + \omega_2 = -\omega_0 + 3\omega_1$. En effet, on a toujours grâce au lemme 3.2.1 :

$$\begin{aligned} (\sigma + \sigma^{-1})^*\omega_1 &= (2 + \sigma^2 + \sigma^{-2})^*\eta \\ &= 2^*\eta + 2(1+\sigma^2)^*\eta + 2(1+\sigma^{-2})^*\eta + (\sigma^2 + \sigma^{-2})^*\eta - 8\eta \\ &= 2\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_1 - 4\omega_0 = -4\omega_0 + 4\omega_1 + \omega_2 \\ &= -4\omega_0 + 4\omega_1 + (3\omega_0 - \omega_1) = -\omega_0 + 3\omega_1. \end{aligned}$$

3. $(\sigma+\sigma^{-1})^*\omega_2 = (-1)^*\omega_0 = \omega_0$.

Exemple 3.3.26 ($p = 7$) **:** Si $p = 7$, alors

1. $(\sigma+\sigma^{-1})^*\omega_0 = \omega_1$ et $(\sigma^2+\sigma^{-2})^*\omega_0 = \omega_2$,
2. $(\sigma+\sigma^{-1})^*\omega_1 = -4\omega_0 + 4\omega_1 + \omega_2$,
3. $(\sigma+\sigma^{-1})^*\omega_2 = (\sigma^2+\sigma^{-2})^*\omega_1 = -8\omega_0 + 3\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3 = -3\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2$. En effet,

$$\begin{aligned}
&(\sigma+\sigma^{-1})^*\omega_2 = (\sigma^3+\sigma^{-1}+\sigma+\sigma^{-3})^*\eta \\
&= (\sigma^3+\sigma^{-1})^*\eta + (\sigma^3+\sigma)^*\eta + (\sigma^3+\sigma^{-3})^*\eta + (\sigma+\sigma^{-1})^*\eta + (\sigma^{-1}+\sigma^{-3})^*\eta + (\sigma+\sigma^{-3})^*\eta - 8\eta \\
&= \omega_2 + \omega_1 + \omega_3 + \omega_1 + \omega_1 + \omega_2 - 8\omega_0 = -8\omega_0 + 3\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3 \\
&= -8\omega_0 + 3\omega_1 + 2\omega_2 + (5\omega_0 - \omega_1 - \omega_2) = -3\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2.
\end{aligned}$$

4. $(\sigma^2+\sigma^{-2})^*\omega_2 = -4\omega_0 + 4\omega_2 + \omega_3 = \omega_0 - \omega_1 + 3\omega_2$. En effet,

$$\begin{aligned}
(\sigma^2+\sigma^{-2})^*\omega_2 &= (\sigma^4+2+\sigma^{-4})^*\eta \\
&= 2(\sigma^4+1)^*\eta + (\sigma^4+\sigma^{-4})^*\eta + 2^*\eta + 2(1+\sigma^{-4})^*\eta - 8\eta \\
&= 2\omega_2 + \omega_3 + 4\omega_0 + 2\omega_2 - 8\omega_0 = -4\omega_0 + 4\omega_2 + \omega_3 \\
&= -4\omega_0 + 4\omega_2 + (5\omega_0 - \omega_1 - \omega_2) = \omega_0 - \omega_1 + 3\omega_2.
\end{aligned}$$

Maintenant si l'on souhaite mettre en pratique cette méthode pour obtenir de nouvelles relations, il reste encore un problème auquel on se heurte (comme pour la transformée de Fourier) : cette méthode requiert de connaître au préalable une relation sur laquelle faire agir les $P(\sigma)^*$. Toutefois, si une telle relation est donnée, les calculs se font alors relativement bien même s'ils peuvent devenir assez lourds.

Traitons dans le détail les cas $(d,p) = (4,5)$ et $(d,p) = (3,7)$.

Exemple 3.3.27 ($(d,p) = (4,5)$) **:** D'après l'exemple 3.3.22, la transformée de Fourier fournit une première relation non triviale en codimension 3 :

$$8\omega_0^3 - 9\omega_0^2\omega_1 + 3\omega_0\omega_1^2 = 0.$$

En faisant agir $\sigma+\sigma^{-1}$ sur cette relation, on obtient la relation

$$3\omega_0^2\omega_1 - 9\omega_0\omega_1^2 + 8\omega_1^3 = 0.$$

En effet, en utilisant les formules de l'exemple 3.3.25 on a

$$\begin{aligned}
&(\sigma+\sigma^{-1})^*(8\omega_0^3 - 9\omega_0^2\omega_1 + 3\omega_0\omega_1^2) = 0 \\
\iff\ & 8((\sigma+\sigma^{-1})^*\omega_0)^3 - 9((\sigma+\sigma^{-1})^*\omega_0)^2\cdot((\sigma+\sigma^{-1})^*\omega_1) + 3((\sigma+\sigma^{-1})^*\omega_0)\cdot((\sigma+\sigma^{-1})^*\omega_1)^2 = 0 \\
\iff\ & 8\omega_1^3 - 9\omega_1^2(-\omega_0 + 3\omega_1) + 3\omega_1(-\omega_0 + 3\omega_1)^2 = 0 \\
\iff\ & 8\omega_1^3 + 9\omega_0\omega_1^2 - 27\omega_1^3 + 3\omega_1(\omega_0^2 - 6\omega_0\omega_1 + 9\omega_1) = 0 \\
\iff\ & 3\omega_0^2\omega_1 - 9\omega_0\omega_1^2 + 8\omega_1^3 = 0.
\end{aligned}$$

Notez que cette seconde relation est bien distincte de la première, c'est-à-dire linéairement indépendante.

Exemple 3.3.28 ($(d,p) = (3,7)$) **:** Depuis l'exemple 3.3.20, on connaît la relation non triviale suivante en codimension 2 :

$$19\omega_0^2 - 10\omega_0\omega_1 - 10\omega_0\omega_2 + 2\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + 2\omega_2^2 = 0.$$

En faisant agir $\sigma+\sigma^{-1}$ et $\sigma^2+\sigma^{-2}$ sur cette relation, on va en obtenir deux autres.

1. En s'appuyant sur l'exemple 3.3.26, les calculs pour l'action de $\sigma + \sigma^{-1}$ sont les suivants :

$$\begin{aligned}
& (\sigma + \sigma^{-1})^*(19\omega_0^2 - 10\omega_0\omega_1 - 10\omega_0\omega_2 + 2\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + 2\omega_2^2) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 19\omega_1^2 - 10\omega_1(-4\omega_0 + 4\omega_1 + \omega_2) - 10\omega_1(-3\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2) + 2(-4\omega_0 + 4\omega_1 + \omega_2)^2 \\
& \qquad + 2(-4\omega_0 + 4\omega_1 + \omega_2)(-3\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2) + 2(-3\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2)^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 19\omega_1^2 + 40\omega_0\omega_1 - 40\omega_1^2 - 10\omega_1\omega_2 + 30\omega_0\omega_1 - 20\omega_1^2 - 10\omega_1\omega_2 \\
& \qquad + 2(16\omega_0^2 + 16\omega_1^2 + \omega_2^2 - 32\omega_0\omega_1 - 8\omega_0\omega_2 + 8\omega_1\omega_2) \\
& \qquad + 2(12\omega_0^2 - 8\omega_0\omega_1 - 4\omega_0\omega_2 - 12\omega_0\omega_1 + 8\omega_1^2 + 4\omega_1\omega_2 - 3\omega_0\omega_2 + 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2) \\
& \qquad + 2(9\omega_0^2 + 4\omega_1^2 + \omega_2^2 - 12\omega_0\omega_1 - 6\omega_0\omega_2 + 4\omega_1\omega_2) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 74\omega_0^2 - 58\omega_0\omega_1 - 42\omega_0\omega_2 + 15\omega_1^2 + 16\omega_1\omega_2 + 6\omega_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

2. En s'appuyant toujours sur l'exemple 3.3.26, les calculs pour l'action de $\sigma^2 + \sigma^{-2}$ sont les suivants :

$$\begin{aligned}
& (\sigma^2 + \sigma^{-2})^*(19\omega_0^2 - 10\omega_0\omega_1 - 10\omega_0\omega_2 + 2\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + 2\omega_2^2) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 19\omega_2^2 - 10\omega_2(-3\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2) - 10\omega_2(\omega_0 - \omega_1 + 3\omega_2) + 2(-3\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2)^2 \\
& \qquad + 2(-3\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2)(\omega_0 - \omega_1 + 3\omega_2) + 2(\omega_0 - \omega_1 + 3\omega_2)^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 19\omega_2^2 + 30\omega_0\omega_2 - 20\omega_1\omega_2 - 10\omega_2^2 - 10\omega_0\omega_2 + 10\omega_1\omega_2 - 30\omega_2^2 \\
& \qquad + 2(9\omega_0^2 + 4\omega_1^2 + \omega_2^2 - 12\omega_0\omega_1 - 6\omega_0\omega_2 + 4\omega_1\omega_2) \\
& \qquad + 2(-3\omega_0^2 + 3\omega_0\omega_1 - 9\omega_0\omega_2 + 2\omega_0\omega_1 - 2\omega_1^2 + 6\omega_1\omega_2 + \omega_0\omega_2 - \omega_1\omega_2 + 3\omega_2^2) \\
& \qquad + 2(\omega_0^2 + \omega_1^2 + 9\omega_2^2 - 2\omega_0\omega_1 + 6\omega_0\omega_2 - 6\omega_1\omega_2) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 14\omega_0^2 - 18\omega_0\omega_1 + 4\omega_0\omega_2 + 6\omega_1^2 - 4\omega_1\omega_2 + 5\omega_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

On vérifie alors immédiatement que ces trois relations en codimension 2 sont linéairement indépendantes.

Signalons une autre limite concernant ces deux premières méthodes : il faut connaître suffisamment de relations au départ afin de pouvoir espérer en déduire toutes les relations via ces méthodes. Et quand bien même on obtiendrait plusieurs nouvelles relations, comment savoir si on les a toutes obtenues ? La troisième méthode que l'on présente maintenant est plus complexe mais permettra quant à elle de dépasser largement ces limites.

En connaissant les relations en codimension supérieure

Cette méthode que l'on introduit ici est basée sur la remarque suivante :

Fait 3.3.29 : Supposons qu'il existe une relation $\mathcal{R}^k$ entre les ω_i. En intersectant cette relation avec n'importe quel monôme de degré l en les ω_i, on obtient une relation en codimension $k+l$. Autrement dit, les relations en codimension $k+l$ contiennent la composante $(k+l)$-codimensionnelle de l'idéal engendré par la relation $\mathcal{R}^k$.

On peut alors utiliser ce fait comme ceci :

Méthode : Supposons que l'on connaisse toutes les relations entre les ω_i en codimension $k \in [\![1, d]\!]$ pour un certain k fixé. Alors on en déduit des conditions nécessaires pour l'existence de relations en codimension $\leqslant k$. Si ces contraintes sont trop importantes pour une certaine codimension $l \leqslant k$, on peut en déduire la non existence de relation en codimension l. Dans le cas contraire, ces conditions nécessaires limitent tout de même l'étude des relations à une famille de « possibles relations » qu'il resterait encore à étudier.

La démarche présentée dans ce qui suit consiste plus particulièrement à déterminer toutes les relations en codimension maximale d entre les ω_i ; ce qui revient à calculer le degré des cycles qui s'expriment comme monômes de degré d en les ω_i. Cette méthode combinée avec un argument de dimension permettra (au moins en général) d'obtenir toutes les relations entre les ω_i et ceci en codimension quelconque. Des calculs détaillés seront donnés pour d petit. On vient donc corriger avec cette méthode les insuffisances des deux premières.

3.3.4 Relations en codimension maximale entre les ω_i

La partie précédente a motivé l'étude des degrés des monômes de la forme $\omega_0^{d-\sum\alpha_k}\omega_1^{\alpha_1}\cdots\omega_{(p-3)/2}^{\alpha_{(p-3)/2}}$. On propose maintenant un moyen de les calculer.

Relations $\mathcal{R}_q(\alpha,\eta)$ en codimension maximale

Idée de la méthode : L'idée utilisée dans cette partie repose sur le fait que les coefficients du polynôme caractéristique P_α d'un endomorphisme $\alpha \in \mathrm{End}(Z)$ sont des polynômes en les $\mathrm{Tr}(\alpha^k)$. En effet, ces coefficients sont des fonctions symétriques en les racines λ_i, qui elles-mêmes s'expriment en caractéristique 0 via la identités de Newton comme un polynôme en les $\sum_k \lambda_i^k = \mathrm{Tr}(\alpha^k)$. Ceci nous amène à définir les éléments suivants :

Définition 3.3.30 (Polynômes $\Sigma^k(\alpha)$) Soient $\alpha \in \mathrm{End}(Z)$ et $k \in [\![1,2d]\!]$. Chaque polynôme symétrique élémentaire $\sigma_k = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant 2d} X_{i_1}\cdots X_{i_k} \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{2d}]$ s'exprime comme un polynôme $\Sigma^k \in \mathbb{Q}[Y_1,\ldots,Y_k]$ en les sommes de Newton $N^k(X_1,\ldots,X_{2d}) = \sum_{i=1}^{2d} X_i^k$. On définit alors

$$\Sigma^k(\alpha) := \Sigma^k(\mathrm{Tr}(\alpha),\mathrm{Tr}(\alpha^2),\ldots,\mathrm{Tr}(\alpha^k)) \in \mathbb{Q}.$$

On convient aussi de poser $\Sigma^0(\alpha) = 1$.

Remarque 3.3.31 : On a même $k!\Sigma^k \in \mathbb{Z}[Y_1,\ldots,Y_k]$.

Les deux prochains lemmes vont nous permettre de calculer concrètement les coefficients $\Sigma^k(\alpha)$, notamment lorsque α est un polynôme en σ. Mais avant cela, rappelons la définition suivante :

Définition 3.3.32 (Coefficients multinomiaux) Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ tels que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = m$. On définit le coefficient multinomial suivant :

$$\binom{m}{n_1,n_2,\ldots,n_k} := \begin{cases} \frac{m!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!} & \text{si tous les } n_i \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $k = 2$, on retrouve le coefficient binomial habituel et on notera de manière classique

$$\binom{m}{n} := \binom{m}{n, m-n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Lemme 3.3.33 - *Soit $\alpha \in \mathrm{End}(Z)$. Pour tout entier $k \in [\![1, 2d]\!]$, on a*

$$\Sigma^k(\alpha) = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} \mathrm{Tr}(\alpha) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{Tr}(\alpha^2) & \mathrm{Tr}(\alpha) & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & k-1 \\ \mathrm{Tr}(\alpha^k) & \mathrm{Tr}(\alpha^{k-1}) & \cdots & \mathrm{Tr}(\alpha^2) & \mathrm{Tr}(\alpha) \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Il s'agit simplement de revenir à la définition 3.3.30 du coefficient $\Sigma^k(\alpha)$ et d'utiliser [Mac95, p28] ; référence prouvant l'égalité suivante :

$$\Sigma^k(Y_1, \ldots, Y_k) = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} Y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ Y_2 & Y_1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & k-1 \\ Y_k & Y_{k-1} & \cdots & Y_2 & Y_1 \end{vmatrix}.$$

□

Exemple 3.3.34 :

1. $\Sigma^1(\alpha) = \mathrm{Tr}(\alpha)$.
2. $\Sigma^2(\alpha) = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(\alpha)^2 - \mathrm{Tr}(\alpha^2))$.
3. $\Sigma^3(\alpha) = \frac{1}{6}(\mathrm{Tr}(\alpha)^3 - 3\,\mathrm{Tr}(\alpha)\,\mathrm{Tr}(\alpha^2) + 2\,\mathrm{Tr}(\alpha^3))$.
4. $\Sigma^4(\alpha) = \frac{1}{24}(\mathrm{Tr}(\alpha)^4 - 6\,\mathrm{Tr}(\alpha)^2\,\mathrm{Tr}(\alpha^2) + 3\,\mathrm{Tr}(\alpha^2)^2 + 8\,\mathrm{Tr}(\alpha)\,\mathrm{Tr}(\alpha^3) - 6\,\mathrm{Tr}(\alpha^4))$.

Lemme 3.3.35 - *Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ un automorphisme d'ordre p premier. Soit $i \in [\![0, p-1]\!]$. Alors $p-1$ divise $2d$ et*

$$\mathrm{Tr}(\sigma^i) = \begin{cases} 2d & \text{si } i = 0, \\ -\frac{2d}{p-1} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p-1. \end{cases}$$

Démonstration. Si $i = 0$, $\sigma^i = 1_Z$ et $\mathrm{Tr}(1_Z) = 2\dim Z = 2d$. Sinon p ne divise pas i et on a l'isomorphisme

$$\mathbb{Q}[\sigma^i] \simeq \mathbb{Q}(\zeta_p^i) \simeq \mathbb{Q}(\zeta_p)$$

où $\zeta_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ est une racine primitive p-ième de l'unité. En particulier, $\Phi_p(X) = 1 + X + \ldots + X^{p-1}$ est le polynôme minimal (sur $\mathbb{Q}$) de σ^i (et aussi celui de σ). Celui-ci est irréductible. Par conséquent, le polynôme caractéristique $P_{\sigma^i} = P_\sigma$ de σ^i (ou σ) est une puissance de Φ_p et comme le degré du polynôme caractéristique de σ^i est de degré $2d$ (puisqu'on travaille sur une variété abélienne de dimension d), alors $2d$ est nécessairement un multiple de $p-1$, c'est-à-dire

$$\frac{2d}{p-1} \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad P_{\sigma^i}(X) = P_\sigma(X) = (\Phi_p(X))^{\frac{2d}{p-1}}.$$

Calculer la trace de σ^i revient donc à déterminer l'opposé du coefficient du terme de degré $2d-1$ du polynôme $(\Phi_p(X))^{\frac{2d}{p-1}}$. Une récurrence immédiate montre que pour tous entiers $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$,

$$(X^n + X^{n-1} + \ldots + X + 1)^k = X^{kn} + kX^{kn-1} + (\text{termes de degré } \leqslant kn-2).$$

Dans notre cas, $n = p-1$ et $k = \frac{2d}{p-1}$. Par suite, si $1 \leqslant i \leqslant p-1$,

$$\mathrm{Tr}(\sigma^i) = -\frac{2d}{p-1}.$$

□

On en vient à présent aux résultats principaux de ce paragraphe.

Proposition 3.3.36 - *Soient A une variété abélienne de dimension d sur un corps k (de caractéristique 0) et $H \in \mathrm{NS}(A)$ la classe d'un diviseur ample. Pour tout endomorphisme α de A, on note*

$$D_\alpha(H) := (\alpha+1)^*H - \alpha^*H - H.$$

Alors pour tout entier $q \in [\![0, 2d]\!]$, on dispose de la relation $\mathcal{R}_q(\alpha, H)$ suivante :

$$\mathcal{R}_q(\alpha,H): \quad \Sigma^{2d-q}(\alpha) = \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \binom{d}{i, q-2i, i+d-q} \deg\left(H^i \cdot D_\alpha(H)^{q-2i} \cdot \alpha^* H^{i+d-q}\right).$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathrm{End}(A)$. On note P_α le polynôme caractéristique de α. Les relations coefficients-racines et la définition même des $\Sigma^k(\alpha)$ donnent

$$P_\alpha(-n) = \sum_{q=0}^{2d} \Sigma^{2d-q}(\alpha)\; n^q.$$

De plus, d'après [Mum08, Théorème 4 p180],

$$P_\alpha(-n) = \deg(-n-\alpha) = \deg(\alpha+n) = \frac{1}{\deg H^d} \deg\left((\alpha+n)^*H\right)^d.$$

Or le lemme 3.2.1 montre que

$$\begin{aligned}
(\alpha+n)^*H &= n(\alpha+1)^*H + \frac{n(n-1)}{2}(1+1)^*H - (n-1)\alpha^*H - n(n-1)1^*H \\
&= n(\alpha+1)^*H + 2n(n-1)H - (n-1)\alpha^*H - n(n-1)H \\
&= n(\alpha+1)^*H + n(n-1)H - (n-1)\alpha^*H \\
&= n^2H + nD_\alpha(H) + \alpha^*H.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit grâce à la formule du trinôme que

$$\begin{aligned}
\sum_{q=0}^{2d} \Sigma^{2d-q}(\alpha)\; n^q = \deg(\alpha+n) &= \frac{1}{\deg H^d} \deg\left(n^2H + nD_\alpha(H) + \alpha^*H\right)^d \\
&= \frac{1}{\deg H^d} \sum_{\substack{i+j+k=d \\ i,j,k\geqslant 0}} \binom{d}{i,j,k} \deg\left(H^i \cdot D_\alpha(H)^j \cdot \alpha^*H^k\right)\; n^{2i+j}.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients d'ordre $q \in [\![0, 2d]\!]$, on obtient :

$$\Sigma^{2d-q}(\alpha) = \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i, q-2i, i+d-q} \deg\left(H^i \cdot D_\alpha(H)^{q-2i} \cdot \alpha^*H^{i+d-q}\right).$$

En effet, i étant fixé, la condition $2i+j=q$ détermine complètement $j=q-2i$, et alors la condition $i+j+k=d$ détermine complètement $k=d-i-j=i+d-q$.

De plus, la nullité de certains coefficients multinomiaux (reliée à la nullité des puissances « trop grandes » ou « trop petites » des diviseurs) impose les conditions

$$\begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant d \\ 0 \leqslant q-2i \leqslant d \\ 0 \leqslant i+d-q \leqslant d \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant d \\ \frac{q-d}{2} \leqslant i \leqslant \frac{q}{2} \\ q-d \leqslant i \leqslant q \end{cases}$$
$$\iff 0 \leqslant \max\left(0, \left\lceil \frac{q-d}{2} \right\rceil\right) \leqslant \max(0, q-d) \leqslant i \leqslant \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \leqslant d.$$

Ainsi on peut se restreindre à sommer sur les i entre $\max(0, q-d)$ et $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$. Ceci démontre la première égalité. $\square$

On peut également citer le cas particulier où $q=2d-1$. On retrouve le lemme 11.3 de [Mil08] :

Corollaire 3.3.37 - *On reprend les hypothèses de la proposition 3.3.36. Alors*

$$\mathrm{Tr}(\alpha) = \frac{d}{\deg H^d} \deg\left(H^{d-1} \cdot D_\alpha(H)\right).$$

Démonstration. La proposition 3.3.36 utilisée avec $q=2d-1$ montre que

$$\mathrm{Tr}(\alpha) = \Sigma^1(\alpha) = \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,(2d-1)-d)}^{\lfloor \frac{2d-1}{2} \rfloor} \binom{d}{i, (2d-1)-2i, i+d-(2d-1)} \deg\left(H^i \cdot D_\alpha(H)^{q-2i} \cdot \alpha^* H^{i+d-q}\right).$$

Cette somme ne contient qu'un seul terme, celui d'indice $i=d-1$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\alpha) &= \frac{1}{\deg H^d} \binom{d}{d-1, 1, 0} \deg\left(H^{d-1} \cdot D_\alpha(H)^{2d-1-2(d-1)} \cdot \alpha^* H^{d-1+d-(2d-1)}\right) \\ &= \frac{d}{\deg H^d} \deg\left(H^{d-1} \cdot D_\alpha(H)\right). \end{aligned}$$

$\square$

Nous appliquons à présent la proposition 3.3.36 aux endomorphismes de Z qui sont au cœur de notre étude, à savoir les polynômes en σ.

Théorème 3.3.38 - *Soit C une courbe complexe projective lisse (pas nécessairement hyperelliptique) munie d'un automorphisme $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ d'ordre fini (premier ou non). On continue de noter $(Z, \eta := \iota_Z^* \theta)$ la variété de Prym généralisée associée à σ et munie de sa polarisation naturelle. Soient $d := \dim Z$ et $P(\sigma^2) = \sum_{i=0}^k m_i \sigma^{2i} \in \mathrm{End}(Z)$ un polynôme en σ^2 à coefficients entiers positifs non tous nuls. Alors pour tout entier $q \in [\![0, 2d]\!]$, la relation $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$ s'écrit :*

$$\Sigma^{2d-q}(P(\sigma^2)) - \frac{1}{\deg \eta^d} \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \binom{d}{i, q-2i, i+d-q} \deg\left(\eta^i \cdot D_{P(\sigma^2)}(\eta)^{q-2i} \cdot \left(P(\sigma^2)^* \eta\right)^{i+d-q}\right) = 0,$$

où les classes de diviseurs $D_{P(\sigma^2)}(\eta)$ et $P(\sigma^2)^*\eta$ se calculent de la manière suivante :

$$D_{P(\sigma^2)}(\eta) = \sum_{i=0}^{k} m_i(\sigma^i + \sigma^{-i})^*\eta - 2\sum_{i=0}^{k} m_i\eta,$$

$$\textit{et} \quad P(\sigma^2)^*\eta = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} m_im_j(\sigma^{i-j} + \sigma^{-(i-j)})^*\eta + \left(2\sum_{i=0}^{k} m_i^2 - \Big(\sum_{i=0}^{k} m_i\Big)^2\right)\eta.$$

Démonstration. On applique la proposition 3.3.36 avec $A = Z$ et $\alpha = P(\sigma^2)$. Il ne reste alors qu'à donner une expression simple et explicite des classes de diviseurs $D_{P(\sigma^2)}(\eta)$ et $P(\sigma^2)^*\eta$; ce que l'on fait en s'appuyant sur le lemme 3.2.1.

Calcul de $P(\sigma^2)^*\eta$:

$$\begin{aligned} P(\sigma^2)^*\eta &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(m_i-1)m_i}{2}(\sigma^{2i} + \sigma^{2i})^*\eta + \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} m_im_j(\sigma^{2i} + \sigma^{2j})^*\eta - \sum_{i=0}^{k} m_i\left(\sum_{i=0}^{k} m_i - 2\right)\eta \\ &= \sum_{i=0}^{k} 2m_i(m_i-1)\eta + \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} m_im_j(\sigma^{i-j} + \sigma^{-(i-j)})^*\eta - \sum_{i=0}^{k} m_i\left(\sum_{i=0}^{k} m_i - 2\right)\eta \end{aligned}$$

car $(\sigma^{2i} + \sigma^{2i})^*\eta = \sigma^{2i*}2^*\eta = 2^2\sigma^{2i*}\eta = 4\eta$ et

$$(\sigma^{2i} + \sigma^{2j})^*\eta = (\sigma^{i-j} + \sigma^{j-i})^*\sigma^{(i+j)*}\eta = (\sigma^{i-j} + \sigma^{-(i-j)})^*\eta.$$

D'où

$$P(\sigma^2)^*\eta = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} m_im_j(\sigma^{i-j} + \sigma^{-(i-j)})^*\eta + \left(2\sum_{i=0}^{k} m_i^2 - \Big(\sum_{i=0}^{k} m_i\Big)^2\right)\eta.$$

Calcul de $D_{P(\sigma^2)}(\eta)$: Par définition de $D_{P(\sigma^2)}(\eta)$ (cf. Proposition 3.3.36) et en utilisant les calculs précédents, on obtient

$$\begin{aligned} &D_{P(\sigma^2)}(\eta) := \left(1 + \sum_{i=0}^{k} m_i\sigma^{2i}\right)^*\eta - \left(\sum_{i=0}^{k} m_i\sigma^{2i}\right)^*\eta - \eta \\ &= \sum_{i=0}^{k} m_i(1+\sigma^{2i})^*\eta + 2\sum_{i=0}^{k} m_i(m_i-1)\eta + \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} m_im_j(\sigma^{i-j} + \sigma^{-(i-j)})^*\eta - \left(\sum_{i=0}^{k} m_i + 1\right)\left(\sum_{i=0}^{k} m_i - 1\right)\eta \\ &\quad - \left(2\sum_{i=0}^{k} m_i(m_i-1)\eta + \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} m_im_j(\sigma^{i-j} + \sigma^{-(i-j)})^*\eta - \sum_{i=0}^{k} m_i\left(\sum_{i=0}^{k} m_i - 2\right)\eta\right) - \eta \\ &= \sum_{i=0}^{k} m_i(1+\sigma^{2i})^*\eta - 2\sum_{i=0}^{k} m_i\eta. \end{aligned}$$

On conclut comme avant en remarquant que $(1 + \sigma^{2i})^*\eta = (\sigma^i + \sigma^{-i})^*\eta$ toujours parce que η est invariant sous l'action de σ^* (car θ l'est). □

Remarquons que les formules obtenues dans ce théorème font apparaître des cycles de la forme $(\sigma^i + \sigma^{-i})^*\eta$ (resp. $(\sigma^{i-j} + \sigma^{-(i-j)})^*\eta$), c'est-à-dire $4\omega_0$ si l'ordre de σ divise i (resp. si l'ordre de σ divise $i - j$), ou sinon ω_i (resp. ω_{i-j}). En pratique, lorsque σ est d'ordre premier $p > 2$, on se ramènera encore à des ω_k avec $k \in [\![0, \frac{p-3}{2}]\!]$ en utilisant l'égalité $\omega_k = \omega_{p-k}$ et le lemme 3.3.4.

Signalons enfin un aspect intéressant de ce théorème 3.3.38. Les formules obtenues sont totalement explicite : on peut les programmer et ainsi automatiser le calcul des relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$ pour des polynômes P arbitraires à coefficients entiers positifs. A ce sujet, on trouvera dans la sous-section 3.4.1 un code Sage effectuant ces calculs.

Exemples de relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$

Nous allons à présent donner quelques applications numériques de ces relations selon différentes valeurs de d et p. Les résultats obtenus nous serons utiles dans un second temps lorsqu'il s'agira de calculer des degrés de cycles algébriques, puis dans un troisième temps de donner des structures d'algèbres totalement explicites pour les anneaux tautologiques sur Z.

Notons aussi que les relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$ données par le théorème 3.3.38 traduisent des égalités entre les degrés de classes de cycles algébriques de codimension maximale $d = \dim Z$. Or $\mathrm{A}^d(Z) \simeq \mathbb{Q}$. Autrement dit, les relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$ fournissent des relations linéaires entre des classes de cycles qui s'expriment comme des monômes de degré d en les ω_i.

Enfin, rappelons ce que nous avions déjà remarqué dans la sous-section 3.1.2 ou encore dans le lemme 3.3.35. Si C est une courbe de genre $g \geqslant 1$ admettant un automorphisme σ d'ordre $p > 2$ premier, alors Z est une variété abélienne de dimension d telle que $p-1$ divise $2d$. Par conséquent,

1. si $d = 2$, alors $p \in \{3, 5\}$,
2. si $d = 3$, alors $p \in \{3, 7\}$,
3. si $d = 4$, alors $p \in \{3, 5\}$.

Par ailleurs, le cas $p = 3$ étant déjà traité, les exemples qui suivent seront détaillés uniquement pour $p \geqslant 5$.

Exemple 3.3.39 ($(d, p) = (2, 5)$ et $P(\sigma^2) = \sigma^{2k}$) **:** Pour $d = 2$ et $p = 5$, on obtient les relations suivantes

(i) $\mathcal{R}_0(\sigma^{2k}, \eta) : 0 = 0$,
(ii) $\mathcal{R}_1(\sigma^{2k}, \eta) : 3\omega_0^2 - 2\omega_0\omega_k = 0$,
(iii) $\mathcal{R}_2(\sigma^{2k}, \eta) : -5\omega_0^2 + 4\omega_0\omega_k - \omega_k^2 = 0$,
(iv) $\mathcal{R}_3(\sigma^{2k}, \eta) : 3\omega_0^2 - 2\omega_0\omega_k = 0$,
(v) $\mathcal{R}_4(\sigma^{2k}, \eta) : 0 = 0$.

Dans ce cas, la combinaison linéaire $2 \times (ii) + (iii)$ permet de (re)trouver la relation plus simple $\omega_0^2 - \omega_k^2 = 0$.

Exemple 3.3.40 ($(d, p) = (4, 5)$ et $P(\sigma^2) = \sigma^{2k}$) **:** Si $d = 4$ et $p = 5$, on obtient :

(i) $\mathcal{R}_0(\sigma^{2k}, \eta) : 0 = 0$,
(ii) $\mathcal{R}_1(\sigma^{2k}, \eta) : 6\omega_0^4 - 4\omega_0^3\omega_k = 0$,
(iii) $\mathcal{R}_2(\sigma^{2k}, \eta) : -25\omega_0^4 + 24\omega_0^3\omega_k - 6\omega_1^2\omega_k^2 = 0$,
(iv) $\mathcal{R}_3(\sigma^{2k}, \eta) : 52\omega_0^4 - 60\omega_0^3\omega_k + 24\omega_0^2\omega_k^2 - 4\omega_0\omega_k^3 = 0$,
(v) $\mathcal{R}_4(\sigma^{2k}, \eta) : -65\omega_0^4 + 80\omega_0^3\omega_k - 36\omega_0^2\omega_k^2 + 8\omega_0\omega_k^3 - \omega_k^4 = 0$,
(vi) $\mathcal{R}_5(\sigma^{2k}, \eta) : 52\omega_0^4 - 60\omega_0^3\omega_k + 24\omega_0^2\omega_k^2 - 4\omega_0\omega_k^3 = 0$,
(vii) $\mathcal{R}_6(\sigma^{2k}, \eta) : -25\omega_0^4 + 24\omega_0^3\omega_k - 6\omega_1^2\omega_k^2 = 0$,
(viii) $\mathcal{R}_7(\sigma^{2k}, \eta) : 6\omega_0^4 - 4\omega_0^3\omega_k = 0$,
(ix) $\mathcal{R}_8(\sigma^{2k}, \eta) : 0 = 0$.

Exemple 3.3.41 ($(d, p) = (3, 7)$ et $P(\sigma^2) = \sigma^{2k}$) **:** En dimension 3 et avec un automorphisme d'ordre 7, on a les relations

(i) $\mathcal{R}_0(\sigma^{2k}, \eta)$: $0 = 0$,
(ii) $\mathcal{R}_1(\sigma^{2k}, \eta)$: $5\omega_0^3 - 3\omega_0^2\omega_k = 0$,
(iii) $\mathcal{R}_2(\sigma^{2k}, \eta)$: $-14\omega_0^3 + 12\omega_0^2\omega_k - 3\omega_0\omega_k^2 = 0$,
(iv) $\mathcal{R}_3(\sigma^{2k}, \eta)$: $19\omega_0^3 - 18\omega_0^2\omega_k + 6\omega_0\omega_k^2 - \omega_k^3 = 0$,
(v) $\mathcal{R}_4(\sigma^{2k}, \eta)$: $-14\omega_0^3 + 12\omega_0^2\omega_k - 3\omega_0\omega_k^2 = 0$,
(vi) $\mathcal{R}_5(\sigma^{2k}, \eta)$: $5\omega_0^3 - 3\omega_0^2\omega_k = 0$,
(vii) $\mathcal{R}_6(\sigma^{2k}, \eta)$: $0 = 0$.

On observe sur ces derniers exemples une symétrie entre les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta)$ et $\mathcal{R}_{2d-q}(\sigma^{2k}, \eta)$. Ceci est un fait général concernant les relations $\mathcal{R}_q(\alpha, H)$ lorsque α est un endomorphisme stabilisant la polarisation H, c'est-à-dire tel que $\alpha^*H = H$ (cf. Proposition 3.5.2). On apportera quelques compléments concernant ces relations dans la sous-section 3.5.1.

Exemple 3.3.42 ($(d,p) = (3,7)$ et $P(\sigma^2) = \sigma^2+\sigma^4$) **:** Dans le cas plus compliqué où $P(\sigma^2) = \sigma^2+\sigma^4$, on obtient les relations suivantes :

(i) $\mathcal{R}_0(\sigma^2 + \sigma^4, \eta)$: $\omega_0^3 - \omega_1^3 = 0$,
(ii) $\mathcal{R}_1(\sigma^2 + \sigma^4, \eta)$: $-4\omega_0^3 + 12\omega_0\omega_1^2 - 3\omega_1^3 - 3\omega_1^2\omega_2 = 0$,
(iii) $\mathcal{R}_2(\sigma^2 + \sigma^4, \eta)$: $9\omega_0^3 - 48\omega_0^2\omega_1 + 21\omega_0\omega_1^2 + 24\omega_0\omega_1\omega_2 - 3\omega_1^3 - 6\omega_1^2\omega_2 - 3\omega_1\omega_2^2 = 0$,
(iv) $\mathcal{R}_3(\sigma^2 + \sigma^4, \eta)$: $56\omega_0^3 - 24\omega_0^2\omega_1 - 48\omega_0^2\omega_2 + 6\omega_0\omega_1^2 + 12\omega_0\omega_2^2 + 18\omega_0\omega_1\omega_2 - \omega_1^3 - 3\omega_1^2\omega_2 - 3\omega_1\omega_2^2 - \omega_2^3 = 0$,
(v) $\mathcal{R}_4(\sigma^2 + \sigma^4, \eta)$: $-44\omega_0^3 + 21\omega_0^2\omega_1 + 24\omega_0^2\omega_2 - 3\omega_0\omega_1^2 - 6\omega_0\omega_1\omega_2 - 3\omega_0\omega_2^2 = 0$,
(vi) $\mathcal{R}_5(\sigma^2 + \sigma^4, \eta)$: $10\omega_0^3 - 3\omega_0^2\omega_1 - 3\omega_0^2\omega_2 = 0$,
(vii) $\mathcal{R}_6(\sigma^2 + \sigma^4, \eta)$: $0 = 0$.

Application au calcul des degrés des $\omega_0^{d-\sum \alpha_k}\omega_1^{\alpha_1}\cdots\omega_{(p-3)/2}^{\alpha_{(p-3)/2}}$

Nous allons à présent tirer profit des relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$. En effet, et comme on l'a déjà vu, celles-ci traduisent des relations linéaires entre les degrés de classes de cycles qui s'expriment comme des monômes de degré d en les ω_i. Se rappelant la proposition 3.3.14 et sous réserve de considérer suffisamment de relations de la forme $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$ pour une famille suffisamment variée de polynômes $P(\sigma^2)$, une résolution élémentaire d'un système linéaire doit permettre de déterminer de manière unique le degré de chaque cycle s'exprimant comme un monôme de degré d en les ω_i. C'est l'idée utilisée pour obtenir les exemples de ce paragraphe. Ici encore, ils sont obtenus à partir de Sage grâce au programme de la sous-section 3.4.2. Nous reviendrons sur ces exemples dans la sous-section 3.5.2 avec des formules plus générales.

Remarque 3.3.43 : L'existence d'une famille de polynômes en σ^2 dont les relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$ déterminent de manière unique le degré de tous les cycles qui s'expriment comme des monômes de degré d en les ω_i est une hypothèse tout à fait vraisemblable et confortée par les exemples à venir. Cependant la complexité des relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$ rend très difficile de démontrer ce fait de manière générale pour des couples (d,p) arbitraires. Nous donnerons toutefois des résultats précis qui vont dans ce sens à la sous-section 3.5.2 avec notamment la proposition 3.5.10.

