UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

ÉCOLE DOCTORALE DE PHYSIQUE ET CHIMIE

[Institut de Physique et Chimie des Matériaux de Strasbourg]

THÈSE présentée par :

[Julien IMBS]

le 26 novembre 2019

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : Physique

Modélisation numérique de débitmètre électromagnétique

THÈSE dirigée par :

[M. BULOU Hervé]	Chargé de recherche, CNRS, IPCMS

RAPPORTEURS

[M. MAZALEYRAT Frédéric]	Professeur, Université de Paris -Saclay
[M. VOLLAIRE Christian	Professeur, Ecole Centrale de Lyon

AUTRES MEMBRES DU JURY :

[M. DE LAROCHELAMBERT Thierry]	Professeur Associé, Femto-ST
[Mme. POURROY Geneviève]	Directrice de recherche, CNRS, IPCMS

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier la société Siemens et mon laboratoire d'accueil l'Institut de Physique et Chimie des Matériaux de Strasbourg sans qui cette thèse n'aurait pas vu le jour. Ainsi, je remercie mon directeur de thèse, Monsieur Hervé Bulou. Je suis heureux d'avoir pu travailler à ses côtés. Il s'est toujours montré présent dans les moments les plus difficiles, me soutenant et me motivant lorsque j'étais en plein doute. Il a su me faire partager sa passion et son enthousiasme pour tous les travaux scientifiques réalisés. Je tiens aussi à remercier Monsieur Frédéric Lienhart de m'avoir fait confiance pour ce travail. Grâce à lui j'ai appris à m'organiser, à me remettre en question. Enfin, tu as suivi avec une grande attention ce travail de thèse.

Je souhaite également remercier mon jury de thèse, Madame Geneviève Pourroy et Messieurs Christian Vollaire, Mazaleyrat Frédéric et De La Rochelambert Thierry. Je remercie tout particulièrement Monsieur Mazaleyrat Frédéric pour m'avoir accueilli dans son laboratoire à l'ENS Cachan. Il m'a ainsi permis d'effectuer la mesure des propriétés magnétiques des matériaux étudiés dans ce travail de thèse. Je suis également plus que ravi d'avoir pu compter Monsieur De la Rochelambert Thierry, que je connais depuis mon passage en classe préparatoire ATS, parmi mes examinateurs. Grâce à lui, j'ai pu acquérir une grande rigueur scientifique et les connaissances nécessaires pour mener à bien mes études en école d'ingénieur et en doctorat.

Je tiens également à remercier tous mes anciens collègues de Siemens : Pascal, Annick, Constantin, Juliette, Marjorie, Louis, Steve, Jonathan, Denis, Stéphane, Sérine, les double Pierre, Florian, Elsa, Fabien et les autres.

Je remercie tout particulièrement Céline pour la session de relecture de cette thèse qui aura quasiment pris deux jours. Je n'oublierai pas ses fameux "gnagna" en lisant toutes les équations de ce manuscrit.

Ensuite je remercie tous mes proches, notamment, Adrien, Anne-Sophie, Alexis et Mélanie pour leur soutien durant ces trois années de thèse et dans ma vie en général. Je suis heureux de vous compter parmi mes amis. Une pensée toute particulière pour mes anciens camarades de de Télécom Physique Strasbourg ou TPS (non pas la Télévision par Satellite) pour les intimes. Ainsi je salue Franck et Thomas qui ont déjà fini respectivement leur doctorat en Astrophysique et en Physique Subatomique. Salutation également

à Loïc qui s'amuse dans l'informatique.

Voilà, l'équipe française de The Big Bang Theory est réunie. Nous avons Sheldon (Thomas), Raj (Franck), Howard (Loïc) et moi-même Léonard car je suis plutôt expérimentateur que théoricien. Mais qui dit Léonard, dit aussi une magnifique Penny.

Il s'agit de ma chérie bien aimée Cyrielle, rencontrée au détour d'une soirée raclette en plein mois de juillet (oui oui en juillet !!!), que j'ai perdu de vue. Cependant, j'ai eu la chance de la retrouver grâce à une technologie de pointe en décembre 2018 (ah cette "fille au chapeau" m'a fait de l'oeil). Je te remercie de faire partie de ma vie. Tu ne peux pas savoir tout le bien que tu m'apportes.

Enfin, je remercie mes parents et mon frère Maxime pour leur soutien et leur aide durant mes études sans qui je n'y serai jamais arrivé.

Résumé

Cette thèse a pour objet la modélisation et l'étude de débitmètres électromagnétiques produits par la société Siemens. Ces appareils permettent de mesurer le débit volumique d'un fluide conducteur en mouvement sous un champ magnétique par le biais d'électrodes mesurant le potentiel induit. L'objectif principal des travaux présentés est de modéliser un débitmètre électromagnétique, afin de disposer d'un modèle fiable et réaliste d'un point de vue magnétique, et de l'optimiser par la suite.

La premier chapitre de cette thèse est consacrée à l'historique et au fondement de la théorie des débitmètres électromagnétiques de l'époque de Faraday à nos jours. Le chapitre II présente et décrit les débitmètres industriels conçus par Siemens à Haguenau en posant les bases, les termes et les notions nécessaires à la compréhension des travaux réalisés durant cette thèse. Le chapitre III vise à établir l'équation qui régit le fonctionnement des débitmètres électromagnétiques reliant le potentiel induit, la vitesse du fluide et le champ magnétique. On discutera également des principales hypothèses retenues dans le cadre de la théorie pour la modélisation numérique.