Les calculs de degrés qui suivent pour un automorphisme d'ordre 5 ont été faits en utilisant les relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$ construites à partir du seul polynôme $P(\sigma^2) = \sigma^2$.

Exemple 3.3.44 ($(d,p) = (2,5)$) **:**

1. $\deg \omega_0^2 = 2\chi(\eta)$,
2. $\deg \omega_0\omega_1 = 3\chi(\eta)$,
3. $\deg \omega_1^2 = 2\chi(\eta)$.

Exemple 3.3.45 ($(d,p) = (4,5)$) **:**

1. $\deg \omega_0^4 = 24\chi(\eta)$,
2. $\deg \omega_0^3\omega_1 = 36\chi(\eta)$,
3. $\deg \omega_0^2\omega_1^2 = 44\chi(\eta)$,
4. $\deg \omega_0\omega_1^3 = 36\chi(\eta)$,
5. $\deg \omega_1^4 = 24\chi(\eta)$.

Exemple 3.3.46 ($(d,p) = (6,5)$) **:**

1. $\deg \omega_0^6 = 720\chi(\eta)$,
2. $\deg \omega_0^5\omega_1 = 1080\chi(\eta)$,
3. $\deg \omega_0^4\omega_1^2 = 1440\chi(\eta)$,
4. $\deg \omega_0^3\omega_1^3 = 1620\chi(\eta)$,
5. $\deg \omega_0^2\omega_1^4 = 1440\chi(\eta)$,
6. $\deg \omega_0\omega_1^5 = 1080\chi(\eta)$,
7. $\deg \omega_1^6 = 720\chi(\eta)$.

Ces premiers exemples mettent en évidence une nouvelle symétrie lorsque σ est d'ordre 5. Il semblerait qu'on ait :

$$\deg \omega_0^{d-q}\omega_1^q = \deg \omega_0^q\omega_1^{d-q}.$$

C'est effectivement le cas, même en dimension supérieure. Nous y reviendrons dans la sous-section 3.5.2.

Dans le cas $(d,p) = (3,7)$, les seules relations de la forme $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k},\eta)$ ne suffisent pas pour déterminer tous les degrés, notamment le degré de $\omega_0\omega_1\omega_2$ ou encore les degrés de $\omega_1^2\omega_2$ et $\omega_1\omega_2^2$. En revanche, en considérant par exemple la famille de polynômes $\{\sigma^2, \sigma^4, \sigma^2+\sigma^4\}$, on aboutit au résultat suivant :

Exemple 3.3.47 ($(d,p) = (3,7)$) **:**

1. $\deg \omega_0^3 = 6\chi(\eta)$,
2. $\deg \omega_0^2\omega_1 = \deg \omega_0^2\omega_2 = 10\chi(\eta)$,
3. $\deg \omega_0\omega_1^2 = \deg \omega_0\omega_2^2 = 12\chi(\eta)$,
4. $\deg \omega_0\omega_1\omega_2 = 19\chi(\eta)$.
5. $\deg \omega_1^3 = 6\chi(\eta)$,
6. $\deg \omega_1^2\omega_2 = 34\chi(\eta)$,
7. $\deg \omega_1\omega_2^2 = 20\chi(\eta)$,
8. $\deg \omega_2^3 = 6\chi(\eta)$.

La méthode présentée jusqu'ici avec les polynômes caractéristiques doit donc permettre de déterminer toutes les relations en codimension maximale entre les générateurs $\omega_0,\ldots,\omega_{\frac{p-3}{2}}$ de l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) \subset \mathrm{A}(Z)$ dans le cas où C est hyperelliptique de genre $g \geqslant 1$ et $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ est d'ordre $p > 2$ premier. Par ailleurs, signalons que tout ce raisonnement peut s'adapter pour étudier le degré de cycles sur d'autres variétés abéliennes que Z (par exemple les cycles γ_i sur les Jacobiennes) à condition d'avoir un contrôle suffisamment bon de l'automorphisme sur la variété abélienne en question ; suffisamment bon signifiant « être capable de calculer les $\mathrm{Tr}(\sigma^k)$ ».

3.3.5 Relations en codimension quelconque entre les ω_i

Maintenant qu'on dispose d'une méthode pour calculer les degrés des $\omega_0^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1}\cdots\omega_{(p-3)/2}^{\alpha_{(p-3)/2}}$ où les α_i sont des entiers naturels vérifiant $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{\frac{p-3}{2}} = d$, intéressons-nous aux conséquences que cela a en codimension inférieure.

Recherche de relations monômiales

Commençons par un résultat très simple.

Proposition 3.3.48 - *Soient* $0 \leqslant i_0 < i_1 < \ldots < i_k \leqslant \frac{p-3}{2}$ *des entiers et* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ *tels que* $\sum_{i=0}^k \alpha_i \leqslant d$. *On suppose que* $\omega_{i_0}^{\alpha_0}\omega_{i_1}^{\alpha_1}\cdots\omega_{i_k}^{\alpha_k} \neq 0$. *Alors*

$$\forall(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k) \in [\![0, \alpha_0]\!] \times \ldots \times [\![0, \alpha_k]\!], \qquad \omega_{i_0}^{\beta_0}\omega_{i_1}^{\beta_1}\cdots\omega_{i_k}^{\beta_k} \neq 0 \quad \textit{dans } \mathrm{A}^{\beta_0+\ldots+\beta_k}(Z).$$

Démonstration. Par l'absurde. Si pour certains entiers $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k) \in [\![0, \alpha_0]\!] \times \ldots \times [\![0, \alpha_k]\!]$, on avait $\omega_{i_0}^{\beta_0}\omega_{i_1}^{\beta_1}\cdots\omega_{i_k}^{\beta_k}$, alors quitte à intersecter encore par $\omega_{i_0}^{\alpha_0-\beta_0}\omega_{i_1}^{\alpha_1-\beta_1}\cdots\omega_{i_k}^{\alpha_k-\beta_k}$, on obtiendrait $\omega_{i_0}^{\alpha_0}\omega_{i_1}^{\alpha_1}\cdots\omega_{i_k}^{\alpha_k} = 0$; ce qui contredirait l'hypothèse. □

En particulier pour $\sum_i \alpha_i = d$, ce lemme motive l'étude du degré des $\omega_{i_0}^{\alpha_0}\omega_{i_1}^{\alpha_1}\cdots\omega_{i_k}^{\alpha_k}$ réalisée précédemment.

Corollaire 3.3.49 - *Soient* $0 \leqslant i_0 < i_1 < \ldots < i_k \leqslant \frac{p-3}{2}$ *des entiers. On suppose que pour tous entiers naturels* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *tels que* $\sum_{i=0}^k \alpha_i = d$, *on a* $\omega_{i_0}^{\alpha_0}\omega_{i_1}^{\alpha_1}\cdots\omega_{i_k}^{\alpha_k} \neq 0$. *Alors pour tout* $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k) \in [\![0, d]\!]^{k+1}$ *tel que* $\sum_i \beta_i \leqslant d$, *on a*

$$\omega_{i_0}^{\beta_0}\omega_{i_1}^{\beta_1}\cdots\omega_{i_k}^{\beta_k} \neq 0 \quad \textit{dans } \mathrm{A}^{\beta_0+\ldots+\beta_k}(Z).$$

Autrement dit, les relations monômiales formées à partir de $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\frac{p-3}{2}}$ *sont engendrées par les relations*

$$\omega_0^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1}\cdots\omega_{(p-3)/2}^{\alpha_{(p-3)/2}} = 0 \qquad \textit{où les } \alpha_i \in [\![0, d]\!] \textit{ vérifient } \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \alpha_i = d+1.$$

En d'autres mots, il n'existe pas de relation monômiale non triviale (c'est-à-dire en codimension $\leqslant d$*).*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.3.48. □

Exemple 3.3.50 : Le corollaire 3.3.49 s'applique par exemple

1. lorsque $p = 3$ et $d \geqslant 1$,
2. lorsque $(d, p) \in \{(2, 5), (3, 7), (4, 5), (6, 5)\}$ d'après les exemples de la sous-section précédente.

Autrement dit, le corollaire 3.3.49 s'applique (au moins) dès que $d = 1, 2, 3$ ou 4.

Plus généralement, on peut formuler la conjecture suivante :

Conjecture 3.3.51 : Soit C une courbe de genre $g \geqslant 1$ admettant un automorphisme σ d'ordre $p > 2$. Alors pour tous $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{p-3}{2}} \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \alpha_i = d$, on a

$$\omega_0^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1} \cdots \omega_{(p-3)/2}^{\alpha_{(p-3)/2}} \neq 0.$$

Plus précisément, les précédents exemples (mais aussi ceux à venir) suggèrent que

$$\deg \omega_0^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1} \cdots \omega_{(p-3)/2}^{\alpha_{(p-3)/2}} \geqslant \deg \omega_0^d = d! \cdot \chi(\eta).$$

La suite de cette section vise à étudier le cas bien plus compliqué des relations non monômiales.

Dimension des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) \cap \mathrm{A}^q(Z)$

Soit C une courbe hyperelliptique de genre $g \geqslant 1$ admettant un automorphisme σ d'ordre $p > 2$ premier. D'après la proposition 3.3.5, l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) \subset \mathrm{A}(Z)$ est engendré en tant que $\mathbb{Q}$-algèbre par les $\frac{p-1}{2}$ générateurs homogènes $\omega_0, \ldots, \omega_{\frac{p-3}{2}} \in \mathrm{A}^1(Z)_{(0)}$. Une conséquence directe de ceci est que l'algèbre $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est bigraduée. Précisément, si l'on note

$$R^q := R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) \cap \mathrm{A}^q(Z) \qquad \text{et} \qquad R^q_{(s)} := R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) \cap \mathrm{A}^q(Z)_{(s)} \subset R^q,$$

alors pour tout $q \in [\![0, d]\!]$, on a la décomposition de Beauville (triviale) suivante

$$R^q = \bigoplus_{s=q-d}^{q} R^q_{(s)} = R^q_{(0)}.$$

Le lemme suivant est fondamental dans la suite de l'étude des relations en codimension quelconque.

Lemme 3.3.52 - *Soit C une courbe hyperelliptique admettant un automorphisme $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ d'ordre $p > 2$ premier. La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathrm{A}(Z) \to \mathrm{A}(Z)$ induit un isomorphisme entre les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels R^q et R^{d-q} pour tout $q \in [\![0, d]\!]$. En particulier,* $\dim_{\mathbb{Q}} R^q = \dim_{\mathbb{Q}} R^{d-q}$.

Démonstration. L'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est stable par transformée de Fourier : c'était l'argument qui nous a permis de montrer que $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est stable par produit de Pontryagin. Ainsi, $\mathcal{F}$ se restreint en un isomorphisme de $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$. Par ailleurs, par propriétés de $\mathcal{F}$, on a pour tout $q \in [\![0, d]\!]$

$$\mathcal{F}(R^q) = \mathcal{F}(R^q_{(0)}) = R^{d-q+0}_{(0)} = R^{d-q}.$$

D'où le lemme. $\square$

Remarque 3.3.53 : Le fait que $R^q = R^q_{(0)}$ est tout à fait essentiel ici. C'est à ce moment qu'intervient une fois de plus l'hyperellipticité de la courbe (dont on sait qu'elle implique la condition $C = C_{(0)} \in \mathrm{A}(J)_{(0)}$).

Fixons à présent un entier $q \in [\![0, d]\!]$ et intéressons-nous plus en détail à la structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de R^q. Celui-ci est engendré par les monômes de la forme

$$\omega_0^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1} \cdots \omega_{(p-3)/2}^{\alpha_{(p-3)/2}} \in R^q \qquad \text{où pour tout } i,\ \alpha_i \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \alpha_i = q.$$

Autrement dit,

$$\dim_{\mathbb{Q}} R^q \leqslant \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}.$$

En effet, $\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$ est la dimension de l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré q en $\frac{p-1}{2}$ indéterminées (les ω_i). Une relation « générale » entre les ω_i dépend donc d'au plus $\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$ paramètres.

Cherchons maintenant à minorer la dimension de R^q, ce qui revient à majorer la dimension de l'espace des relations en codimension q. Pour cela, on reprend la méthode expliquée précédemment qui consiste à augmenter la codimension jusqu'à son maximum d. Notez que pour ce faire, on peut intersecter avec $\binom{\frac{p-1}{2}+d-q-1}{d-q}$ monômes différents en les ω_i : cet entier correspond à la dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré $d-q$ en $\frac{p-1}{2}$ indéterminées.

De manière plus détaillée, le processus est le suivant. On commence par fixer un ordre sur les monômes $\omega_0^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1}\cdots\omega_{(p-3)/2}^{\alpha_{(p-3)/2}}$. Ensuite, connaissant les degrés de chaque monôme de codimension maximale d en les ω_i, chaque intersection de la relation générale avec l'un de ces $\binom{\frac{p-1}{2}+d-q-1}{d-q}$ monômes fournit une équation linéaire en les $\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$ paramètres de la relation générale en codimension q. Ceci définit donc pour chaque entier q un système linéaire $(\Sigma^q_{(d,p)})$ en les paramètres de la relation générale de codimension q (les entiers d et p étant fixés).

Remarque 3.3.54 : Les systèmes $(\Sigma^q_{(d,p)})$ dépendent du choix de l'ordre fixé pour ordonner les monômes $\omega_0^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1}\cdots\omega_{(p-3)/2}^{\alpha_{(p-3)/2}}$. Cependant un choix d'ordre différent fournit des systèmes équivalents. Précisément un changement d'ordre a pour effet de multiplier à droite et à gauche les systèmes $(\Sigma^q_{(d,p)})$ par des matrices de permutations. En particulier, les rangs de ces systèmes sont bien définis.

Ceci étant dit, les relations en codimension q forment un sous-espace d'une famille paramétrée de « possibles » relations dont le nombre de paramètres est égal à la dimension du noyau du système $(\Sigma^q_{d,p})$:

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}} R^q &= \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q} - \dim_{\mathbb{Q}}\left\{\text{espace des relations en codimension } q \text{ entre } \omega_0,\ldots,\omega_{\frac{p-3}{2}}\right\}\\ &\geqslant \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q} - \dim_{\mathbb{Q}}\left\{\text{espace des « possibles » relations en codimension } q \text{ entre } \omega_0,\ldots,\omega_{\frac{p-3}{2}}\right\}\\ &= rg(\Sigma^q_{d,p}).\end{aligned}$$

On a donc obtenu la proposition qui suit.

Proposition 3.3.55 - *Soit C une courbe hyperelliptique de genre $g \geqslant 1$ admettant un automorphisme σ d'ordre $p>2$ premier. Soit $q \in [\![0,\frac{d}{2}]\!]$. Alors*

$$rg(\Sigma^q_{d,p}) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}} R^q = \dim_{\mathbb{Q}} R^{d-q} \leqslant \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}.$$

En particulier, puisque l'on travaille modulo équivalence algébrique, on retrouve le fait que

$$\dim_{\mathbb{Q}} R^0 = \dim_{\mathbb{Q}} R^d = 1.$$

Corollaire 3.3.56 - *Soit C une courbe hyperelliptique de genre $g \geqslant 1$ admettant un automorphisme σ d'ordre $p > 2$ premier. Soit $q \in [\![0, \frac{d}{2}]\!]$. On suppose que le système $(\Sigma^q_{(d,p)})$ est de rang maximal. Alors*

$$\dim_{\mathbb{Q}} R^q = \dim_{\mathbb{Q}} R^{d-q} = \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}.$$

Démonstration. Notons que la fonction définie sur $[\![0, d]\!]$ par

$$f_{(d,p)}(n) := \binom{\frac{p-1}{2}+n-1}{n} - \binom{\frac{p-1}{2}+d-n-1}{d-n}$$

vérifie $f_{(d,p)}(n) = -f_{(d,p)}(d-n))$. Par conséquent, elle s'annule en $n = \frac{d}{2}$ (si d est pair). Dans tous les cas, en revenant à l'interprétation de $\binom{\frac{p-1}{2}+n-1}{n}$ et $\binom{\frac{p-1}{2}+d-n-1}{d-n}$ en termes de dimension d'espaces de polynômes homogènes, on constate que $f_{(d,p)}$ est négative sur $[\![0, \frac{d}{2}]\!]$ et positive sur $[\![\frac{d}{2}, d]\!]$. Par suite, l'hypothèse selon laquelle $(\Sigma^q_{(d,p)})$ est de rang maximal pour l'entier $q \in [\![0, \frac{d}{2}]\!]$ fixé signifie simplement que

$$rg(\Sigma^q_{(d,p)}) = \min\left(\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}, \binom{\frac{p-1}{2}+d-q-1}{d-q}\right) = \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}.$$

La proposition précédente se traduit donc par les inégalités

$$\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q} \leqslant \dim_{\mathbb{Q}} R^q \leqslant \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$$

auquel cas, on a exactement

$$\dim_{\mathbb{Q}} R^q = \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$$

et puisque l'on a aussi $\dim_{\mathbb{Q}} R^q = \dim_{\mathbb{Q}} R^{d-q}$ d'après le lemme 3.3.52, on a le résultat. □

Si les systèmes $\Sigma^q_{(d,p)}$ sont de rang maximaux, la situation est donc totalement comprise. Comme on le verra dans les exemples suivants, ce n'est toutefois pas toujours le cas lorsque d et p augmentent. Cependant, même dans ces situations plus complexes, on pourra en déduire des informations intéressantes quant à la structure de $\mathbb{Q}$-algèbre de l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$.

Application à l'étude des relations en codimension quelconque

C'est ce lien entre dimension de l'espace R^q, nombre de générateurs et dimension de l'espace des relations qui va nous permettre de trouver toutes les relations en codimension q quelconque (toujours sous réserve de savoir que le système $(\Sigma^q_{(d,p)})$ est de rang maximal). Mais avant d'énoncer le résultat, mettons en évidence une dernière propriété des systèmes $(\Sigma^q_{(d,p)})$.

Lemme 3.3.57 - *Soit $q \in [\![0, d]\!]$. On fixe un ordre sur les monômes $\omega_0^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1}\cdots\omega_{(p-3)/2}^{\alpha_{(p-3)/2}}$ (par exemple l'ordre lexicographique). Alors les systèmes $(\Sigma^q_{(d,p)})$ et $(\Sigma^{d-q}_{(d,p)})$ sont transposés l'un de l'autre :*

$$(\Sigma^{d-q}_{(d,p)}) \; = \; {}^t(\Sigma^q_{(d,p)}).$$

En particulier, ils ont même rang.

Démonstration. Ce lemme découle de la construction même des systèmes $(\Sigma^q_{(d,p)})$. On considère l'ordre lexicographique (par exemple) pour ordonner les monômes $\omega_0^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1}\cdots\omega_{(p-3)/2}^{\alpha_{(p-3)/2}}$. Supposons sans restreindre la généralité que $q \leqslant \frac{d}{2}$. Les monômes en codimension q et $d-q$ forment donc deux familles ordonnées que l'on peut noter respectivement

$$(\alpha_j)_{1\leqslant j\leqslant \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}} \qquad \text{et} \qquad (\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant \binom{\frac{p-1}{2}+d-q-1}{d-q}}.$$

Le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1, \binom{\frac{p-1}{2}+d-q-1}{d-q}]\!] \times [\![1, \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}]\!]$ du système $(\Sigma^q_{(d,p)})$ n'est rien d'autre que $\deg \alpha_j\beta_i$. Ce coefficient est précisément le coefficient d'indice (j,i) du système $(\Sigma^{d-q}_{(d,p)})$. Les systèmes $(\Sigma^q_{(d,p)})$ et $(\Sigma^{d-q}_{(d,p)})$ sont donc bien transposés l'un de l'autre. En particulier, ils ont le même rang. □

Théorème 3.3.58 - *Soit C une courbe hyperelliptique de genre $g \geqslant 1$ admettant un automorphisme σ d'ordre $p > 2$ premier. Soit $q \in [\![0, \frac{d}{2}]\!]$. On suppose que le système $(\Sigma^q_{(d,p)})$ est de rang maximal. Alors il n'existe pas de relation non triviale en codimension q entre $\omega_0, \ldots, \omega_{\frac{p-3}{2}}$ tandis que les relations en codimension $d-q$ forment un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de R^{d-q} de dimension*

$$r_{d-q} := \binom{\frac{p-1}{2}+d-q-1}{d-q} - \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$$

dont on peut déterminer une base explicite à partir du système $(\Sigma^q_{(d,p)})$.

Démonstration. Si $(\Sigma^q_{(d,p)})$ est de rang maximal, c'est-à-dire de rang $\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$ puisque $q \leqslant \frac{d}{2}$, alors le corollaire 3.3.56 montre que

$$\dim_{\mathbb{Q}} R^q = \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}.$$

Par suite, les $\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$ générateurs correspondant aux $\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$ monômes de degré q formés à partir de $\omega_0, \ldots, \omega_{\frac{p-3}{2}}$ sont linéairement indépendants et forment donc une base de R^q. Autrement dit, il n'existe pas de relation (non triviale) en codimension q entre les ω_i.

D'après ce même corollaire 3.3.56 ou plus directement d'après le lemme 3.3.52, on en déduit également que

$$\dim_{\mathbb{Q}} R^{d-q} = \dim_{\mathbb{Q}} R^q = \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}.$$

Par ailleurs, on dispose d'une famille génératrice de R^{d-q}. Cette famille est formée par les $\binom{\frac{p-1}{2}+d-q-1}{d-q}$ monômes de degrés $d-q$ en les ω_i. Par conséquent, le $\mathbb{Q}$-espace des relations en codimension $d-q$ est de dimension

$$r_{d-q} := \binom{\frac{p-1}{2}+d-q-1}{d-q} - \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}.$$

D'autre part, $(\Sigma^{d-q}_{(d,p)})$ est un système formé par $\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$ équations (chacune d'elles correspondant aux formules obtenues en intersectant une combinaison linéaire générale de codimension $d-q$ par chacun des $\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$ monômes de degré q) à $\binom{\frac{p-1}{2}+d-q-1}{d-q}$ inconnues (chacune d'elles correspondant à un monôme générateur de R^{d-q} de degré $d-q$). Comme le système $(\Sigma^q_{(d,p)})$ est supposé de rang maximal, le lemme 3.3.57 précédent montre qu'il en est de même du système $(\Sigma^{d-q}_{(d,p)})$ et donc que

$$rg(\Sigma^{d-q}_{(d,p)}) = \text{nombre de lignes de } (\Sigma^{d-q}_{(d,p)}) = \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q} = rg(\Sigma^q_{(d,p)}).$$

Dans ce cas, la méthode qui consiste à augmenter la codimension $d-q$ d'une relation jusqu'à son maximum d met en évidence que les relations en codimension $d-q$ forment un sous-espace vectoriel d'une famille de « possibles » relations qui est elle de dimension

$$\begin{aligned} & \text{nombre de colonnes de } (\Sigma_{(d,p)}^{d-q}) - rg(\Sigma_{(d,p)}^{d-q}) \\ = \ & \binom{\frac{p-1}{2}+d-q-1}{d-q} - \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q} \\ = \ & r_{d-q}. \end{aligned}$$

Autrement dit, chaque combinaison linéaire dans cette famille de « possibles » relations est réellement une relation dans R^{d-q}. On connaît donc toutes les relations en codimension $d-q$ et en déterminer une base revient simplement à déterminer une base du noyau du système $(\Sigma_{(d,p)}^{d-q})$. Ceci termine la démonstration du résultat. □

Ce résultat est donc relativement fort puisque, modulo l'hypothèse sur le rang des $(\Sigma_{(d,p)}^{q})$, il montre que pour d,p arbitrairement grands, le simple fait de connaître le degré des monômes $\omega_0^{d-\sum\alpha_i}\omega_1^{\alpha_1}\cdots\omega_{(p-3)/2}^{\alpha_{(p-3)/2}}$ permet de connaître toutes les relations en codimensions q et $d-q \in [\![0,d]\!]$.

Finalement, une conséquence du théorème 3.3.58 est la suivante :

Théorème 3.3.59 - *Soit C une courbe hyperelliptique de genre $g \geqslant 1$ admettant un automorphisme σ d'ordre $p > 2$ premier. On suppose que pour tout $q \in [\![0, \frac{d}{2}]\!]$ les systèmes $(\Sigma_{(d,p)}^{q})$ sont de rang maximal $\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$. Alors l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ est donné par*

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z) = \mathbb{Q}[\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{\frac{p-3}{2}}]/I_{d,p}$$

où $I_{d,p}$ est l'idéal des relations entre les ω_i que l'on peut calculer explicitement à partir des systèmes $(\Sigma_{(d,p)}^{q})$. Par ailleurs, on obtient

1. *pour $q \leqslant \frac{d}{2}$, $\dim_{\mathbb{Q}} R^q = \dim_{\mathbb{Q}} R^{d-q} = \binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q}$,*
2. *et par conséquent,*

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}} R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z) &= \begin{cases} 2\sum_{q=0}^{\frac{d-1}{2}}\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q} & \textit{si } d \textit{ est impair,} \\ 2\sum_{q=0}^{\frac{d}{2}}\binom{\frac{p-1}{2}+q-1}{q} - \binom{\frac{p-1}{2}+\frac{d}{2}-1}{\frac{d}{2}} & \textit{si } d \textit{ est pair.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4\frac{k+1}{p-1}\binom{\frac{p-1}{2}+k}{k+1} & \textit{si } d = 2k+1, \\ 4\frac{k+1}{p-1}\binom{\frac{p-1}{2}+k}{k+1} - \binom{\frac{p-3}{2}+k}{k} & \textit{si } d = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. La première partie est une conséquence directe du théorème 3.3.58 puisque dans ce cas le fait de supposer tous les systèmes $(\Sigma_{(d,p)}^{q})$ de rang maximaux implique que l'on connaît toutes les relations entre les ω_i en codimension quelconque. Le point (1) de la seconde assertion concernant $\dim_{\mathbb{Q}} R^q$ découle du corollaire 3.3.56. Il ne reste qu'à calculer la dimension de $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$. Puisque

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z) = \bigoplus_{q=0}^{d} R^q,$$

la dimension de $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel est la somme des dimensions des sous-espaces R^q qui le composent. Ceci fournit la dernière assertion en utilisant le point (1) et Sage pour le calcul explicite de la somme. □

On notera en particulier que si les hypothèses de ce théorème 3.3.59 sont vérifiées pour un certain automorphisme σ d'ordre $p > 2$ premier, alors tout autre automorphisme de C du même ordre détermine à isomorphisme d'algèbres près la même structure d'anneau tautologique sur Z. On verra dans la sous-section suivante des situations où ceci ce produit, et plus tard, dans la sous-section 3.4.3, des situations où ce n'est pas le cas.

3.3.6 Applications : structure de $\mathbb{Q}$-algèbre de $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ en petite dimension

Il s'agit de donner ici la structure complète de $\mathbb{Q}$-algèbre de l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ lorsque Z est de petite dimension. Ces résultats sont présentés comme applications directes du programme donné dans la sous-section 3.4.2. Toutefois, nous reviendrons de manière détaillée sur ces exemples dans la partie 3.5.4. Ceci sera l'occasion de présenter le genre de calculs menés par Sage, ainsi que de mettre en perspective ces résultats de structure avec notamment les résultats déjà obtenus par ailleurs dans les sous-sections 3.3.2 et 3.3.3.

Les cas $(d, p) = (d, 2)$ **ou** $(d, 3)$

Ces cas là ont déjà été traités dans la sous-section 3.3.1. On les rappelle simplement par esprit de synthèse. Lorsque $p = 2$, on obtient :

Proposition 3.3.60 - *Soit $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ un revêtement double. On suppose que C est hyperelliptique ou trigonale. Alors*

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \mathbb{Q}[\omega_0]/(\omega_0^{d+1}).$$

Le cas des revêtements triples est donné par :

Proposition 3.3.61 - *Soit $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ un revêtement Galoisien cyclique de degré 3 avec C hyperelliptique. Alors*

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \mathbb{Q}[\omega_0]/(\omega_0^{d+1}).$$

Le cas $(d, p) = (2, 5)$

Proposition 3.3.62 - *Soit $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ un revêtement Galoisien cyclique de degré 5 avec C hyperelliptique. On suppose que* $\dim Z = 2$. *Alors*

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \mathbb{Q}[\omega_0, \omega_1]/(\omega_0^3, \omega_0^2 - \omega_1^2, 3\omega_0^2 - 2\omega_0\omega_1, \omega_1^3).$$

Le cas $(d, p) = (4, 5)$

Proposition 3.3.63 - *Soit $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ un revêtement Galoisien cyclique de degré 5 avec C hyperelliptique. On suppose que* $\dim Z = 4$. *Alors l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est de la forme $\mathbb{Q}[\omega_0, \omega_1]/I_{4,5}$ où $I_{4,5}$ est l'idéal des relations entre ω_0 et ω_1. Cet idéal est engendré par les relations suivantes*

1. $\omega_0^{5-i}\omega_1^i = 0$ *pour* $i \in [\![0, 5]\!]$,
2. $3\omega_0^4 - 2\omega_0^3\omega_1 = 0, \quad 11\omega_0^4 - 6\omega_0^2\omega_1^2 = 0, \quad 3\omega_0^4 - 2\omega_0\omega_1^3 = 0, \quad \omega_0^4 - \omega_1^4 = 0,$
3. $\omega_0^3 - 3\omega_0\omega_1^2 + 3\omega_1^3 = 0, \quad 3\omega_0^2\omega_1 - 9\omega_0\omega_1^2 + 8\omega_1^3 = 0.$

Le cas $(d,p) = (6,5)$

Proposition 3.3.64 - *Soit $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ un revêtement Galoisien cyclique de degré 5 avec C hyperelliptique. On suppose que* $\dim Z = 6$. *Alors l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est de la forme $\mathbb{Q}[\omega_0,\omega_1]/I_{6,5}$ où $I_{6,5}$ est l'idéal des relations entre ω_0 et ω_1. Cet idéal est engendré par les relations suivantes*

1. $\omega_0^{7-i}\omega_1^i = 0$ *pour* $i \in [\![0,7]\!]$,
2. $3\omega_0^6 - 2\omega_0^5\omega_1 = 0$, $2\omega_0^6 - \omega_0^4\omega_1^2 = 0$, $9\omega_0^6 - 4\omega_0^3\omega_1^3 = 0$, $\omega_0^6 - \omega_1^6 = 0$, $3\omega_0^6 - 2\omega_0\omega_1^5 = 0$, $2\omega_0^6 - \omega_0^2\omega_1^4 = 0$,
3. $\omega_0^5 - 5\omega_0\omega_1^4 + 6\omega_1^5 = 0$, $\omega_0^4\omega_1 - 6\omega_0\omega_1^4 + 7\omega_1^5 = 0$, $2\omega_0^3\omega_1^2 - 11\omega_0\omega_1^4 + 12\omega_1^5 = 0$, $2\omega_0^2\omega_1^3 - 6\omega_0\omega_1^4 + 5\omega_1^5 = 0$,
4. $\omega_0^4 - 6\omega_0^2\omega_1^2 + 12\omega_0\omega_1^3 - 8\omega_1^4 = 0$, $4\omega_0^3\omega_1 - 18\omega_0^2\omega_1^2 + 32\omega_0\omega_1^3 - 21\omega_1^4 = 0$.

Le cas $(d,p) = (3,7)$

Proposition 3.3.65 - *Soit $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ un revêtement Galoisien cyclique de degré 7 avec C hyperelliptique. On suppose que* $\dim Z = 3$. *Alors l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est de la forme $\mathbb{Q}[\omega_0,\omega_1,\omega_2]/I_{3,7}$ où $I_{3,7}$ est l'idéal des relations entre ω_0, ω_1 et ω_2. Cet idéal est engendré par les relations suivantes*

1. $\omega_0^{4-i-j}\omega_1^i\omega_2^j = 0$, *pour* $i,j \in [\![0,4]\!]$ *avec* $i+j \leqslant 4$,
2. $\omega_0^3 - \omega_1^3 = 0$, $\omega_0^3 - \omega_2^3 = 0$, $5\omega_0^3 - 3\omega_0^2\omega_1 = 0$, $5\omega_0^3 - 3\omega_0^2\omega_2 = 0$, $2\omega_0^3 - \omega_0\omega_1^2 = 0$, $2\omega_0^3 - \omega_0\omega_2^2 = 0$, $19\omega_0^3 - 6\omega_0\omega_1\omega_2 = 0$, $17\gamma_0^3 - 3\omega_1^2\omega_2 = 0$, $10\omega_0^3 - 3\omega_1\omega_2^2 = 0$,
3. $\omega_0^2 + 2\omega_0\omega_2 - 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2 = 0$, $2\omega_0\omega_1 + 20\omega_0\omega_2 - 16\omega_1\omega_2 + 7\omega_2^2 = 0$, $26\omega_0\omega_2 + \omega_1^2 - 20\omega_1\omega_2 + 9\omega_2^2 = 0$.

3.4 Programmation des calculs avec Sage

On donne dans cette section les codes sources des programmes Sage utilisés en pratique pour obtenir les applications numériques vues précédemment.

3.4.1 Code source du programme calculant les relations du type $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2),\eta)$

On commence par un code qui calcule et affiche les relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2),\eta)$ pour des valeurs de d et p données, ainsi qu'un polynôme $P(\sigma^2) =$ `alpha` donné.

```
# coding: utf-8

timer = walltime()    # Temps de calcul du programme (temps à la montre)

var('s')              # Définition de l'anneau Z[s] des polynômes à coefficients entiers en l'indéterminée s
A.<s> = ZZ[]

##############
# Paramètres #
##############

p = 5                 # Ordre premier p de l'automorphisme s
d = 4                 # Dimension de la variété de Prym généralisée Z déterminée par s

alpha = s^2           # Polynôme dont on veut calculer les relations R_q(alpha,eta)

########################
```

```
# Début du programme #
########################

if 2*d % (p-1) != 0 :              # On vérifie que p-1 divise 2d
    print "\nErreur : il est nécessaire que p-1 divise 2d."
    print "Fin du programme.\n"
    quit()
else  :
    print "\n######################################################################"
    print "#                                                                    #"
    print "    Calcul des relations R_q(", alpha, ",eta) lorsque d =", d, "et p =", p
    print "#                                                                    #"
    print "######################################################################\n"

    w = list(var("w_%d" % i) for i in [0..p-1])      # Déclaration des variables w_0,w_1,...,w_(p-1)

#########################################
# Calcul de la trace des polynômes en s #
#########################################

# Fonction : tracePoly
# Entrée : un polynôme P de Z[s]
# Sortie : la trace de P

def tracePoly(P) :
    dicoP = P.dict()
    t = 0
    for k in dicoP.keys() :
        if k % p == 0 :
            trace = 2*d
        else :
            trace = -2*d/(p-1)

        t = t + dicoP[k]*trace
    return t

########################################################
# Calcul du polynôme caractéristique du polynôme alpha #
########################################################

sigmaAlpha = [1]

# Calcul du coefficient du terme de degré 2d-q du polynôme caractéristique de alpha

for q in [1..2*d] :
    M = matrix(QQ,q,q)
    for i in [1..q] :
        for j in [1..q] :
            if j >= i+2 :
                M[i-1,j-1] = 0
            elif j == i+1 :
                M[i-1,j-1] = i
            else :
                for l in [1..q] :
                    if j == i-l+1 :
                        M[i-1,j-1] = tracePoly(alpha^l)
    sigmaAlpha = sigmaAlpha + [1/factorial(q)*M.determinant()]

#############################################
# Construction des relations Rq(P(s^2),eta) #
#############################################

dicoAlpha = alpha.dict()
tailleDico = len(dicoAlpha)

j = add(dicoAlpha.values())             # j = alpha(1)

# Calcul de D_alpha(eta)

Dalpha = 0
```

```
for u in [0..tailleDico-1] :
    indice = 1/2*dicoAlpha.keys()[u]    # 0 <= indice <= p-1
    multi = dicoAlpha.values()[u]       # éventuelle multiplicité, ie. coefficient > 1
    if indice == 0 :
        Dalpha = Dalpha + 4*multi*w[0]
    elif indice >= (p+1)/2 :            # On se ramène à des w_i avec 0 <= i = indice <= (p-1)/2
        indice = p - indice
        if indice == (p-1)/2 :          # On utilise la relation w_((p-1)/2)=(p-2)w_0-w_1-...-w_((p-3)/2)
            Dalpha = Dalpha + (p-2)*multi*w[0] - multi*add(w[1:(p-1)/2])
        else :
            Dalpha = Dalpha + multi*w[indice]
    else :
        if indice == (p-1)/2 :
            Dalpha = Dalpha + (p-2)*multi*w[0] - multi*add(w[1:(p-1)/2])
        else :
            Dalpha = Dalpha + multi*w[indice]

Dalpha = Dalpha - 2*j*w[0]

# Calcul de alpha^*(eta)

alphaStar = 0
for u in [0..tailleDico-2] :
    for v in [u+1..tailleDico-1] :
        indice = 1/2*abs(dicoAlpha.keys()[u] - dicoAlpha.keys()[v])
        multi = dicoAlpha.values()[u]*dicoAlpha.values()[v]
        if indice == 0 :
            alphaStar = alphaStar + 4*multi*w[0]
        elif indice >= (p+1)/2 :
            indice = p - indice
            if indice == (p-1)/2 :
                alphaStar = alphaStar + (p-2)*multi*w[0] - multi*add(w[1:(p-1)/2])
            else :
                alphaStar = alphaStar + multi*w[indice]
        else :
            if indice == (p-1)/2 :
                alphaStar = alphaStar + (p-2)*multi*w[0] - multi*add(w[1:(p-1)/2])
            else :
                alphaStar = alphaStar + multi*w[indice]

alphaStar = alphaStar + 2*add(dicoAlpha.values()[u]^2 for u in [0..tailleDico-1])*w[0] - j^2*w[0]

# Calcul effectif et affichage des relations Rq(alpha,eta)

for q in [0..2*d] :
    tmp1 = sigmaAlpha[2*d-q]*w[0]^d
    for i in [max(0,q-d)..floor(q/2)] :
        coeffMulti = factorial(d)/(factorial(i)*factorial(q-2*i)*factorial(i+d-q))
        tmp1 = tmp1 - coeffMulti*w[0]^i*Dalpha^(q-2*i)*alphaStar^(i+d-q)
    print "R_", q, "(", alpha, ", eta) : ", expand(tmp1), "= 0"

print "\nFin du programme en", walltime(timer), "secondes.\n"
```

3.4.2 Code source du programme complet

Ce second programme Sage est celui utilisé pour calculer les degrés des cycles sur Z qui s'expriment comme des monômes de degré d en les ω_i mais aussi, et surtout plus généralement, pour étudier les relations dans la $\mathbb{Q}$-algèbre $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$. L'accroissement des constantes p et d rend vite indispensable l'utilisation de l'ordinateur pour effectuer les différents calculs. On s'en rendra mieux compte dans la section 3.5 lorsqu'il s'agira d'effectuer nous-même tout ou partie de ces calculs.

Plus spécifiquement, le programme donné ci-après applique la méthode décrite précédemment étant donnés un nombre premier p quelconque et la dimension d de la variété Z. Ce programme

1. génère dans un premier temps une liste `listePoly` de polynômes en σ^2 à coefficients entiers positifs en proposant plusieurs méthodes de génération. Le choix de la méthode (0,1, 2 ou 3) se fait via le paramètre `methode` :

(a) la méthode 0 offre la possibilité à l'utilisateur de fournir lui-même une liste de polynômes en σ^2 à coefficients entiers positifs ;

(b) la méthode 1 en est une probabiliste : on construit aléatoirement une liste de polynômes en σ^2 dont les coefficients appartiennent à l'intervalle $[\![0,\texttt{limiteCoeff}]\!]$. La taille de la liste peut être ajustée à l'aide de la constante `nbrePoly` ;

(c) les méthodes 2 et 3 sont déterministes et fournissent des listes de polynômes dont la taille peut être en partie contrôlée par le paramètre `tailleMax`. La taille de la liste construite augmente rapidement avec p et d. On privilégiera donc la méthode 1 ;

2. calcule le polynôme caractéristique de chacun des polynômes en σ^2 de `listePoly` ;
3. construit la liste des relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2),\eta)$ pour chacun des polynômes de `listePoly` et les stocke dans un vecteur `vRq` ;
4. résout le système correspondant aux relations données par `vRq` : la solution, si elle est entièrement déterminée, fournit le degré de chaque monôme en les ω_i en codimension maximale d ; si la solution n'est pas unique, il faut considérer plus de polynômes en σ pour avoir davantage de relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2),\eta)$ (ou au moins d'autres polynômes si on utilise la méthode probabiliste) ;
5. construit les systèmes $(\Sigma^q_{(d,p)})$ et les résout ; déterminant ainsi les (possibles) relations en codimension q.
6. affiche les différentes informations obtenues concernant les relations ;
7. encadre la dimension de l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$.

Voici le code source du programme :

```
# coding: utf-8

timer = walltime()    # Temps de calcul du programme (temps à la montre)

var('s')              # Définition de l'anneau Z[s] des polynômes à coefficients entiers en l'indéterminée s
A.<s> = ZZ[]

##############
# Paramètres #
##############

p = 7            # Ordre premier p de l'automorphisme s
d = 3            # Dimension de la variété de Prym généralisée Z déterminée par s

methode = 0      # Méthode pour générer une liste de polynômes (0, 1, 2 ou 3)

# Paramètre pour la méthode 0

listePoly = [s^2, s^4, s^2 + s^4]     # Liste de polynômes en s^2, à coefficients entiers positifs

# Paramètres pour la méthode 1

limiteCoeff = 1       # Entier naturel non nul ; les coefficients des polynômes appartiennent à [[0,limiteCoeff]]
nbrePoly = 10         # Ordre de grandeur du nombre de polynômes générés aléatoirement

# Paramètre pour les méthodes 2 et 3

tailleMax = 2         # Constante déterminant à terme le nombre de polynômes générés non aléatoirement

########################
# Début du programme #
########################

if methode not in [0,1,2,3] :          # On vérifie le choix de la méthode
    print "Erreur : la constante 'methode' ne peut prendre que les valeurs 0,1,2 ou 3."
    print "Fin du programme.\n"
    quit()
```

```
elif 2*d % (p-1) != 0 :              # On vérifie que p-1 divise 2d
    print "\nErreur : il est nécessaire que p-1 divise 2d."
    print "Fin du programme.\n"
    quit()
else  :
    print "\n#####################################################################"
    print "#                                                                    #"
    print "   Etude de la Q-algèbre R_s(Psi_Z* C ; Z) lorsque p =", p, "et d =", d
    print "#                                                                    #"
    print "######################################################################\n\n"

    w = list(var("w_%d" % i) for i in [0..p-1])      # Déclaration des variables w_0,w_1,...,w_(p-1)

    if p <= 3 :
        print "L'anneau tautologique R_s(Psi_Z* C ; Z) est engendré par", w[0]
        print "Il est de dimension", d+1, ", isomorphe à Q[", w[0], "]/(", w[0]^(d+1), ")"
        print "\nFin du programme en", walltime(timer), "secondes.\n"
        quit()
    else :
        print "L'anneau tautologique R_s(Psi_Z* C ; Z) est engendré par", seq(w[i] for i in [0..(p-3)/2]) , "\n"

###################################################################################
# Construction d'une liste de polynômes utilisés pour construire les relations Rq #
###################################################################################

# On construit une liste de polynômes en s^2 à coefficients entiers positifs

if methode == 0 :        # Liste de polynômes entrée manuellement en paramètre
    tailleListePoly = len(listePoly)
elif methode == 1 :      # Construction aléatoire uniforme de polynômes en s^2 à coefficients positifs et <= limiteCoeff
    if p == 5 and nbrePoly == 1 :           # Le cas p = 5 étant particulièrement simple, il est traité directement
        listePoly = [s^2]
        tailleListePoly = len(listePoly)
    else :
        var('S')
        B.<S> = IntegerModRing(limiteCoeff+1)[]
        listeEntiers = []
        for i in [0..p-1] :
            listeEntiers = listeEntiers + seq(i for j in [1..(i+1)*(limiteCoeff+1)])
        tailleListeEntiers = len(listeEntiers)

        listePoly = []
        for i in [1..nbrePoly] :
            choixDeg = randint(0,tailleListeEntiers-1)
            listePoly = listePoly + [B.random_element(listeEntiers[choixDeg])]

        for i in [0..nbrePoly-1] :
            listePoly[i] = A(listePoly[i](S^2))

        listePoly = list(set(listePoly))
        tailleListePoly = len(listePoly)

    print "\nListe de polynômes générée avec succès."
    print "Calcul des polynômes caractéristiques en cours...\n"
elif methode == 2 :          # Construction non aléatoire 1
    listePoly = [A(1), s^2]

    tmpDebut = 0
    tmpDebut2 = len(listePoly)

    while tailleMax > 1 :
        for i in [tmpDebut..len(listePoly)-2] :
            for m in [ZZ(1/2*max(listePoly[i].dict().keys()))+1..p-1] :
               listePoly = listePoly + [listePoly[i] + s^(2*m)]

        tmpDebut = tmpDebut2
        tmpDebut2 = len(listePoly)
        tailleMax = tailleMax - 1

    listePoly = listePoly[0:2] + [s^(2*i) for i in [2..(p-3)/2]] + listePoly[2:]
```

```
    tailleListePoly = len(listePoly)

    print "\nListe de polynômes générée avec succès."
    print "Calcul des polynômes caractéristiques en cours...\n"
elif methode == 3 :        # Construction non aléatoire 2 (plus lourde que la 1)
    listePoly = [s^m for m in [0..(p-1)/2]]

    tmpDebut = 0
    tmpDebut2 = len(listePoly)

    while tailleMax > 1 :
        for i in [tmpDebut..len(listePoly)-2] :
            for m in [max(listePoly[i].dict().keys())+1..p-1] :
                if listePoly[i] - s^m != 0 and listePoly[i] + s^m != 0 :
                   listePoly = listePoly + [listePoly[i] + s^m, listePoly[i] - s^m]

        tmpDebut = tmpDebut2
        tmpDebut2 = len(listePoly)
        tailleMax = tailleMax - 1

    tailleListePoly = len(listePoly)

    # On se ramène à une liste de polynômes en s^2 à coefficients entiers positifs

    for i in [0..tailleListePoly-1] :
        dicoAlpha = listePoly[i].dict()
        for j in dicoAlpha.keys() :
            if dicoAlpha[j] < 0 :
                listePoly[i] = listePoly[i] + abs(dicoAlpha[j])*s^j
                                            + add(abs(dicoAlpha[j])*s^k for k in [0..j-1] + [j+1..p-1])
        dicoAlpha = listePoly[i].dict()
        for j in dicoAlpha.keys() :
            if j % 2 == 1 :
                listePoly[i] = listePoly[i] - dicoAlpha[j]*s^j + dicoAlpha[j]*s^(j+p)

    print "\nListe de polynômes générée avec succès."
    print "Calcul des polynômes caractéristiques en cours...\n"

#########################################
# Calcul de la trace des polynômes en s #
#########################################

# Fonction : tracePoly
# Entrée : un polynôme P de Z[s]
# Sortie : la trace de P

def tracePoly(P) :
    dicoP = P.dict()
    t = 0
    for k in dicoP.keys() :
        if k % p == 0 :
            trace = 2*d
        else :
            trace = -2*d/(p-1)

        t = t + dicoP[k]*trace
    return t

####################################################################
# Calcul des polynômes caractéristiques des polynômes de listePoly #
####################################################################

sigmaAlpha = []

for k in [0..tailleListePoly-1] :
    alpha = listePoly[k]
    sigmaAlpha = sigmaAlpha + [[1]]

    # Calcul du coefficient du terme de degré 2d-q du polynôme caractéristique de alpha
```

```
    for q in [1..2*d] :
        M = matrix(QQ,q,q)
        for i in [1..q] :
            for j in [1..q] :
                if j >= i+2 :
                    M[i-1,j-1] = 0
                elif j == i+1 :
                    M[i-1,j-1] = i
                else :
                    for l in [1..q] :
                        if j == i-l+1 :
                            M[i-1,j-1] = tracePoly(alpha^l)
        sigmaAlpha[k] = sigmaAlpha[k] + [1/factorial(q)*M.determinant()]

#########################################################
# Construction de la liste des relations Rq(P(s^2),eta) #
#########################################################

vRq = []
for k in [0..tailleListePoly-1] :
    alpha = listePoly[k]
    dicoAlpha = alpha.dict()
    tailleDico = len(dicoAlpha)

    j = add(dicoAlpha.values())            # j = alpha(1)

    # Calcul de D_alpha(eta)

    Dalpha = 0
    for u in [0..tailleDico-1] :
        indice = 1/2*dicoAlpha.keys()[u]    # 0 <= indice <= p-1
        multi = dicoAlpha.values()[u]       # éventuelle multiplicité, ie. coefficient > 1
        if indice == 0 :
            Dalpha = Dalpha + 4*multi*w[0]
        elif indice >= (p+1)/2 :            # On se ramène à des w_i avec 0 <= i = indice <= (p-1)/2
            indice = p - indice
            if indice == (p-1)/2 :          # On utilise la relation w_((p-1)/2)=(p-2)w_0-w_1-...-w_((p-3)/2)
                Dalpha = Dalpha + (p-2)*multi*w[0] - multi*add(w[1:(p-1)/2])
            else :
                Dalpha = Dalpha + multi*w[indice]
        else :
            if indice == (p-1)/2 :
                Dalpha = Dalpha + (p-2)*multi*w[0] - multi*add(w[1:(p-1)/2])
            else :
                Dalpha = Dalpha + multi*w[indice]

    Dalpha = Dalpha - 2*j*w[0]

    # Calcul de alpha^*(eta)

    alphaStar = 0
    for u in [0..tailleDico-2] :
        for v in [u+1..tailleDico-1] :
            indice = 1/2*abs(dicoAlpha.keys()[u] - dicoAlpha.keys()[v])
            multi = dicoAlpha.values()[u]*dicoAlpha.values()[v]
            if indice == 0 :
                alphaStar = alphaStar + 4*multi*w[0]
            elif indice >= (p+1)/2 :
                indice = p - indice
                if indice == (p-1)/2 :
                    alphaStar = alphaStar + (p-2)*multi*w[0] - multi*add(w[1:(p-1)/2])
                else :
                    alphaStar = alphaStar + multi*w[indice]
            else :
                if indice == (p-1)/2 :
                    alphaStar = alphaStar + (p-2)*multi*w[0] - multi*add(w[1:(p-1)/2])
                else :
                    alphaStar = alphaStar + multi*w[indice]

    alphaStar = alphaStar + 2*add(dicoAlpha.values()[u]^2 for u in [0..tailleDico-1])*w[0] - j^2*w[0]
```

```
    # Calcul effectif des relations Rq(alpha,eta)

    for q in [0..2*d-1] :
        tmp1 = sigmaAlpha[k][2*d-q]*w[0]^d
        for i in [max(0,q-d)..floor(q/2)] :
            coeffMulti = factorial(d)/(factorial(i)*factorial(q-2*i)*factorial(i+d-q))
            tmp1 = tmp1 - coeffMulti*w[0]^i*Dalpha^(q-2*i)*alphaStar^(i+d-q)
        vRq = vRq + [expand(tmp1)]

# On prépare l'ajout à venir de l'égalité deg w_0^d = d!*chi(eta)

vRq = vRq + [w[0]^d]

######################################################################
# Calcul et affichage du degré des monômes en codimension maximale d #
######################################################################

# Fonction : baseMonomesCodimFixee
# Entrée : un entier 0 <= q <= d, un entier 0 <= j <= p-1, un entier 1 <= n <= p-1
# Sortie : la liste des monômes homogènes de degrés q en w_j, w_(j+1), ... w_n

def baseMonomesCodimFixee(q,j,n) :
    base = []
    if q == 1 :
        base = [w[k] for k in [j..n]]
    else :
        for k in [j..n] :
            baseTmp = baseMonomesCodimFixee(q-1,k,n)
            base = base + [w[k]*baseTmp[l] for l in [0..len(baseTmp)-1]]
    return base

baseCodimMax = baseMonomesCodimFixee(d,0,(p-3)/2)         # Liste des monômes de codimension maximale d
tailleBaseCodimMax = len(baseCodimMax)

# Construction de la matrice contenant les coefficients des relations de vRq

M = matrix(QQ,2*d*tailleListePoly+1,tailleBaseCodimMax)
for i in [0..2*d*tailleListePoly] :
    for j in [0..tailleBaseCodimMax-1] :
        M[i,j] = vRq[i].coefficient(baseCodimMax[j])

if M.rank() != tailleBaseCodimMax :
    print "\nLes degrés ne sont pas entièrement déterminés par les relations fournies."
    print "Il faut considérer d'autres polynômes.\n"
    print "Fin du programme en", walltime(timer), "secondes.\n"
    quit()

print "\nLes degrés des monômes en codimension maximale sont calculables."
print "Calcul des degrés en cours...\n"

N = matrix(QQ,2*d*tailleListePoly+1,1,0)   # Second membre du système à résoudre pour déterminer les degrés
N[2*d*tailleListePoly,0] = factorial(d)    # Dernière relation rajoutée deg w_0^d = d!*chi(eta)

degreMonomesCodimMax = M.solve_right(N)    # Résolution du système

# Affichage des degrés

for k in [0..tailleBaseCodimMax-1] :
    print "deg", baseCodimMax[k], "=", degreMonomesCodimMax[k][0], "chi(eta)"

##########################################################
# Calcul et affichage des relations en petite codimension #
##########################################################

print "\n\nEtude des relations en codimension quelconque en cours..."

# Vecteur stockant les bases de polynômes homogènes de chaque codimension 1 <= q <= d-1

vBaseMonomesCodimFixee = []
```

```
for q in [1..d-1] :
    vBaseMonomesCodimFixee = vBaseMonomesCodimFixee + [baseMonomesCodimFixee(q,0,(p-3)/2)]

# Construction des systèmes linéaires dont les noyaux fournissent les relations

vSystemeSigma = []              # Vecteur contenant les systèmes linéaires pour chaque codimension
vBoolRangMaxSystemeSigma = []   # Vecteur de booléens indiquant si les systèmes linéaires sont de rang max ou non

for q in [1..floor(d/2)] :
    nbreLignes = binomial((p-1)/2+d-q-1,d-q)
    nbreColonnes = binomial((p-1)/2+q-1,q)

    vSystemeSigma = vSystemeSigma + [matrix(ZZ,nbreLignes,nbreColonnes)]

    for i in [0..nbreLignes-1] :
        for j in [0..nbreColonnes-1] :
            for k in [0..tailleBaseCodimMax-1] :
                if baseCodimMax[k] == vBaseMonomesCodimFixee[q-1][j]*vBaseMonomesCodimFixee[d-q-1][i] :
                    vSystemeSigma[q-1][i,j] = degreMonomesCodimMax[k][0]

    # Affichage des relations en codimension 1 < q <= d/2

    if vSystemeSigma[q-1].rank() == min(nbreLignes,nbreColonnes) :
        vBoolRangMaxSystemeSigma = vBoolRangMaxSystemeSigma + [True]
        print "\n--> Il n'existe pas de relation non triviale en codimension", q
    else :
        vBoolRangMaxSystemeSigma = vBoolRangMaxSystemeSigma + [False]
        print "\n--> En codimension", q, "la méthode n'est pas totalement concluante. "

        dimensionRelation = binomial((p-1)/2+q-1,q) - vSystemeSigma[q-1].rank()
        rel = vSystemeSigma[q-1].right_kernel()

        print "Les relations en codimension", q, "forment une sous-famille de la famille de dimension",
                                                                  dimensionRelation, "engendrée par :\n"

        for r in [0..dimensionRelation-1] :
            print add([x*y for x, y in zip(rel.basis()[r],vBaseMonomesCodimFixee[q-1])]), "= 0"

#################################################
# Affichage des relations en grande codimension #
#################################################

# Affichage des relations en codimension d/2 < q <= d-1

for q in [floor(d/2)+1..d-1] :
    if vBoolRangMaxSystemeSigma[d-q-1] :
        dimensionRelation = binomial((p-1)/2+q-1,q) - binomial((p-1)/2+d-q-1,d-q)
        print "\n--> Les relations en codimension", q, "forment une famille de dimension", dimensionRelation,
                                                                                   "engendrée par : \n"

        rel = vSystemeSigma[d-q-1].transpose().right_kernel()

        for r in [0..dimensionRelation-1] :
            print add([x*y for x, y in zip(rel.basis()[r],vBaseMonomesCodimFixee[q-1])]), "= 0"
    else :
        print "\n--> En codimension", q, "la méthode n'est pas totalement concluante. "

        dimensionRelation = binomial((p-1)/2+q-1,q) - vSystemeSigma[d-q-1].rank()
        rel = vSystemeSigma[d-q-1].transpose().right_kernel()

        print "Les relations en codimension", q, "forment une sous-famille de dimension au moins",
                                                   binomial((p-1)/2+q-1,q) - binomial((p-1)/2 + d-q-1,d-q),
                                           "de la famille de dimension", dimensionRelation, "engendrée par :\n"

        for r in [0..dimensionRelation-1] :
            print add([x*y for x, y in zip(rel.basis()[r],vBaseMonomesCodimFixee[q-1])]), "= 0"

# Affichage des relations en codimension maximale d
```

```
print "\n--> Les relations en codimension maximale", d, "sont engendrées par :\n"

for k in [1..tailleBaseCodimMax-1] :
    pgcd = gcd(degreMonomesCodimMax[k][0],factorial(d))
    print degreMonomesCodimMax[k][0]/pgcd*w[0]^d, "-", factorial(d)/pgcd*baseCodimMax[k], "= 0"

# Affichage des relations en codimension > d

print "\n--> Les relations en codimension >", d, "sont trivialement engendrées par les monômes de degrés", d+1

###############################################################
# Calcul et affichage de la dimension de l'anneau tautologique #
###############################################################

if d % 2 == 0 :
    dimMin = 1 + 2*add([vSystemeSigma[q-1].rank() for q in [1..d/2]]) - vSystemeSigma[d/2-1].rank() + 1
    dimMax = 2*add([binomial((p-1)/2+q-1,q) for q in [0..d/2 - 1]]) + binomial((p-1)/2+d/2-1,d/2)
else :
    dimMin = 1 + 2*add([vSystemeSigma[q-1].rank() for q in [1..(d-1)/2]]) + 1
    dimMax = 2*add([binomial((p-1)/2+q-1,q) for q in [0..(d-1)/2]])

if dimMin == dimMax :
    print "\n\nL'anneau tautologique R_s(Psi_Z* C ; Z) est de dimension", dimMax
else :
    print "\n\nL'anneau tautologique R_s(Psi_Z* C ; Z) est de dimension comprise entre", dimMin, "et", dimMax

print "\nFin du programme en", walltime(timer), "secondes.\n"
```

Avant de donner quelques nouvelles applications numériques, donnons quelques explications supplémentaires sur ce code.

1. Les paramètres à définir avant d'exécuter le programme se trouvent tous dans la partie `Paramètres` au début du code.
2. Concernant la méthode probabiliste (la méthode 1) utilisée pour générer la liste `listePoly`, on pourra laisser la constante `listePoly` égale à 1. Notons qu'il est possible de générer plusieurs fois le même polynôme (notamment en petit degré). La constante `nbrePoly` peut donc être sensiblement supérieure à la taille effective de `listePoly`. Par ailleurs, l'aspect probabiliste semble naturel afin que les relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2),\eta)$ construites soient linéairement indépendantes avec une forte probabilité. Puisque chaque polynôme $P(\sigma^2)$ de `listePoly` fournit au plus $2d$ relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2),\eta)$ linéairement indépendantes et puisqu'il y a en codimension maximale $\binom{\frac{p-1}{2}+d-1}{d}$ monômes en les $\frac{p-1}{2}$ générateurs $\omega_0,\dots,\omega_{\frac{p-3}{2}}$, on peut se fixer comme stratégie de lancer une première simulation avec
$$\texttt{nbrePoly} \geqslant \frac{1}{2d}\binom{\frac{p-1}{2}+d-1}{d}\times 1.5.$$
Ce coefficient 1.5 (choisi arbitrairement) fournit une marge d'erreur qui devrait être suffisante pour que `listePoly` contiennent suffisamment de polynômes, fournissant à leur tour suffisamment de relations indépendantes.
3. Pour $p=5$ et même si d est très grand (par exemple $d=100$), les différentes exécutions du programmes tendent à montrer qu'il suffit de ne considérer qu'un seul polynôme (ie. fixer `nbrePoly` $=1$). Le polynôme $P(\sigma^2)=\sigma^2$ est le candidat le plus naturel vue la méthode employée.

3.4.3 Autres applications numériques

Des exemples déjà connus

Le programme permet de retrouver (quasi)-instantanément chacune des propositions de la sous-section 3.3.6. Par exemple, lorsque $(d,p)=(4,5)$, la sortie du programme est la suivante :

Exemple 3.4.1 :

```
######################################################################
#                                                                    #
   Etude de la Q-algèbre R_s(Psi_Z* C ; Z) lorsque d = 4 et p = 5
#                                                                    #
######################################################################


L'anneau tautologique R_s(Psi_Z* C ; Z) est engendré par [w_0, w_1]


Liste de polynômes générée avec succès.
Calcul des polynômes caractéristiques en cours...


Les degrés des monômes en codimension maximale sont calculables.
Calcul des degrés en cours...

deg w_0^4 = 24 chi(eta)
deg w_0^3*w_1 = 36 chi(eta)
deg w_0^2*w_1^2 = 44 chi(eta)
deg w_0*w_1^3 = 36 chi(eta)
deg w_1^4 = 24 chi(eta)


Etude des relations en codimension quelconque en cours...

--> Il n'existe pas de relation non triviale en codimension 1

--> Il n'existe pas de relation non triviale en codimension 2

--> Les relations en codimension 3 forment une famille de dimension 2 engendrée par :

w_0^3 - 3*w_0*w_1^2 + 3*w_1^3 = 0
3*w_0^2*w_1 - 9*w_0*w_1^2 + 8*w_1^3 = 0

--> Les relations en codimension maximale 4 sont engendrées par :

3*w_0^4 - 2*w_0^3*w_1 = 0
11*w_0^4 - 6*w_0^2*w_1^2 = 0
3*w_0^4 - 2*w_0*w_1^3 = 0
w_0^4 - w_1^4 = 0

--> Les relations en codimension > 4 sont trivialement engendrées par les monômes de degrés 5


L'anneau tautologique R_s(Psi_Z* C ; Z) est de dimension 9

Fin du programme en 0.603399038315 secondes.
```

Le cas $(d, p) = (5, 11)$

Pour l'instant, les propositions données dans la sous-section 3.3.6 traitaient complètement le cas $d \leqslant 4$. En dimension 5, la condition $p - 1$ divise $2d = 10$ impose à p d'appartenir à l'ensemble $\{2, 3, 11\}$. Aussi, dès que l'on aura étudié le cas $(d, p) = (5, 11)$ on aura en réalité étudié toutes les structures possibles pour l'anneau $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ lorsque Z est de dimension $\leqslant 5$.

Si $(d, p) = (5, 11)$, le programme fournit des relations trop longues pour être présentées avec un minimum de clarté dans ce manuscrit. On ne donne donc ici qu'un aperçu de la sortie du programme :

Exemple 3.4.2 :

```
######################################################################
#                                                                    #
   Etude de la Q-algèbre R_s(Psi_Z* C ; Z) lorsque d = 5 et p = 11
#                                                                    #
```

```
########################################################################


L'anneau tautologique R_s(Psi_Z* C ; Z) est engendré par [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4]


Liste de polynômes générée avec succès.
Calcul des polynômes caractéristiques en cours...


Les degrés des monômes en codimension maximale sont calculables.
Calcul des degrés en cours...

deg w_0^5 = 120 chi(eta)
deg w_0^4*w_1 = 216 chi(eta)
deg w_0^4*w_2 = 216 chi(eta)
deg w_0^4*w_3 = 216 chi(eta)
deg w_0^4*w_4 = 216 chi(eta)
deg w_0^3*w_1^2 = 336 chi(eta)
deg w_0^3*w_1*w_2 = 402 chi(eta)
...
...
...
deg w_1*w_3^2*w_4^2 = 2452 chi(eta)
deg w_1*w_3*w_4^3 = 2298 chi(eta)
deg w_1*w_4^4 = 384 chi(eta)
deg w_2^5 = 120 chi(eta)
deg w_2^4*w_3 = 912 chi(eta)
deg w_2^4*w_4 = 1176 chi(eta)
deg w_2^3*w_3^2 = 1308 chi(eta)
deg w_2^3*w_3*w_4 = 1638 chi(eta)
deg w_2^3*w_4^2 = 1968 chi(eta)
deg w_2^2*w_3^3 = 912 chi(eta)
deg w_2^2*w_3^2*w_4 = 1836 chi(eta)
deg w_2^2*w_3*w_4^2 = 2276 chi(eta)
deg w_2^2*w_4^3 = 1572 chi(eta)
deg w_2*w_3^4 = 384 chi(eta)
deg w_2*w_3^3*w_4 = 1374 chi(eta)
deg w_2*w_3^2*w_4^2 = 2100 chi(eta)
deg w_2*w_3*w_4^3 = 2100 chi(eta)
deg w_2*w_4^4 = 648 chi(eta)
deg w_3^5 = 120 chi(eta)
deg w_3^4*w_4 = 648 chi(eta)
deg w_3^3*w_4^2 = 1572 chi(eta)
deg w_3^2*w_4^3 = 1968 chi(eta)
deg w_3*w_4^4 = 1176 chi(eta)
deg w_4^5 = 120 chi(eta)


Etude des relations en codimension quelconque en cours...

--> Il n'existe pas de relation non triviale en codimension 1

--> En codimension 2 la méthode n'est pas totalement concluante.
Les relations en codimension 2 forment une sous-famille de la famille de dimension 5 engendrée par :

w_0^2 + 742*w_1^2 - 2236*w_1*w_2 + 1394*w_2^2 + 786*w_1*w_3 - 932*w_2*w_3 + 165*w_3^2
                            + 3902*w_0*w_4 - 1760*w_1*w_4 + 2002*w_2*w_4 - 1672*w_3*w_4 - 249*w_4^2 = 0
...
...

--> En codimension 3 la méthode n'est pas totalement concluante.
Les relations en codimension 3 forment une sous-famille de dimension au moins 20 de la famille de dimension 25
engendrée par :

w_0^3 - 950746*w_2^3 + 1155939*w_2^2*w_3 - 315669*w_2*w_3^2 - 23764*w_3^3 + 3061440*w_2^2*w_4
                - 2532336*w_2*w_3*w_4 + 371997*w_3^2*w_4 + 2273130*w_1*w_4^2 - 6706545*w_2*w_4^2
                                                              + 2586555*w_3*w_4^2 + 1206791*w_4^3 = 0
...
...
```

```
--> Les relations en codimension 4 forment une famille de dimension 65 engendrée par :

w_0^4 - 108*w_3^4 + 212*w_3^3*w_4 + 102*w_2*w_3*w_4^2 - 390*w_3^2*w_4^2
                                                        + 2362*w_2*w_4^3 - 782*w_3*w_4^3 - 2676*w_4^4 = 0
...
...

--> Les relations en codimension maximale 5 sont engendrées par :

9*w_0^5 - 5*w_0^4*w_1 = 0
9*w_0^5 - 5*w_0^4*w_2 = 0
9*w_0^5 - 5*w_0^4*w_3 = 0
9*w_0^5 - 5*w_0^4*w_4 = 0
14*w_0^5 - 5*w_0^3*w_1^2 = 0
67*w_0^5 - 20*w_0^3*w_1*w_2 = 0
...
...

--> Les relations en codimension > 5 sont trivialement engendrées par les monômes de degrés 6


L'anneau tautologique R_s(Psi_Z* C ; Z) est de dimension comprise entre 32 et 42

Fin du programme en 234.287231922 secondes.
```

Cet exemple est le premier que nous rencontrons pour lequel les systèmes en petite codimension ne sont pas tous de rang maximaux comme cela avait pu être le cas lorsque p et d étaient plus petits. Ceci se traduit par le fait que pour certaines codimensions q et $d-q$, les relations n'ont pu être réduites qu'à une sous-famille d'un espace vectoriel dont le programme calcule une base. C'est en fait assez naturel :

1. si p augmente, on dispose de plus de générateurs et on peut donc s'attendre à voir apparaître plus de relations ;
2. si d augmente, on peut aussi s'attendre à ce que les conditions imposées en codimension maximale aient de moins en moins d'effets sur les codimensions proches de $\frac{d}{2}$; laissant à nouveau la place à des familles plus riches de relations.

Concrètement l'augmentation de d et p a pour effet d'augmenter la taille des systèmes linéaires $(\Sigma^q_{(d,p)})$ dont les noyaux contiennent les relations. Ces noyaux n'ont à priori aucune raison d'être triviaux même lorsque $q \leqslant \frac{d}{2}$.

On peut aussi avancer l'interprétation suivante : plus la dimension de la variété d est grande, plus les cycles algébriques ont de « liberté ». Il est donc (à priori) possible d'avoir pour certaines valeurs de d et p plusieurs structures différentes pour l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$. C'est le cas pour $(d,p) = (5,11)$ mais ceci était exclu pour chacun des cas étudiés dans la sous-section 3.3.6 pour lesquels le théorème 3.3.59 s'applique.

Le cas $(d,p) = (6,7)$

Voici le résultat complet fourni par Sage lorsque $(d,p) = (6,7)$:

Exemple 3.4.3 :

```
######################################################################
#                                                                    #
   Etude de la Q-algèbre R_s(Psi_Z* C ; Z) lorsque d = 6 et p = 7
#                                                                    #
######################################################################


L'anneau tautologique R_s(Psi_Z* C ; Z) est engendré par [w_0, w_1, w_2]
```

```
Liste de polynômes générée avec succès.
Calcul des polynômes caractéristiques en cours...


Les degrés des monômes en codimension maximale sont calculables.
Calcul des degrés en cours...

deg w_0^6 = 720 chi(eta)
deg w_0^5*w_1 = 1200 chi(eta)
deg w_0^5*w_2 = 1200 chi(eta)
deg w_0^4*w_1^2 = 1776 chi(eta)
deg w_0^4*w_1*w_2 = 2112 chi(eta)
deg w_0^4*w_2^2 = 1776 chi(eta)
deg w_0^3*w_1^3 = 2232 chi(eta)
deg w_0^3*w_1^2*w_2 = 3408 chi(eta)
deg w_0^3*w_1*w_2^2 = 3240 chi(eta)
deg w_0^3*w_2^3 = 2232 chi(eta)
deg w_0^2*w_1^4 = 2208 chi(eta)
deg w_0^2*w_1^3*w_2 = 4896 chi(eta)
deg w_0^2*w_1^2*w_2^2 = 5624 chi(eta)
deg w_0^2*w_1*w_2^3 = 4056 chi(eta)
deg w_0^2*w_2^4 = 2208 chi(eta)
deg w_0*w_1^5 = 1440 chi(eta)
deg w_0*w_1^4*w_2 = 5808 chi(eta)
deg w_0*w_1^3*w_2^2 = 9336 chi(eta)
deg w_0*w_1^2*w_2^3 = 7152 chi(eta)
deg w_0*w_1*w_2^4 = 3792 chi(eta)
deg w_0*w_2^5 = 1440 chi(eta)
deg w_1^6 = 720 chi(eta)
deg w_1^5*w_2 = 4080 chi(eta)
deg w_1^4*w_2^2 = 14832 chi(eta)
deg w_1^3*w_2^3 = 12312 chi(eta)
deg w_1^2*w_2^4 = 6432 chi(eta)
deg w_1*w_2^5 = 2400 chi(eta)
deg w_2^6 = 720 chi(eta)


Etude des relations en codimension quelconque en cours...

--> Il n'existe pas de relation non triviale en codimension 1

--> Il n'existe pas de relation non triviale en codimension 2

--> En codimension 3 la méthode n'est pas totalement concluante.
Les relations en codimension 3 forment une sous-famille de la famille de dimension 3 engendrée par :

w_0^3 + 33*w_0*w_1^2 - 17*w_1^3 + 432*w_0^2*w_2 - 666*w_0*w_1*w_2 + 246*w_1^2*w_2 + 300*w_0*w_2^2
                                                                              - 228*w_1*w_2^2 + 105*w_2^3 = 0
3*w_0^2*w_1 + 24*w_0*w_1^2 - 13*w_1^3 + 342*w_0^2*w_2 - 528*w_0*w_1*w_2 + 195*w_1^2*w_2 + 237*w_0*w_2^2
                                                                              - 180*w_1*w_2^2 + 83*w_2^3 = 0
39*w_0*w_1^2 - 20*w_1^3 + 507*w_0^2*w_2 - 780*w_0*w_1*w_2 + 288*w_1^2*w_2 + 351*w_0*w_2^2 - 267*w_1*w_2^2
                                                                                             + 123*w_2^3 = 0

--> Les relations en codimension 4 forment une famille de dimension 9 engendrée par :

w_0^4 + 3*w_0*w_1^2*w_2 + 33*w_0^2*w_2^2 + 12*w_0*w_1*w_2^2 - 30*w_1^2*w_2^2 - 193*w_0*w_2^3
                                                                     + 157*w_1*w_2^3 - 66*w_2^4 = 0
w_0^3*w_1 + 3*w_0*w_1^2*w_2 - w_1^3*w_2 + 9*w_0^2*w_2^2 + 15*w_0*w_1*w_2^2 - 18*w_1^2*w_2^2
                                                       - 108*w_0*w_2^3 + 87*w_1*w_2^3 - 37*w_2^4 = 0
w_0^3*w_2 + w_1^3*w_2 + 3*w_0^2*w_2^2 + 36*w_0*w_1*w_2^2 - 30*w_1^2*w_2^2 - 137*w_0*w_2^3
                                                                     + 111*w_1*w_2^3 - 47*w_2^4 = 0
3*w_0^2*w_1^2 + 30*w_0*w_1^2*w_2 - 15*w_1^3*w_2 + 12*w_0^2*w_2^2 + 33*w_0*w_1*w_2^2
                                    - 42*w_1^2*w_2^2 - 340*w_0*w_2^3 + 269*w_1*w_2^3 - 117*w_2^4 = 0
3*w_0^2*w_1*w_2 + w_1^3*w_2 + 30*w_0^2*w_2^2 + 18*w_0*w_1*w_2^2 - 33*w_1^2*w_2^2 - 199*w_0*w_2^3
                                                                     + 162*w_1*w_2^3 - 68*w_2^4 = 0
3*w_0*w_1^2*w_2 + 39*w_0^2*w_2^2 - 24*w_1^2*w_2^2 - 173*w_0*w_2^3 + 141*w_1*w_2^3 - 59*w_2^4 = 0
w_0*w_1^3 + 30*w_0*w_1^2*w_2 - 15*w_1^3*w_2 + 27*w_0*w_1*w_2^2 - 30*w_1^2*w_2^2 - 261*w_0*w_2^3
                                                                     + 205*w_1*w_2^3 - 90*w_2^4 = 0
```

```
w_1^4 + 78*w_0*w_1^2*w_2 - 40*w_1^3*w_2 - 24*w_1^2*w_2^2 - 442*w_0*w_2^3 + 342*w_1*w_2^3 - 153*w_2^4 = 0
2*w_1^3*w_2 + 78*w_0*w_1*w_2^2 - 60*w_1^2*w_2^2 - 260*w_0*w_2^3 + 210*w_1*w_2^3 - 89*w_2^4 = 0

--> Les relations en codimension 5 forment une famille de dimension 18 engendrée par :

w_0^5 + 5*w_0*w_2^4 - 5*w_1*w_2^4 + 5*w_2^5 = 0
w_0^4*w_1 + 6*w_1^3*w_2^2 - 62*w_1^2*w_2^3 + 2*w_0*w_2^4 + 256*w_1*w_2^4 - 409*w_2^5 = 0
w_0^4*w_2 + 2*w_1^3*w_2^2 - 20*w_1^2*w_2^3 + 4*w_0*w_2^4 + 78*w_1*w_2^4 - 126*w_2^5 = 0
w_0^3*w_1^2 + 6*w_1^3*w_2^2 - 65*w_1^2*w_2^3 + 2*w_0*w_2^4 + 271*w_1*w_2^4 - 434*w_2^5 = 0
w_0^3*w_1*w_2 + w_1^3*w_2^2 + w_0*w_1*w_2^3 - 12*w_1^2*w_2^3 + 3*w_0*w_2^4 + 43*w_1*w_2^4 - 69*w_2^5 = 0
w_0^3*w_2^2 + 7*w_1^3*w_2^2 + w_0*w_1*w_2^3 - 69*w_1^2*w_2^3 + 7*w_0*w_2^4 + 274*w_1*w_2^4 - 439*w_2^5 = 0
w_0^2*w_1^3 + 4*w_1^3*w_2^2 + w_0*w_1*w_2^3 - 48*w_1^2*w_2^3 + 11*w_0*w_2^4 + 193*w_1*w_2^4 - 317*w_2^5 = 0
3*w_0^2*w_1^2*w_2 + 3*w_1^3*w_2^2 + w_0*w_1*w_2^3 - 50*w_1^2*w_2^3 + 3*w_0*w_2^4 + 209*w_1*w_2^4 - 336*w_2^5 = 0
3*w_0^2*w_1*w_2^2 + 9*w_1^3*w_2^2 - 93*w_1^2*w_2^3 + 6*w_0*w_2^4 + 372*w_1*w_2^4 - 592*w_2^5 = 0
4*w_1^3*w_2^2 + w_0^2*w_2^3 + w_0*w_1*w_2^3 - 39*w_1^2*w_2^3 + 4*w_0*w_2^4 + 152*w_1*w_2^4 - 243*w_2^5 = 0
w_0*w_1^4 + 8*w_1^3*w_2^2 - 92*w_1^2*w_2^3 + 10*w_0*w_2^4 + 384*w_1*w_2^4 - 623*w_2^5 = 0
w_0*w_1^3*w_2 + 7*w_1^3*w_2^2 + w_0*w_1*w_2^3 - 86*w_1^2*w_2^3 + 364*w_1*w_2^4 - 583*w_2^5 = 0
3*w_0*w_1^2*w_2^2 + 2*w_1^3*w_2^2 + w_0*w_1*w_2^3 - 31*w_1^2*w_2^3 + 9*w_0*w_2^4 + 110*w_1*w_2^4 - 177*w_2^5 = 0
8*w_1^3*w_2^2 + 2*w_0*w_1*w_2^3 - 80*w_1^2*w_2^3 + 325*w_1*w_2^4 - 516*w_2^5 = 0
8*w_1^3*w_2^2 - 78*w_1^2*w_2^3 + 13*w_0*w_2^4 + 312*w_1*w_2^4 - 506*w_2^5 = 0
w_1^5 - 10*w_1^2*w_2^3 + 50*w_1*w_2^4 - 83*w_2^5 = 0
w_1^4*w_2 + 8*w_1^3*w_2^2 - 114*w_1^2*w_2^3 + 501*w_1*w_2^4 - 809*w_2^5 = 0
10*w_1^3*w_2^2 - 100*w_1^2*w_2^3 + 415*w_1*w_2^4 - 661*w_2^5 = 0

--> Les relations en codimension maximale 6 sont engendrées par :

5*w_0^6 - 3*w_0^5*w_1 = 0
5*w_0^6 - 3*w_0^5*w_2 = 0
37*w_0^6 - 15*w_0^4*w_1^2 = 0
44*w_0^6 - 15*w_0^4*w_1*w_2 = 0
37*w_0^6 - 15*w_0^4*w_2^2 = 0
31*w_0^6 - 10*w_0^3*w_1^3 = 0
71*w_0^6 - 15*w_0^3*w_1^2*w_2 = 0
9*w_0^6 - 2*w_0^3*w_1*w_2^2 = 0
31*w_0^6 - 10*w_0^3*w_2^3 = 0
46*w_0^6 - 15*w_0^2*w_1^4 = 0
34*w_0^6 - 5*w_0^2*w_1^3*w_2 = 0
703*w_0^6 - 90*w_0^2*w_1^2*w_2^2 = 0
169*w_0^6 - 30*w_0^2*w_1*w_2^3 = 0
46*w_0^6 - 15*w_0^2*w_2^4 = 0
2*w_0^6 - w_0*w_1^5 = 0
121*w_0^6 - 15*w_0*w_1^4*w_2 = 0
389*w_0^6 - 30*w_0*w_1^3*w_2^2 = 0
149*w_0^6 - 15*w_0*w_1^2*w_2^3 = 0
79*w_0^6 - 15*w_0*w_1*w_2^4 = 0
2*w_0^6 - w_0*w_2^5 = 0
w_0^6 - w_1^6 = 0
17*w_0^6 - 3*w_1^5*w_2 = 0
103*w_0^6 - 5*w_1^4*w_2^2 = 0
171*w_0^6 - 10*w_1^3*w_2^3 = 0
134*w_0^6 - 15*w_1^2*w_2^4 = 0
10*w_0^6 - 3*w_1*w_2^5 = 0
w_0^6 - w_2^6 = 0

--> Les relations en codimension > 6 sont trivialement engendrées par les monômes de degrés 7


L'anneau tautologique R_s(Psi_Z* C ; Z) est de dimension comprise entre 27 et 30

Fin du programme en 13.5689549446 secondes.
```

Il existe donc à isomorphisme près au plus 4 structures de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels possibles pour $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ lorsque $(d,p) = (6,7)$. Ces 4 structures sont déterminées par la dimension de la famille des relations en codimension 3 qui peut être soit $0, 1, 2$ ou 3.