Le chapitre IV introduit dans un premier temps la théorie sur le magnétisme et les principaux matériaux magnétiques. Dans un second temps, c'est la caractérisation magnétique des principaux composants utilisés pour la conception des débitmètres électromagnétiques qui est réalisée.

Dans le chapitre V, une introduction à la modélisation numérique est effectuée, afin de justifier l'importance de la méthode des éléments finis pour la simulation électromagnétique des débitmètres sur le logiciel NX. La deuxième partie du chapitre se concentre sur le développement et la simulation du modèle numérique d'un débitmètre électromagnétique. Ensuite, la troisième partie est consacrée à la méthode expérimentale mise en place afin de mesurer le champ magnétique et comparer les résultats obtenus avec ceux issus de la simulation. La simulation numérique du champ magnétique ayant été validée par les mesures, le chapitre VI est consacré à la dynamique moléculaire des particules chargées contenues dans le fluide afin d'en déterminer la différence de potentiel.

Enfin, le chapitre VII est consacré à l'étalonnage des débitmètres électromagnétiques, où l'on confrontera un modèle théorique aux valeurs expérimentales mesurées en production sur le site de Haguenau.

Abstract

This work concerns numerical modelling and study of electromagnetics flowmeters developed by Siemens. These devices are able to measure the flowrate of a conductive fluid in motion subject to a magnetic field. An induced potential is created and measured by two electrodes. The main purpose of this thesis is to modelize an electromagnetic flowmeter in order to get a realistic and reliable model to optimize the sensor in the futur.

The first part of the work is to introduce the development theory of electromagnetic flowmeter since the discovery of the induction law of Farady until today. The chapter II describes the industrial electromagnetics flowmeters manufactured by Siemens and provides the necessary knowledges for a better understanding of this work. In the chapter III, the electromagnetic flowmeter equation is derived and solved for the case of a homogenous magnetic field and point electrodes. This equation allows to get a relation between the induced potential, the velocity of the fluid and the magnetic field. We will discuss about the assumptions choose for this theory and used for the numerical model.In a first time the chapter IV focus on the theory of the magnetism and magnetics materials. In a second time, we present the magnetic characterization of the materials used in the electromagnetics flowmeters.

In the chapter V, an introduction to the numerical modelling is done in order to justify the using of the finite element method for the magnetic simulation on the software NX Nastran. The second part of this chapter concerns the development and the numerical simulation of an electromagnetic flowmeter. At last, the third part is about the installation of a test bed to measure the magnetic field produced inside the electromagnetic flowmeter and to compare the results with the simulation. Numerical simulation of the magnetic field being checked by the measurements, the next chapter introduces molecular dynamics of the charged particles inside the measuring pipe in order to compute electrical potential.

Finally, the last part introduces the calibration of electromagnetics flowmeters where a theoretical model was developed in order to compare them with experimentals values measured in production on Haguenau Siemens site.

Table des matières

1 Introduction **15**

2 Description d'un débitmètre électromagnétique **20**
2.1 Présentation du débitmètre électromagnétique étudié 20
2.2 Le capteur 23
2.3 Le transmetteur 24
2.4 Conclusion 26

3 Théorie générale des débitmètres électromagnétiques **27**
3.1 Définition du débit 27
3.2 Principe de fonctionnement 28
3.3 Théorie 29
3.4 La fonction de poids W 36
3.5 Comparaison entre les deux approches pour le calcul de la tension induite 40
3.6 Influence du profil des vitesses sur le signal mesuré 41
3.7 Le débitmètre idéal 42
3.8 Conclusion 43

4 Les matériaux magnétiques **45**
4.1 Les différents types de magnétisme 45
4.1.1 Le diamagnétisme 45
4.1.2 Le paramagnétisme 46
4.1.3 Le ferromagnétisme 46
4.2 Les matériaux durs et doux 48
4.2.1 Les matériaux durs 48
4.2.2 Les matériaux doux 49
4.2.3 Les tôles Fe-Si à grains orientés 50
4.2.4 Choix d'un matériau doux 51
4.3 La perméabilité magnétique relative 53
4.4 Méthode utilisée pour caractériser les matériaux en champ faible 55
4.4.1 Le perméamètre 55

4.4.2 Résultats 57
4.4.3 Analyse des résultats 62
4.5 Conclusion 63

5 Modélisation du débitmètre électromagnétique 64
5.1 Méthode utilisée 64
5.1.1 La méthode des éléments finis 65
5.1.2 La discrétisation ou maillage 66
5.1.3 Choix des fonctions d'interpolations 68
5.1.4 Formulation du système d'équations 68
5.1.5 Résolution du système d'équations 71
5.1.6 Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis sur NX 71
5.2 Modélisation du débitmètre électromagnétique sur NX 72
5.2.1 Création du modèle 72
5.2.2 Paramètres de la simulation 77
5.2.3 Résultats et discussions 78
5.3 Conclusion 91
5.4 Mesure expérimentale de l'induction magnétique B 93
5.4.1 Cahier des charges 93
5.4.2 Le système de mesure 93
5.4.3 Présentation du système 94
5.4.4 Le banc de test 96
5.4.5 Déplacement des axes 98
5.4.6 Utilisation du banc de test 98
5.4.7 Tests de qualification 103
5.4.8 Mesure de l'induction magnétique des bobines 107
5.4.9 Mesure de l'induction magnétique dans le débitmètre . 110
5.5 Conclusion 115

6 Modèle et calcul réaliste du potentiel entre les électrodes de mesure 116
6.1 Introduction 116
6.2 Approche mécanique 118
6.2.1 Calcul de la trajectoire des particules 118
6.2.2 Calcul du champ électrostatique $\boldsymbol{E}$ 123
6.2.3 Interpolation bilinéaire (2D) et trilinéaire (3D) 130
6.2.4 Traitement des parois de la conduite 132
6.2.5 Validation du code 132
6.3 Résultats 137
6.3.1 Cas des champs faibles 137
6.3.2 Cas des champs forts 139
6.3.3 Etude en fonction de la densité de charges dans la conduite 144
6.4 Conclusion 149

6.5 Approche statistique 150
6.5.1 Etablissement de l'équation de transport 151
6.5.2 Interactions entre particules et équation de transport . 153
6.5.3 Méthodes de résolution de l'équation de Vlasov 154
6.5.4 La méthode "Particle In Cell" 154
6.5.5 Les méthodes de Vlasov 156
6.6 Conclusion 157

7 Etalonnage d'un débitmètre électromagnétique 158
7.1 Définition de l'étalonnage 158
7.2 Principe du banc d'étalonnage 160
7.2.1 La détermination du zéro 161
7.2.2 Détermination du facteur d'étalonnage K et vérification 161
7.3 Approche théorique du facteur d'étalonnage 162
7.3.1 Rappel théorique 162
7.3.2 Détermination du facteur d'étalonnage K 163
7.3.3 Calcul du facteur d'étalonnage K du BigMag 5100 DN400 166
7.3.4 Calcul de K 169
7.3.5 Comparaison et vérification du modèle théorique du facteur d'étalonnage 170
7.4 Conclusion 172

8 Conclusion et perspectives 174

Table des figures

1.1 Exemple des débitmètres électromagnétiques produits chez Siemens 18

2.1 Schéma détaillé d'un débitmètre électromagnétique 21
2.2 Le BigMag 5100 22
2.3 Circuit magnétique d'un BigMag 5100 et ses bobines 23
2.4 Bobine d'un BigMag 5100 24
2.5 Transmetteur : Mag6000 25
2.6 Courant DC pulsé [26] 25

3.1 Principe de Faraday 29
3.2 Force de Lorentz sur une particule chargée [26] 29
3.3 Conduite circulaire soumise à une induction magnétique B uniforme [26] 32
3.4 Fonction de poids normalisée $W_z/(2B/a\pi)$ [76] 37
3.5 Les différents régimes d'écoulement [5] 42

4.1 Courbe de première aimantation [45] 47
4.2 Cycle d'hystérésis [45] 48
4.3 Pole Piece 49
4.4 Return Path 49
4.5 Le cœur toroïdal est une tôle Fe-Si à grains orientés 50
4.6 Mesure de la perméabilité magnétique relative des matériaux 53
4.7 Cycle d'hystérésis d'un matériau magnétique dans le domaine de Rayleigh 55
4.8 Schéma de principe d'un perméamètre [37] 56
4.9 Perméamètre utilisé à l'ENS Cachan 56
4.10 Détection du signal généré par le flux magnétique traversant l'échantillon 57
4.11 Perméabilité magnétique relative en fonction du champ magnétique H pour le "Casing". La ligne rouge correspond au domaine de Rayleigh 58

4.12 Perméabilité magnétique relative en fonction du champ magnétique H pour le "cœur toroïdal". La ligne rouge correspond au domaine de Rayleigh 59
4.13 Perméabilité magnétique relative en fonction du champ magnétique H pour le "Pole Piece/Return Path". La ligne rouge correspond au domaine de Rayleigh 60
4.14 Perméabilité magnétique relative en fonction du champ magnétique H pour le "Tube Ring". La ligne rouge correspond au domaine de Rayleigh 61
4.15 Cycle d'hystérésis du "Tube Ring" 62

5.1 Décomposition en éléments simples d'une surface circulaire (source : Wikipédia) 66
5.2 Géométrie d'éléments simples [50] 67
5.3 Numéro local et global d'un nœud pour un élément fini linéaire [68] 67
5.4 Modèle 3D d'un BigMag 5100 72
5.5 Modèle simplifié pour la simulation 72
5.6 Choix du module Magnetics 73
5.7 Choix de l'option Magnétostatique 73
5.8 Maille du débitmètre électromagnétique 76
5.9 Intégration du volume d'air 77
5.10 Choix de matériaux 78
5.11 Création d'un matériau magnétique 78
5.12 Lignes de champ magnétique dans le BigMag 5100 79
5.13 Lignes du champ magnétique autour de la bobine 79
5.14 Induction magnétique le long de l'axe x 80
5.15 Induction magnétique le long de l'axe z 81
5.16 Induction magnétique sur l'axe x pour différents matériaux . 82
5.17 Induction magnétique sur l'axe z pour différents matériaux . 83
5.18 Modèle réduit et simplifié du débitmètre 84
5.19 Evolution de B le long de l'axe x du débitmètre pour différents μ_r du tube 85
5.20 Evolution de B en fonction de μ_r du tube 86
5.21 Evolution de B le long de l'axe x du débitmètre pour différents μ_r du "Pole Piece" 87
5.22 Evolution de B en fonction de μ_r du "Pole Piece" 87
5.23 Evolution de B le long de l'axe x du débitmètre pour différents μ_r du "Return Path" 88
5.24 Evolution de B en fonction de μ_r du "Return Path" 89
5.25 Evolution de B le long de l'axe x du débitmètre pour différents μ_r du "Cœur toroïdal" 90
5.26 Evolution de B en fonction de μ_r du "Cœur toroïdal" 90