Le cas $(d,p) = (6,13)$

Si $(d,p) = (6,13)$, on obtient de la même manière les faits suivants :

(i) $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ est engendré par $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5$.

(ii) Il n'existe pas de relation non triviale en codimension 1.

(iii) Les relations en codimension 2 forment une sous-famille d'une famille de dimension 6.

(iv) Les relations en codimension 3 forment une sous-famille d'une famille de dimension 36.

(v) Les relations en codimension 4 forment une sous-famille de dimension au moins 105 d'une famille de dimension 111.

(vi) Les relations en codimension 5 forment une famille de dimension 246.

(vii) L'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ est de dimension comprise entre 64 et 112.

Ces deux derniers exemples achèvent d'étudier le cas $d \leqslant 6$.

Quelques compléments

1. Ce programme Sage permet de tester la conjecture 3.3.51. Celle-ci s'est vérifiée sur chacun des exemples testés.
2. De manière générale, les calculs pour un automorphisme d'ordre 5 se font rapidement (bien plus rapidement que pour $p > 5$). Par ailleurs les systèmes linéaires $(\Sigma^q_{d,5})$ semblent toujours de rang maximaux même pour des grandes dimensions d : le théorème 3.3.59 s'applique pour tous les cas testés. Par exemple pour $d = 50$, l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ est de dimension $26^2 = 676$. Pour $d = 100$, $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ est de dimension $51^2 = 2601$.
3. Lorsque le programme ne limite les relations en une certaine codimension q qu'à un sous-espace de possibles relations (par exemple pour $(d,p) = (6,13)$ et $q = 2, 3$ ou 4), on peut réutiliser les méthodes de la sous-section 3.3.3 pour affiner l'étude.
   (a) On peut notamment utiliser la méthode qui consiste à faire agir par pull-back les $\sigma^i + \sigma^{-i}$ sur les relations. Avec celle-ci, on peut par exemple espérer montrer que s'il existe une droite de relations, alors il existe au moins un plan vectoriel de relations. Pour cela, il suffirait de constater que l'action pull-back de l'un des $\sigma^i + \sigma^{-i}$ sur une relation en fournit une autre linéairement indépendante.
   (b) Dans le même ordre d'idées, on peut rappeler que toute relation $\mathcal{R}^k$ entre les ω_i dont on disposerait pour une certaine codimension k se répercuterait immédiatement en codimension supérieure : les relations en codimension $k+l$ contiennent la composante $(k+l)$-codimensionnelle de l'idéal engendré par la relation $\mathcal{R}^k$. Pour illustrer ceci avec le cas précédent $(d,p) = (6,13)$, une meilleure connaissance des relations en codimension 2 par exemple permettrait d'exclure certains sous-espaces de relations en codimension 3 ou 4 : tous ceux qui ne contiendraient pas les composantes 3 et 4-codimensionnelles de l'idéal engendré par les relations en codimension 2.

La dernière section de ce chapitre pourra être mise de côté lors d'une première lecture. Elle vient compléter l'étude des relations menée jusqu'à présent en détaillant certains cas particuliers et en justifiant certains faits remarqués dans les exemples.

3.5 Compléments concernant l'étude des relations entre les ω_i

3.5.1 Retour sur les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k},\eta)$

Nous avions constaté sur les exemples 3.3.39, 3.3.40 mais aussi 3.3.41 que les expressions des relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k},\eta)$ et $\mathcal{R}_{2d-q}(\sigma^{2k},\eta)$ étaient les mêmes. Le premier complément que l'on apporte dans cette partie est de justifier cette remarque. Ce sera chose faite dès que nous aurons démontré la proposition 3.5.2.

Revenons tout d'abord sur la proposition 3.3.36 qui avait introduit les relations $\mathcal{R}_q(\alpha, H)$ et regardons la forme que prend celle-ci lorsque $\alpha^*H = H$.

Corollaire 3.5.1 - *On reprend les hypothèses et notations de la proposition 3.3.36 et on suppose de plus que H est invariant par α^*, c'est-à-dire $\alpha^*H = H$. Alors pour tout entier $q \in [\![0, 2d]\!]$,*

$$\begin{aligned}\Sigma^{2d-q}(\alpha) &= \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \binom{d}{i, q-2i, i+d-q} \deg\left(H^{2i+d-q} \cdot D_\alpha(H)^{q-2i}\right) \\ &= \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \sum_{u=0}^{q-2i} \binom{d}{i, u, q-2i-u, i+d-q} (-2)^{q-2i-u} \deg\left(H^{d-u} \cdot (\alpha+1)^*H^u\right).\end{aligned}$$

Démonstration. Si $\alpha^*H = H$, alors on a par définition de $D_\alpha(H)$:

$$D_\alpha(H) = (\alpha+1)^*H - 2H.$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, il vient pour tout entier $q \in [\![0, 2d]\!]$

$$\begin{aligned}\Sigma^{2d-q}(\alpha) &= \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \binom{d}{i, q-2i, i+d-q} \deg\left(H^{2i+d-q} \cdot D_\alpha(H)^{q-2i}\right) \\ &= \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \binom{d}{i, q-2i, i+d-q} \deg\left(H^{2i+d-q} \cdot ((\alpha+1)^*H - 2H)^{q-2i}\right) \\ &= \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \sum_{u=0}^{q-2i} \binom{d}{i, q-2i, i+d-q} \binom{q-2i}{u} (-2)^{q-2i-u} \deg\left(H^{2i+d-q} \cdot (\alpha+1)^*H^u \cdot H^{q-2i-u}\right) \\ &= \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \sum_{u=0}^{q-2i} \binom{d}{i, u, q-2i-u, i+d-q} (-2)^{q-2i-u} \deg\left(H^{d-u} \cdot (\alpha+1)^*H^u\right).\end{aligned}$$

□

Proposition 3.5.2 - *On garde les hypothèses de la proposition 3.3.36 et on suppose de plus que $\alpha^*H = H$. Les relations $\mathcal{R}_q(\alpha, H)$ sont symétriques par rapport à q dans le sens où*

$$\mathcal{R}_q(\alpha, H) = \mathcal{R}_{2d-q}(\alpha, H).$$

De plus, on a aussi la relation

$$\Sigma^{2d-q}(\alpha) = \Sigma^q(\alpha)$$

sans hypothèse supplémentaire sur α autre que $\alpha^*H = H$.

Démonstration. Soit $q \in [\![d, 2d]\!]$. Il s'agit de montrer que les expressions de $\mathcal{R}_{2d-q}(\alpha, H)$ et $\mathcal{R}_q(\alpha, H)$ sont les mêmes. On s'intéresse donc à la relation $\mathcal{R}_{2d-q}(\alpha, H)$ et plus particulièrement à la somme dans cette relation. En utilisant le fait que $q \in [\![d, 2d]\!]$ (et donc que $d-q \leqslant 0$), on a

$$\sum_{i=\max(0,(2d-q)-d)}^{\lfloor\frac{2d-q}{2}\rfloor} \binom{d}{i, (2d-q)-2i, i+d-(2d-q)} \deg\left(H^{2i+d-(2d-q)} \cdot D_\alpha(H)^{(2d-q)-2i}\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{2d-q}{2}\rfloor} \binom{d}{i, 2d-q-2i, i-d+q} \deg\left(H^{2i-d+q} \cdot D_\alpha(H)^{2d-q-2i}\right).$$

En effectuant maintenant le changement d'indice $j = i-d+q$, on obtient la combinaison équivalente suivante

$$\sum_{j=q-d}^{\lfloor\frac{2d-q}{2}\rfloor-d+q} \underbrace{\binom{d}{j+d-q, q-2j, j} \deg\left(H^{2j+d-q} \cdot D_\alpha(H)^{q-2j}\right)}_{\text{termes apparaissant dans la somme de } \mathcal{R}_q(\alpha,H)}.$$

Pour conclure, il nous reste à vérifier que les bornes de sommation sont bien celles de la relation $\mathcal{R}_q(\alpha, H)$. Puisque par hypothèse $q \in [\![d, 2d]\!]$, la somme sur i apparaissant de la relation $\mathcal{R}_q(\alpha, H)$ débute à l'indice $\max(0, q-d) = q-d$ et se finit à l'indice $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$. Par ailleurs, on a immédiatement l'égalité

$$\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2d-q}{2} \right\rfloor - d + q.$$

On vient donc de montrer que les sommes apparaissant dans les relations $\mathcal{R}_q(\alpha, H)$ et $\mathcal{R}_{2d-q}(\alpha, H)$ sont les mêmes. Par conséquent, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\Sigma^{2d-q}(\alpha) &\underset{\mathcal{R}_q(\alpha,H)}{=} \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,q-g)}^{\lfloor\frac{q}{2}\rfloor} \binom{d}{i, q-2i, i+d-q} \deg\left(H^{2i+d-q} \cdot D_\alpha(H)^{q-2i}\right) \\
&= \sum_{i=\max(0,(2d-q)-d)}^{\lfloor\frac{2d-q}{2}\rfloor} \binom{d}{i, (2d-q)-2i, i+d-(2d-q)} \deg\left(H^{2i+d-(2d-q)} \cdot D_\alpha(H)^{(2d-q)-2i}\right) \\
&\underset{\mathcal{R}_{2d-q}(\alpha,H)}{=} \Sigma^q(\alpha)
\end{aligned}$$

et par suite les relations $\mathcal{R}_q(\alpha, H)$ et $\mathcal{R}_{2d-q}(\alpha, H)$ sont les mêmes. □

Si $\alpha^*H = H$, il est donc suffisant de calculer les relations $\mathcal{R}_q(\alpha, H)$ pour $q \in [\![0, d]\!]$ ou si l'on préfère $q \in [\![d, 2d]\!]$.

Remarque 3.5.3 :

1. La symétrie $\Sigma^{2d-q}(\alpha) = \Sigma^q(\alpha)$ se traduit par une symétrie des coefficients du polynôme caractéristique de α.
2. Si l'on n'a plus l'égalité $\alpha^*H = H$, la proposition précédente n'est plus vraie en général. Cependant, on peut appliquer le même raisonnement et ainsi montrer que l'on garde tout de même une symétrie au niveau des coefficients dans la somme. Précisément, si on écrit

$$\mathcal{R}_q(\alpha, H) : \quad \Sigma^{2d-q}(H) - \sum_{i=a}^{b} \beta_i \deg\left(H^i \cdot D_\alpha(H)^{q-2i} \cdot \alpha^* H^{i+d-q}\right) = 0$$

pour certains scalaires $\beta_i \in \mathbb{Q}$, alors la relation $\mathcal{R}_{2d-q}(\alpha, H)$ est simplement donnée par

$$\mathcal{R}_{2d-q}(\alpha, H) : \quad \Sigma^q(H) - \sum_{i=a}^{b} \beta_i \deg\left(\alpha^* H^i \cdot D_\alpha(H)^{q-2i} \cdot H^{i+d-q}\right) = 0.$$

Appliquant la proposition 3.5.2 avec $\alpha = \sigma^{2k}$ et $H = \eta$, on obtient finalement le résultat suivant :

Proposition 3.5.4 - *Soit C une courbe complexe projective lisse munie d'un automorphisme σ d'ordre fini. Soit $q \in [\![0, d]\!]$. On dispose des relations suivantes dans $\mathrm{A}(Z)$:*

$$\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta) : \quad \Sigma^q(\sigma^{2k})\omega_0^d - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \sum_{u=0}^{q-2i} \binom{d}{i, u, q-2i-u, i+d-q} (-2)^{q-2i-u} \omega_0^{d-u} \omega_k^u = 0.$$

Ces relations se réécrivent aussi

$$\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta) : \quad \Sigma^q(\sigma^{2k})\omega_0^d - \sum_{u=0}^{q} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{q-u}{2} \rfloor} \binom{d}{i, u, q-2i-u, i+d-q} (-2)^{q-2i-u} \omega_0^{d-u} \omega_k^u = 0.$$

Démonstration. La proposition découle du corollaire 3.5.1 appliqué avec $\alpha = \sigma^{2k}$ et $H = \eta$. On a bien le résultat car $(\sigma^k + \sigma^{-k})^*\eta = (1 + \sigma^{2k})^*\eta$ puisque η est invariant par pull-back par σ (puisque θ l'est). La seconde formulation de ces relations découle de ce que

$$\begin{cases} \max(0, q-d) \leqslant i \leqslant \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \\ 0 \leqslant u \leqslant q - 2i \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \max(0, q-d) \leqslant i \leqslant \left\lfloor \frac{q-u}{2} \right\rfloor \\ 0 \leqslant u \leqslant q - 2\max(0, q-d). \end{cases}$$

En particulier, si on se restreint à $q \in [\![0, d]\!]$ (ce que l'on peut faire sans perte de généralité de part la symétrie des relations obtenues), alors $\max(0, q-d) = 0$ et on a le résultat annoncé. □

Remarque 3.5.5 : Plus $|(2d-q) - d| = |d-q|$ est petit, plus la relation $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta)$ est complexe à calculer. On le constatera clairement avec la proposition 3.5.8.

Donnons une expression encore plus explicite des relations obtenues en utilisant le lemme suivant :

Lemme 3.5.6 - *Soit $u \in [\![0, q]\!]$. Alors*

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{q-u}{2} \rfloor} \binom{d}{i, u, q-2i-u, i+d-q} (-2)^{q-2i-u} = \frac{2(-1)^{q+u} d! (2d-2u-1)!}{u!(q-u)!(2d-q-u)!(d-u-1)!}.$$

Démonstration. Ce calcul de somme a été effectué à l'aide de Maple en se rappelant les formules suivantes concernant la fonction Γ d'Euler :

$$\begin{aligned} \Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= 2^{1-2n}\sqrt{\pi}\Gamma(2n) \\ \Gamma(n+1) &= n!. \end{aligned}$$

Par exemple, lorsque $q = 2a$ et $u = 2b$ sont pairs, Maple fournit la seconde égalité ci-dessous :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{q-u}{2} \rfloor} \binom{d}{i, u, q-2i-u, i+d-q} (-2)^{q-2i-u} = \sum_{i=0}^{a-b} \binom{d}{i, 2b, 2a-2i-2b, i+d-2a} (-2)^{2a-2i-2b} \\ = \quad &\frac{(-1)^{2a-2b} 16^{-b} 4^d \Gamma(d+1) \Gamma\left(d - 2b + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2b+1)\Gamma(2a-2b+1)\sqrt{\pi}\Gamma(2d-2a-2b+1)} = \frac{(-1)^{q+u} 16^{-b} 4^d d! \Gamma\left(d - u + \frac{1}{2}\right)}{u!(q-u)!\sqrt{\pi}(2d-q-u)!} \\ = \quad &\frac{(-1)^{q+u} 16^{-b} 4^d d! 2^{1-2(d-u)} \sqrt{\pi}\Gamma(2(d-u))}{u!(q-u)!\sqrt{\pi}(2d-q-u)!\Gamma(d-u)} = \frac{2(-1)^{q+u} d! (2d-2u-1)!}{u!(q-u)!(2d-q-u)!(d-u-1)!}. \end{aligned}$$

Les autres distinctions de cas fournissent les mêmes formules relativement à q et u. □

Finalement, si on rassemble les résultats précédents, on aboutit au théorème suivant :

Théorème 3.5.7 - *Soit C une courbe complexe projective lisse munie d'un automorphisme σ d'ordre premier $p > 2$. Soit $q \in [\![0, d]\!]$. On dispose des relations suivantes dans* $\mathrm{A}(Z)$ *:*

$$\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta) : \quad \left(\Sigma^q(\sigma) - (-1)^q \binom{2d}{q}\right) \omega_0^d - \sum_{u=1}^{q} \frac{2(-1)^{q+u} d!(2d-2u-1)!}{u!(q-u)!(2d-q-u)!(d-u-1)!} \omega_0^{d-u} \omega_k^u = 0$$

où le coefficient $\Sigma^q(\sigma)$ peut être calculé explicitement et vérifie en particulier pour $q \in [\![0, p-1]\!]$,

$$\Sigma^q(\sigma) = (-1)^q \binom{\frac{2d}{p-1} + q - 1}{q}.$$

Démonstration. La première assertion est une synthèse entre la proposition 3.5.4 et le lemme 3.5.6. Il n'y a que le coefficient devant ω_0^d dont on n'a pas encore donné une expression littérale simplifiée. D'après la proposition 3.5.4, ce coefficient est égal à

$$\begin{aligned}
\Sigma^q(\sigma^{2k}) - \frac{2(-1)^{q+0} d!(2d - 2 \times 0 - 1)!}{0!(q-0)!(2d-q-0)!(d-0-1)!} &= \Sigma^q(\sigma^{2k}) - \frac{2(-1)^q d!(2d-1)!}{q!(2d-q)!(d-1)!} \\
&= \Sigma^q(\sigma^{2k}) - \frac{2(-1)^q d(2d-1)!}{q!(2d-q)!} = \Sigma^q(\sigma^{2k}) - (-1)^q \binom{2d}{q}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, les lemmes 3.3.33 et 3.3.35 permettent non seulement de montrer que $\Sigma^q(\sigma^{2k}) = \Sigma^q(\sigma)$ (ici on utilise l'hypothèse $p > 2$) mais aussi de calculer ce coefficient. En effet, le lemme 3.3.35 montre que $\mathrm{Tr}(\sigma^i) = \mathrm{Tr}(\sigma) = -\frac{2d}{p-1}$ pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$ et $\mathrm{Tr}(\sigma^i) = \mathrm{Tr}(1_Z) = 2d$ si p divise i. En complément, le lemme 3.3.33 prouve que pour tout $(i, k) \in [\![1, p-1]\!]^2$

$$\Sigma^k(\sigma^i) = \Sigma^k(\sigma) = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t & t & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & k-1 \\ t & t & \cdots & t & t \end{vmatrix}$$

où $t := -\frac{2d}{p-1}$. En développant ce déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient la formule de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
\Sigma^k(\sigma) &= \frac{(-1)^{2k-1}(k-1)}{k!} \begin{vmatrix} t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t & t & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & k-2 \\ t & t & \cdots & t & t \end{vmatrix} + \frac{(-1)^{2d} t}{k!} \begin{vmatrix} t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t & t & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & k-2 \\ t & t & \cdots & t & t \end{vmatrix} \\
&= \frac{1-k}{k} \Sigma^{k-1}(\sigma) + \frac{t}{k} \Sigma^{k-1}(\sigma) = \frac{t - (k-1)}{k} \Sigma^{k-1}(\sigma).
\end{aligned}$$

Comme $\Sigma^1(\sigma) = t = \frac{1}{1!} \prod_{i=0}^{0} (t - i)$, une récurrence immédiate montre que le résultat est vrai pour tout $1 \leqslant k \leqslant p-1$:

$$\Sigma^k(\sigma^i) = \Sigma^k(\sigma) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(-\frac{2d}{p-1} - i\right)$$

Puisque par convention $\Sigma^0(\sigma) = 1$, ceci est aussi vrai pour $k = 0$. On a donc le résultat annoncé :

$$\Sigma^k(\sigma) = \frac{(-1)^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{2d}{p-1} + i \right) = (-1)^k \frac{\left(\frac{2d}{p-1} + k - 1\right)!}{k! \left(\frac{2d}{p-1} - 1\right)!} = (-1)^k \binom{\frac{2d}{p-1} + k - 1}{k}.$$

□

On en déduit la proposition suivante qui exprime de manière explicite les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta)$ obtenues dans le théorème 3.5.7 pour de petits indices q.

Proposition 3.5.8 - *On dispose des relations suivantes dans* $\mathrm{A}(Z)$ *:*

1. *Si* $d \geqslant 0$ *et* $p \geqslant 3$, $\mathcal{R}_0(\sigma^{2k}, \eta) = \mathcal{R}_{2d}(\sigma^{2k}, \eta)$ *:*

$$\omega_0^d - \omega_0^d = 0.$$

2. *Si* $d \geqslant 1$ *et* $p \geqslant 3$, $\mathcal{R}_1(\sigma^{2k}, \eta) = \mathcal{R}_{2d-1}(\sigma^{2k}, \eta)$ *:*

$$\left(-\frac{2d}{p-1} + 2d \right) \omega_0^d - d\omega_0^{d-1}\omega_k = 0.$$

3. *Si* $d \geqslant 1$ *et* $p \geqslant 3$, $\mathcal{R}_2(\sigma^{2k}, \eta) = \mathcal{R}_{2d-2}(\sigma^{2k}, \eta)$ *:*

$$\left(\frac{d(2d+p-1)}{(p-1)^2} - d(2d-1) \right) \omega_0^d + 2d(d-1)\omega_0^{d-1}\omega_k - \frac{1}{2}d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_k^2 = 0.$$

4. *Si* $d \geqslant 2$ *et* $p \geqslant 5$, $\mathcal{R}_3(\sigma^{2k}, \eta) = \mathcal{R}_{2d-3}(\sigma^{2k}, \eta)$ *:*

$$\left(-\frac{2}{3} \frac{d(2d+p-1)(d+p-1)}{(p-1)^3} + \frac{1}{3}d(2d-1)(2d-2) \right) \omega_0^d - \frac{d!(2d-3)!}{(d-2)!(2d-4)!}\omega_0^{d-1}\omega_k$$
$$+ \frac{d!}{(d-3)!}\omega_0^{d-2}\omega_k^2 - \frac{1}{6}\frac{d!}{(d-3)!}\omega_0^{d-3}\omega_k^3 = 0.$$

5. *Si* $d \geqslant 2$ *et* $p \geqslant 5$, $\mathcal{R}_4(\sigma^{2k}, \eta) = \mathcal{R}_{2d-4}(\sigma^{2k}, \eta)$ *:*

$$\left(\frac{1}{6} \frac{d(2d+p-1)(d+p-1)(2d+3p-3)}{(p-1)^4} - \frac{1}{12}d(2d-1)(2d-2)(2d-3) \right) \omega_0^d$$
$$+ \frac{1}{3}\frac{d!(2d-3)!}{(d-2)!(2d-5)!}\omega_0^{d-1}\omega_k - \frac{1}{2}\frac{d!(2d-5)!}{(d-3)!(2d-6)!}\omega_0^{d-2}\omega_k^2 + \frac{1}{3}\frac{d!}{(d-4)!}\omega_0^{d-3}\omega_k^3 - \frac{1}{24}\frac{d!}{(d-4)!}\omega_0^{d-4}\omega_k^4 = 0.$$

Remarque 3.5.9 : La condition de validité sur d pour ces relations est imposée par $2d \geqslant q$, c'est-à-dire $d \geqslant \left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil$. Celle sur p est imposée par l'inégalité $q \leqslant p - 1$.

Cette proposition nous permet notamment de retrouver les exemples 3.3.39, 3.3.40 et 3.3.41.

3.5.2 Retour sur le degré des monômes de la forme $\omega_0^{d-q}\omega_k^q$

Nous avons déjà expliqué dans la sous-section 3.3.4 de quelle manière on peut se servir des relations $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$ pour calculer le degré des cycles qui s'expriment comme des monômes de degré d en les ω_i. Nous revenons à présent sur ce fait en nous intéressant plus particulièrement aux relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta)$ et leur utilisation dans le calcul des degrés des cycles $\omega_0^{d-q}\omega_k^q$.

Le théorème 3.5.7 montre que les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta)$ avec $q \in [\![1, d]\!]$ se présentent sous la forme

$$\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta) : \quad \sum_{u=0}^{q-1} \lambda_{u,q,d}\omega_0^{d-u}\omega_k^u = \binom{d}{q}\omega_0^{d-q}\omega_k^q$$

pour certains rationnels $\lambda_{u,q,d} \in \mathbb{Q}$ que l'on peut calculer explicitement. En particulier, les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta)$ forment un système triangulaire (ou quasi-triangulaire) entre les $\omega_0^{d-u}\omega_k^u$. On est donc certain quel que soit le couple (d, p) de pouvoir calculer de proche en proche le degré de chaque $\omega_0^{d-q}\omega_k^q$ en exprimant à chaque étape q le terme $\omega_0^{d-q}\omega_k^q$ en fonction des autres $\omega_0^{d-u}\omega_k^u$ pour $u < q$. On obtient ainsi le résultat suivant en nous appuyant plus directement sur les formules obtenues dans la proposition 3.5.8. Ce résultat fournit des formules fermées pour $\deg\omega_0^{d-q}\omega_k^q$ lorsque $q \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Proposition 3.5.10 - *Pour tout entier* $1 \leqslant k \leqslant p-1$, *on a*

1. *si* $d \geqslant 0$ *et* $p \geqslant 3$, $\deg\omega_0^d = d!\chi(\eta)$,
2. *si* $d \geqslant 1$ *et* $p \geqslant 3$, $\deg\omega_0^{d-1}\omega_k = \frac{2d}{p-1}(p-2)(d-1)!\chi(\eta)$,
3. *si* $d \geqslant 2$ *et* $p \geqslant 3$, $\deg\omega_0^{d-2}\omega_k^2 = \frac{2(11p+2dp^2-8dp-3p^2+8d-8)d!}{(d-1)(p-1)^2}\chi(\eta)$,
4. *si* $d \geqslant 3$ *et* $p \geqslant 5$, $\deg\omega_0^{d-3}\omega_k^3 = \frac{4(dp-2p-2d+2)(2dp^2-5p^2-8dp+21p+8d-16)d!}{(d-2)(d-1)(p-1)^3}\chi(\eta)$.

Démonstration. Soit $1 \leqslant k \leqslant p-1$.

1. $\deg\omega_0^d = d!\chi(\eta)$: c'est la proposition 3.3.14.
2. La relation $\mathcal{R}_1(\sigma^{2k}, \eta)$ affirme que
$$\left(-\frac{2d}{p-1} + 2d\right)\omega_0^d - d\omega_0^{d-1}\omega_k = 0.$$
Puisque $\deg\omega_0^d = d!\chi(\eta)$, il vient
$$\deg\omega_0^{d-1}\omega_k = \left(-\frac{2d}{p-1} + 2d\right)\frac{d!\chi(\eta)}{d} = \frac{2d}{p-1}(p-2)(d-1)!\chi(\eta).$$
3. La relation $\mathcal{R}_2(\sigma^{2k}, \eta)$ affirme que
$$\left(\frac{d(2d+p-1)}{(p-1)^2} - d(2d-1)\right)\omega_0^d + 2d(d-1)\omega_0^{d-1}\omega_k - \frac{1}{2}d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_k^2 = 0.$$
En isolant $\omega_0^{d-2}\omega_k^2$ et en utilisant que $\deg\omega_0^d = d!\chi(\eta)$ et $\deg\omega_0^{d-1}\omega_k = \frac{2d}{p-1}(p-2)(d-1)!\chi(\eta)$, il vient
$$\begin{aligned}\deg\omega_0^{d-2}\omega_k^2 &= \frac{2}{d(d-1)}\left(\left(\frac{d(2d+p-1)}{(p-1)^2} - d(2d-1)\right)d!\chi(\eta) + 2d(d-1)\frac{2d}{p-1}(p-2)(d-1)!\chi(\eta)\right)\\ &= \frac{2(11p+2dp^2-8dp-3p^2+8d-8)d!}{(d-1)(p-1)^2}\chi(\eta).\end{aligned}$$
4. La relation $\mathcal{R}_3(\sigma^{2k}, \eta)$ affirme que
$$\left(-\frac{2}{3}\frac{d(2d+p-1)(d+p-1)}{(p-1)^3} + \frac{1}{3}d(2d-1)(2d-2)\right)\omega_0^d - \frac{d!(2d-3)!}{(d-2)!(2d-4)!}\omega_0^{d-1}\omega_k$$
$$+ \frac{d!}{(d-3)!}\omega_0^{d-2}\omega_k^2 - \frac{1}{6}\frac{d!}{(d-3)!}\omega_0^{d-3}\omega_k^3 = 0.$$

En isolant à nouveau $\omega_0^{d-3}\omega_k^3$ et en utilisant

$$\deg \omega_0^d = d!\chi(\eta), \quad \deg \omega_0^{d-1}\omega_k = \frac{2d}{p-1}(p-2)(d-1)!\chi(\eta)$$
$$\text{et} \quad \deg \omega_0^{d-2}\omega_k^2 = \frac{2(11p+2dp^2-8dp-3p^2+8d-8)d!}{(d-1)(p-1)^2}\chi(\eta),$$

il vient après quelques calculs

$$\begin{aligned}\deg \omega_0^{d-3}\omega_k^3 &= \frac{6(d-3)!}{d!}\Bigg(\Bigg(-\frac{2}{3}\frac{d(2d+p-1)(d+p-1)}{(p-1)^3}+\frac{1}{3}d(2d-1)(2d-2)\Bigg)d!\chi(\eta)\\ &-\frac{d!(2d-3)!}{(d-2)!(2d-4)!}\frac{2d}{p-1}(p-2)(d-1)!\chi(\eta)+\frac{d!}{(d-3)!}\frac{2(11p+2dp^2-8dp-3p^2+8d-8)d!}{(d-1)(p-1)^2}\chi(\eta)\Bigg)\\ &= \frac{4(dp-2p-2d+2)(2dp^2-5p^2-8dp+21p+8d-16)d!}{(d-2)(d-1)(p-1)^3}\chi(\eta).\end{aligned}$$

□

A partir de $q \geqslant 4$, les relations deviennent trop longues et encore moins éclairantes pour être données explicitement et de manière générale pour $d \geqslant 1$ et $p > 2$ quelconques.

Remarque 3.5.11 :

1. Pour $d \geqslant 1$ et $p \geqslant 3$, $d! \neq 0$, de sorte qu'on a toujours $\omega_0^d \neq 0$.
2. Pour $d \geqslant 1$ et $p \geqslant 3$, $\frac{2d}{p-1}(p-2)(d-1)! \neq 0$. Ainsi on a toujours $\omega_0^{d-1}\omega_i \neq 0$.
3. D'après Maple, la seule solution entière de l'équation
$$11p+2dp^2-8dp-3p^2+8d-8=0$$
est $(d,p)=(1,0)$. Par suite, on a toujours $\omega_0^{d-2}\omega_i^2 \neq 0$.
4. De même, si $p \geqslant 5$, on a $\omega_0^{d-3}\omega_i^3 \neq 0$.

Ces calculs fournissent donc des exemples où la proposition 3.3.48 s'applique.

Nous avions également observé sur les exemples 3.3.44, 3.3.45 et 3.3.46 une symétrie au niveau des degrés des cycles $\omega_0^{d-q}\omega_k^q$ dans le cas d'un automorphisme d'ordre $p=5$. La proposition suivante précise ce fait.

Proposition 3.5.12 - *Si $p=5$, alors pour tout $q \in [\![0,d]\!]$ et tout $k \in \{1,2\}$,*

$$\deg \omega_0^{d-q}\omega_k^q = \deg \omega_0^q\omega_k^{d-q}.$$

Démonstration. Montrons le résultat pour $k=1$. L'autre cas se traite de la même manière. Si $p=5$, alors $(\sigma+\sigma^{-1})^{-1} = -(\sigma^2+\sigma^{-2}) \in \mathrm{Aut}(Z)$. Puisque les pull-backs commutent au produit d'intersection, on a donc

$$\begin{aligned}\deg \omega_0^{d-q}\omega_1^q &= \deg \eta^{d-q}\cdot(\sigma+\sigma^{-1})^*\eta^q\\ &= \deg(\sigma^2+\sigma^{-2})^*\left(\eta^{d-q}\cdot(\sigma+\sigma^{-1})^*\eta^q\right)\\ &= \deg(\sigma^2+\sigma^{-2})^*\eta^{d-q}\cdot(-1)^*\eta^q\\ &= \deg(\sigma^2+\sigma^{-2})^*\eta^{d-q}\cdot\eta^q\\ &= \deg \omega_2^{d-q}\omega_0^q = \deg \omega_0^q\omega_2^{d-q}\end{aligned}$$

car on a aussi $(-1)^*\eta = \eta$. Comme

$$\deg \omega_0^q \omega_2^{d-q} = \deg \omega_0^q \omega_1^{d-q}$$

car les $\omega_0^{d-q}\omega_i^q$ vérifient la même relation $\mathcal{R}_q(\sigma^2, \eta)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p-1$, on a bien :

$$\deg \omega_0^{d-q}\omega_1^q = \deg \omega_0^q \omega_1^{d-q}.$$

D'où la proposition. □

Terminons cette étude des degrés de la forme $\deg \omega_0^{d-q}\omega_k^q$ en notant que pour $p = 5$ on peut aller encore un peu plus loin : on peut calculer les degrés $\deg \omega_0^{d-q}\omega_k^q$ avec q impair connaissant les degrés de $\omega_0^{d-i}\omega_k^i$ pour $i = 0, \ldots, q-1$. Ceci repose sur le résultat suivant :

Proposition 3.5.13 - *On suppose dans cette proposition que σ est un automorphisme d'ordre* 5. *Soient $q \in [\![0, d]\!]$ et $k \in \{1, 2\}$. On note pour tout entier $i \in [\![0, d]\!]$, $a_i := \deg \omega_0^{d-i}\omega_k^i$. Alors*

$$a_q = \sum_{k=0}^{q} 3^{q-k}(-1)^k \binom{q}{k} a_k.$$

En particulier, si q est impair

$$a_q = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{q-1} 3^{q-k}(-1)^k \binom{q}{k} a_k.$$

Démonstration. On a déjà remarqué que les entiers a_i ne dépendent pas de l'entier k car les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta)$ qui permettent de les calculer ne dépendent pas de k. Par ailleurs, grâce à l'égalité $1 + \sigma + \ldots + \sigma^4 = 0_Z$, on a pu montrer dans le lemme 3.3.4 que

$$-3\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} a_q = \deg \omega_0^{d-q}\omega_2^q = \deg \omega_0^{d-q}(3\omega_0 - \omega_1)^q &= \sum_{k=0}^{q} 3^{q-k}(-1)^k \binom{q}{k} \deg \omega_0^{d-q}\omega_0^{q-k}\omega_1^k \\ = \sum_{k=0}^{q} 3^{q-k}(-1)^k \binom{q}{k} a_k &= \sum_{k=0}^{q-1} 3^{q-k}(-1)^k \binom{q}{k} a_k + (-1)^q a_q. \end{aligned}$$

Dans ce cas, si q est impair, $(-1)^q = -1$ et on a l'égalité annoncée

$$a_q = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{q-1} 3^{q-k}(-1)^k \binom{q}{k} a_k.$$

□

Exemple 3.5.14 : On suppose que $p = 5$ et donc $d \geqslant 2$. On sait que $a_0 = \deg \omega_0^d = d!\chi(\eta)$, alors par la proposition précédente :

$$a_1 = \frac{3}{2}a_0 = \frac{3}{2}d!\chi(\eta)$$

et on retrouve le résultat de la proposition 3.5.10. Cette même proposition montre que $a_2 = \frac{1}{4}\frac{9d-14}{d-1}d!\chi(\eta)$. Par suite,

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(27 \cdot d!\chi(\eta) - 27 \cdot \frac{3}{2}d!\chi(\eta) + 9 \cdot \frac{(9d-14)d!}{4(d-1)}\chi(\eta)\right) = \frac{9}{8}\frac{3d-8}{d-1}d!\chi(\eta)$$

et là encore on retrouve le résultat annoncé dans la proposition 3.5.10.