5.27 Evolution de B le long de l'axe x du débitmètre pour différents μ_r de "Outer Case" 91
5.28 Evolution de B en fonction de μ_r de "l'Outer Case" 92
5.29 Schéma de principe du banc de test 94
5.30 Principe de l'effet Hall 95
5.31 La sonde à effet Hall utilisée 95
5.32 Le gaussmètre utilisé 96
5.33 Banc de test pour la mesure de champ magnétique 97
5.34 Bras tri-axes motorisé 98
5.35 Commande de contrôle pour le déplacement d'un axe du bras motorisé 99
5.36 Choix du type de mesure : automatique ou manuel 99
5.37 Configuration de la mesure 100
5.38 Composantes radiale B_r et orthoradiale B_θ du champ d'induction B. 101
5.39 Etape de centrage 103
5.40 Bobine d'un BigMag 5100 104
5.41 Boucle de courant générant un champ magnétique au point M 105
5.42 Solénoïde 106
5.43 Mesure de l'induction magnétique et comparaison avec le modèle numérique 108
5.44 Ajustement du modèle numérique 109
5.45 Cartographie du champ magnétique 110
5.46 Comparaison entre les valeurs mesurées (bleue) et calculées du champ d'induction B pour des perméabilités magnétiques maximales (rouge) et minimales (vert) entre les électrodes de mesure 112
5.47 Comparaison entre les valeurs mesurées (bleue) et calculées du champ d'induction B pour des perméabilités magnétiques maximales (rouge) et minimales (vert) entre les électrodes de masse 113
5.48 Comparaison entre les valeurs mesurées (bleu) et calculées (vert) du champ d'induction B (gauche) et les électrodes de masse (droite) après ajustement du modèle 114

6.1 Trajectoires des particules chargées (positivement en rouge, négativement en bleu) appartenant au fluide soumises à la force de Lorentz. 117
6.2 Algorithme utilisé pour la détermination du potentiel électrostatique 123
6.3 Maillage à deux dimensions utilisé dans la méthode des différences finies. 124
6.4 Exemple des nœuds impliqués dans l'approximation de l'opérateur laplacien. 125

6.5 Exemple d'un maillage $N_x(=4)\times N_y(=3)$. Les nœuds en noir représentent les points où l'on calcule le potentiel électrostatique ; les nœuds en rouge représentent les nœuds appartenant aux limites du domaine de calcul. 127
6.6 Principe de l'interpolation bilinéaire 130
6.7 Angle et direction de la quantité de mouvement de la particule 134
6.8 Plan de coupe de la conduite du débitmètre : les nœuds du maillage utilisé pour résoudre l'équation de Poisson sont symbolisés par des ronds rouges. Les ronds bleus symbolisent les nœuds aux limites. Le cercle noir représente la trajectoire d'une particule unique dans le débitmètre soumise à un champ d'induction magnétique uniforme (a) et de distribution gaussienne (b) orienté perpendiculairement au plan de coupe ; les ronds verts symbolisent les nœuds du maillage successifs occupés par la particule au cours de son mouvement. La courbe en cyan donne la répartition du champ d'induction magnétique dans la conduite. (c) cas de trois particules chargées. . . 135
6.9 Coordonnée x en fonction du temps t dans le cas d'une particule isolée dans la conduite soumise à un champ d'induction magnétique : 1 mT (noir) et 0,5 mT (rouge). 135
6.10 Potentiel électrostatique calculé (a) à partir de sa forme analytique et (b) en utilisant la méthode des différences finies (100×100 grid) ; (c) source du potentiel (d) force électrostatique dérivant du potentiel (50×50 grid). Les paramètres du calcul sont $\alpha_1 = 10$, $\sigma_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 60$, $\sigma_2 = 0,1$, $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. 136
6.11 Trajectoires de 500 particules chargées (positivement en rouge , négativement en bleu) dans une conduite dans laquelle règne un champ d'induction magnétique uniforme $(0,1mT)$ sur un intervalle de temps de 5 s 137
6.12 Positions des 500 particules chargées (positivement en rouge, négativement en bleu) ayant circulé dans une conduite dans laquelle règne un champ d'induction magnétique uniforme (0,1 mT) durant 5 s. 138
6.13 Différence de potentiel entre les parois latérales de la conduite (500 particules chargées après 5 s de circulation dans un champ d'induction magnétique uniforme de 0,1 mT. 139
6.14 Profil transverse du champ d'induction magnétique dans la conduite 139

6.15 (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de deux particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $5,0\ 10^{-4}$ kg.m/s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique. 141
6.16 (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de deux particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $1,0\ 10^{-3}$ kg.m/s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique. 142
6.17 (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de deux particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $1,0\ 10^{-2}$ kg.m/s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique. 143
6.18 Différence de potentiel moyenne prise sur un intervalle de temps de 200 s pour différentes valeurs de la quantité de mouvement maximale des particules à l'entrée de la conduite. . . 144
6.19 (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de 20 particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $1,0\ 10^{-3}$ kg.m/s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique. Le signal pour le cas avec deux particules a été superposé et multiplié par un facteur 10 aux différences de potentiel calculées pour 20 particules pour comparaison. 145
6.20 (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de 200 particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $1,0\ 10^{-3}$ kg.m/s et un intervalle de temps de 4s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique. 146
6.21 (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de 400 particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $1,0\ 10^{-3}$ kg.m/s et un intervalle de temps de 4s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique. 147

6.22 (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de 1000 particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $1,0\ 10^{-3}$ kg.m/s et un intervalle de temps de 4s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique. 148
6.23 Schéma de principe de l'algorithme [42] 155