On peut espérer généraliser cette méthode pour $p > 2$ quelconque à condition de connaître les degrés des cycles $\omega_0^{d-n_1-\ldots-n_k}\omega_{i_1}^{n_1}\cdots\omega_{i_k}^{n_k}$. En effet, pour p quelconque, la relation du lemme 3.3.4 contient plus de termes : il faut donc utiliser la formule du multinôme au moment d'utiliser la relation

$$\omega_{\frac{p-1}{2}} = (p-2)\omega_0 - \sum_{i=1}^{\frac{p-3}{2}} \omega_i.$$

3.5.3 Retour sur les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2i} + \sigma^{2j}, \eta)$

Les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta)$ ne font apparaître que des monômes de la forme $\omega_0^{d-q}\omega_k^q$. C'était suffisant pour étudier l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ dans le cas $p = 5$ car celui-ci est engendré par seulement ω_0 et ω_1. En revanche pour $p \geqslant 7$, on a (à priori) au moins trois générateurs ; à savoir $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\frac{p-3}{2}}$. Ceci a motivé l'étude des relations plus générales de la forme $\mathcal{R}_q(P(\sigma^2), \eta)$. On revient dans cette sous-section sur le cas $P(\sigma^2) = \sigma^{2i} + \sigma^{2j}$.

Proposition 3.5.15 - *Soient A une variété abélienne de dimension d sur un corps k (de caractéristique 0) et $H \in \mathrm{NS}(A)$ la classe d'un diviseur ample. Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{End}(A)$ tels que $\alpha^*H = H$ et $\beta^*H = H$. Alors pour tout entier $q \in [\![0, 2d]\!]$, on a :*

$$\Sigma^{2d-q}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \binom{d}{i, q-2i, i+d-q} \deg\left(H^i \cdot D_{\alpha+\beta}(H)^{q-2i} \cdot (\alpha+\beta)^* H^{i+d-q}\right)$$
$$= \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \sum_{\substack{u+v+w=q-2i \\ u,v,w \geqslant 0}} (-4)^w \binom{d}{i, i+d-q, u, v, w} \deg\left(H^{i+w} \cdot (\alpha+1)^* H^u \cdot (\beta+1)^* H^v \cdot (\alpha+\beta)^* H^{i+d-q}\right).$$

Démonstration. On a grâce au lemme 3.2.1

$$\begin{aligned} D_{\alpha+\beta}(H) &= (\alpha+\beta+1)^*H - (\alpha+\beta)^*H - H \\ &= (\alpha+1)^*H + (\beta+1)^*H + (\alpha+\beta)^*H - 1^*H - \alpha^*H - \beta^*H - (\alpha+\beta)^*H - H \\ &= (\alpha+1)^*H + (\beta+1)^*H - 4H. \end{aligned}$$

On applique ensuite le résultat de la proposition 3.3.36 avec l'endomorphisme $\alpha + \beta \in \mathrm{End}(A)$ pour obtenir :

$$\Sigma^{2d-q}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \binom{d}{i, q-2i, i+d-q} \deg\left(H^i \cdot D_{\alpha+\beta}(H)^{q-2i} \cdot (\alpha+\beta)^* H^{i+d-q}\right)$$
$$= \frac{1}{\deg H^d} \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \sum_{\substack{u+v+w=q-2i \\ u,v,w \geqslant 0}} (-4)^w \binom{d}{i, i+d-q, u, v, w} \deg\left(H^{i+w} \cdot (\alpha+1)^* H^u \cdot (\beta+1)^* H^v \cdot (\alpha+\beta)^* H^{i+d-q}\right).$$

□

En particulier, on obtient le théorème suivant qui nous intéresse :

Théorème 3.5.16 - *Soit C une courbe complexe projective lisse munie d'un automorphisme σ d'ordre premier $p > 2$. Soient $q \in [\![0, 2d]\!]$ et a, b deux entiers tels que $1 \leqslant a, b \leqslant p-1$. On dis-*

pose des relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2a}+\sigma^{2b},\eta)$ suivantes dans $\mathrm{A}(Z)$ *:*

$$\Sigma^{2d-q}(\sigma^{2a}+\sigma^{2b})\omega_0^d = \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2}\rfloor} \sum_{\substack{u+v+w=q-2i\\ u,v,w\geqslant 0}} (-4)^w(3\delta_{a,b}+1)^{i+d-q}\binom{d}{i,i+d-q,u,v,w}\omega_0^{i+w}\omega_a^u\omega_b^v\omega_{a-b}^{i+d-q}$$

$$= \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2}\rfloor}\sum_{u=0}^{q-2i}\sum_{v=0}^{q-2i-u}(-4)^{q-2i-u-v}(3\delta_{a,b}+1)^{i+d-q}\binom{d}{i,i+d-q,u,v,q-2i-u-v}\omega_0^{q-u-v-i}\omega_a^u\omega_b^v\omega_{a-b}^{i+d-q}$$

où $\delta_{a,b}$ désigne le symbole de Kronecker et où le coefficient $\Sigma^{2d-q}(\sigma^{2a}+\sigma^{2b})$ peut être calculé explicitement grâce au lemme 3.3.33.

Démonstration. On a immédiatement

$$(\sigma^{2a}+1)^*\eta = (\sigma^a+\sigma^{-a})^*\eta =: \omega_a$$
$$(\sigma^{2b}+1)^*\eta = (\sigma^b+\sigma^{-b})^*\eta =: \omega_b$$
$$(\sigma^{2a}+\sigma^{2b})^*\eta = (\sigma^{a-b}+\sigma^{-(a-b)})^*\eta = (3\delta_{a,b}+1)\omega_{a-b} = \begin{cases} 4\omega_0 & \text{si } a=b,\\ \omega_{a-b} & \text{sinon.}\end{cases}$$

En appliquant ensuite le résultat de la proposition 3.5.15 avec $\alpha=\sigma^{2a}$, $\beta=\sigma^{2b}$ et $H=\eta$, il vient

$$\Sigma^{2d-q}(\sigma^{2a}+\sigma^{2b})\omega_0^d = \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2}\rfloor} \sum_{\substack{u+v+w=q-2i\\ u,v,w\geqslant 0}} (-4)^w(3\delta_{a,b}+1)^{i+d-q}\binom{d}{i,i+d-q,u,v,w}\omega_0^{i+w}\omega_a^u\omega_b^v\omega_{a-b}^{i+d-q}$$

$$= \sum_{i=\max(0,q-d)}^{\lfloor \frac{q}{2}\rfloor}\sum_{u=0}^{q-2i}\sum_{v=0}^{q-2i-u}(-4)^{q-2i-u-v}(3\delta_{a,b}+1)^{i+d-q}\binom{d}{i,i+d-q,u,v,q-2i-u-v}\omega_0^{q-u-v-i}\omega_a^u\omega_b^v\omega_{a-b}^{i+d-q}.$$

□

On en déduit immédiatement le corollaire suivant qui explicite les relations obtenues pour $q = 2d-1$ et $q=2d-2$.

Corollaire 3.5.17 - *On reprend les hypothèses du théorème précédent.*

1. *Pour $q=2d-1$ et $1\leqslant a,b\leqslant p-1$ on a la relation*
$$\frac{4d(p-2)}{p-1}\omega_0^d - d\omega_0^{d-1}\omega_a - d\omega_0^{d-1}\omega_b = 0.$$
2. *Pour $q=2d-2$ et $a+b=p$, on a la relation*
$$\left(\frac{2d(4d+3p-2-p^2)}{(p-1)^2}-8d(d-1)\right)\omega_0^d + 4d(d-1)\omega_0^{d-1}\omega_a + 4d(d-1)\omega_0^{d-1}\omega_b - d\omega_0^{d-1}\omega_{a-b}$$
$$-\frac{1}{2}d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_a^2 - \frac{1}{2}d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_b^2 - d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_a\omega_b = 0.$$
3. *Pour $q=2d-2$ et $a+b\neq p$, on a*
$$\left(\frac{4d(2d+p-1)}{(p-1)^2}-8d(d-1)\right)\omega_0^d + 4d(d-1)\omega_0^{d-1}\omega_a + 4d(d-1)\omega_0^{d-1}\omega_b - g(3\delta_{a,b}+1)\omega_0^{d-1}\omega_{a-b}$$
$$-\frac{1}{2}d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_a^2 - \frac{1}{2}d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_b^2 - d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_a\omega_b = 0.$$

Démonstration.

Cas $q = 2d-1$: Si $d \geqslant 1, p > 2$, $1 \leqslant a, b \leqslant p-1$ et $q = 2d-1$, on a d'après les lemmes 3.3.33 et 3.3.35

$$\Sigma^1(\sigma^{2a}+\sigma^{2b}) = \mathrm{Tr}(\sigma^{2a}+\sigma^{2b}) = \mathrm{Tr}(\sigma^{2a}) + \mathrm{Tr}(\sigma^{2b}) = 2\,\mathrm{Tr}(\sigma) = -\frac{4d}{p-1}.$$

On obtient ainsi la relation

$$-\frac{4d}{p-1}\omega_0^d - d\left(\omega_0^{d-1}\omega_a + \omega_0^{d-1}\omega_b - 4\omega_0^d\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{4d(p-2)}{p-1}\omega_0^d - d\omega_0^{d-1}\omega_a - d\omega_0^{d-1}\omega_b = 0.$$

Cas $q = 2d-2$: Si $d \geqslant 1, p > 2$, $1 \leqslant a, b \leqslant p-1$ et $q = 2d-1$, on a d'après le lemme 3.3.33

$$\begin{aligned}
\Sigma^2(\sigma^{2a}+\sigma^{2b}) &= \frac{1}{2}\left((\mathrm{Tr}(\sigma^{2a}+\sigma^{2b}))^2 - \mathrm{Tr}((\sigma^{2a}+\sigma^{2b})^2)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left((\mathrm{Tr}(\sigma^{2a}) + \mathrm{Tr}(\sigma^{2b}))^2 - \mathrm{Tr}(\sigma^{4a}) - 2\,\mathrm{Tr}(\sigma^{2(a+b)}) - \mathrm{Tr}(\sigma^{4b})\right)\\
&= 2\,\mathrm{Tr}(\sigma)^2 - \mathrm{Tr}(\sigma) - \mathrm{Tr}(\sigma^{2(a+b)})\\
&= \begin{cases} \frac{2d(4d+3p-2-p^2)}{(p-1)^2} & \text{si } p|a+b, \text{ ie. si } a+b=p,\\ \frac{4d(2d+p-1)}{(p-1)^2} & \text{sinon.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $1 \leqslant a \leqslant p-1$, $1 \leqslant b = p-a \leqslant p-1$ et $p > 2$, alors $a \neq b$ et donc $3\delta_{a,b}+1 = 1$. On obtient de cette manière la relation

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2d(4d+3p-2-p^2)}{(p-1)^2} - 8d(d-1)\right)\omega_0^d + 4d(d-1)\omega_0^{d-1}\omega_a + 4d(d-1)\omega_0^{d-1}\omega_b - d\omega_0^{d-1}\omega_{a-b}\\
&\qquad - \frac{1}{2}d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_a^2 - \frac{1}{2}d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_b^2 - d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_a\omega_b = 0.
\end{aligned}$$

De même, si $1 \leqslant a, b \leqslant p-1$, $a+b \neq p$ et $p > 2$, on obtient la relation

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{4d(2d+p-1)}{(p-1)^2} - 8d(d-1)\right)\omega_0^d + 4d(d-1)\omega_0^{d-1}\omega_a + 4d(d-1)\omega_0^{d-1}\omega_b - d(3\delta_{a,b}+1)\omega_0^{d-1}\omega_{a-b}\\
&\qquad - \frac{1}{2}d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_a^2 - \frac{1}{2}d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_b^2 - d(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_a\omega_b = 0.
\end{aligned}$$

□

On donne à présent des exemples de relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2i}+\sigma^{2j}, \eta)$ pour $p = 3, 5, 7$ toujours dans l'idée d'en déduire des informations quant aux degrés des différents monômes qui interviennent.

Exemple 3.5.18 ($p = 3$, $(a, b) = (1, 2)$) **:** Dans ce premier exemple, on suppose que $p = 3$ et $(a, b) = (1, 2)$. Il vient :

1. Pour $q = 2d-1$,
$$2\omega_0^d - \omega_0^{d-1}\omega_1 - \omega_0^{d-1}\omega_2 = 0,$$
ce qui est trivialement vrai car lorsque $p = 3$, $\omega_0^d = \omega_0^{d-1}\omega_1 = \omega_0^{d-1}\omega_2$. Ces cycles sont tous de degré $d!\chi(\eta)$.
2. Pour $q = 2d-2$,
$$-(6d-7)\omega_0^d + (4d-5)\omega_0^{d-1}\omega_1 + 4(d-1)\omega_0^{d-1}\omega_2 - \frac{1}{2}(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_1^2 - \frac{1}{2}(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_2^2 - (d-1)\omega_0^{d-2}\omega_1\omega_2 = 0,$$
ce qui est à nouveau parfaitement cohérent avec les égalités $\omega_0^{d-i}\omega_k^i = \omega_0^{d-2}\omega_i\omega_j = \omega_0^d$.

Exemple 3.5.19 ($p = 5$, $(a, b) = (1, 2)$) **:** Si $p = 5$, $(a, b) = (1, 2)$ et $d \geqslant 2$ (nécessairement), on obtient :

1. Pour $q = 2d - 1$,
$$3\omega_0^d - \omega_0^{d-1}\omega_1 - \omega_0^{d-1}\omega_2 = 0.$$
2. Pour $q = 2d - 2$,
$$-\frac{3}{2}(5d-6)\omega_0^d+(4d-5)\omega_0^{d-1}\omega_1+4(d-1)\omega_0^{d-1}\omega_2-\frac{1}{2}(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_1^2-\frac{1}{2}(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_2^2-(d-1)\omega_0^{d-2}\omega_1\omega_2 = 0.$$

On vérifie alors qu'en remplaçant ω_2 par $\omega_2 = 3\omega_0 - \omega_1$ (relation donnée dans le lemme 3.3.4), ces deux formules obtenues sont compatibles avec les degrés des $\omega_0^{d-q}\omega_k^q$ obtenus dans les parties précédentes. En fait, si $p = 5$, la relation $\omega_2 = 3\omega_0 - \omega_1$ permet de calculer directement les degrés de tous les $\omega_0^{d-a-b}\omega_1^a\omega_2^b$ en exprimant ω_2 en fonction de ω_0, ω_1, puis en utilisant la bilinéarité du produit d'intersection et enfin en utilisant les expressions connues des degrés de $\omega_0^{d-q}\omega_1^q$.

Si $(d, p) = (4, 5)$, on montre de cette manière que

(i) $\deg \omega_0^2\omega_1\omega_2 = \deg \omega_0^2\omega_1(3\omega_0 - \omega_1) = 3 \deg \omega_0^3\omega_1 - \deg \omega_0^2\omega_1^2 = 3 \times 36\chi(\eta) - 44\chi(\eta) = 64\chi(\eta)$,
(ii) $\deg \omega_0\omega_1\omega_2^2 = 96\chi(\eta)$,
(iii) $\deg \omega_1\omega_2^3 = 84\chi(\eta)$,
(iv) $\deg \omega_0\omega_1^2\omega_2 = 96\chi(\eta)$,
(v) $\deg \omega_1^2\omega_2^2 = 204\chi(\eta)$,
(vi) $\deg \omega_1^3\omega_2 = 84\chi(\eta)$.

Revenons enfin sur le cas $(d, p) = (3, 7)$; premier cas à étudier où les relations de la forme $\mathcal{R}_q(\sigma^{2i} + \sigma^{2j}, \eta)$ apportent de réelles informations supplémentaires que nous ne pouvions pas avoir avec les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta)$. Nous retrouvons de cette manière les valeurs numériques données dans l'exemple 3.3.47.

Exemple 3.5.20 ($(d, p) = (3, 7)$, $(a, b) = (1, 2)$) **:** Sous ces hypothèses, on a $a \neq b$ et $a + b \neq p$. On obtient ainsi les relations suivantes :

1. Pour $q = 2d - 1 = 5$:
$$10\omega_0^3 - 3\omega_0^2\omega_1 - 3\omega_0^2\omega_2 = 0.$$
2. Pour $q = 2d - 2 = 4$, on obtient une relation encore inconnue jusque-là :
$$-44\omega_0^3 + 21\omega_0^2\omega_1 + 24\omega_0^2\omega_2 - 3\omega_0\omega_1^2 - 3\omega_0\omega_2^2 - 6\omega_0\omega_1\omega_2 = 0.$$
3. Pour $q = 2d - 3 = 3$, en utilisant le fait que
   (a) $\mathrm{Tr}(\sigma^2 + \sigma^4) = 2\,\mathrm{Tr}(\sigma) = -2$,
   (b) $\mathrm{Tr}((\sigma^2 + \sigma^4)^2) = \mathrm{Tr}(\sigma^4 + 2\sigma^6 + \sigma^8) = 4\,\mathrm{Tr}(\sigma) = -4$,
   (c) $\mathrm{Tr}((\sigma^2 + \sigma^4)^3) = \mathrm{Tr}(\sigma^6 + 3\sigma^8 + 3\sigma^{10} + \sigma^{12}) = -8$,

   on peut calculer le coefficient $\Sigma^3(\sigma^2 + \sigma^4)$ à l'aide du lemme 3.3.33 et ainsi obtenir la relation
$$56\omega_0^3 - 24\omega_0^2\omega_1 - 48\omega_0^2\omega_2 + 6\omega_0\omega_1^2 + 12\omega_0\omega_2^2 + 18\omega_0\omega_1\omega_2 - \omega_1^3 - 3\omega_1^2\omega_2 - 3\omega_1\omega_2^2 - \omega_2^3 = 0.$$
4. Pour $q = 2d - 4 = 2$, on utilise aussi que
$$\mathrm{Tr}((\sigma^2 + \sigma^4)^4) = \mathrm{Tr}(\sigma^8 + 4\sigma^{10} + 6\sigma^{12} + 4\sigma^{14} + \sigma^{16}) = 12\,\mathrm{Tr}(\sigma) + 4\,\mathrm{Tr}(1_Z) = -12 + 4 \times 6 = 12.$$
   On obtient alors la relation
$$9\omega_0^3 - 48\omega_0^2\omega_1 + 21\omega_0\omega_1^2 + 24\omega_0\omega_1\omega_2 - 3\omega_1^3 - 6\omega_1^2\omega_2 - 3\omega_1\omega_2^2 = 0.$$

5. Pour $q = 2d - 5 = 1$, on vérifie de même que $\mathrm{Tr}((\sigma^2 + \sigma^4)^5) = 38$. Tous calculs menés, on trouve la relation
$$-4\omega_0^3 + 12\omega_0\omega_1^2 - 3\omega_1^3 - 3\omega_1^2\omega_2 = 0.$$

En se rappelant des relations de la forme $\mathcal{R}_q(\sigma^{2k}, \eta)$ avec $k = 1, 2$ (cf. Exemple 3.3.41), on a obtenu pour $(d, p) = (3, 7)$ les relations suivantes

$$\begin{cases} 5\omega_0^3 - 3\omega_0^2\omega_k = 0 \\ -14\omega_0^3 + 12\omega_0^2\omega_k - 3\omega_0\omega_k^2 = 0 \\ 19\omega_0^3 - 18\omega_0^2\omega_k + 6\omega_0\omega_k^2 - \omega_k^3 = 0 \\ 10\omega_0^3 - 3\omega_0^2\omega_1 - 3\omega_0^2\omega_2 = 0 \\ -44\omega_0^3 + 21\omega_0^2\omega_1 + 24\omega_0^2\omega_2 - 3\omega_0\omega_1^2 - 3\omega_0\omega_2^2 - 6\omega_0\omega_1\omega_2 = 0 \\ 56\omega_0^3 - 24\omega_0^2\omega_1 - 48\omega_0^2\omega_2 + 6\omega_0\omega_1^2 + 12\omega_0\omega_2^2 + 18\omega_0\omega_1\omega_2 - \omega_1^3 - 3\omega_1^2\omega_2 - 3\omega_1\omega_2^2 - \omega_2^3 = 0 \\ 9\omega_0^3 - 48\omega_0^2\omega_1 + 21\omega_0\omega_1^2 + 24\omega_0\omega_1\omega_2 - 3\omega_1^3 - 6\omega_1^2\omega_2 - 3\omega_1\omega_2^2 = 0 \\ -4\omega_0^3 + 12\omega_0\omega_1^2 - 3\omega_1^3 - 3\omega_1^2\omega_2 = 0. \end{cases}$$

On retrouve alors les degrés annoncés dans l'exemple 3.3.47 en résolvant simplement ce système linéaire, en se rappelant que $\deg \omega_0^3 = 6\chi(\eta)$.

Signalons enfin que l'on peut déduire le degré de $\omega_1\omega_2^2$ connaissant celui de $\omega_1^2\omega_2$, et réciproquement. Voyons de quelle manière. Supposons connu que $\deg \omega_1^2\omega_2 = 34\chi(\eta)$ et considérons l'endomorphisme $\mu := \sigma^2$: c'est un automorphisme de C d'ordre 7 encore et il définit la même sous-variété $Z \subset J$ que σ car $\Phi_7(\sigma^2) = \Phi_7(\sigma)$. Notons, par analogie avec les cycles ω_i correspondant à l'automorphisme σ, les cycles $\kappa_i := (\mu^i + \mu^{-i})^*\eta$ pour $i \in [\![1, 6]\!]$ et $\kappa_0 = \eta$. On a alors

1. $\deg \kappa_0\kappa_1^2 = 12\chi(\eta)$,
2. $\deg \kappa_1^3 = 6\chi(\eta)$,
3. $\deg \kappa_1^2\kappa_2 = 34\chi(\eta)$ (de par notre hypothèse),
4. et aussi la relation $-5\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 0$ d'après le lemme 3.3.4 appliqué à l'automorphisme μ.

Par suite, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \deg \omega_1\omega_2^2 &= \deg(\sigma + \sigma^{-1})^*\eta \cdot (\sigma^2 + \sigma^{-2})^*\eta^2 \\ &= \deg(\mu^3 + \mu^{-3})^*\eta \cdot (\mu + \mu^{-1})^*\eta^2 \\ &= \deg \kappa_1^2\kappa_3 = \deg \kappa_1^2(5\kappa_0 - \kappa_1 - \kappa_2) \\ &= 5 \deg \kappa_0\kappa_1^2 - \deg \kappa_1^3 - \deg \kappa_1^2\kappa_2 \\ &= 5 \times 12\chi(\eta) - 6\chi(\eta) - 34\chi(\eta) = 20\chi(\eta) \end{aligned}$$

comme prévu.

Remarque 3.5.21 :

1. On observe sur ce dernier exemple qu'il n'y a plus de symétrie évidente pour les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2i} + \sigma^{2j}, \eta)$ comme on pouvait en avoir pour les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2i}, \eta) = \mathcal{R}_{2d-q}(\sigma^{2i}, \eta)$ (cf. Proposition 3.5.2). En effet, les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^{2i} + \sigma^{2j}, \eta)$ font intervenir du ω_i, du ω_j mais aussi un terme supplémentaire : $\omega_{i-j} = \omega_{j-i}$. Ceci se traduit par une dissymétrie au niveau des degrés des cycles $\omega_i^k\omega_j^{d-k}$ et $\omega_i^{d-k}\omega_j^k$.
2. Les calculs nécessaires pour étudier le cas d'un automorphisme d'ordre 7 commencent déjà à être assez lourds, même en petite dimension. Ceci renforce l'intérêt d'utiliser un logiciel de calcul tel que Sage.

3.5.4 Retour sur l'obtention des structures de $\mathbb{Q}$-algèbre de $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$

Terminons ce chapitre en donnant des preuves des résultats annoncés dans la sous-section 3.3.6. Le but de cette partie est de venir illustrer par l'exemple les résultats de la partie 3.3.5 mais aussi, et surtout, de comparer ces résultats avec ceux des sous-sections 3.3.2 et 3.3.3.

Le cas $(d, p) = (2, 5)$

Proposition (3.3.62) **-** *Soit* $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ *un revêtement Galoisien cyclique de degré* 5 *avec* C *hyperelliptique. On suppose que* $\dim Z = 2$*. Alors*

$$R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = \mathbb{Q}[\omega_0, \omega_1]/(\omega_0^3, \omega_0^2 - \omega_1^2, 3\omega_0^2 - 2\omega_0\omega_1, \omega_1^3).$$

Démonstration. D'après la proposition 3.3.5, $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est engendré en tant que $\mathbb{Q}$-algèbre pour le produit d'intersection par ω_0 et ω_1. Reste à déterminer explicitement les relations entre ces deux classes.

Relations en codimension > 2 Les relations en codimension $> 2 = d := \dim Z$ sont trivialement engendrées par

$$\omega_0^k \omega_1^l = 0 \quad \text{pour } k + l > 2 = d.$$

Relations en codimension maximale $d = 2$ Les relations en codimension 2 sont entièrement déterminées par les degrés de ω_0^2, $\omega_0\omega_1$ et ω_1^2. Ces degrés ont été calculés grâce aux relation $\mathcal{R}_q(\sigma^2, \eta)$ (cf. Exemple 3.3.44). Les relations obtenues sont :

$$3\omega_0^2 - 2\omega_0\omega_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_0^2 - \omega_1^2 = 0.$$

Relations en codimension 1 On cherche des relations sous la forme :

$$a\omega_0 + b\omega_1 = 0, \qquad (a, b) \in \mathbb{Q}^2.$$

En intersectant cette relation avec ω_0 et ω_1 successivement, on obtient le système suivant de relations en codimension maximale :

$$\begin{cases} a\omega_0^2 + b\omega_0\omega_1 = 0 \\ a\omega_0\omega_1 + b\omega_1^2 = 0. \end{cases}$$

Connaissant les degrés de tous les cycles de ce système depuis l'exemple 3.3.44, on obtient au coefficient près $\chi(\eta) \neq 0$ le système équivalent suivant :

$$(\Sigma^1_{(2,5)}) : \quad \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$

dont la seule solution est la solution triviale $(0, 0)$. Il ne peut donc pas exister de relation non triviale en codimension 1 entre ω_0 et ω_1.

Conclusion de la preuve Finalement, les relations obtenues sont engendrées par :

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_0^2\omega_1 = 0, \quad \omega_0\omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_0^2 - \omega_1^2 = 0, \quad 3\omega_0^2 - 2\omega_0\omega_1 = 0$$

et même plus simplement par

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_0^2 - \omega_1^2 = 0, \quad 3\omega_0^2 - 2\omega_0\omega_1 = 0, \quad \omega_1^3 = 0.$$

D'où la proposition. □

On retrouve en particulier les résultats annoncés concernant la dimension des $\mathbb{Q}$-sous-espaces R^q. Cette proposition 3.3.62 montre que

1. $R^0 \simeq \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}([Z])$ est de dimension 1,
2. $R^1 \simeq \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\omega_0, \omega_1)$ est de dimension 2,
3. $R^2 \simeq \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\omega_0^2, \omega_0\omega_1, \omega_1^2)/\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\omega_0^2 - \omega_1^2, 3\omega_0^2 - 2\omega_0\omega_1)$ est de dimension $3 - 2 = 1$.

On notera au passage qu'il n'existe pas de relation non triviale entre ω_0, ω_1 en codimension $\leqslant \frac{d}{2} = 1$ et que $\dim_{\mathbb{Q}} R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = 4$.

Le prochain cas à étudier est obtenu dans le cas hyperelliptique pour $(d, p) = (4, 5)$.

Le cas $(d, p) = (4, 5)$

Proposition (3.3.63) **-** *Soit $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ un revêtement Galoisien cyclique de degré* 5 *avec C hyperelliptique. On suppose que* $\dim Z = 4$. *Alors l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est de la forme $\mathbb{Q}[\omega_0, \omega_1]/I_{4,5}$ où $I_{4,5}$ est l'idéal des relations entre ω_0 et ω_1. Cet idéal est engendré par les relations suivantes*

1. $\omega_0^{5-i}\omega_1^i = 0$ *pour* $i \in [\![0, 5]\!]$,
2. $3\omega_0^4 - 2\omega_0^3\omega_1 = 0, \quad 11\omega_0^4 - 6\omega_0^2\omega_1^2 = 0, \quad 3\omega_0^4 - 2\omega_0\omega_1^3 = 0, \quad \omega_0^4 - \omega_1^4 = 0,$
3. $\omega_0^3 - 3\omega_0\omega_1^2 + 3\omega_1^3 = 0, \quad 3\omega_0^2\omega_1 - 9\omega_0\omega_1^2 + 8\omega_1^3 = 0.$

Démonstration. D'après la proposition 3.3.5, $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est encore engendré par ω_0 et ω_1. Étudions les relations entre ces deux générateurs.

Relations en codimension $> 4 = d := \dim Z$ Celles-ci sont clairement engendrées par les $\omega_0^{5-i}\omega_1^i$ pour $i \in [\![0, 5]\!]$.

Relations en codimension maximale $d = 4$ Les relations en codimension maximale sont engendrées par les relations $\mathcal{R}_q(\sigma^2, \eta)$ qui nous ont permis de déterminer les degrés des $\omega_0^{4-q}\omega_1^q$ (cf. Exemple 3.3.45). On obtient ainsi les relations

$$36\omega_0^4 - 24\omega_0^3\omega_1 = 0, \quad 44\omega_0^4 - 24\omega_0^2\omega_1^2 = 0, \quad 36\omega_0^4 - 24\omega_0\omega_1^3 = 0, \quad 24\omega_0^4 - 24\omega_1^4 = 0.$$

En divisant par le pgcd des coefficients on trouve le second type de relations données par la proposition.

Relations en codimension 1 Vérifions qu'il n'existe pas de relation non triviale en codimension 1. Si une telle relation existait, elle serait de la forme

$$a\omega_0 + b\omega_1 = 0, \qquad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{Q}^2.$$

En intersectant successivement avec ω_0^3, $\omega_0^2\omega_1$, $\omega_0\omega_1^2$ et ω_1^3, on en déduit grâce à l'exemple 3.3.45 le système de relations en codimension maximale suivant :

$$\begin{cases} a\omega_0^4 + b\omega_0^3\omega_1 = 0 \\ a\omega_0^3\omega_1 + b\omega_0^2\omega_1^2 = 0 \\ a\omega_0^2\omega_1^2 + b\omega_0\omega_1^3 = 0 \\ a\omega_0\omega_1^3 + b\omega_1^4 = 0. \end{cases} \iff \quad (\Sigma^1_{(4,5)}) : \begin{cases} 24a + 36b = 0 \\ 36a + 44b = 0 \\ 44a + 36b = 0 \\ 36a + 24b = 0 \end{cases}$$

dont on vérifie que la seule solution est une fois encore $(a, b) = (0, 0)$.

Relations en codimension 2 De même, on montre qu'il n'existe pas de relation (non triviale) en codimension 2. En effet, une telle relation serait de la forme

$$a\omega_0^2 + b\omega_0\omega_1 + c\omega_1^2 = 0, \qquad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{Q}^3.$$

En intersectant cette fois-ci avec ω_0^2, $\omega_0\omega_1$ et ω_1^2, on obtient les systèmes linéaires suivants

$$\begin{cases} a\omega_0^4 + b\omega_0^3\omega_1 + c\omega_0^2\omega_1^2 = 0 \\ a\omega_0^3\omega_1 + b\omega_0^2\omega_1^2 + c\omega_0\omega_1^3 = 0 \\ a\omega_0^2\omega_1^2 + b\omega_0\omega_1^3 + c\omega_1^4 = 0 \end{cases} \iff (\Sigma^2_{(4,5)}) : \begin{cases} 24a + 36b + 44c = 0 \\ 36a + 44b + 36c = 0 \\ 44a + 36b + 24c = 0 \end{cases}$$

dont le seul triplet solution est $(a,b,c) = (0,0,0)$.

Relations en codimension 3 En codimension $d-1 = 3$, il y a moins de contraintes. Une relation en codimension 3 est de la forme

$$a\omega_0^3 + b\omega_0^2\omega_1 + c\omega_0\omega_1^2 + d\omega_1^3 = 0, \qquad \text{avec } (a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4.$$

Pour augmenter la codimension jusqu'à son maximum, on peut ici intersecter par ω_0 ou par ω_1 uniquement. On n'obtient donc que deux relations (alors qu'on a 4 paramètres) :

$$\begin{cases} a\omega_0^4 + b\omega_0^3\omega_1 + c\omega_0^2\omega_1^2 + d\omega_0\omega_1^3 = 0 \\ a\omega_0^3\omega_1 + b\omega_0^2\omega_1^2 + c\omega_0\omega_1^3 + d\omega_1^4 = 0 \end{cases} \iff (\Sigma^3_{(4,5)}) : \begin{cases} 24a + 36b + 44c + 36d = 0 \\ 36a + 44b + 36c + 24d = 0, \end{cases}$$

ce qui était prévu puisque les systèmes $(\Sigma^3_{(4,5)})$ et $(\Sigma^1_{(4,5)})$ sont transposés l'un de l'autre grâce au lemme 3.3.57. Les solutions de ce système linéaire $(\Sigma^3_{(4,5)})$ forment un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{Q}^4$. Par suite, on obtient une famille de possibles relations paramétrées par deux paramètres $(u,v) \in \mathbb{Q}^2$:

$$u\omega_0^3 + 3v\omega_0^2\omega_1 - (3u+9v)\omega_0\omega_1^2 + (3u+8v)\omega_1^3 = 0.$$

Notez que les systèmes $(\Sigma^1_{(4,5)})$, $(\Sigma^2_{(4,5)})$ et $(\Sigma^3_{(4,5)})$ sont de rang maximal ce qui nous a permis de montrer qu'il n'existe pas de relations en codimension $\leqslant 2 = \frac{d}{2}$ et, grâce au théorème 3.3.58, on en déduit aussi que chaque membre de cette famille de possibles relations est effectivement une relation dans R^3. Une base des relations en codimension 3 est donc obtenue en considérant deux couples (u_1, v_1) et (u_2, v_2) formant une base de $\mathbb{Q}^2$. Par exemple, en choisissant les couples $(1,0)$ et $(0,1)$, on obtient comme base de relation en codimension 3 la suivante :

$$\omega_0^3 - 3\omega_0\omega_1^2 + 3\omega_1^3 = 0 \qquad \text{et} \qquad 3\omega_0^2\omega_1 - 9\omega_0\omega_1^2 + 8\omega_1^3 = 0.$$

D'où la proposition. □

Cette proposition 3.3.63 montre en particulier que

1. $\dim_{\mathbb{Q}} R^0 = 1$:
$$R^0 \simeq \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}([Z]),$$
2. $\dim_{\mathbb{Q}} R^1 = 2$:
$$R^1 \simeq \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\omega_0, \omega_1),$$
3. $\dim_{\mathbb{Q}} R^2 = 3$:
$$R^2 \simeq \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\omega_0^2, \omega_0\omega_1, \omega_1^2),$$

4. $\dim_{\mathbb{Q}} R^3 = 2$:

$$R^3 \simeq \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\omega_0^3, \omega_0^2\omega_1, \omega_0\omega_1^3, \omega_1^3)/\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\omega_0^3 - 3\omega_0\omega_1^2 + 3\omega_1^3, 3\omega_0^2\omega_1 - 9\omega_0\omega_1^2 + 8\omega_1^3),$$

5. $\dim_{\mathbb{Q}} R^4 = 1$:

$$R^4 \simeq \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\omega_0^4, \omega_0^3\omega_1, \omega_0^2\omega_1^2, \omega_0\omega_1^3, \omega_1^4)/\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(3\omega_0^4 - 2\omega_0^3\omega_1, 11\omega_0^4 - 6\omega_0^2\omega_1^2, 3\omega_0^4 - 2\omega_0\omega_1^3, \omega_0^4 - \omega_1^4).$$

On retrouve donc la symétrie $R^q \simeq R^{d-q}$ et les dimensions annoncées de ces espaces. En particulier, on obtient $\dim_{\mathbb{Q}} R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = 9$. Par ailleurs, remarquez qu'en utilisant l'action des $\sigma + \sigma^{-1}$ sur la relation obtenue par la transformée de Fourier (cf. Section 3.3.3), nous avions déjà obtenu dans l'exemple 3.3.27 une famille de dimension 2 de relations en codimension 3 engendrée par :

$$8\omega_0^3 - 9\omega_0^2\omega_1 + 3\omega_0\omega_1^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 3\omega_0^2\omega_1 - 9\omega_0\omega_1^2 + 8\omega_1^3 = 0.$$

Avec les notations de la démonstration précédente, cette première relation est obtenue en considérant le coupe $(u, v) = (8, -3)$ et la seconde pour $(u, v) = (0, 1)$. Par conséquent, sur cet exemple, l'argument de dimension utilisé pour l'étude des relations en codimension 3 n'était pas nécessaire puisqu'on avait déjà vérifié que tout élément dans la famille de « possibles » relations était bel et bien déjà réellement une relation.

Le cas $(d, p) = (3, 7)$

Proposition (3.3.65) **-** *Soit $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ un revêtement Galoisien cyclique de degré 7 avec C hyperelliptique. On suppose que $\dim Z = 3$. Alors l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est de la forme $\mathbb{Q}[\omega_0, \omega_1, \omega_2]/I_{3,7}$ où $I_{3,7}$ est l'idéal des relations entre ω_0, ω_1 et ω_2. Cet idéal est engendré par les relations suivantes*

1. $\omega_0^{4-i-j}\omega_1^i\omega_2^j = 0$, *pour* $i, j \in [\![0, 4]\!]$ *avec* $i + j \leqslant 4$,
2. $\omega_0^3 - \omega_1^3 = 0$, $\omega_0^3 - \omega_2^3 = 0$, $5\omega_0^3 - 3\omega_0^2\omega_1 = 0$, $5\omega_0^3 - 3\omega_0^2\omega_2 = 0$,
   $2\omega_0^3 - \omega_0\omega_1^2 = 0$, $2\omega_0^3 - \omega_0\omega_2^2 = 0$,
   $19\omega_0^3 - 6\omega_0\omega_1\omega_2 = 0$, $17\gamma_0^3 - 3\omega_1^2\omega_2 = 0$, $10\omega_0^3 - 3\omega_1\omega_2^2 = 0$,
3. $\omega_0^2 + 2\omega_0\omega_2 - 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2 = 0$, $2\omega_0\omega_1 + 20\omega_0\omega_2 - 16\omega_1\omega_2 + 7\omega_2^2 = 0$,
   $26\omega_0\omega_2 + \omega_1^2 - 20\omega_1\omega_2 + 9\omega_2^2 = 0$.

Démonstration. D'après la proposition 3.3.5, $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est encore engendré par ω_0, ω_1 et ω_2. On étudie de la même manière qu'avant les relations entre ces trois générateurs.

Relations en codimension $> 3 = d := \dim Z$ Celles-ci sont engendrées par les monômes $\omega_0^{4-i-j}\omega_1^i\omega_2^j$ pour i, j des entiers naturels vérifiant $i + j \in [\![0, 4]\!]$.

Relations en codimension maximale $d = 3$ Comme toujours, les relations en codimension maximale sont entièrement déterminées par les degrés des $\omega_0^{4-i}\omega_1^i\omega_2^j$; degrés que l'on connaît grâce à l'exemple 3.3.47.