7.1 Courbes d'enveloppes de précision [79] 159
7.2 Principe de fonctionnement d'un banc d'étalonnage [26] . . . 160
7.3 Détermination du facteur d'étalonnage et points de vérification [26]. 161
7.4 Courbes d'erreurs 162
7.5 Débit volumique en fonction de la vitesse d'écoulement d'un débitmètre électromagnétique [26] 163
7.6 Détermination du débit volumique 171

Liste des tableaux

3.1 Fréquence angulaire pour lesquelles l'épaisseur de peau est égale à 1 [76] 30
3.2 Valeurs usuelles pour lesquelles on a une relaxation diélectriques [76] 30
3.3 Expression de W en fonction du type d'écoulement 43

4.1 Composition chimique des aciers inoxydables ferromagnétiques [24] 52
4.2 Influence de la composition chimique : + : effet positif sur la propriété et - : effet négatif sur la propriété [24] 52
4.3 Perméabilité magnétique relative de matériaux faiblement magnétiques 53
4.4 Paramètres expérimentaux 57
4.5 Domaine de validité de μ_r 62

5.1 Paramètres physiques de la simulation avec μ_{r-min} 78
5.2 Paramètres physiques de la simulation avec μ_{r-max} 80
5.3 Matrice de coordonnées 100
5.4 Paramètres physiques de la simulation. 111
5.5 Paramètres physiques de la simulation. 114

7.1 Facteurs de correction 166
7.2 Valeurs du facteur d'étalonnage utilisées chez Siemens 167
7.3 Valeurs théoriques du facteur d'étalonnage 167
7.4 Valeurs utilisées pour le calcul de K 169
7.5 Valeurs expérimentales du facteur d'étalonnage 170
7.6 Données mesurées lors d'un étalonnage 171
7.7 Valeur expérimentale de la sensibilité 172

Chapitre 1

Introduction

Le principe de fonctionnement d'un débitmètre électromagnétique a été établi en 1831 lorsque Faraday a découvert l'induction électromagnétique [38]. En effet, un conducteur se déplaçant sous un champ magnétique induit une force électromotrice qui est perpendiculaire, aussi bien au champ magnétique, qu'à la vitesse du conducteur. L'histoire raconte que Faraday essaya de déterminer le débit du fleuve la Tamise à Londres en mesurant la tension induite entre deux plaques en métal. N'ayant pas obtenu les résultats escomptés, le champ magnétique terrestre étant trop faible ($0.5\mu T$), ce principe restera uniquement théorique pendant plusieurs décennies. En 1917, Smith et Slepian [1] sont les premiers à mettre en pratique le principe de mesure d'un débitmètre électromagnétique . Un brevet a, en effet, été déposé pour mesurer la vitesse d'un bateau en produisant un champ magnétique émanant du navire dans l'océan en mesurant la tension induite due à la vitesse du fluide. Pour mesurer cette tension, des électrodes ont été disposées de part et d'autre de la coque du navire. La première utilisation d'un débitmètre électromagnétique permettant de mesurer la vitesse d'un fluide à travers une canalisation a vu le jour en 1930. Williams [81] mesura le débit de sulfate de cuivre dans un tuyau en verre en appliquant un champ magnétique homogène et uniforme. Il découvrit que le potentiel mesuré entre les deux électrodes était proportionnel au débit ; mais aussi que, si la vitesse du fluide n'était pas uniforme dans l'espace de mesure, le potentiel mesuré ne le serait pas non plus. Il prouva aussi que, lorsque le fluide utilisé n'est pas trop conducteur, le potentiel induit est indépendant de la conductivité. Plus tard, dans les années 1930, les débitmètres électromagnétiques ont trouvé leur première application. En effet, selon Shercliff [76], P. Fabre enregistra le débit du sang dans les artères car les débitmètres électromagnétique ont l'avantage de donner une réponse rapide, tout en indiquant en détail le débit sanguin pulsé par les artères. Un autre avantage fut la faible opposition du débitmètre à la circulation de fluide. De même, dans les années 1940,

1. U.S. Patent 1 249 530

A. Kolin publia plusieurs articles concernant la théorie et la mesure du débit sanguin [53], [54]. Il évalua ainsi le débit circulant dans des conduites rectangulaires et circulaires. J. A. Arnold fut l'un des autres scientifiques de l'époque à remarquer que le temps de réponse des débitmètres électromagnétiques était rapide en examinant des écoulements transitoires pour des applications hydrauliques [1]. En 1962, le travail de Shercliff sera résumé dans un livre [76] où il détailla les notions théoriques des débitmètres électromagnétiques jusqu'à leurs premières applications pratiques. Il montra d'ailleurs que le débit mesuré par un débitmètre rectangulaire produisant un champ magnétique uniforme et ayant des électrodes plates diamétralement opposées était indépendant du profil des vitesses du fluide. Il démontra également que la sensibilité d'un débitmètre circulaire était reliée au profil des vitesses [75]. Cela lui a permis de confirmer qu'un profil de vitesse non axisymétrique induisait une réponse non-linéaire de la part des débitmètres électromagnétiques. Il a donc introduit la notion de fonction de poids, qui détermine l'influence du fluide et du champ magnétique en différents points de l'espace de mesurage sur le signal total (tension induite aux bornes des électrodes) du débitmètre. En effet, la contribution du fluide n'est en général pas homogène sur le potentiel induit. La distribution, la taille et la forme des électrodes ont une influence sur le potentiel induit. Shercliff calcula alors une expression de cette fonction en 2D, avant que celle-ci ne soit reprise plus tard par l'un de ses anciens étudiants, Bevir [9] qui étendit la fonction de poids en 3D. Le choix des électrodes permettant de mesurer le potentiel fut un sujet important. En effet, selon Christensen [26] les débitmètres utilisaient soit des champs magnétiques statiques (courant continu), soit des champs magnétiques alternatifs (courant alternatif). L'utilisation de ces derniers évitait les problèmes liés à la polarisation des électrodes.

Dans son livre, Shercliff confirme les travaux réalisés par H. Holdaway [46] et L. M. Korsunskii [55], [56] qui montrèrent qu'un débitmètre de section rectangulaire, sous un champ magnétique homogène avec des électrodes plates, est indépendant du profil des vitesses du fluide. Les impuretés présentes dans les fluides peuvent se fixer sur les électrodes et faire apparaître une tension dite " "de polarisation" qui peut induire une erreur sur la mesure de potentiel. Par contre, les courants de Foucault ne peuvent pas être négligés, puisqu'ils dépendent de la fréquence du champ magnétique. Les champs magnétiques statiques permettent de s'affranchir de ces courants induits, mais pas des tensions de polarisation. Balko [6] suggéra donc de peindre les électrodes avec de l'or afin d'éviter la polarisation. Aujourd'hui, les configurations actuelles du champ magnétique permettent de faire un compromis en utilisant un courant continu pulsé. En 1968, Baker [3] proposa une solution à l'équation des débitmètres électromagnétiques en utilisant des coordon-

nées cylindriques, en étudiant le cas d'une conduite cylindrique avec champ magnétique non uniforme. Toujours selon Christensen, jusqu'au milieu des années 1960, les débitmètres étaient conçus de façon à obtenir des champs magnétiques homogènes dans un plan normal à la direction du fluide. Mais avec l'avancée de la technologie et l'augmentation des diamètres dépassant 1 m, l'obtention d'un champ magnétique homogène devint tout simplement impossible d'un point de vue pratique. En 1969, Kanai [51] publia un article rendant compte de l'étude d'un champ magnétique inhomogène produit par des bobines circulaires ou rectangulaires. Il a également pu prédire l'évolution de la sensibilité des débitmètres suivant le profil des vitesses utilisé. Il ne n'agissait là, hélas, que des études en deux dimensions. C'est durant cette période, que Bevir [8] proposa dans sa thèse et plus tard dans un article [9]une astuce mathématique permettant de calculer la fonction de poids en 3 dimensions ; fonction proposée quelques années auparavant par Shercliff mais uniquement en 2D. Pour cela, il fit le calcul en deux étapes : calculer le champ magnétique et utiliser la notion de courant virtuel. Ce courant virtuel est un cas hypothétique, dans lequel un courant de 1 A circule entre les deux électrodes de mesures. Ces deux paramètres physiques combinés définissent ainsi la fonction de poids. Ce courant virtuel est équivalent aux fonctions de Green lorsqu'on résoud l'équation inhomogène des débitmètres [78]. Ce fut une avancée majeure car cette fonction peut décrire la sensibilité d'un débitmètre pour n'importe quel type de design ou de profil des vitesses. Comme la fonction de poids définie par Bevir est le produit vectoriel entre le courant virtuel et l'induction magnétique, il montra simplement que les débitmètres sont insensibles au profil des vitesses, lorsque ces deux vecteurs sont perpendiculaires entre eux. Cela n'est pas valable pour des débitmètres circulaires ayant des électrodes assimilées à des points. L'approche de Bevir permit également de déterminer l'équation des débitmètres en passant par les équations de Laplace.
De la fin des années 1960 et jusqu'au milieu des années 1970 une grande attention fut portée à la distribution d'une conductivité inhomogène. R. C Baker [4], M. K. Bevir [10] présentèrent plusieurs solutions mathématiques au problème sous certaines conditions. Dans les années 1980, des recherches furent effectuées dans le but d'utiliser plusieurs électrodes. V. T. O'Sullivan [66] en proposa 6 en 1983 et J. Hemp [44] en suggéra 4. Leur but était d'obtenir une fonction de poids plus homogène. Malheureusement, pour des raisons de symétrie et de contact entre les électrodes, cette solution n'est jamais envisagée en industrie de nos jours.

Dans l'industrie, les débitmètres permettent de mesurer des débits volumiques de fluides : liquides ou gazeux. Plusieurs variantes existent, selon le phénomène physique mis en jeu pour faire la mesure comme par exemple :

— débitmètres à ultrasons[39],[17],[43],
— Coriolis (mesure de débit massique)[71],
— débitmètres utilisant le principe du vortex [12],[19].

Les débitmètres électromagnétiques en font partie et forment une classe très importante parmi ces appareils. Ils sont largement utilisés dans le monde industriel depuis le milieu du 20ième siècle. Ils permettent de réaliser des mesures précises et fiables sans perturber le fluide les traversant. Il n'y a pas d'usure mécanique des composants utilisés. De plus, il sont adaptés à une grande variété de liquides agressifs/corrosifs tels que les boues, les acides et les bases à condition qu'ils soient des conducteurs électriques. Le site de Siemens à Haguenau produit des débitmètres électromagnétiques de diamètre compris entre 2 mm et 2 m pour ses différents clients à travers le monde.