Relations en codimension 1 En codimension 1, il n'y a pas de relation non triviale. En effet une telle relation générale est de la forme

$$a\omega_0 + b\omega_1 + c\omega_2 = 0, \qquad \text{avec } (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3.$$

En intersectant successivement par ω_0^2, $\omega_0\omega_1$, $\omega_0\omega_2$, ω_1^2, $\omega_1\omega_2$ et ω_2^2, on obtient les six conditions nécessaires sur a, b, c suivantes :

$$\begin{cases} a\omega_0^3 + b\omega_0^2\omega_1 + c\omega_0^2\omega_2 = 0 \\ a\omega_0^2\omega_1 + b\omega_0\omega_1^2 + c\omega_0\omega_1\omega_2 = 0 \\ a\omega_0^2\omega_2 + b\omega_0\omega_1\omega_2 + c\omega_0\omega_2^2 = 0 \\ a\omega_0\omega_1^2 + b\omega_1^3 + c\omega_1^2\omega_2 = 0 \\ a\omega_0\omega_1\omega_2 + b\omega_1^2\omega_2 + c\omega_1\omega_2^2 = 0 \\ a\omega_0\omega_2^2 + b\omega_1\omega_2^2 + c\omega_2^3 = 0 \end{cases} \iff \quad (\Sigma^1_{(3,7)}) : \begin{cases} 6a + 10b + 10c = 0 \\ 10a + 12b + 19c = 0 \\ 10a + 19b + 12c = 0 \\ 12a + 6b + 34c = 0 \\ 19a + 34b + 20c = 0 \\ 12a + 20b + 6c = 0 \end{cases}$$

et ce dernier système $(\Sigma^1_{(3,7)})$ n'admet pour seule solution que le triplet $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Relations en codimension 2 En codimension 2, on obtient une famille à 3 paramètres de relations possibles. En effet, une relation en codimension 2 est de la forme

$$a\omega_0^2 + b\omega_0\omega_1 + c\omega_0\omega_2 + d\omega_1^2 + e\omega_1\omega_2 + f\omega_2^2 = 0, \qquad \text{avec } (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{Q}^6.$$

En intersectant successivement par $\omega_0, \omega_1, \omega_2$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a\omega_0^3 + b\omega_0^2\omega_1 + c\omega_0^2\omega_2 + d\omega_0\omega_1^2 + e\omega_0\omega_1\omega_2 + f\omega_0\omega_2^2 = 0 \\ a\omega_0^2\omega_1 + b\omega_0\omega_1^2 + c\omega_0\omega_1\omega_2 + d\omega_1^3 + e\omega_1^2\omega_2 + f\omega_1\omega_2^2 = 0 \\ a\omega_0^2\omega_2 + b\omega_0\omega_1\omega_2 + c\omega_0\omega_2^2 + d\omega_1^2\omega_2 + e\omega_1\omega_2^2 + f\omega_2^3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad (\Sigma^2_{(3,7)}) : \begin{cases} 6a + 10b + 10c + 12d + 19e + 12f = 0 \\ 10a + 12b + 19c + 6d + 34e + 20f = 0 \\ 10a + 19b + 12c + 34d + 20e + 6f = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système $(\Sigma^2_{(3,7)}) = {}^t(\Sigma^1_{(3,7)})$ (considérant a, b, c comme des paramètres) nous donne la famille de possibles relations suivantes :

$$13u\omega_0^2 + 26v\omega_0\omega_1 + 26w\omega_0\omega_2 + (-u-10v+w)\omega_1^2 - (6u+8v+20w)\omega_1\omega_2 + (4u+v+9w)\omega_2^2 = 0, \text{ où } (u, v, w) \in \mathbb{Q}^3.$$

Puisque $(\Sigma^2_{(3,7)})$ est de rang maximal 3, le théorème 3.3.58 nous assure à nouveau que chaque élément de cette famille est une relation dans R^2. Une base des relations en codimension 2 est donc obtenue en considérant par exemple les triplets $(\frac{1}{13}, 0, -\frac{1}{13})$, $(0, \frac{1}{13}, \frac{10}{13})$ et $(0, 0, 1)$. On obtient alors comme base de relation en codimension 2 les trois relations annoncées :

$$\omega_0^2 + 2\omega_0\omega_2 - 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2 = 0, \qquad 2\omega_0\omega_1 + 20\omega_0\omega_2 - 16\omega_1\omega_2 + 7\omega_2^2 = 0$$
$$\text{et} \qquad 26\omega_0\omega_2 + \omega_1^2 - 20\omega_1\omega_2 + 9\omega_2^2 = 0.$$

D'où la proposition. □

Si $(d, p) = (3, 7)$, alors grâce à la proposition 3.3.65 on vérifie à nouveau les résultats obtenus concernant les dimensions des sous-espaces R^q puisque

1. $\dim_{\mathbb{Q}} R^0 = 1$,
2. $\dim_{\mathbb{Q}} R^1 = 3$,
3. $\dim_{\mathbb{Q}} R^2 = 6 - 3 = 3$,
4. $\dim_{\mathbb{Q}} R^3 = 10 - 9 = 1$.

En particulier, $\dim_{\mathbb{Q}} R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = 8$. Notez là encore que dans l'exemple 3.3.28 nous avions déjà obtenu par une méthode directe trois relations linéairement indépendantes en codimension 2 :

$$
\begin{aligned}
&19\omega_0^2 - 10\omega_0\omega_1 - 10\omega_0\omega_2 + 2\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + 2\omega_2^2 = 0,\\
&74\omega_0^2 - 58\omega_0\omega_1 - 42\omega_0\omega_2 + 15\omega_1^2 + 16\omega_1\omega_2 + 6\omega_2^2 = 0,\\
&14\omega_0^2 - 18\omega_0\omega_1 + 4\omega_0\omega_2 + 6\omega_1^2 - 4\omega_1\omega_2 + 5\omega_2^2 = 0.
\end{aligned}
$$

En termes de triplets (u, v, w), ces trois relations correspondent respectivement à la base de $\mathbb{Q}^3$ suivante :

$$
\left(\frac{19}{13}, -\frac{5}{13}, -\frac{5}{13}\right), \quad \left(\frac{74}{13}, -\frac{29}{13}, -\frac{21}{13}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{14}{13}, -\frac{9}{13}, \frac{2}{13}\right).
$$

Les différentes approches pour étudier les relations sont donc une fois encore cohérentes les unes par rapport aux autres.

Les exemples traités jusqu'à présent règlent complètement l'étude de la structure de l'anneau $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ lorsque $d \leqslant 4$. Et comme on l'a signalé, pour ces petites dimensions il nous a été possible d'étudier directement certaines relations en manipulant convenablement la transformée de Fourier et l'action des $\mathrm{End}(Z)$ sur $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$. Sur ces exemples, il se trouve qu'on obtenait avec ces méthodes « directes » toutes les relations. L'exemple suivant se passe en dimension supérieure. Dans ce cas, chaque résultat théorique développé dans la sous-section 3.3.5 sera incontournable ; ce qui permettra de se rendre compte de l'efficacité de la méthode.

Le cas $(d, p) = (6, 5)$

Proposition (3.3.64) **-** *Soit $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ un revêtement Galoisien cyclique de degré 5 avec C hyperelliptique. On suppose que $\dim Z = 6$. Alors l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est de la forme $\mathbb{Q}[\omega_0, \omega_1]/I_{6,5}$ où $I_{6,5}$ est l'idéal des relations entre ω_0 et ω_1. Cet idéal est engendré par les relations suivantes*

1. $\omega_0^{7-i}\omega_1^i = 0$ *pour* $i \in [\![0, 7]\!]$,
2. $3\omega_0^6 - 2\omega_0^5\omega_1 = 0$, $\quad 2\omega_0^6 - \omega_0^4\omega_1^2 = 0$, $\quad 9\omega_0^6 - 4\omega_0^3\omega_1^3 = 0$, $\quad \omega_0^6 - \omega_1^6 = 0$,
   $3\omega_0^6 - 2\omega_0\omega_1^5 = 0$, $\quad 2\omega_0^6 - \omega_0^2\omega_1^4 = 0$,
3. $\omega_0^5 - 5\omega_0\omega_1^4 + 6\omega_1^5 = 0$, $\quad \omega_0^4\omega_1 - 6\omega_0\omega_1^4 + 7\omega_1^5 = 0$, $\quad 2\omega_0^3\omega_1^2 - 11\omega_0\omega_1^4 + 12\omega_1^5 = 0$,
   $2\omega_0^2\omega_1^3 - 6\omega_0\omega_1^4 + 5\omega_1^5 = 0$,
4. $\omega_0^4 - 6\omega_0^2\omega_1^2 + 12\omega_0\omega_1^3 - 8\omega_1^4 = 0$, $\quad 4\omega_0^3\omega_1 - 18\omega_0^2\omega_1^2 + 32\omega_0\omega_1^3 - 21\omega_1^4 = 0$.

Démonstration. D'après la proposition 3.3.5, $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est engendré par ω_0 et ω_1. Étudions les relations entre ces deux générateurs.

Relations en codimension $> 6 = d := \dim Z$ Celles-ci sont engendrées par les $\omega_0^{7-i}\omega_1^i$ pour $i \in [\![0, 7]\!]$.

Relations en codimension maximale $d = 6$ Les relations en codimension maximale sont obtenues comme d'habitude à partir des calculs menés dans l'exemple 3.3.46. On obtient ainsi les relations

$$
\begin{aligned}
&1080\omega_0^6 - 720\omega_0^5\omega_1 = 0, \quad 1440\omega_0^6 - 720\omega_0^4\omega_1^2 = 0, \quad 1620\omega_0^6 - 720\omega_0^3\omega_1^3 = 0, \quad 720\omega_0^6 - 720\omega_1^6 = 0,\\
&1080\omega_0^6 - 720\omega_0\omega_1^5 = 0, \quad 1440\omega_0^6 - 720\omega_0^2\omega_1^4 = 0.
\end{aligned}
$$

Puis en divisant par le pgcd des coefficients on trouve le second type de relations données par la proposition.

Relations en codimension 1 Vérifions qu'il n'existe pas de relation non triviale en codimension 1. Si une telle relation existait, elle serait de la forme

$$a\omega_0 + b\omega_1 = 0, \qquad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{Q}^2.$$

En intersectant cette relation générale avec ω_0^5, $\omega_0^4\omega_1$,$\omega_0^3\omega_1^2$, $\omega_0^2\omega_1^3$, $\omega_0\omega_1^4$ et ω_1^5, on en déduit grâce à l'exemple 3.3.46 le système de relations suivant :

$$\begin{cases} a\omega_0^6 + b\omega_0^5\omega_1 = 0 \\ a\omega_0^5\gamma_1 + b\omega_0^4\omega_1^2 = 0 \\ a\omega_0^4\gamma_1^2 + b\omega_0^3\omega_1^3 = 0 \\ a\omega_0^3\gamma_1^3 + b\omega_0^2\omega_1^4 = 0 \\ a\omega_0^2\gamma_1^4 + b\omega_0\omega_1^5 = 0 \\ a\omega_0\gamma_1^5 + b\omega_1^6 = 0 \end{cases} \iff (\Sigma^1_{(6,5)}) : \begin{cases} 720a + 1080b = 0 \\ 1080a + 1440b = 0 \\ 1440a + 1620b = 0 \\ 1620a + 1440b = 0 \\ 1440a + 1080b = 0 \\ 1080a + 720b = 0 \end{cases}$$

dont on vérifie que $(a,b) = (0,0)$ est la seule solution.

Relations en codimension 2 De même, on montre qu'il n'existe pas de relation (non triviale) en codimension 2. En effet, une telle relation serait de la forme

$$a\omega_0^2 + b\omega_0\omega_1 + c\omega_1^2 = 0, \qquad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{Q}^3.$$

En intersectant cette fois-ci avec ω_0^4, $\omega_0^3\omega_1$, $\omega_0^2\omega_1^2$, $\omega_0\omega_1^3$ et ω_1^4, on obtient le système linéaire suivant

$$\begin{cases} a\omega_0^6 + b\omega_0^5\omega_1 + c\omega_0^4\omega_1^2 = 0 \\ a\omega_0^5\omega_1 + b\omega_0^4\omega_1^2 + c\omega_0^3\omega_1^3 = 0 \\ a\omega_0^4\omega_1^2 + b\omega_0^3\omega_1^3 + c\omega_0^2\omega_1^4 = 0 \\ a\omega_0^3\omega_1^3 + b\omega_0^2\omega_1^4 + c\omega_0\omega_1^5 = 0 \\ a\omega_0^2\omega_1^4 + b\omega_0\omega_1^5 + c\omega_1^6 = 0 \end{cases} \iff (\Sigma^2_{(6,5)}) : \begin{cases} 720a + 1080b + 1440c = 0 \\ 1080a + 1440b + 1620c = 0 \\ 1440a + 1620b + 1440c = 0 \\ 1620a + 1440b + 1080c = 0 \\ 1440a + 1080b + 720c = 0 \end{cases}$$

dont le seul triplet solution est $(a,b,c) = (0,0,0)$.

Relations en codimension 3 En codimension $3 \leqslant \frac{6}{2} = \frac{d}{2}$, il n'y a toujours pas de relation. En effet, une relation en codimension 3 est de la forme

$$a\omega_0^3 + b\omega_0^2\omega_1 + c\omega_0\omega_1^2 + d\omega_1^3 = 0, \qquad \text{avec } (a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4.$$

Pour augmenter la codimension jusqu'à son maximum, on peut ici intersecter par ω_0^3, $\omega_0^2\omega_1$, $\omega_0\omega_1^2$ ou par ω_1^3 uniquement. On n'obtient donc que quatre relations. Comme avant, on a

$$\begin{cases} a\omega_0^6 + b\omega_0^5\omega_1 + c\omega_0^4\omega_1^2 + d\omega_0^3\omega_1^3 = 0 \\ a\omega_0^5\omega_1 + b\omega_0^4\omega_1^2 + c\omega_0^3\omega_1^3 + d\omega_0^2\omega_1^4 = 0 \\ a\omega_0^4\omega_1^2 + b\omega_0^3\omega_1^3 + c\omega_0^2\omega_1^4 + d\omega_0\omega_1^5 = 0 \\ a\omega_0^3\omega_1^3 + b\omega_0^2\omega_1^4 + c\omega_0\omega_1^5 + d\omega_1^6 = 0 \end{cases} \iff (\Sigma^3_{(6,5)}) : \begin{cases} 720a + 1080b + 1440c + 1620d = 0 \\ 1080a + 1440b + 1620c + 1440d = 0 \\ 1440a + 1620b + 1440c + 1080d = 0 \\ 1620a + 1440b + 1080c + 720d = 0, \end{cases}$$

système qui là encore n'admet pour seule solution que le quadruplet $(0,0,0,0)$.

Relations en codimension $4 = d - 2$ Une relation en codimension 4 est de la forme

$$a\omega_0^4 + b\omega_0^3\omega_1 + c\omega_0^2\omega_1^2 + d\omega_0\omega_1^3 + e\omega_1^4 = 0, \qquad \text{avec } (a,b,c,d,e) \in \mathbb{Q}^5.$$

Grâce au lemme 3.3.57, on sait immédiatement que le système linéaire $(\Sigma^4_{(6,5)})$ est obtenu en transposant $(\Sigma^2_{(6,5)})$:

$$(\Sigma^4_{(6,5)}) : \quad \begin{cases} 720a + 1080b + 1440c + 1620d + 1440e = 0 \\ 1080a + 1440b + 1620c + 1440d + 1080e = 0 \\ 1440a + 1620b + 1440c + 1080d + 720e = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système $(\Sigma^4_{(6,5)}) = {}^t(\Sigma^2_{(6,5)})$ (considérant a, b comme des paramètres) nous donne la famille de possibles relations suivante :

$$4u\omega_0^4 + 4v\omega_0^3\omega_1 - (24u + 18v)\omega_0^2\omega_1^2 + (48u + 32v)\omega_0\omega_1^3 - (32u + 21v)\omega_1^4 = 0, \qquad \text{avec } (u,v) \in \mathbb{Q}^2.$$

Puisque $(\Sigma^4_{(6,5)})$ est de rang maximal, le théorème 3.3.58 prouve que chacune de ces possibles relations est effectivement une relation de R^4. En particulier, une base des relations en codimension 4 est donnée pour $(u,v) = (\frac{1}{4}, 0)$ et $(0,1)$ par exemple :

$$\omega_0^4 - 6\omega_0^2\omega_1^2 + 12\omega_0\omega_1^3 - 8\omega_1^4 = 0 \qquad \text{et} \qquad 4\omega_0^3\omega_1 - 18\omega_0^2\omega_1^2 + 32\omega_0\omega_1^3 - 21\omega_1^4 = 0.$$

Relations en codimension $5 = d - 1$ Une relation en codimension 5 est de la forme

$$a\omega_0^5 + b\omega_0^4\omega_1 + c\omega_0^3\omega_1^2 + d\omega_0^2\omega_1^3 + e\omega_0\omega_1^4 + f\omega_1^5 = 0, \qquad \text{avec } (a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{Q}^6.$$

Grâce au lemme 3.3.57, on sait que le système linéaire $(\Sigma^5_{(6,5)})$ est obtenu en transposant $(\Sigma^1_{(6,5)})$:

$$(\Sigma^5_{(6,5)}) : \quad \begin{cases} 720a + 1080b + 1440c + 1620d + 1440e + 1080f = 0 \\ 1080a + 1440b + 1620c + 1440d + 1080e + 720f = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système $(\Sigma^5_{(6,5)}) = {}^t(\Sigma^1_{(6,5)})$ nous fournit la famille de possibles relations suivante :

$$2u\omega_0^5 + 2v\omega_0^4\omega_1 + 2w\omega_0^3\omega_1^2 + 2x\omega_0^2\omega_1^3 - (10u + 12v + 11w + 6x)\omega_0\omega_1^4 + (12u + 14v + 12w + 5x)\omega_1^5 = 0,$$

avec $(u,v,w,x) \in \mathbb{Q}^4$ et puisque $(\Sigma^5_{(6,5)})$ est de rang maximal, le théorème 3.3.58 prouve à nouveau que chacune de ces possibles relations est effectivement une relation de R^5. En particulier, une base des relations en codimension 5 est obtenue par exemple en prenant $(u,v,w,x) = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$:

$$\omega_0^5 - 5\omega_0\omega_1^4 + 6\omega_1^5 = 0, \quad \omega_0^4\omega_1 - 6\omega_0\omega_1^4 + 7\omega_1^5 = 0,$$
$$2\omega_0^3\omega_1^2 - 11\omega_0\omega_1^4 + 12\omega_1^5 = 0, \quad 2\omega_0^2\omega_1^3 - 6\omega_0\omega_1^4 + 5\omega_1^5 = 0.$$

D'où la proposition. □

Dans ce cas là, l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est de dimension

$$\dim_{\mathbb{Q}} R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z) = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16.$$

On voit bien sur cet exemple l'intérêt de la méthode :

1. En codimension 5, on vérifie que la relation obtenue à l'aide de la transformée de Fourier correspond au quadruplet $\left(120, -\frac{405}{2}, 135, -45\right)$. Toutefois rien ne garanti qu'on aurait pu trouver 3 autres relations linéairement indépendantes de celle-ci en faisant agir des polynômes en σ sur cette relation.
2. Aucune des relations en codimension 4 n'aurait été trouvée en utilisant juste la transformée de Fourier et l'action de $\mathrm{End}(Z)$ sur l'algèbre engendrée par les ω_i puisque déjà aucune relation non triviale n'était connue en codimension 2.

CHAPITRE 4

Sous-variétés spéciales des variétés de Prym généralisées associées aux revêtements Galoisiens n-cycliques

4.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, on précise le lien entre certains systèmes linéaires complets sans point de base sur des courbes quotients et les anneaux tautologiques sur les variétés de Prym généralisées. Pour cela, on considère dans tout ce qui suit un revêtement Galoisien n-cyclique étale $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ de degré $n \geqslant 2$ entre courbes complexes projectives lisses de genre respectif $g = g(C)$ et $g' = g(C') \geqslant 1$. On rappelle (cf. Chapitres 1 et 2) que l'on dispose d'un morphisme $N_f : J = J(C) \to J' = J(C')$ (le morphisme d'Albanese induit par f), mais aussi d'un morphisme $\overline{f} := f^* : J' \to J$, ainsi que de deux sous-variétés abéliennes complémentaires dans J ; à savoir la sous-variété $Y := \mathrm{Im}(\overline{f})$ isogène à J' et la variété de Prym généralisée Z déterminée par le revêtement.

On rappelle aussi que

$$Z = \mathrm{Ker}(N_Y)^0 = \mathrm{Ker}(1 + \sigma + \ldots + \sigma^{n-1})^0 = \mathrm{Im}(1 - \sigma);$$

cette dernière égalité pouvant se justifier par un argument de dimension en notant que Z est le complémentaire de $Y = \mathrm{Ker}(\sigma - 1)^0$. Par ailleurs, de par la formule de Hurwitz, on a $2g-2 = n(2g'-2)$ de sorte que

$$\dim Z = g - g' = n(g' - 1) + 1 - g' = (n - 1)(g' - 1).$$

Puisque f est cyclique étale de degré $n \geqslant 2$, l'isogénie $j := \overline{f} : J' \to Y$ est de degré n et son noyau est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Par dualité, il vient que le noyau de N_f admet n composantes connexes disjointes notées $Z = Z_0 = \mathrm{Ker}(N_f)^0$ et $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ (cf. [BL04, Proposition 12.6.1] pour le cas $n = 2$) :

$$\mathrm{Ker}(N_f) \simeq Z \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Ces composantes Z_i sont des translatées les unes des autres.

Dans tout ce chapitre, on se donne un système linéaire complet g^r_d sur C' de degré d et de dimension projective r tel que

(i) $0 < d < 2g'$,

(ii) le g^r_d contient un diviseur réduit (ou de manière équivalente grâce au théorème de Bertini dont on dispose en caractéristique 0, le g^r_d n'a pas de point de base de multiplicité $\geqslant 2$).

Avant de poursuivre, faisons quelques remarques sur cette hypothèse (i) et tirons-en tout de suite quelques conséquences :

1. D'après le théorème de Clifford [ACGH85, p107-108] l'hypothèse $0 < d < 2g'$ implique que $2r < d$ sauf dans deux cas :
   (a) le g^r_d est le système canonique g^{g-1}_{2g-2} sur C',
   (b) C' est hyperelliptique et le g^r_d est un multiple de l'unique g^1_2 de C'.
2. Dans la suite, on sera effectivement amené à faire l'hypothèse $2r < d$. Celle-ci implique que $d < 2g'$. En effet, supposons par l'absurde que $d \geqslant 2g'$. Alors tout diviseur de degré d sur C' est non-spécial. Dans ce cas, le théorème de Riemann-Roch fournit l'égalité $r = d - g'$. Par conséquent, l'inégalité $2r < d$ se traduit par $2d - 2g' < d$, c'est-à-dire $d < 2g'$; ce qui est en contradiction avec l'inégalité $d \geqslant 2g'$.
3. L'hypothèse $0 < d < 2g'$ implique en particulier que $g' \geqslant 1$ et donc on a grâce à la formule de Hurwitz
$$g + 1 = 2 + n(g' - 1) \geqslant 2g'.$$
   Par conséquent, on a aussi $0 < d < 2g' \leqslant g + 1$, puis $0 < d \leqslant g$.

Notons ensuite $f^{(d)} : C^{(d)} \to C'^{(d)}$ le morphisme induit par f sur les puissances symétriques des courbes C et C'. On fixe aussi un diviseur $D' \in g^r_d$ et on choisit un diviseur D sur C tel que $D' = f^{(d)}(D)$. On note

$$\varphi := \varphi_D : C^{(d)} \to J \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\varphi} := \widetilde{\varphi}_{D'} : C'^{(d)} \to J'$$

les applications habituelles des puissances symétriques des courbes dans leur jacobienne, définies par

$$\varphi(E) := \mathcal{L}_C(E - D) \in \mathrm{Pic}^0(C) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\varphi}(E') := \mathcal{L}_{C'}(E' - D') \in \mathrm{Pic}^0(C')$$

où E (resp. E') est un point de $C^{(d)}$ (resp. $C'^{(d)}$) vu comme un diviseur effectif de degré d sur C (resp. C'). On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} C^{(d)} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f^{(d)}"'] & J \arrow[d, "N_f"] \\ C'^{(d)} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"'] & J'. \end{tikzcd}$$

On considère maintenant le système g^r_d comme partie de $C'^{(d)}$ (isomorphe à $\mathbb{P}^r$). On pose

$$S := (f^{(d)})^{-1}(g^r_d) \qquad \text{et} \qquad V := \varphi(S) \subset \mathrm{Ker}(N_f) \subset J.$$

Autrement dit, S est l'ensemble des diviseurs effectifs E de degré d sur C tels que $f_*E \in g^r_d$. Posons également $V_i := V \cap Z_i \subset Z_i$ et $S_i := \varphi^{-1}(V_i)$. Puisqu'à translation près, les sous-variétés V_i sont des sous-variétés de $Z = Z_0$, ces variétés V_i sont appelées sous-variétés spéciales de Z.

Remarque 4.1.1 :

1. Un choix différent de diviseur D ne fait que translater la variété V (et donc aussi les V_i).
2. Les variétés V_i et S_i n'ont à priori pas de raison d'être connexes.

Notez que l'hypothèse (ii) sert à s'assurer que les sous-variétés S et V sont réduites. En effet, puisque f est étale (c'est-à-dire σ est sans point fixe sur C) l'hypothèse (ii) entraîne que le g^r_d n'est pas contenu dans le lieu de ramification de $f^{(d)}$; ce qui entraîne que S est une sous-variété réduite de $C^{(d)}$ et que les composantes de S sont de dimension r. Par ailleurs, répétons aussi [Bea82, Remarque 1]). Si E est un diviseur de S, alors $\varphi^{-1}(\varphi(E))$ s'identifie à l'espace projectif $|E|$. En particulier, $\varphi : S_i \to V_i$ est un isomorphisme si ses fibres sont de dimension 0 ; c'est-à-dire si $h^0(E) = 1$ pour tout $E \in S_i$. Autrement dit, si S' est une composante irréductible de S, le morphisme $\varphi : S' \to \varphi(S') \subset V$ est birationnel si et seulement si ses fibres sont génériquement de dimension 0 si et seulement si $\varphi(S')$ est une composante irréductible de dimension r de V. Ceci justifie que dans la suite on se restreint à l'étude des classes de cycles déterminées par les composantes de V de dimension r modulo équivalence cohomologique (Section 4.2) et modulo équivalence algébrique (Section 4.3). Pour plus de clarté, on notera par $[V]$ l'union de ces composantes de dimension r de V ainsi que la classe de cycle associée (attention à ne pas confondre cette notation pour V avec celle des précédents chapitres désignant simplement le cycle déterminé par la sous-variété V « en totalité »). De même, on se restreint à l'étude des composantes de dimension r des V_i. Celles-ci seront également notées $[V_i]$, de sorte que $[V] = [V_0] + [V_1] + \ldots + [V_{n-1}]$.

Remarque 4.1.2 : En adaptant l'argument de [Bea82, Remarque 2] au cas d'un automorphisme d'ordre $n \geqslant 2$ quelconque, on montre que les composantes de V sont de dimension entre r et $r-n+1$.

4.2 Classes de cohomologie de $[V]$ et des $[V_i]$ dans $\mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(Z)$

Pour une variété complexe X, on notera simplement dans tout ce qui suit $\mathrm{H}^{\cdot}(X) = \mathrm{H}^{\cdot}(X, \mathbb{Z})$ la cohomologie entière de X. L'objectif de cette partie est d'étudier les classes de cohomologie des composantes de dimension r de V et des V_i dans $\mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(Z)$. Rappelons également que la cohomologie d'une variété abélienne X est sans torsion. Par suite, toute relation dans $\mathrm{H}^{\cdot}(X, \mathbb{Q})$ entre classes de cycles à coefficients entiers est déjà valable dans $\mathrm{H}^{\cdot}(X, \mathbb{Z})$. Enfin, dans toute cette partie, on notera encore θ et θ' les classes de cohomologie des diviseurs Theta sur J et J' respectivement. De même, on notera $\eta := \iota_Z^*\theta \in \mathrm{H}^2(Z)$.

4.2.1 Classe de $[V]$ dans $\mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(Z)$

La proposition suivante vient généraliser [Bea82, Proposition 2].

Proposition 4.2.1 - *La classe du cycle* $[V] = [V_0] + [V_1] + \ldots + [V_{n-1}]$ *dans* $\mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(Z)$ *est*

$$cl_Z([V]) = n^{d-g'-r+1}\frac{\eta^{g-g'-r}}{(g-g'-r)!},$$

ce qui se réécrit encore sous la forme

$$cl_Z([V]) = n^{d-g'-r+1}\frac{\eta^{(n-1)(g'-1)-r}}{((n-1)(g'-1)-r)!}.$$

La démonstration de ce résultat repose sur celle donnée par Beauville dans le cas particulier des variétés de Prym.

Démonstration. On rappelle (cf. Preuve du théorème 2.6.1 – Step 4 ou encore [BL04, Proposition 12.3.4]) que ces cycles sont reliés par la formule

$$e(Z)^2\theta = \frac{e(Z)^2}{n}N_f^*\theta' + \psi_Z^*\eta.$$

Considérons encore $\widetilde{\kappa} \in \mathrm{H}^2(C'^{(d)})$ la classe de l'image de $C'^{(d-1)}$ dans $C'^{(d)}$ par le plongement :

$$x'_1 + \ldots + x'_{d-1} \mapsto x'_1 + \ldots + x'_{d-1} + P'.$$

où P' est un point rationnel quelconque fixé sur C'. Rappelons que cet élément est caractérisé par la propriété suivante : pour tout $k \geqslant 0$ et tout diviseur effectif E' de degré k, $\widetilde{\kappa}^k$ est la classe de l'image de $C'^{(d-k)}$ par le plongement

$$x'_1 + \ldots + x'_{d-k} \mapsto x'_1 + \ldots + x'_{d-k} + E'.$$

On pourra se référer à [Mac62] ou [ACGH85, Chapitre VIII] pour plus de détails à ce sujet. En particulier, en prenant $E' = D' = f^{(d)}(D)$ (cf. Section 4.1 pour l'introduction des diviseurs D et D'), on a pour tout $k \geqslant 0$

$$\widetilde{\varphi}_* \widetilde{\kappa}^k = \frac{\theta'^{\,k-d+g'}}{(k-d+g')!}.$$

En effet, il s'agit essentiellement des formules de Poincaré dont on dispose au niveau des classes de cohomologie (cf. [BL04, Formule 11.2.1 p322]). Si on note κ l'élément analogue de $\mathrm{H}^2(C^{(d)})$, on a de même

$$\varphi_* \kappa^k = \frac{\theta^{k-d+g}}{(k-d+g)!} = \frac{\theta^{k-d+n(g'-1)+1}}{(k-d+n(g'-1)+1)!}.$$

Remarquez aussi que la caractérisation de $\widetilde{\kappa}$ et κ rappelée précédemment implique que pour tout $k \geqslant 0$

$$f^{(d)*}\widetilde{\kappa}^k = n^k \kappa^k$$

puisque f est de degré n et tous les points de C sont algébriquement équivalents entre eux.

Passons à présent au cœur de la preuve. D'après la formule de Macdonald [Mac62] ou [ACGH85, Lemma VIII.3.2 p342], la classe de cohomologie du g^r_d dans C'^d est la composante de degré $2d-2r$ de $(1+\widetilde{\kappa})^{d-r-g'} e^{\widetilde{\varphi}^* \theta'}$:

$$cl_{C'^{(d)}}(g^r_d) = \sum_{\alpha+\beta=d-r} \binom{d-r-g'}{\alpha} \widetilde{\kappa}^\alpha \frac{\widetilde{\varphi}^* \theta'^\beta}{\beta!}.$$

En appliquant $f^{(d)*}$ et en utilisant que $N_f \circ \varphi = \widetilde{\varphi} \circ f^{(d)}$ et $f^{(d)*}\widetilde{\kappa}^\alpha = n^\alpha \kappa^\alpha$, on en déduit que la classe de S dans $\mathrm{H}^{2d-2r}(C^{(d)})$ est

$$cl_{C^{(d)}}(S) = f^{(d)*} cl_{C'^{(d)}}(g^r_d) = \sum_{\alpha+\beta=d-r} \binom{d-r-g'}{\alpha} n^\alpha \kappa^\alpha \frac{\varphi^* N_f^* \theta'^\beta}{\beta!}.$$

Ensuite, pour obtenir la classe $[V]$ de V dans $\mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(J)$, on applique φ_* et on utilise en même temps la formule de projection ainsi que les égalités rappelées précédemment :

$$cl_J([V]) = \sum_{\alpha+\beta=d-r} \binom{d-r-g'}{\alpha} n^\alpha (\varphi_* \kappa^\alpha) \frac{N_f^* \theta'^\beta}{\beta!} = \sum_{\alpha+\beta=d-r} \binom{d-r-g'}{\alpha} n^\alpha \frac{\theta^{\alpha-d+g}}{(\alpha-d+g)!} \frac{N_f^* \theta'^\beta}{\beta!}.$$

Puis en remplaçant $e(Z)^2\theta$ par $\frac{e(Z)^2}{n} N_f^* \theta' + \psi_Z^* \eta$, et en développant avec la formule du binôme de

Newton, il vient successivement :

$$\begin{aligned}
cl_J([V]) &= \sum_{\alpha+\beta=d-r} \binom{d-r-g'}{\alpha} \frac{n^\alpha}{e(Z)^{2(\alpha-d+g)}} \frac{(\frac{e(Z)^2}{n}N_f^*\theta' + \psi_Z^*\eta)^{\alpha-d+g}}{(\alpha-d+g)!} \frac{N_f^*\theta'^\beta}{\beta!} \\
&= \sum_{\alpha+\beta=d-r} \sum_{\lambda=0}^{\alpha-d+g} \binom{d-r-g'}{\alpha}\binom{\alpha-d+g}{\lambda} \frac{n^{\alpha-\lambda}e(Z)^{2\lambda}}{e(Z)^{2(\alpha-d+g)}} \frac{N_f^*\theta'^{\lambda+\beta}}{\beta!} \frac{\psi_Z^*\eta^{\alpha-d+g-\lambda}}{(\alpha-d+g)!} \\
&= \sum_{\beta=0}^{d-r} \sum_{\lambda=0}^{g-r-\beta} \binom{d-r-g'}{d-r-\beta}\binom{g-r-\beta}{\lambda} \frac{n^{d-r-\beta-\lambda}}{e(Z)^{2(g-r-\beta-\lambda)}} \frac{N_f^*\theta'^{\lambda+\beta}}{\beta!} \frac{\psi_Z^*\eta^{g-r-\beta-\lambda}}{(g-r-\beta)!} \\
&= \sum_{\beta=0}^{d-r} \sum_{\lambda=0}^{g-r-\beta} \binom{d-r-g'}{d-r-\beta} \frac{n^{d-r-\beta-\lambda}}{e(Z)^{2(g-r-\beta-\lambda)}} \frac{N_f^*\theta'^{\lambda+\beta}}{\beta!\lambda!} \frac{\psi_Z^*\eta^{g-r-\beta-\lambda}}{(g-r-\beta-\lambda)!} \\
&= \sum_{\beta,\lambda,\mu} \binom{d-r-g'}{d-r-\beta} \frac{n^{d+\mu-g}}{e(Z)^{2\mu}} \frac{N_f^*\theta'^{\lambda+\beta}}{\beta!\lambda!} \frac{\psi_Z^*\eta^\mu}{\mu!} \\
&= n^{d-g} \sum_{\beta,\lambda,\mu} \binom{d-r-g'}{d-r-\beta} \frac{n^{\mu}}{e(Z)^{2\mu}} \frac{N_f^*\theta'^{\lambda+\beta}}{\beta!\lambda!} \frac{\psi_Z^*\eta^\mu}{\mu!}
\end{aligned}$$

où la somme est prise sur les triplets d'entiers naturels β, λ, μ tels que $\beta+\lambda+\mu = g-r$.

Identifions (par translation) chaque V_i à une sous-variété de $Z = Z_0$. Comme $\psi_Z \circ \iota_Z = e(Z)$, on a

$$e(Z)^{2r} \sum_{i=0}^{n-1} cl_Z([V_i]) = e(Z)_* \sum_{i=0}^{n-1} cl_Z([V_i]) = \psi_{Z*}\iota_{Z*}cl_Z([V]) = \psi_{Z*}cl_J([V])$$

de sorte que

$$\sum_i cl_Z([V_i]) = e(Z)^{-2r}\psi_{Z*}cl_J([V]).$$

Il reste à calculer cette dernière expression. Pour des raisons de degré, l'homomorphisme

$$\psi_{Z*}N_f^* : \mathrm{H}^k(J') \to \mathrm{H}^{k-2g'}(Z)$$

est nul pour tout $k \neq 2g'$ tandis que pour $k = 2g'$ (ie. en degré maximal), on a

$$\psi_{Z*}N_f^* cl_{J'}(o') = \psi_{Z*}\left(\sum_i cl_J(Z_i)\right) = n \cdot \deg(e(Z)\cdot \mathrm{Id}_Z) = n\cdot e(Z)^{2(g-g')} = n \cdot e(Z)^{2(n-1)(g'-1)}$$

où $cl_{J'}(o')$ est la classe d'un point quelconque $o' \in J'$. Autrement dit, on a montré que

$$\psi_{Z*}N_f^*\frac{\theta'^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq g', \\ n\cdot e(Z)^{2(g-g')} = n\cdot e(Z)^{2(n-1)(g'-1)} & \text{pour } k = g'. \end{cases}$$

Il s'ensuit à nouveau grâce à la formule de projection que

$$\begin{aligned}
\sum_i cl_Z([V_i]) &= e(Z)^{-2r}n^{d-g} \sum_{\beta,\lambda,\mu} \binom{d-r-g'}{d-r-\beta} \frac{n^\mu}{e(Z)^{2\mu}} \psi_{Z*}\left(\frac{N_f^*\theta'^{\lambda+\beta}}{\beta!\lambda!}\frac{\psi_Z^*\eta^\mu}{\mu!}\right) \\
&= e(Z)^{-2r}n^{d-g} \sum_{\beta,\lambda,\mu} \binom{d-r-g'}{d-r-\beta} \frac{n^\mu}{e(Z)^{2\mu}} \frac{\psi_{Z*}N_f^*\theta'^{\lambda+\beta}}{\beta!\lambda!}\frac{\eta^\mu}{\mu!} \\
&= e(Z)^{-2r}n^{d-g} \sum_{\beta=0}^{d-r} \binom{d-r-g'}{d-r-\beta} \frac{n^{g-g'-r}}{e(Z)^{2(g-g'-r)}} \frac{n\cdot e(Z)^{2(g-g')}\cdot g'!}{\beta!(g'-\beta)!}\frac{\eta^{g-g'-r}}{(g-g'-r)!}
\end{aligned}$$

car ici seuls les termes de la somme avec $\lambda + \beta = g'$ sont non nuls, auxquels cas $\mu = g - r - \beta - \lambda = g - g' - r$. Plus simplement, il vient

$$\sum_i cl_Z([V_i]) = n^{d-g'-r+1} \frac{\eta^{g-g'-r}}{(g-g'-r)!} \sum_{\beta=0}^{d-r} \binom{d-r-g'}{d-r-\beta} \binom{g'}{\beta}.$$

Or $\sum_{\beta=0}^{d-r} \binom{d-r-g'}{d-r-\beta}\binom{g'}{\beta} = 1$. En effet, ce coefficient est celui de t^{d-r} dans le développement du produit $(1+t)^{d-r-g'}(1+t)^{g'} = (1+t)^{d-r}$. D'où

$$cl_Z([V]) = \sum_i cl_Z([V_i]) = n^{d-g'-r+1} \frac{\eta^{g-g'-r}}{(g-g'-r)!};$$

ce qui prouve la proposition. □

Exemple 4.2.2 (Le cas $n = 2$) **:** Si $n = 2$, η est le double d'une polarisation principale ξ sur Z. La variété (Z, ξ) est une variété de Prym. Dans ce cas, on a $g - g' - r = g' - 1 - r$ et

$$cl_Z([V]) = 2^{d-g'-r+1} \frac{\eta^{g'-1-r}}{(g'-1-r)!} = 2^{d-2r} \frac{\eta^{g'-1-r}}{(g'-1-r)! \cdot 2^{g'-1-r}} = 2^{d-2r} \frac{\xi^{g'-1-r}}{(g'-1-r)!}.$$

Ainsi, on retrouve bien le résultat de Beauville [Bea82, Proposition 2].