FIGURE 1.1: Exemple des débitmètres électromagnétiques produits chez Siemens

La gamme de débitmètres électromagnétiques SITRANS FM de Siemens compte plusieurs centaines de variantes dont des exemples sont donnés en figure 1.1. En effet, la multiplicité des choix (diamètre, type de revêtement intérieur, type d'électrode, contrainte de certification) permet au client d'obtenir un appareil parfaitement adapté à son besoin. Enfin, les facteurs d'étalonnage varient peu au cours du temps. En revanche, leur conception nécessite l'assemblage de matériaux divers et variés, constituant des interfaces entre les matériaux, souvent difficiles à caractériser et pouvant être la source de courants et de champs de fuite non négligeables. Les débitmètres électromagnétiques produits chez Siemens sont constitués de tubes en matériaux amagnétiques pour la plupart, revêtus intérieurement d'une couche isolée électriquement. Des bobines sont disposées de part et d'autres du tube afin de créer un champ magnétique. Il est alternatif et de basse fréquence pour éviter les tensions de polarisation et parasites. La détermination expérimentale des lignes de champ dans ces dispositifs est complexe, difficile à mesurer et coûteuse, puisque le nombre de variantes, ainsi que de modèles est relativement important. De plus, les géométries de ces appareils, dictées à la fois par des contraintes d'utilisation et par des contraintes d'élaboration, sont

bien souvent à l'origine d'inhomogénéités dans les champs induits, ce qui porte préjudice à la précision des mesures. En effet, la précision est liée à la stabilisation du courant d'excitation des bobines (stabilisation du champ magnétique), mais aussi au bruit sur le signal recueilli par les électrodes ; ce dernier est en partie dû à la non stationnarité du champ magnétique causée par la présence de courants de Foucault dans les pièces métalliques.
L'utilisation du principe de Faraday pour le développement de dispositifs fiables et bien contrôlés se heurte donc à la complexité avec laquelle interviennent des paramètres aussi fondamentaux que la géométrie et la nature des matériaux. Les paramètres d'élaboration des débitmètres électromagnétiques fabriqués chez Siemens sont choisis à l'heure actuelle à partir d'une série d'abaques empiriques datant d'une trentaine d'années, et établie à partir de calculs électromagnétiques élémentaires. De ce fait, il n'existe, pour l'instant, aucune description réaliste et analytique de ces dispositifs. Cependant, les progrès récents réalisés dans le domaine de la modélisation 3D de structures complexes ont ouvert des pistes d'exploration intéressantes pour le développement de modèles théoriques de débitmètres pour obtenir des simulations très fidèles tout en gardant un degré de confiance élevé.

Chapitre 2

Description d'un débitmètre électromagnétique

Ce chapitre a pour but de présenter et de décrire les différentes parties qui composent un débitmètre électromagnétique industriel. Pour cela, on s'attardera sur un exemple de débitmètre électromagnétique conçu par Siemens et dont l'étude et la modélisation sont l'objet de cette thèse. La première partie de ce chapitre se focalisera sur le corps physique de l'appareil : le capteur. La seconde partie concernera l'électronique utilisée notamment pour alimenter les bobines du capteur.

2.1 Présentation du débitmètre électromagnétique étudié

Les débitmètres électromagnétiques sont des appareils permettant de mesurer le débit volumique d'un liquide conducteur. Il est alors nécessaire, dans la plupart des cas, d'avoir un tube en acier inoxydable (il existe des tubes d'acier au carbone) pour prévenir des risques de corrosion. Le principe de mesure repose sur la loi de Faraday. L'idée est d'appliquer un champ magnétique et de le distribuer à l'intérieur du tube en utilisant des matériaux magnétiques : conception d'un circuit magnétique. L'application d'un champ magnétique induit une différence de potentiel directement mesurable par le biais d'électrodes. La théorie a souvent montré analytiquement des débitmètres électromagnétiques, dont le champ magnétique est uniforme,[76],[9],[13]. En réalité, pour les débitmètres industriels ce n'est pas du tout le cas. En effet, leur conception se base sur un assemblage de matériaux divers qui peuvent être la source de courants et de champs magnétiques indésirables. De plus, le placement des électrodes ainsi que le choix des matériaux influencent directement la performance d'un débitmètre électromagnétique. Tout cela sera détaillé dans la section 3.4 du chapitre 3.
Les appareils conçus chez Siemens sont constitués de deux parties bien dis-

tinctes : un capteur et un transmetteur. Ce dernier reçoit le signal recueilli par les électrodes. Le corps principal du capteur est en général constitué d'un tube en acier inoxydable et amagnétique. Il est revêtu intérieurement d'un isolant. Dans notre cas, cet isolant est de l'EPDM (éthylène propylène-diène monomère) un matériau plastique lui aussi amagnétique. Il doit également être étanche autour des électrodes, pour qu'il puisse résister à des conditions extrêmes de pression et de température et pour qu'il ne se détériore pas au contact du fluide [79]. La tension induite étant proportionnelle au diamètre intérieur du tube (voir chapitre VII), le revêtement doit aussi être indéformable. Deux bobines au moins sont utilisées afin de créer un champ magnétique DC pulsé (voir figure 2.6) et à basse fréquence respectivement pour éviter la polarisation des électrodes et les tensions parasites. En effet, l'application d'un champ magnétique continu génère une tension elle aussi continue : la tension de polarisation se superpose alors au signal induit [79]. Selon les configurations, le capteur dispose d'un "Tube Ring" et d'une enveloppe dénommée "Casing" ou "Outer case" qui sont des matériaux magnétiques et permettent de contenir le champ magnétique à l'intérieur du tube et de le protéger des perturbations extérieures nuisibles au signal mesuré. Dans le plan médian du débitmètre on retrouve les électrodes de mesures et de masses qui sont diamétralement opposées, voir figure 2.1. Les électrodes de masse servent de référencement pour la mesure du potentiel induit et forment un angle de 90° avec électrodes de mesures.