4.2.2 Classe des $[V_i]$ dans $\mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(Z)$

On veut à présent étudier la classe $[V_i]$ des composantes de dimension r des sous-variétés spéciales V_i dans $\mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(Z)$. Pour cela, on commence par caractériser les composantes Z_i en termes de faisceaux inversibles sur C.

Lemme 4.2.3 - *Soit $\mathcal{L} \in J$ tel que $N_f(\mathcal{L}) = \mathcal{O}_C$ (ie. $\mathcal{L} \in \mathrm{Ker}(N_f) = \bigcup Z_i$). Alors*

$$\mathcal{L} \simeq \mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee$$

pour un certain $\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}(C)$ de degré $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Démonstration. La démonstration est identique à celle de [Mum71, Lemma 1] donnée dans le cas particulier où $n = 2$ (ou encore celle de [LO16, Lemma 3.1] lorsque $n = 7$). La seule différence est que les fibrés $\mathcal{M}$ peuvent être choisis de degré $k \in [\![0, n-1]\!]$ puisqu'on travaille avec un automorphisme d'ordre n quelconque. Précisément, quitte à remplacer $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M} \otimes f^*\mathcal{N}'$ pour un certain $\mathcal{N}' \in \mathrm{Pic}(C')$ on peut toujours à se ramener à un faisceau de degré $k \in [\![0, n-1]\!]$. En effet,

$$\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee \simeq (\mathcal{M} \otimes f^* \mathcal{N}') \otimes \sigma^* (\mathcal{M} \otimes f^* \mathcal{N}')^\vee$$

car $\sigma^* f^* \mathcal{N}' \simeq f^* \mathcal{N}'$ puisque $f \circ \sigma = f$. □

On déduit de ce lemme la proposition suivante :

Proposition 4.2.4 - *Quitte à réindexer les Z_i pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a*

$$Z_i = \{\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee \in J \mid \deg \mathcal{M} \equiv i \bmod n\} = \{\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee \in J \mid \deg \mathcal{M} = i\}$$

et toujours $Z = Z_0 = \mathrm{Ker}(N_f)^0$. En particulier, si $\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee \in Z_i$, alors pour tout entier j on a $\mathcal{M} \otimes \sigma^{j*} \mathcal{M}^\vee \in Z_{ij \bmod n}$.

Démonstration. Il s'agit essentiellement de montrer que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ la sous-variété

$$\{\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee \in J \mid \deg \mathcal{M} = i\} \subset \mathrm{Ker}(N_f)$$

est connexe. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $i + kn \geqslant g$. Considérons un point $\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee$ de J où $\deg \mathcal{M} = i$. Comme on vient de le remarquer, il existe un faisceau inversible $\mathcal{N} \in \mathrm{Pic}(C)$ de degré $i + kn \geqslant g$ tel que

$$\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee \simeq \mathcal{N} \otimes \sigma^* \mathcal{N}^\vee.$$

En effet, il suffit pour cela de considérer le fibré $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes f^* \mathcal{L}_{C'}(kP')$ où P' est un point rationnel sur C' fixé quelconque. Or par le théorème de Riemann-Roch,

$$h^0(\mathcal{N}, C) \geqslant \deg(\mathcal{N}) + 1 - g \geqslant g + 1 - g = 1.$$

Par suite, il existe un diviseur effectif E sur C de degré $i + kn$ tel que $\mathcal{L}_C(E) \simeq \mathcal{N}$. Autrement dit, le point $\mathcal{N} \otimes \sigma^* \mathcal{N}^\vee$ (et donc aussi $\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee$) appartient à l'image de la variété $C^{(i+kn)}$ par le morphisme

$$F \in C^{(i+kn)} \mapsto \mathcal{L}_C(F) \otimes \sigma^* \mathcal{L}_C(F)^\vee.$$

Cette variété image est donc exactement la variété $\{\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee \in J \mid \deg \mathcal{M} = i\}$ qui nous intéresse ici. Comme $C^{(i+kn)}$ est connexe, $\{\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee \in J \mid \deg \mathcal{M} = i\}$ l'est aussi.

L'ensemble des sous-variétés connexes $\{\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee \in J \mid \deg \mathcal{M} = i\}$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ doit donc coïncider avec l'ensemble des composantes connexes de $\mathrm{Ker}(N_f)$; à savoir $\{Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}$. Comme tous les Z_j sont non vides, les $\{\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee \in J \mid \deg \mathcal{M} = i\}$ correspondent nécessairement à des composantes Z_j distinctes. Ceci fournit la première partie du résultat quitte à réindexer les Z_i. La seconde en découle immédiatement puisque

$$\mathcal{M} \otimes \sigma^{j*} \mathcal{M}^\vee \simeq \bigotimes_{k=0}^{j-1} \left(\sigma^{k*} \mathcal{M} \otimes \sigma^{(k+1)*} \mathcal{M}^\vee \right) \simeq \bigotimes_{k=0}^{j-1} (\mathcal{L}_k \otimes \sigma^* \mathcal{L}_k^\vee)$$

avec $\mathcal{L}_k := \sigma^{k*} \mathcal{M} \in \mathrm{Pic}(C)$ qui est de degré $i = \deg \mathcal{M}$ puisque $\sigma^k \in \mathrm{Aut}(C)$. Autrement dit,

$$\mathcal{M} \otimes \sigma^{j*} \mathcal{M}^\vee \in Z_{ij \bmod n};$$

ce qui est exactement le résultat annoncé. □

Pour compléter cette proposition, portons un point de vue sensiblement différent sur les composantes Z_i. On a déjà signalé que $\mathrm{Ker}(N_f) \simeq Z \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Considérons alors une composante connexe Z_α de $\mathrm{Ker}(N_f)$ correspondant à un générateur α de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. D'après le lemme 4.2.3 précédent, les éléments de Z_α sont de la forme $\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee$ pour certains fibrés $\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}(C)$ de degré constant (modulo n) $k_\alpha \in [\![0, n-1]\!]$. Notez que par connexité ce degré k_α ne dépend effectivement que de la composante Z_α. A ce moment, on peut énoncer le fait suivant :

Fait 4.2.5 : Le caractère générateur de la composante Z_α se traduit par le fait que k_α est premier à n.

Démonstration. Justifions cette assertion.

($\Rightarrow$) : On veut obtenir ici que $\mathrm{pgcd}(k_\alpha, n) = 1$ à partir de la seule hypothèse que Z_α est générateur. Pour cela, on commence par fixer un point $\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee \in \mathrm{Ker}(N_f)$ avec $\deg \mathcal{M} = 1$. Puisque Z_α est générateur, il existe un point $\mathcal{N} \otimes \sigma^* \mathcal{N}^\vee \in Z_\alpha$ tel que

$$\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee \simeq (\mathcal{N} \otimes \sigma^* \mathcal{N}^\vee)^i \simeq \mathcal{N}^i \otimes \sigma^* \mathcal{N}^{-i}$$

pour un certain $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $\deg \mathcal{N}^i = ik_\alpha$, le fait que $\mathcal{N}^i \otimes \sigma^* \mathcal{N}^{-i}$ appartienne à la même composante connexe que $\mathcal{M} \otimes \sigma^* \mathcal{M}^\vee$ signifie que $ik_\alpha \equiv 1 \mod n$; auquel cas n et k_α sont bien premiers entre eux.

($\Leftarrow$) : Réciproquement, on suppose que k_α et n sont premiers entre eux et il s'agit de voir que Z_α est bien générateur. En détail, on commence par considérer un point arbitraire $\mathcal{M} \otimes \sigma^*\mathcal{M}^\vee \in \mathrm{Ker}(N_f)$ avec $\deg \mathcal{M} = \beta \in [\![0, n-1]\!]$. Deux cas se présentent :

1. soit $\beta = 0$ et on peut écrire $\beta = ik_\alpha - ln$ avec $(i,l) = (n, k_\alpha) \neq (0, k_\alpha)$;
2. soit $\beta \in [\![1, n-1]\!]$ n'est pas divisible par n. Dans ce cas, puisque k_α et n sont premiers entre eux, il existe une relation de Bézout de la forme $\beta = ik_\alpha - ln$ pour certains entiers i, l avec $i \neq 0$.

Quelle que soit la situation qui se présente, on peut en utilisant les mêmes arguments que d'habitude supposer que $\mathcal{M}$ est de degré $\beta + ln = ik_\alpha$ avec $i \neq 0$. Pour un point rationnel $P \in C$ fixé quelconque, on introduit alors le fibré $\mathcal{M}' := \mathcal{M}(-ik_\alpha P) \in \mathrm{Pic}^0(C)$. La variété abélienne J étant divisible et i étant non nul, il existe un point $\mathcal{N} \in \mathrm{Pic}^0(C)$ tel que $\mathcal{M}' \simeq \mathcal{N}^i$. Il s'ensuit que

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}'(ik_\alpha P) \simeq \mathcal{N}^i \otimes \mathcal{L}_C(ik_\alpha P) \simeq (\mathcal{N}(k_\alpha P))^i .$$

Autrement dit, en posant $\mathcal{L} := \mathcal{N}(k_\alpha P)$ qui est de degré k_α, on a

$$\mathcal{M} \otimes \sigma^*\mathcal{M}^\vee \simeq \mathcal{L}^i \otimes \sigma^*\mathcal{L}^{-i} \simeq (\underbrace{\mathcal{L} \otimes \sigma^*\mathcal{L}}_{\in Z_\alpha})^i.$$

Finalement le point de $\mathrm{Ker}(N_f)$ défini par le fibré $\mathcal{M} \otimes \sigma^*\mathcal{M}^\vee$ est bien un multiple d'un point de Z_α. Ceci étant vrai pour n'importe quel point $\mathcal{M} \otimes \sigma^*\mathcal{M}^\vee$ de $\mathrm{Ker}(N_f)$, on a montré que Z_α est bien une composante génératrice de $\mathrm{Ker}(N_f)$. $\square$

Remarque 4.2.6 :

1. Remplacer σ par une puissance σ^k avec $\mathrm{pgcd}(k, n) = 1$ ne change pas la variété $Z = Z_0$ car
$$1 + \sigma + \ldots + \sigma^{n-1} = 1 + \sigma^k + \ldots + \sigma^{k(n-1)}.$$
En revanche, les composantes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$ sont permutées.
2. Mis à part $Z = Z_0 = \mathrm{Ker}(N_f)^0$, il n'y a pas de manière canonique de différencier $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$.

A partir de cette proposition 4.2.4, on peut également décrire l'action de l'automorphisme sur les points des variétés S_i. C'est l'objet du prochain corollaire.

Corollaire 4.2.7 - *Soit $x_1 + \ldots + x_d \in S_i$. Alors*

$$x_1 + \ldots + x_{d-1} + \sigma(x_d) \in S_{i+1 \bmod n}.$$

Plus généralement, pour tout entier j, on a

$$x_1 + \ldots + x_{d-1} + \sigma^j(x_d) \in S_{i+j \bmod n}.$$

Démonstration. Identifions dans cette preuve le diviseur $x_1 + \ldots + x_d$ avec le fibré $L := \mathcal{L}_C(x_1 + \ldots + x_d)$. Alors

$$\varphi(L) = \mathcal{L}_C(x_1 + \ldots + x_d - D) \in \varphi(S_i) = V_i \subset Z_i \subset \mathrm{Ker}(N_f).$$

Par conséquent, la proposition 4.2.4 montre qu'il existe $\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}(C)$ de degré i tel que

$$\varphi(L) \simeq \mathcal{M} \otimes \sigma^*\mathcal{M}^\vee.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\varphi\left(\mathcal{L}_C(x_1+\ldots+x_{d-1}+\sigma(x_d))\right) &\simeq \mathcal{L}_C(x_1+\ldots+x_{d-1}+\sigma(x_d)-D)\\ &\simeq \mathcal{L}_C(x_1+\ldots+x_{d-1}+x_d-D)\otimes\mathcal{L}_C(\sigma(x_d)-x_d)\\ &\simeq \mathcal{M}\otimes\sigma^*\mathcal{M}^\vee\otimes\mathcal{L}_C(\sigma(x_d)-x_d)\\ &\simeq \mathcal{M}\otimes\sigma^*\mathcal{M}^\vee\otimes\mathcal{L}_C\left(\sigma(x_d)-\sigma^{-1}(\sigma(x_d))\right)\\ &\simeq \mathcal{M}(\sigma(x_d))\otimes\sigma^*(\mathcal{M}(\sigma(x_d)))^\vee.\end{aligned}$$

Puisque $\deg\mathcal{M}(\sigma(x_d)) = \deg\mathcal{M}+1 = i+1$, on en déduit que

$$\varphi(L(\sigma(x_d)-x_d)) = \varphi\left(\mathcal{L}_C(x_1+\ldots+x_{d-1}+\sigma(x_d))\right) \in Z_{i+1 \bmod n}.$$

Notons par ailleurs que $L(\sigma(x_d)-x_d) \in S := (f^{(d)})^{-1}(g^r_d)$. En effet,

$$f^{(d)}(x_1+\ldots+x_{d-1}+\sigma(x_d)) = f(x_1)+\ldots+f(x_{d-1})+f(\sigma(x_d)) = f(x_1)+\ldots+f(x_{d-1})+f(x_d) \in g^r_d$$

car par hypothèse $L = \mathcal{L}_C(x_1+\ldots+x_d) \in S$. Finalement,

$$L(\sigma(x_d)-x_d) \in S\cap\varphi^{-1}(Z_{i+1}) = S_{i+1}.$$

La seconde assertion se déduit facilement de la première en utilisant le même argument que dans la preuve de la proposition 4.2.4. □

Ce corollaire 4.2.7 étant démontré, nous pouvons obtenir la proposition suivante en reprenant quasiment mot pour mot les arguments de [Bea82, Proposition 1].

Proposition 4.2.8 - *Si $2r < d$, les sous-variétés S_i ont même classe de cohomologie dans $C^{(d)}$. De même, les $[V_i]$ ont même classe dans $\mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(Z)$.*

Démonstration. Soit $s : C^d \to C^{(d)}$ le morphisme naturel de projection. D'après [Mac62, (4) p 322] l'application $s^* : H(C^{(d)}) \to H(C^d)$ est injective. Il suffit donc de montrer que les sous-variétés $T_i := s^{-1}(S_i)$ sont homologiquement équivalentes dans C^d. Posons $T := s^{-1}(S) = \bigcup T_i$ et considérons la projection $p : C^d \to C^{d-1}$ donnée par

$$p(x_1,\ldots,x_d) = (x_1,\ldots,x_{d-1}).$$

Soit $p_T : T \to p(T)$ l'application induite. Etant donné $(x_1,\ldots,x_{d-1}) \in p(T)$, il existe un unique point $y \in C'$ tel que

$$f(x_1)+\ldots+f(x_{d-1})+y \in g^r_d$$

(car sinon il existerait deux points sur C' rationnellement équivalents, et on aurait donc nécessairement $g' = 0$; ce qui est impossible dès lors que $n \geqslant 2$).

Si $f^{-1}(y) = \{y_1,\ldots,y_n\}$, la fibre $p_T^{-1}(x_1,\ldots,x_{d-1})$ se compose des n points $(x_1,\ldots,x_{d-1},y_i)$ que l'on peut supposer appartenir à T_i (quitte à réindexer les y_i). Cela signifie d'après le corollaire 4.2.7 que p induit un isomorphisme entre chaque T_i et $p(T)$. En particulier, on obtient

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad p_* cl_{C^d}(T_i) = cl_{C^{d-1}}(p(T)).$$

Posons $m := 2d-2r$ et considérons deux indices $i,j \in [\![1,n]\!]$. Notons

$$t := cl_{C^d}(T_i) - cl_{C^d}(T_j) \in \mathrm{H}^m(C^d)$$

de sorte que $p_*t = 0$. On considère la décomposition de Künneth suivante ($C^d = C^{d-1} \times C$) :

$$\mathrm{H}^m(C^d) \simeq \Big[\mathrm{H}^{m-2}(C^{d-1}) \otimes \mathrm{H}^2(C)\Big] \oplus \Big[\mathrm{H}^{m-1}(C^{d-1}) \otimes \mathrm{H}^1(C)\Big] \oplus \Big[\mathrm{H}^m(C^{d-1}) \otimes \mathrm{H}^0(C)\Big].$$

Après identification $\mathrm{H}^2(C) \simeq \mathbb{Z}$, l'homomorphisme $p_* : \mathrm{H}^m(C^d) \to \mathrm{H}^{m-2}(C^{d-1})$ s'identifie à la projection sur le premier facteur de cette décomposition. Par conséquent, la relation $p_*t = 0$ montre que dans la décomposition de Künneth

$$\mathrm{H}^m(C^d) \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_d=m \\ 0\leqslant \alpha_j \leqslant 2}} \mathrm{H}^{\alpha_i}(C) \otimes \cdots \otimes \mathrm{H}^{\alpha_d}(C)$$

toutes les composantes $t_{\underline{\alpha}}$ de t pour lesquelles $\alpha_d = 2$ sont nulles.

Plus généralement, en reprenant le même raisonnement avec chacune des d différentes projections $C^d \to C^{d-1}$, on obtient que toutes les composantes $t_{\underline{\alpha}}$ de t pour lesquelles l'un au moins des α_i est égal à 2 sont nulles. Or $d > 2r$ par hypothèse, ou de manière équivalente $m > d$. Donc tout d-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ avec $\sum \alpha_i = m$ comporte au moins une composante $\alpha_i > 1$. Ceci montre que chaque $t_{\underline{\alpha}} = 0$, auquel cas $t = 0$, ce qui signifie que

$$cl_{C^d}(T_i) = cl_{C^d}(T_j)$$

et donc $cl_{C^{(d)}}(S_i) = cl_{C^{(d)}}(S_j)$ comme annoncé.

Ainsi $\varphi_* cl_{C^{(d)}}(S_i) = \varphi_* cl_{C^{(d)}}(S_j)$. Or, comme rappelé en introduction, $\varphi_* cl_{C^{(d)}}(S_k)$ est la somme des classes des composantes de dimension r de V_k ; à savoir $cl_J([V_k])$. Autrement dit, si on note encore $\iota_Z : Z \to J$ le plongement naturel, on a

$$\iota_{Z*} cl_Z([V_i]) = \iota_{Z*} cl_Z([V_j]) \in \mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(Z).$$

Par ailleurs, on considère encore le morphisme $\psi_Z \in \mathrm{Hom}(J, Z)$ tel que $N_Z = \iota_Z \circ \psi_Z$. Puisque $N_{Z|Z} = e(Z)$, on a $\psi_Z \circ \iota_Z = e(Z)$. Appliquant enfin ψ_{Z*} à l'égalité $\iota_{Z*} cl_Z([V_i]) = \iota_{Z*} cl_Z([V_j])$, on obtient

$$e(Z)^{2r} cl_Z([V_i]) = e(Z)^{2r} cl_Z([V_j])$$

d'où l'on tire l'égalité $cl_Z([V_i]) = cl_Z([V_j])$ puisque $\mathrm{H}^{\cdot}(Z)$ est sans torsion. □

En mettant bout à bout les propositions 4.2.1 et 4.2.8, on obtient le théorème suivant (généralisation de [Bea82, Théorème 1]) :

Théorème 4.2.9 - *Si $2r < d$, alors pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ la classe dans $\mathrm{H}^{2(g-g'-r)}(Z)$ de la sous-variété spéciale $[V_i]$ associée au système linéaire complet g^r_d est*

$$cl_Z([V_i]) = n^{d-g'-r} \frac{\eta^{g-g'-r}}{(g-g'-r)!},$$

ce qui se réécrit encore

$$cl_Z([V_i]) = n^{d-g'-r} \frac{\eta^{(n-1)(g'-1)-r}}{((n-1)(g'-1)-r)!}.$$

Les classes de cohomologie des sous-variétés spéciales $[V_i]$ et $[V]$ dans Z sont donc intimement liées à la polarisation induite $\eta = \iota_Z^* \theta$. La partie suivante poursuit cette étude de la classe de $[V]$ pour l'équivalence algébrique. Plus spécifiquement, il va s'agir d'étudier la décomposition de Beauville de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-g'-r}(Z)$.

4.3 Classe d'équivalence algébrique de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-g'-r}(Z)$

On généralise dans cette partie le résultat de la partie 4 de [Ara12] et on fait le lien avec les anneaux tautologiques introduits dans les chapitres précédents.

4.3.1 Notations

On continue de supposer que $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ est un revêtement galoisien n-cyclique étale avec $n \geqslant 2$. On fixe des entiers r, d vérifiant $0 < 2r < d < 2g'$. On considère les sous-variétés spéciales V_i dans Z quitte à effectuer une translation et on note encore V (et V_i) les classes de cycles déterminées dans $\mathrm{A}(Z)$.

Étant donné un r-uplet $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ d'entiers naturels strictement positifs, on note

$$|\underline{n}| := \sum_{i=1}^{r} n_i \qquad \text{et} \qquad \mu_{\underline{n}} := \prod_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{n_j-1}}{n_j}.$$

Notons aussi

$$\mathcal{I}_{r,d} := \{\underline{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^{*r} \mid 1 \leqslant n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_r \quad \text{et} \quad |\underline{n}| \leqslant d\}$$

et

$$\mathcal{A}_{n,s} := \left\{ \left(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, s - \sum_{k=1}^{n-1} m_k \right) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{k=1}^{n-1} m_k \leqslant s \right\}.$$

Le sous-groupe $\mathcal{P}_n \subset \mathfrak{S}_n$ engendré par la permutation cyclique $(1, 2, 3, \ldots, n)$ agit naturellement sur l'ensemble $\mathcal{A}_{n,s}$. On considère le quotient

$$\mathcal{B}_{n,s} := \mathcal{A}_{n,s}/\mathcal{P}_n$$

et on fixe une fois pour toute un système $\mathcal{C}_{n,s}$ de représentants pour ce quotient. Pour ce faire, on peut fixer un ordre (l'ordre lexicographique par exemple) et choisir le représentant minimal dans chacune des classes. Ensuite, on considère la projection sur les $n-1$ premières composantes de $\mathcal{C}_{n,s}$:

$$\mathcal{D}_{n,s} := p_{1,\ldots,n-1}(\mathcal{C}_{n,s}) \subset \mathbb{N}^{n-1}.$$

Exemple 4.3.1 ($n = 2$) **:** $\mathcal{D}_{2,s} = [\![0, \frac{s}{2}]\!]$.

Exemple 4.3.2 ($n = 3$) **:**

1. $\mathcal{D}_{3,1} = \{(0,0)\}$.
2. $\mathcal{D}_{3,2} = \{(0,0), (0,1)\}$.
3. $\mathcal{D}_{3,3} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1)\}$.
4. $\mathcal{D}_{3,4} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,1)\}$.
5. $\mathcal{D}_{3,5} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,1), (1,2)\}$.

Enfin, pour tout $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathcal{I}_{r,d}$, on pose

$$\mathcal{J}_{r,n,\underline{n}} := \prod_{j=1}^{r} \mathcal{D}_{n,n_j} \subset (\mathbb{N}^{n-1})^r.$$

Les éléments de $\mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}$ sont donc des r-uplets de (représentants de classes modulo permutations cycliques de) $(n-1)$-uplets

$$\underline{\underline{m}} := ((m_{1,1}, m_{1,2}, \ldots, m_{1,n-1}), \ldots, (m_{r,1}, m_{r,2}, \ldots, m_{r,n-1}))$$

vérifiant la condition

$$\forall j \in [\![1, r]\!], \qquad \sum_{k=1}^{n-1} m_{j,k} \leqslant n_j.$$

Continuons avec quelques notations qui interviendront dans la suite. Soient $\underline{n} \in \mathcal{I}_{r,d}$ et $\underline{\underline{m}} \in \mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}$.

Pour chaque entier $l \geqslant 1$, on note $q(l)$ le nombre de n_j qui sont égaux à l. Supposons donc que $n_{j_1} = n_{j_2} = \ldots = n_{j_{q(l)}} = l$. On pose alors

$$p(l, \underline{n}, \underline{\underline{m}}) := \begin{cases} \#\{\text{permutations du } q(l)\text{-uplet ordonné de } (n-1)\text{-uplets } (m_{j_1,-}, m_{j_2,-}, \ldots, m_{j_{q(l)},-})\} & \text{si } q(l) \neq 0, \\ 1 & \text{si } q(l) = 0. \end{cases}$$

On peut enfin définir

$$\nu_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} := \prod_{l=1}^{d-r+1} \frac{1}{p(l, \underline{n}, \underline{\underline{m}})}.$$

Exemple 4.3.3 :

1. Si $r = 1$, on a $\nu_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} = 1$.
2. Si $r = 2$, $\nu_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} = \frac{1}{2}$ si ($n_1 = n_2$ et $m_{1,-} \neq m_{2,-}$) et $\nu_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}$ vaut 1 sinon.

On définit maintenant le coefficient

$$\alpha_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} := \nu_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} \prod_{j=1}^{r} \binom{n_j}{m_{j,1}, m_{j,2}, \ldots, m_{j,n-1}, n_j - \sum_k m_{j,k}}$$

où les coefficients multinomiaux ont déjà été rencontrés précédemment (cf. Définition 3.3.32). Puis on considère le rationnel suivant

$$\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} := n^{d-|\underline{n}|} \mu_{\underline{n}} \alpha_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} \binom{d}{|\underline{n}|}.$$

Ensuite, soient $e_1, \ldots, e_k$ des entiers qui comptent le nombre de répétitions dans la séquence de paires

$$(n_1, (m_{1,1}, \ldots, m_{1,n-1})), \ldots\ldots, (n_r, (m_{r,1}, \ldots, m_{r,n-1})).$$

On pose

$$d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} := e_1! e_2! \cdots e_k!.$$

Exemple 4.3.4 : Si cette séquence est

$$(4,(0,0,1)), (4,(0,0,1)), (4,(1,0,1)), (5,(2,0,0)), (6,(0,3,0)), (6,(0,3,0)),$$

alors $e_1 = 2$, $e_2 = 1$, $e_3 = 1$, $e_4 = 2$.

Remarque 4.3.5 :

1. On peut choisir d'ordonner cette séquence selon l'ordre lexicographique par exemple mais ici l'ordre n'a aucune importance.

2. Si l'on n'avait pas fixé un système de représentants modulo permutations cycliques, il aurait fallu compter les répétitions à permutations cycliques près.

Et pour en terminer avec les principales notations, définissons encore les endomorphismes suivants

$$\forall j \in [\![1,r]\!], \qquad h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma) := n_j - \sum_{k=1}^{n-1} m_{j,k} + \sum_{k=1}^{n-1} m_{j,k}\sigma^k \in \mathrm{End}(J).$$

4.3.2 Théorème principal

Le cas général $n \geqslant 2$, $r \geqslant 1$

On dispose à présent de tous les outils et notations nécessaires pour énoncer et démontrer le théorème suivant qui vient généraliser (et corriger) [Ara12, Theorem 6].

Théorème 4.3.6 - *Soit $0 < 2r < d < 2g'$ et $V = \bigcup V_i$ l'union des sous-variétés spéciales vues dans Z associées à un système linéaire complet sans point de base g_d^r sur C'. Alors la classe de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-r}(J)$ est donnée par la formule suivante :*

$$[V] = \sum_{\underline{n}\in\mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{\underline{m}}\in\mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} h_1(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*C * \ldots * h_r(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*C.$$

En particulier, la composante homogène de la classe de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-r}(J)_{(t)}$ est donnée par

$$[V]_{(t)} = \sum_{\underline{n}\in\mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{\underline{m}}\in\mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}} \sum_{\substack{0\leqslant a_1,\ldots,a_r\\ a_1+\ldots+a_r=t}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} h_1(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*C_{(a_1)} * \ldots * h_r(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*C_{(a_r)}$$

et la composante homogène de la classe de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-g'-r}(Z)_{(t)}$ est donnée par

$$[V]_{(t)} = e(Z)^{-2r-t} \sum_{\underline{n}\in\mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{\underline{m}}\in\mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}} \sum_{\substack{0\leqslant a_1,\ldots,a_r\\ a_1+\ldots+a_r=t}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} h_1(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(a_1)} * \ldots * h_r(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(a_r)}.$$

Par conséquent, les $[V]_{(t)}$ sont des cycles tautologiques appartenant à $R_\sigma(C;J)$ ou $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$ selon que l'on considère V comme sous-variété de J ou de Z.

Démonstration. La stratégie générale de la preuve repose sur celle de [Ara12, Theorem 6] qu'il nous faut adapter au cas d'un automorphisme d'ordre $n \geqslant 2$. On rappelle que l'on note encore g_d^r le système linéaire donné sur C' vu comme sous-variété de $C'^{(d)}$ isomorphe à $\mathbb{P}^r$. Étant donné un r-uplet fixé d'entiers naturels $\underline{n} = (n_1,\ldots,n_r)$, on considère la diagonale généralisée

$$\delta'_{\underline{n}} := \{n_1x'_1 + n_2x'_2 + \ldots + n_rx'_r \mid x'_1,\ldots,x'_r \in C'\} \subset C'^{(|\underline{n}|)}.$$

Soit $D' \in g_d^r$ un diviseur effectif fixé dont le support consiste en d points distincts. D'après [Her07, Theorem 3 (ii) p888], la classe $[g_d^r]$ dans $\mathrm{CH}^{d-r}(C'^{(d)})$ du système linéaire est donnée par

$$[g_d^r] = \sum_{\underline{n},\underline{o'_s}} \mu_{\underline{n}}[\delta'_{\underline{n}} + o'_1 + \ldots + o'_s],$$

où la somme est prise sur

1. les r-uplets d'entiers naturels $\underline{n} \in \mathcal{I}_{r,d}$ tels que $s := s(\underline{n}) = d - |\underline{n}| \geqslant 0$

2. et les sommes (non-ordonnées) $\underline{o'_s} := o'_1 + \ldots + o'_s$ obtenues en choisissant s points distincts dans le support du diviseur D'.

Pour calculer la classe de $S = f^{(d)*}[g^r_d] \in \mathrm{A}^{d-r}(C^{(d)})$, on commence par introduire pour tout $\underline{\underline{m}} \in \mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}$ les diagonales généralisées modifiées suivantes

$$\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} := \left\{ \sum_{j=1}^{r} \left((n_j - \sum_k m_{j,k}) x_j + \sum_{k=1}^{n-1} m_{j,k} \sigma^k(x_j) \right) \;\middle|\; x_1, \ldots, x_r \in C \right\} \subset C^{(|\underline{n}|)},$$

ce qui peut se réécrire avec un léger abus de notation

$$\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} := \left\{ \sum_{j=1}^{r} h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(x_j) \;\middle|\; x_1, \ldots, x_r \in C \right\} \subset C^{(|\underline{n}|)}.$$

En comptant bien les points, on arrive à l'égalité suivante

$$f^{(d)*}[\delta'_{\underline{n}} + o'_1 + \ldots + o'_s] = \sum_{\underline{\underline{m}}, \underline{u_s}} \alpha_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} [\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} + u_1 + \ldots + u_s]$$

où la somme est prise sur

1. les r-uplets de $(n-1)$-uplets $\underline{\underline{m}} \in \mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}$
2. et les sommes (non-ordonnées) $\underline{u_s} = u_1 + \ldots + u_s$ avec des $u_j \in f^{-1}(o'_j) = \{o_j, \sigma(o_j), \ldots, \sigma^{n-1}(o_j)\}$.

En effet, pour comprendre le passage de $\delta'_{\underline{n}}$ à $\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}$ on peut raisonner de la sorte : pour chaque j fixé et pour chacun des n_j points x'_j, il faut choisir une correspondance entre les n éléments de la fibre au-dessus de x'_j (ie. les $\sigma^k(x_k)$) et le n-uplet $(m_{j,1}, m_{j,2}, \ldots, m_{j,n-1}, n_j - \sum_k m_{j,k})$. Concrètement, une fois fixés les choix correspondants aux σ^k pour $k = 1, \ldots, n-1$, tout est fixé. Ceci justifie l'introduction des coefficients multinomiaux dans le coefficient $\alpha_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}$. Comme dans [Ara12], le coefficient $\nu_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}$ vient corriger une redondance qui pourrait apparaître si certains des n_j sont égaux.

Remarque 4.3.7 : Notez que c'est à ce moment là qu'il est intéressant de considérer des classes de multiplets sous l'action des permutations cycliques ; tout ceci afin d'éviter de compter plusieurs fois la même diagonale : remplacer x_j par un $\sigma^k(x_j)$ revient à effectuer une permutation cyclique des coefficients $m_{j,1}, m_{j,2}, \ldots, m_{j,n-1}, n_j - \sum_k m_{j,k}$.

En passant à l'équivalence algébrique, c'est-à-dire dans $\mathrm{A}(C^{(d)})$, la formule pour le pull-back d'une diagonale généralisée devient

$$f^{(d)*}[\delta'_{\underline{n}} + o'_1 + \ldots + o'_s] = \sum_{\underline{\underline{m}} \in \mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}} n^{d-|\underline{n}|} \alpha_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} [\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} + (d - |\underline{n}|) o]$$

car pour chacun des $s = d - |\underline{n}|$ points u_i à choisir, il y a n choix possibles ; chacun de ces choix fournissant un point algébriquement équivalent à un point quelconque noté ici $o \in C$. Il vient alors

$$\begin{aligned} S = f^{(d)*}[g^r_d] &= \sum_{\underline{n}, \underline{o'_s}} \mu_{\underline{n}} f^{(d)*}[\delta'_{\underline{n}} + o'_1 + \ldots + o'_s] = \sum_{\underline{n}, \underline{o'_s}} \sum_{\underline{\underline{m}}} \mu_{\underline{n}} n^{d-|\underline{n}|} \alpha_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} [\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} + (d - |\underline{n}|) o] \\ &= \sum_{\underline{n}} \sum_{\underline{\underline{m}}} n^{d-|\underline{n}|} \mu_{\underline{n}} \alpha_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} \binom{d}{|\underline{n}|} [\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} + (d - |\underline{n}|) o] = \sum_{\underline{n} \in \mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{\underline{m}} \in \mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}} \lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} [\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} + (d - |\underline{n}|) o] \end{aligned}$$

car il y a

$$\binom{d}{s} := \binom{d}{d - |\underline{n}|} = \binom{d}{|\underline{n}|}$$

sommes non-ordonnées $\underline{o'_s}$ formées à partir de $s = d - |\underline{n}|$ points distincts à choisir parmi les d points distincts du support du diviseur D'.

Notons ensuite d_j le degré du morphisme

$$h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma) : C \subset J \longrightarrow h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C) \subset J,$$

de sorte qu'en termes de classes de cycles, on a pour tout j l'égalité

$$h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)_* C = d_j[h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C)].$$

Le morphisme $\varphi : C^{(d)} \to J$ induit donc un morphisme de degré $d_1 d_2 \cdots d_r$ de $\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} + (d - |\underline{n}|)o$ sur un translaté de la variété image $\sum_{j=1}^r h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C) \subset J$; ce qui signifie dans $\mathrm{A}(J)$:

$$\varphi_*[\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} + (d - |\underline{n}|)o] = d_1 d_2 \cdots d_r \left[\sum_{j=1}^r h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C)\right].$$

Remarque 4.3.8 : Bien que le morphisme $\varphi : C^{(d)} \to J$ définit un morphisme birationnel sur son image [Mil86, Theorem 5.1 (a)] car $d \leqslant g$, celui-ci restreint à une sous-variété propre ne l'est plus forcément.

Or le degré du morphisme d'addition

$$\prod_{j=1}^r h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C) \longrightarrow \sum_{j=1}^r h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C),$$

est le coefficient $d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}$ vu dans la partie Notations. En effet, le nombre d'antécédents d'un point générique de $\sum_{j=1}^r h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C)$ (c'est-à-dire un point de la forme $\sum_{j=1}^r h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(x_j)$ avec des $x_j \in C$ distincts) dépend fondamentalement du nombre de fois que chaque endomorphisme $h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)$ se répète (étant entendu que génériquement des endomorphismes h_j distincts déterminent des variétés images indépendantes). Par conséquent, il vient par définition du produit de Pontryagin

$$[h_1(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C)] * [h_2(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C)] * \ldots * [h_r(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C)] = d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} \left[\sum_{j=1}^r h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C)\right].$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_*[\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} + (d - |\underline{n}|)o] &= d_1 d_2 \cdots d_r \left[\sum_{j=1}^r h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C)\right] \\
&= \frac{d_1 d_2 \cdots d_r}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} [h_1(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C)] * [h_2(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C)] * \ldots * [h_r(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)(C)] \\
&= \frac{1}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} h_1(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)_* C * h_2(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)_* C * \ldots * h_r(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)_* C.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a dans $\mathrm{A}^{g-r}(J)$

$$\begin{aligned}
[V] = \varphi_* f^{(d)*}[g_d^r] &= \sum_{\underline{n} \in \mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{\underline{m}} \in \mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}} \lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} \varphi_*[\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} + (d - |\underline{n}|)o] \\
&= \sum_{\underline{n} \in \mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{\underline{m}} \in \mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} h_1(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)_* C * \ldots * h_r(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)_* C.
\end{aligned}$$

Comme ψ_Z commute aux polynômes en σ, on obtient

$$\psi_{Z*}\varphi_*[\delta_{\underline{n},\underline{\underline{m}}} + (d - |\underline{n}|o)] = \frac{1}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} h_1(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C * \ldots * h_r(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C.$$

En se rappelant que sur Z, $\psi_Z = e(Z)$, il vient alors que la classe de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-g'-r}(Z)$ vérifie

$$e(Z)_*[V] = \psi_{Z*}\varphi_* f^{(d)*}[g_d^r] = \sum_{\underline{n}\in\mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{\underline{m}}\in\mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} h_1(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C * \ldots * h_r(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C.$$

Il ne reste plus qu'à projeter les précédentes égalités sur $\mathrm{A}^{g-r}(J)_{(t)}$ et $\mathrm{A}^{\dim Z-r}(Z)_{(t)}$ pour obtenir les formules de $[V]_{(t)}$ annoncées. Faisons-le en détails pour la formule sur Z (l'autre s'obtient encore plus facilement de la même manière). Pour cela, il suffit de se rappeler que

1. $e(Z)_*[V]_{(t)} = e(Z)^{2\dim Z-2(\dim Z-r)+t}[V]_{(t)} = e(Z)^{2r+t}[V]_{(t)}$,
2. $\mathrm{A}^a(Z)_{(u)} * \mathrm{A}^b(Z)_{(v)} \subset \mathrm{A}^{a+b-\dim Z}(Z)_{(u+v)}$,
3. si $h \in \mathrm{Hom}(J,Z)$, $h_*\mathrm{A}^{g-1}(J)_{(t)} \subset \mathrm{A}^{\dim Z-1}(Z)_{(t)}$.

Décomposons donc $C = C_{(0)} + C_{(1)} + \ldots + C_{(g-1)}$ avec $C_{(i)} \in \mathrm{A}^{g-1}(J)_{(i)}$. Alors pour tout entier $0 \leqslant t \leqslant \dim Z - 1$, $e(Z)^{2r+t}[V]_{(t)}$ est la composante homogène de degré t apparaissant dans la somme

$$\sum_{\underline{n}\in\mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{\underline{m}}\in\mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}} \sum_{a_1=0}^{\dim Z-1} \cdots \sum_{a_r=0}^{\dim Z-1} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} h_1(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(a_1)} * \ldots * h_r(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(a_r)}.$$

En conclusion, on a dans $\mathrm{A}^{g-g'-r}(Z)_{(t)}$

$$[V]_{(t)} = e(Z)^{-2r-t} \sum_{\underline{n}\in\mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{\underline{m}}\in\mathcal{J}_{r,n,\underline{n}}} \sum_{\substack{0\leqslant a_1,\ldots,a_r \\ a_1+\ldots+a_r=t}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} h_1(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(a_1)} * \ldots * h_r(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(a_r)}.$$

$\square$

Le cas des variétés de Prym $n = 2$, $r \geqslant 1$

Pour $n = 2$, cas des variétés de Prym, on obtient une forme sensiblement plus simple du théorème 4.3.6.

Théorème 4.3.9 (Le cas $n = 2$, $r \geqslant 1$) **-** *Soit $0 < 2r < d < 2g'$ et $V = V_1 \cup V_2$ l'union des sous-variétés spéciales vues dans Z associées à un système linéaire complet sans point de base g_d^r sur C'. Alors la composante homogène de la classe de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-g'-r}(Z)_{(t)}$ est donnée par la formule suivante*

$$[V]_{(t)} = 2^{-2r-t} \sum_{\underline{n}\in\mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{m}\leqslant\frac{\underline{n}}{2}} \sum_{\substack{0\leqslant a_1,\ldots,a_r \\ a_1+\ldots+a_r=t}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{m}}}{d_{\underline{n},\underline{m}}} \prod_{j=1}^{r} (n_j - 2m_j)^{a_j+2} \psi_{Z*}C_{(a_1)} * \ldots * \psi_{Z*}C_{(a_r)}$$

où l'on précise les différentes notations utilisées ici avec $n = 2$:

1. *la somme sur $\underline{m}$ est prise sur les r-uplets d'entiers naturels $\underline{m} := (m_1, m_2, \ldots, m_r) \in \mathcal{J}_{r,2,\underline{n}}$, c'est-à-dire vérifiant la condition pour tout $j \in [\![1,r]\!]$, $m_j \leqslant \frac{n_j}{2}$,*
2. $\lambda_{\underline{n},\underline{m}} := 2^{d-|\underline{n}|}\binom{d}{|\underline{n}|}\left(\prod_{j=1}^r \frac{(-1)^{n_j-1}}{n_j}\binom{n_j}{m_j}\right)\left(\prod_{l=1}^{d-r+1}\frac{1}{p(l,\underline{n},\underline{m})}\right)$.

En particulier, les $[V]_{(t)}$ sont des cycles tautologiques sur Z dans $R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$. De plus, si t est impair, alors $[V]_{(t)}=0$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 4.3.6. En effet, si $n=2$, alors $\sigma_{|Z} = -1_Z \in \mathrm{End}(Z)$ car $Z=\mathrm{Ker}(1+\sigma)^0$. On a aussi $e(Z)=2$. En effet, rappelons que $e(Z)$ divise l'ordre de σ qui ici vaut 2 (cf. Sous-section 2.3.1, point (3)) et $e(Z)=e(Y)\neq 1$ car σ est non trivial et $C/\langle\sigma\rangle \neq \mathbb{P}^1$ puisque dans tout ce chapitre le revêtement $f : C \to C' \simeq C/\langle\sigma\rangle$ est supposé étale (cf. Lemma 2.3.11, point 3). On peut également rappeler (Lemme 2.6.5) que dans ce cas tous les $\psi_{Z*}C_{(2i+1)}$ sont nuls ; ce qui justifie la dernière assertion puisque si t est impair, alors chaque terme de la somme apparaît avec au moins un des a_i impair. □

Cet énoncé permet de retrouver et corriger [Ara12, Theorem 6]. Bien que la démonstration donnée par Arap soit correcte, l'énoncé de ce dernier ne l'est pas en général sauf si $r=1$ ou $t=0,1$. La « subtilité » se situe à la toute fin de la démonstration du résultat : la composante d'indice (t) d'un produit de Pontryagin n'est pas le produit de Pontryagin des composantes d'indices (t). Quoi qu'il en soit les exemples [Ara12, Example 1] (cas $r=1$) et [Ara12, Example 2] (formule obtenue directement en reprenant la dernière étape correcte de la preuve du théorème) donnés par Arap restent valides. En revanche, sa dernière assertion (qui est cette fois-ci difficilement vérifiable pour ne pas dire invérifiable) concernant la non-nullité de $[V]_{(2)}$ avec $r=2,3$ semble compromise.

4.3.3 Formules particulières pour $[V]_{(t)}$ lorsque $r=1$

Le cas particulier des g^1_d (cas où la courbe C' est d-gonale) mérite lui aussi d'être mis en avant :

Proposition 4.3.10 (Le cas $n\geqslant 2$, $r=1$) **-** *Soit $2<d<2g'$ et $V=\bigcup V_i$ l'union des sous-variétés spéciales vues dans Z associées à un système linéaire complet sans point de base g^1_d sur C'. Alors la composante homogène de la classe de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-g'-1}(Z)_{(t)}$ est donnée par la formule suivante*

$$[V]_{(t)} = e(Z)^{-2-t}\sum_{\beta=1}^{d}\sum_{\underline{m}\in\mathcal{D}_{n,\beta}} n^{d-\beta}\frac{(-1)^{\beta-1}}{\beta}\binom{d}{\beta}\binom{\beta}{\underline{m}}h(\beta,\underline{m},\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(t)} \in R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$$

où la somme sur $\underline{m}$ est prise sur les $(n-1)$-uplets d'entiers naturels $\underline{m}:=(m_1,m_2,\ldots,m_{n-1})\in \mathcal{J}_{1,n,\beta}=\mathcal{D}_{n,\beta}$ et avec

$$\binom{\beta}{\underline{m}} := \binom{\beta}{m_1,\ldots,m_{n-1},\beta-\sum_k m_k} \qquad \text{et} \qquad h(\beta,\underline{m},\sigma) := \beta-\sum_{k=1}^{n-1}m_k+\sum_{k=1}^{n-1}m_k\sigma^k.$$

Regardons encore le cas plus particulier où $(n,r)=(2,1)$. On retrouve la formule obtenue par Arap [Ara12, Example 1].

Corollaire 4.3.11 (Le cas $n=2$, $r=1$) **-** *Soit $2<d<2g'$ et $V=\bigcup V_i$ l'union des sous-variétés spéciales vues dans Z associées à un système linéaire complet sans point de base g^1_d sur C'. Alors la composante homogène de la classe de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-g'-1}(Z)_{(t)}$ est donnée par la formule suivante*

$$[V]_{(t)} = c_{2,1,d,t}\,\psi_{Z*}C_{(t)} \in R_\sigma(\psi_{Z*}C;Z)$$

où

$$c_{2,1,d,t} := \sum_{\beta=1}^{d}\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{\beta}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^{\beta-1}2^{d-\beta-2-t}}{\beta}\binom{d}{\beta}\binom{\beta}{m}(\beta-2m)^{2+t}.$$

En particulier, si t est impair ou si $c_{2,1,d,t} = 0$, alors $[V]_{(t)} = 0$. Par conséquent, si les $c_{2,1,d,2t}$ sont tous non nuls, alors l'anneau tautologique $R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$ est engendré pour le produit de Pontryagin par les $[V]_{(2t)}$.

4.3.4 Formules particulières pour $[V]_{(0)}$ lorsque $r \geqslant 1$

Plus généralement, il est intéressant de regarder ce qu'il se passe pour $r \geqslant 1$, mais il faut alors ne considérer que le cas $t = 0$ si l'on espère trouver des formules plus simples que celles déjà obtenues dans le théorème 4.3.6 (à cause des sommes sur $\underline{a}$). Ceci étant fait, nous pourrons notamment recouper nos résultats avec celui de la proposition 4.2.1. Pour motiver davantage l'étude de $[V]_{(0)}$, signalons enfin la proposition suivante :

Proposition 4.3.12 - *Soit $0 < 2r < d < 2g'$ et $V = \bigcup V_i$ l'union des sous-variétés spéciales vues dans Z associées à un système linéaire complet sans point de base g^r_d sur C'. Si C est hyperelliptique, alors $[V] = [V]_{(0)} \in \mathrm{A}^{g-g'-r}(Z)_{(0)}$. Si $n = 2$, il suffit de supposer que C est hyperelliptique ou trigonale pour avoir la même conclusion.*

Démonstration. Si C est hyperelliptique, $C = C_{(0)} \in \mathrm{A}(J)$, de sorte que tous les $\psi_{Z*}C_{(i)}$ sont nuls dans $\mathrm{A}(Z)$ pour tout $i \geqslant 1$. Le théorème 4.3.6 montre donc que chaque $[V]_{(t)} = 0$ pour $t \geqslant 1$. D'où le résultat. Si $n = 2$, on a $\psi_{Z*}C_{(2i+1)} = 0$ pour tout i (Lemme 2.6.5). Dans ce cas, on a le même résultat en supposant C trigonale car sous cette hypothèse $C_{(i)} = 0$ pour tout $i \geqslant 2$ (cf. [Bea04, Section 5]). □

Le cas $n = 2$

La proposition suivante vient compléter le théorème 4.3.9. Il s'agit d'exprimer explicitement $[V]_{(0)}$ pour $n = 2$ et $r \geqslant 1$.

Proposition 4.3.13 (Le cas $n = 2$, $r \geqslant 1$, $t = 0$) **-** *Soit $0 < 2r < d < 2g'$ et $V = \bigcup V_i$ l'union des sous-variétés spéciales vues dans Z associées à un système linéaire complet sans point de base g^r_d sur C'. Alors la composante homogène de la classe de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-g'-r}(Z)_{(0)}$ est donnée par la formule suivante*

$$[V]_{(0)} = c_{2,r,d,0} \left(\psi_{Z*}C_{(0)}\right)^{*r}$$

avec

$$c_{2,r,d,0} := 2^{-2r} \sum_{\underline{n} \in \mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{m} \leqslant \frac{\underline{n}}{2}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{m}}}{d_{\underline{n},\underline{m}}} \prod_{j=1}^{r} (n_j - 2m_j)^2$$

où la somme sur $\underline{m}$ est prise sur les r-uplets d'entiers naturels $\underline{m} := (m_1, m_2, \dots, m_r) \in \mathcal{J}_{r,2,\underline{n}}$, c'est-à-dire vérifiant la condition pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $m_j \leqslant \frac{n_j}{2}$. Plus simplement, on a

$$[V]_{(0)} = \widetilde{c}_{2,r,d,0} \, \frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!}$$

où

$$\widetilde{c}_{2,r,d,0} := 2^{2r-g'+1} r! \, c_{2,r,d,0} = 2^{-g'+1} r! \sum_{\underline{n}} \sum_{\underline{m} \leqslant \frac{\underline{n}}{2}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{m}}}{d_{\underline{n},\underline{m}}} \prod_{j=1}^{r} (n_j - 2m_j)^2.$$

Démonstration. D'après le théorème général obtenu pour $n = 2$ et $r \geqslant 1$, on a immédiatement

$$[V]_{(0)} = 2^{-2r} \sum_{\underline{n}} \sum_{\underline{m} \leqslant \frac{\underline{n}}{2}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{m}}}{d_{\underline{n},\underline{m}}} \prod_{j=1}^{r} (n_j - 2m_j)^2 \left(\psi_{Z*} C_{(0)}\right)^{*r}.$$

Par ailleurs, notons toujours $\eta := \iota_Z^* \theta \in \mathrm{A}^1(Z)$. On rappelle (cf. Preuve du théorème 2.6.1 – Step 1) que

$$\psi_{Z*} C_{(0)} = (-1)^{1-\dim Z} \psi_{\eta*} \mathcal{F}_Z(\eta).$$

Ainsi, en utilisant [Bea83, Proposition 5], on a

$$\psi_{Z*} C_{(0)} = (-1)^{1-\dim Z} \psi_{\eta*} \mathcal{F}_Z(\eta) = (-1)^{1-\dim Z} \psi_{\eta*} \varphi_{\eta*} \frac{(-1)^{\dim Z-1}}{\chi(\eta)} \frac{\eta^{\dim Z-1}}{(\dim Z-1)!}.$$

Comme $\psi_\eta \circ \varphi_\eta = e(Z) = 2_Z$ par définition de φ_η et ψ_η (cf. Sous-section 2.3.1), il vient

$$\psi_{Z*} C_{(0)} = \frac{1}{2^{\dim Z}} 2_* \frac{\eta^{\dim Z-1}}{(\dim Z-1)!} = 2^{2-\dim Z} \frac{\eta^{\dim Z-1}}{(\dim Z-1)!} = 2^{3-g'} \frac{\eta^{g'-2}}{(g'-2)!}$$

car $\chi(\eta) = 2^{\dim Z}$ puisque η est le double d'une polarisation principale sur la variété de Prym Z. Il s'ensuit en utilisant [Bea83, Corollaire 3] que

$$\begin{aligned}
\left(\psi_{Z*} C_{(0)}\right)^{*r} &= 2^{r(2-\dim Z)} \left(\frac{\eta^{\dim Z-1}}{(\dim Z-1)!}\right)^{*r} \\
&= 2^{r(2-\dim Z)} \chi(\eta)^{r-1} \binom{r\dim Z - r(\dim Z-1)}{\dim Z - (\dim Z-1), \ldots, \dim Z - (\dim Z-1)} \frac{\eta^{r(\dim Z-1)-(r-1)(\dim Z)}}{(r(\dim Z-1)-(r-1)\dim Z)!} \\
&= 2^{r(2-\dim Z)+(r-1)\dim Z} \binom{r}{1,\ldots,1} \frac{\eta^{\dim Z-r}}{(\dim Z-r)!} = 2^{2r-\dim Z} r! \frac{\eta^{\dim Z-r}}{(\dim Z-r)!} = 2^{2r-g'+1} r! \frac{\eta^{g'-1-r}}{(g'-1-r)!}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
[V]_{(0)} &= 2^{-2r} \sum_{\underline{n}} \sum_{\underline{m} \leqslant \frac{\underline{n}}{2}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{m}}}{d_{\underline{n},\underline{m}}} \prod_{j=1}^{r} (n_j - 2m_j)^2 2^{2r-g'+1} r! \frac{\eta^{\dim Z-r}}{(\dim Z-r)!} \\
&= 2^{-g'+1} r! \sum_{\underline{n}} \sum_{\underline{m} \leqslant \frac{\underline{n}}{2}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{m}}}{d_{\underline{n},\underline{m}}} \prod_{j=1}^{r} (n_j - 2m_j)^2 \frac{\eta^{\dim Z-r}}{(\dim Z-r)!}.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.3.14 - *Avec les notations de la proposition 4.3.13, on a*

$$\widetilde{c}_{2,r,d,0} = 2^{d-g'-r+1} \qquad et \qquad c_{2,r,d,0} = \frac{2^{d-3r}}{r!}.$$

Par conséquent, si $n = 2$, on a

$$[V]_{(0)} = 2^{d-g'-r+1} \frac{\eta^{\dim Z-r}}{(\dim Z-r)!} = \frac{2^{d-3r}}{r!} \left(\psi_{Z*} C_{(0)}\right)^{*r},$$

ce qui se réécrit aussi en notant ξ la polarisation principale de la variété de Prym telle que $\eta = 2\xi$:

$$[V]_{(0)} = 2^{d-2r} \frac{\xi^{g'-1-r}}{(g'-1-r)!} = \frac{2^{d-3r}}{r!} \left(\psi_{Z*} C_{(0)}\right)^{*r},$$

Démonstration. La précédente proposition 4.3.13 montre que $[V]_{(0)} \subset \mathrm{A}^{g'-1-r}(Z)_{(0)}$ est de la forme

$$[V]_{(0)} = \widetilde{c}_{2,r,d,0}\,\frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!} = \widetilde{c}_{2,r,d,0}\,\frac{\eta^{g'-1-r}}{(g'-1-r)!}.$$

Par ailleurs, en projetant cette égalité dans $H(Z)$, en notant encore $\eta = cl_Z(\eta) \in \mathrm{H}^2(Z)$ et en utilisant la proposition 4.2.1, on a

$$\widetilde{c}_{2,r,d,0}\,\frac{\eta^{g'-1-r}}{(g'-1-r)!} = cl_Z([V]_{(0)}) = cl_Z([V]) = 2^{d-g'-r+1}\frac{\eta^{g'-1-r}}{(g'-1-r)!} \in \mathrm{H}^{2(g'-1-r)}(Z).$$

On en déduit que $\widetilde{c}_{2,r,d,0} = 2^{d-g'-r+1}$. Enfin, la dernière égalité découle immédiatement de :

$$\left(\psi_{Z*}C_{(0)}\right)^{*r} = 2^{2r-g'+1}r!\frac{\eta^{g'-1-r}}{(g'-1-r)!}.$$

□

Le cas $n = 3$

Cherchons à obtenir une formule analogue lorsque $n = 3$, $r \geqslant 1$ et $t = 0$. Comme on l'a déjà vu, le cas $n = 3$ n'est pas beaucoup plus compliqué que le cas $n = 2$ donc cette étude semble raisonnable à priori.

Proposition 4.3.15 (Le cas $n = 3$, $r \geqslant 1$, $t = 0$) **-** *Soit $0 < 2r < d < 2g'$ et $V = \bigcup V_i$ l'union des sous-variétés spéciales vues dans Z associées à un système linéaire complet sans point de base g^r_d sur C'. Alors la composante homogène de la classe de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-g'-r}(Z)_{(0)}$ est donnée par la formule suivante*

$$[V]_{(0)} = c_{3,r,d,0}\left(\psi_{Z*}C_{(0)}\right)^{*r}$$

avec

$$c_{3,r,d,0} = 3^{-2r}\sum_{\underline{n}\in\mathcal{I}_{r,d}}\ \sum_{\underline{\underline{m}}\in\mathcal{J}_{r,3,\underline{n}}}\frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}\prod_{j=1}^{r}a_j(\underline{n},\underline{\underline{m}})$$

où on a posé pour tout $j \in [\![1, r]\!]$,

$$a_j(\underline{n},\underline{\underline{m}}) := n_j^2 + 3(m_{j,1}^2 + m_{j,1}m_{j,2} + m_{j,2}^2) - 3n_j(m_{j,1} + m_{j,2}).$$

Plus simplement, on a

$$[V]_{(0)} = \widetilde{c}_{3,r,d,0}\,\frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!}$$

avec

$$\widetilde{c}_{3,r,d,0} := 3^{2r-g'+1}r!\,c_{3,r,d,0} = 3^{-g'+1}r!\sum_{\underline{n}}\ \sum_{\underline{\underline{m}}\leqslant\frac{\underline{n}}{2}}\frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}\prod_{j=1}^{r}a_j(\underline{n},\underline{\underline{m}}).$$

Démonstration. D'après le théorème principal 4.3.6, on a

$$[V]_{(0)} = 3^{-2r}\sum_{\underline{n}\in\mathcal{I}_{r,d}}\ \sum_{\underline{\underline{m}}\in\mathcal{J}_{r,3,\underline{n}}}\frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}h_1(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(0)} * \ldots * h_r(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(0)}.$$

Par ailleurs, l'action de l'involution de Rosati sur les h_j est la suivante :

$$R(h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)) = h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma^{-1}).$$

Alors pour tout j

$$h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(0)} = (-1)^{1-\dim Z}\psi_{\eta*}\mathcal{F}_Z(\iota_Z^* h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma^{-1})^*\theta).$$

Étudions plus précisément le diviseur

$$h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma^{-1})^*\theta = \left(n_j - \sum_{k=1}^{2} m_{j,k} + \sum_{k=1}^{2} m_{j,k}\sigma^{-k}\right)^*\theta \in \mathrm{A}^1(J).$$

Pour ce faire, une première méthode consiste à utiliser directement le lemme 3.2.1. Une seconde (sensiblement équivalente) consiste à utiliser la bijection entre $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(J)$ et $\mathrm{End}^{(s)}(J)$, puis à raisonner directement sur les polynômes en σ. Pour changer, utilisons cette seconde méthode et pour alléger les formules suivantes, notons $m_{j,0} := n_j - \sum_{k=1}^{2} m_{j,k} \in \mathbb{N}$. Le diviseur

$$h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma^{-1})^*\theta = \left(m_{j,0} + m_{j,1}\sigma^{-1} + m_{j,1}\sigma^{-2}\right)^*\theta$$

correspond alors à l'endomorphisme symétrique

$$\begin{aligned}
&R(h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma^{-1})) \circ h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma^{-1}) = h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma) \circ h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma^{-1})\\
&= (m_{j,0} + m_{j,1}\sigma + m_{j,2}\sigma^2)(m_{j,0} + m_{j,1}\sigma^{-1} + m_{j,2}\sigma^{-2})\\
&= m_{j,0}^2 + m_{j,1}^2 + m_{j,2}^2 + m_{j,0}m_{j,1}\sigma^{-1} + m_{j,0}m_{j,2}\sigma^{-2} + m_{j,0}m_{j,1}\sigma + m_{j,1}m_{j,2}\sigma^{-1} + m_{j,0}m_{j,2}\sigma^2 + m_{j,1}m_{j,2}\sigma\\
&= m_{j,0}^2 + m_{j,1}^2 + m_{j,2}^2 + (m_{j,0}m_{j,1} + m_{j,1}m_{j,2} + m_{j,2}m_{j,0})(\sigma^2 + \sigma^{-2})\\
&= m_{j,0}^2 + m_{j,1}^2 + m_{j,2}^2 + (m_{j,0}m_{j,1} + m_{j,1}m_{j,2} + m_{j,2}m_{j,0})\left((\sigma + \sigma^{-1})^2 - 2\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma^{-1})^*\theta = {}& \left(m_{j,0}^2 + m_{j,1}^2 + m_{j,2}^2 - 2(m_{j,0}m_{j,1} + m_{j,1}m_{j,2} + m_{j,2}m_{j,0})\right)\theta\\
&+ (m_{j,0}m_{j,1} + m_{j,1}m_{j,2} + m_{j,2}m_{j,0})(\sigma + \sigma^{-1})^*\theta.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(0)} &= \left(m_{j,0}^2 + m_{j,1}^2 + m_{j,2}^2 - 2(m_{j,0}m_{j,1} + m_{j,1}m_{j,2} + m_{j,2}m_{j,0})\right)\psi_{Z*}C_{(0)}\\
&\quad + (m_{j,0}m_{j,1} + m_{j,1}m_{j,2} + m_{j,2}m_{j,0})(\sigma + \sigma^{-1})_*\psi_{Z*}C_{(0)}\\
&= \left(m_{j,0}^2 + m_{j,1}^2 + m_{j,2}^2 - (m_{j,0}m_{j,1} + m_{j,1}m_{j,2} + m_{j,2}m_{j,0})\right)\psi_{Z*}C_{(0)}
\end{aligned}$$

car σ étant d'ordre 3,

$$Z = \mathrm{Ker}(N_Y)^0 = \mathrm{Ker}(1 + \sigma + \sigma^2)^0,$$

auquel cas $\sigma + \sigma^{-1} = \sigma + \sigma^2 = -1_Z$ dans $\mathrm{End}(Z)$ et

$$(\sigma + \sigma^{-1})_*\psi_{Z*}C_{(0)} = (-1)_*\psi_{Z*}C_{(0)} = \psi_{Z*}(-1)_*C_{(0)} = \psi_{Z*}C_{(0)}.$$

Plus explicitement encore, on a en revenant à la définition de $m_{j,0}$:

$$\begin{aligned}
h_j(\underline{n},\underline{\underline{m}},\sigma)_*\psi_{Z*}C_{(0)} &= \left(m_{j,0}^2 + m_{j,1}^2 + m_{j,2}^2 - (m_{j,0}m_{j,1} + m_{j,1}m_{j,2} + m_{j,2}m_{j,0})\right)\psi_{Z*}C_{(0)}\\
&= \left(n_j^2 + 3(m_{j,1}^2 + m_{j,1}m_{j,2} + m_{j,2}^2) - 3n_j(m_{j,1} + m_{j,2})\right)\psi_{Z*}C_{(0)}.
\end{aligned}$$

Notons enfin

$$a_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}) := n_j^2 + 3(m_{j,1}^2 + m_{j,1}m_{j,2} + m_{j,2}^2) - 3n_j(m_{j,1} + m_{j,2})$$

de sorte que

$$h_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}, \sigma)_* \psi_{Z*} C_{(0)} = a_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}) \psi_{Z*} C_{(0)}.$$

On a donc obtenu la formule suivante :

$$[V]_{(0)} = 3^{-2r} \sum_{\underline{n} \in \mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{\underline{m}} \in \mathcal{J}_{r,3,\underline{n}}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} \prod_{j=1}^{r} a_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}) \left(\psi_{Z*} C_{(0)}\right)^{*r}.$$

Puis, comme dans la proposition précédente on a les égalités

$$\left(\psi_{Z*} C_{(0)}\right)^{*r} = \frac{3^{2r}}{\chi(\eta)^r} \chi(\eta)^{r-1} r! \frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!} = \frac{3^{2r}}{\chi(\eta)} r! \frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!} = 3^{2r - g' + 1} r! \frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!}$$

car $\chi(\eta) = 3^{g'-1}$ (Proposition 3.3.14), on aboutit à

$$\begin{aligned} [V]_{(0)} &= 3^{-2r} \sum_{\underline{n} \in \mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{\underline{m}} \in \mathcal{J}_{r,3,\underline{n}}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} \prod_{j=1}^{r} a_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}) 3^{2r-g'+1} r! \frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!} \\ &= 3^{-g'+1} r! \sum_{\underline{n} \in \mathcal{I}_{r,d}} \sum_{\underline{\underline{m}} \in \mathcal{J}_{r,3,\underline{n}}} \frac{\lambda_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}}{d_{\underline{n},\underline{\underline{m}}}} \prod_{j=1}^{r} a_j(\underline{n}, \underline{\underline{m}}) \frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!}; \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Comme conséquence directe de cette proposition, on obtient :

Corollaire 4.3.16 (Le cas $n = 3$, $r = 1$, $t = 0$) **-** *Soit $2 < d < 2g'$ et $V = \bigcup V_i$ l'union des sous-variétés spéciales vues dans Z associées à un système linéaire complet sans point de base g_d^1 sur C'. Alors la composante homogène de la classe de $[V]$ dans $\mathrm{A}^{g-g'-1}(Z)_{(0)}$ est donnée par la formule suivante*

$$[V]_{(0)} = c_{3,1,d,0}\, \psi_{Z*} C_{(0)}$$

où

$$c_{3,1,d,0} := \sum_{\beta=1}^{d} \sum_{(m_1,m_2) \in \mathcal{D}_{3,\beta}} 3^{d-\beta-2} \frac{(-1)^{\beta-1}}{\beta} \binom{d}{\beta} \binom{\beta}{m_1, m_2, \beta - m_1 - m_2} a(\beta, \underline{m})$$

avec

$$a(\beta, \underline{m}) := \beta^2 + 3(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2) - 3\beta(m_1 + m_2).$$

A l'instar du cas $n = 2$, on obtient aussi le corollaire suivant :

Corollaire 4.3.17 - *Avec les hypothèses de la proposition 4.3.15, on a*

$$\widetilde{c}_{3,r,d,0} = 3^{d-g'-r+1} \qquad et \qquad c_{3,r,d,0} = \frac{3^{d-3r}}{r!}.$$

Par conséquent, si $n = 3$, on a

$$[V]_{(0)} = 3^{d-g'-r+1} \frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!} = \frac{3^{d-3r}}{r!} \left(\psi_{Z*} C_{(0)}\right)^{*r}.$$

Démonstration. La démonstration est analogue au cas $n = 2$:

$$[V]_{(0)} = \widetilde{c}_{3,r,d,0}\,\frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!},$$

égalité que l'on compare à

$$\widetilde{c}_{3,r,d,0}\,\frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!} = cl_Z([V]_{(0)}) = cl_Z([V]) = 3^{d-g'-r+1}\,\frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!} \in \mathrm{H}^{2(\dim Z - r)}(Z),$$

pour en déduire le résultat $\widetilde{c}_{3,r,d,0} = 3^{d-g'-r+1}$. L'autre égalité est obtenue en se rappelant que

$$\left(\psi_{Z*}C_{(0)}\right)^{*r} = 3^{2r-g'+1}r!\frac{\eta^{\dim Z - r}}{(\dim Z - r)!}.$$

□

4.3.5 Exemples

Terminons ce chapitre par quelques illustrations numériques des formules obtenues. On commence par s'intéresser au cas $n = 2$, puis on passera au cas $n = 3$.

Le cas $n = 2$

Exemple 4.3.18 ($c_{2,1,d,t}$) **:** D'après [Ara12, Example 1], lorsque $n = 2$ et $r = 1$, on a la formule suivante :

$$c_{2,1,d,2s} = \frac{(4^{s+1} - 1)B_{2s+2}}{s+1} \cdot 2^{d-2}$$

où B_m est le m^{e} nombre de Bernoulli défini par $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{+\infty} B_m \frac{t^m}{m!}$. En particulier, on obtient comme annoncé par le corollaire 4.3.14 :

$$c_{2,1,d,0} = 2^{d-3}.$$

On a alors par exemple dans le cas d'un g_3^1

$$c_{2,1,3,0} = 1, \quad c_{2,1,3,2} = -\frac{1}{2}$$

de sorte que $[V] = [V]_{(0)} + [V]_{(2)} = \psi_{Z*}C_{(0)} - \frac{1}{2}\psi_{Z*}C_{(2)} \in R_\sigma(\psi_{Z*}C; Z)$.

Exemple 4.3.19 ($c_{2,r,d,0}$) **:** Plus généralement, on a vu dans le corollaire 4.3.14 l'égalité

$$c_{2,r,d,0} = \frac{2^{d-3r}}{r!};$$

résultat que l'on peut vérifier en utilisant directement la définition du coefficient $c_{2,r,d,0}$ donnée dans la proposition 4.3.13. On vérifie par exemple les affirmations suivantes :

$$c_{2,1,3,0} = 1, \quad c_{2,1,4,0} = 2, \quad c_{2,1,5,0} = 4, \quad c_{2,2,5,0} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad c_{2,3,7,0} = \frac{1}{24}.$$

Le cas $n = 3$

Exemple 4.3.20 ($c_{3,1,d,0}$) **:** En utilisant la définition des coefficients $c_{3,1,d,0}$ obtenue dans la proposition 4.3.15 ou plus directement le corollaire 4.3.16, on peut vérifier par un calcul direct que

$$c_{3,1,3,0} = 1, \quad c_{3,1,4,0} = 3, \quad c_{3,1,5,0} = 3^2;$$

ce qui est le résultat attendu depuis le corollaire 4.3.17. Plus généralement, pour $d \geqslant 3$, on a bien les égalités :

$$[V]_{(0)} = 3^{d-g'} \frac{\eta^{2(g'-1)-1}}{(2(g'-1)-1)!} = 3^{d-3} \psi_{Z*} C_{(0)}.$$

Exemple 4.3.21 ($c_{3,2,5,0}$) **:** On vérifie également par un calcul direct que

$$c_{3,2,5,0} = \frac{1}{6};$$

résultat qui est bien celui annoncé par le corollaire 4.3.17 :

$$\frac{1}{6} = \frac{3^{5-3\cdot 2}}{2!}.$$

Aussi, on a les égalités :

$$[V]_{(0)} = 3^{4-g'} \frac{\eta^{2(g'-1)-2}}{(2(g'-1)-2)!} = \frac{1}{6} \left(\psi_{Z*} C_{(0)}\right)^{*2}.$$

Exemple 4.3.22 ($c_{3,3,7,0}$) **:** Tous calculs effectués, on trouve

$$c_{3,3,7,0} = \frac{1}{54}$$

ce qui est bien en accord avec le corollaire 4.3.17 :

$$\frac{1}{54} = \frac{3^{7-3\cdot 3}}{3!}.$$

Autrement dit, on a :

$$[V]_{(0)} = 3^{5-g'} \frac{\eta^{2(g'-1)-3}}{(2(g'-1)-3)!} = \frac{1}{54} \left(\psi_{Z*} C_{(0)}\right)^{*3}.$$

Au-delà des valeurs numériques obtenues dans ces différents exemples, il est toujours intéressant (et rassurant) d'avoir pu les retrouver d'au moins deux manières bien distinctes.

Bibliographie

[ACGH85] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, volume 267 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[Ara12] Maxim Arap. Algebraic cycles on Prym varieties. *Math. Ann.*, 353(3) :707–726, 2012.

[Bea82] Arnaud Beauville. Sous-variétés spéciales des variétés de Prym. *Compositio Math.*, 45(3) :357–383, 1982.

[Bea83] Arnaud Beauville. Quelques remarques sur la transformation de Fourier dans l'anneau de Chow d'une variété abélienne. In *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, volume 1016 of *Lecture Notes in Math.*, pages 238–260. Springer, Berlin, 1983.

[Bea86] Arnaud Beauville. Sur l'anneau de Chow d'une variété abélienne. *Math. Ann.*, 273(4) :647–651, 1986.

[Bea04] Arnaud Beauville. Algebraic cycles on Jacobian varieties. *Compos. Math.*, 140(3) :683–688, 2004.

[BL04] Christina Birkenhake and Herbert Lange. *Complex abelian varieties*, volume 302 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.

[CvG93] Elisabetta Colombo and Bert van Geemen. Note on curves in a Jacobian. *Compositio Math.*, 88(3) :333–353, 1993.

[DM91] Christopher Deninger and Jacob Murre. Motivic decomposition of abelian schemes and the Fourier transform. *J. Reine Angew. Math.*, 422 :201–219, 1991.

[DN89] J.-M. Drezet and M. S. Narasimhan. Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques. *Invent. Math.*, 97(1) :53–94, 1989.

[Ful98] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[Her07] Fabien Herbaut. Algebraic cycles on the Jacobian of a curve with a linear system of given dimension. *Compos. Math.*, 143(4) :883–899, 2007.

[Koo91] Ja Kyung Koo. On holomorphic differentials of some algebraic function field of one variable over **C**. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 43(3) :399–405, 1991.

[LO16] Herbert Lange and Angela Ortega. The Prym map of degree-7 cyclic coverings. *Algebra Number Theory*, 10(4) :771–801, 2016.

[Mac62] I. G. Macdonald. Symmetric products of an algebraic curve. *Topology*, 1 :319–343, 1962.

[Mac95] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1995. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[Mil86] J. S. Milne. Jacobian varieties. In *Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984)*, pages 167–212. Springer, New York, 1986.

[Mil08] James S. Milne. Abelian varieties (v2.00), 2008. Available at www.jmilne.org/math/.

[MP10] Ben Moonen and Alexander Polishchuk. Divided powers in Chow rings and integral Fourier transforms. *Adv. Math.*, 224(5) :2216–2236, 2010.

[Mum71] David Mumford. Theta characteristics of an algebraic curve. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 4 :181–192, 1971.

[Mum08] David Mumford. *Abelian varieties*, volume 5 of *Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics*. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; by Hindustan Book Agency, New Delhi, 2008. With appendices by C. P. Ramanujam and Yuri Manin, Corrected reprint of the second (1974) edition.

[Mur14] Jacob Murre. Lectures on algebraic cycles and Chow groups. In *Hodge theory*, volume 49 of *Math. Notes*, pages 410–448. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014.

[Ort03] Angela Ortega. Variétés de Prym associées aux revêtements n-cycliques d'une courbe hyperelliptique. *Math. Z.*, 245(1) :97–103, 2003.

[Ric16] Thomas Richez. Tautological rings on Jacobian varieties of curves with automorphisms. *ArXiv e-prints*, November 2016.

[Sch71] John Schiller. A classification of hyperelliptic Riemann surfaces with automorphisms by means of characteristic Riemann matrices. *Michigan Math. J.*, 18 :169–186, 1971.

De manière générale, on étudie dans cette thèse les cycles algébriques sur les variétés Jacobiennes de courbes complexes projectives lisses qui admettent des automorphismes non triviaux. Il s'agit plus précisément d'introduire et d'étudier de nouveaux anneaux tautologiques associés à des groupes d'automorphismes de la courbe. On montre que ces $\mathbb{Q}$-algèbres naturelles de cycles algébriques sur les Jacobiennes se restreignent en des familles de cycles sur certaines sous-variétés spéciales de la Jacobienne et que celles-ci méritent encore le nom d'anneaux tautologiques sur ces sous-variétés. On étudie en détail le cas des courbes hyperelliptiques ; situation dans laquelle les algèbres introduites admettent un nombre fini de générateurs, et en particulier sont de dimension finie. On peut alors être très précis dans l'étude des relations entre ces générateurs. Enfin, on montre que ces anneaux tautologiques apparaissent naturellement dans un autre contexte : celui des systèmes linéaires complets sans point de base.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
Université de Strasbourg et CNRS
7 Rue René Descartes
67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29
Fax 03 68 85 03 28

www-irma.u-strasbg.fr
irma@math.unistra.fr

IRMA 2017/001
http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01515890

ISSN 0755-3390