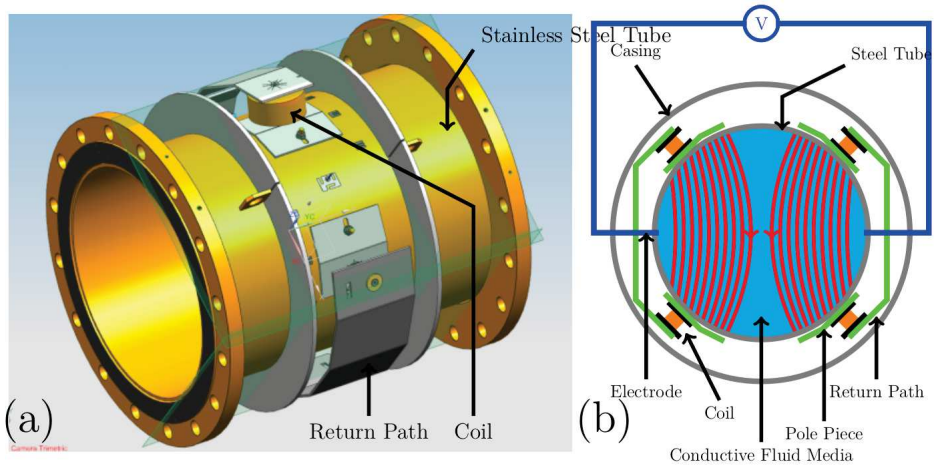


FIGURE 2.1: Schéma détaillé d'un débitmètre électromagnétique

A Haguenau, Siemens produit deux types de débitmètres électromagnétiques : le "Diamond Air Coil", dont les bobines ont la forme d'un losange et le "Pole Piece" constitué de 4 bobines également dénommé BigMag. C'est sur cette dernière configuration que le travail de cette thèse se focalisera.

En effet, c'est l'un des appareils les plus vendus par Siemens. En outre, la variété des différents composants permet d'entrevoir une optimisation du débitmètre. Un exemple de BigMag est illustré sur la figure 2.2.

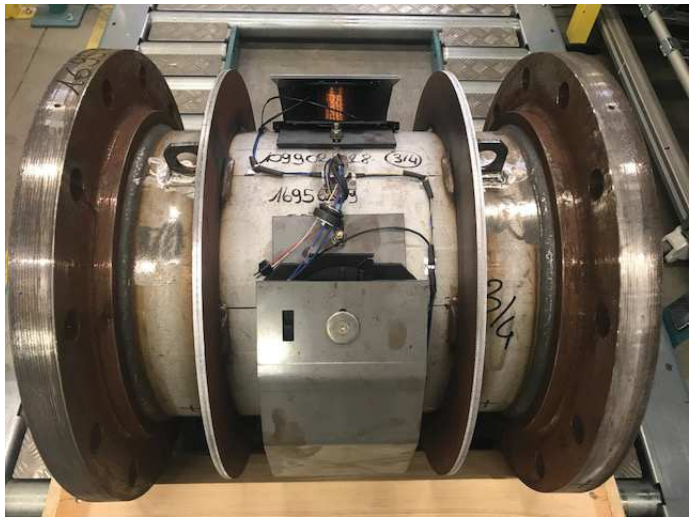


FIGURE 2.2: Le BigMag 5100

2.2 Le capteur

Le débitmètre électromagnétique BigMag 5100 fait partie de la gamme des produits SITRANS FM Mag5100. La dénomination BigMag n'est utilisée que pour un diamètre nominal supérieur ou égal à 350 mm : que l'on note DN350 par exemple. Dans le cadre de cette thèse, on travaillera sur un appareil, dont le diamètre nominal est de 400 mm. Le BigMag 5100 est principalement composé d'un tube en acier inoxydable , de 4 bobines, de 2 "Return Path", de 4 "Pole Piece" et de 2 Cœurs toroïdaux, comme illustré en figure 2.3.

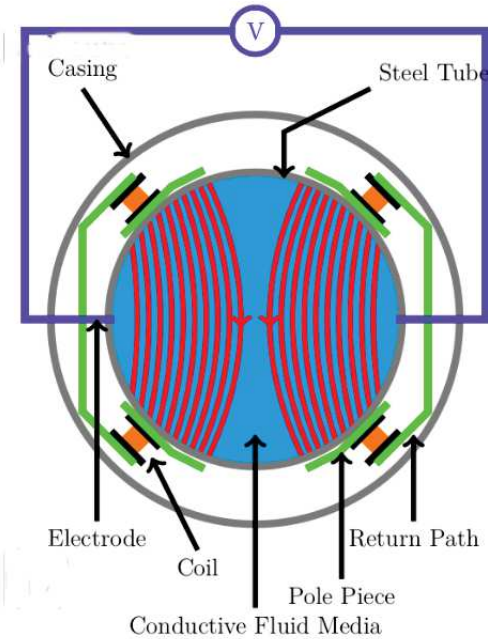


FIGURE 2.3: Circuit magnétique d'un BigMag 5100 et ses bobines

La partie principale de ce débitmètre est son circuit magnétique. C'est dans ce dernier qu'est créé le champ magnétique par l'intermédiaire de 4 bobines branchées en série deux à deux. Les "Return Path" et les "Pole Piece" permettent respectivement de guider et de distribuer le champ magnétique à l'intérieur du tube de mesurage. Ce sont des aciers de construction de type S235 JR qui sont des matériaux non gradés (non normés) : la reproductibilité de leurs caractéristiques magnétiques notamment n'est donc pas assurée. C'est également le cas du "Casing", acier de type S275 JR, qui sert de bouclier aux perturbations extérieures. Le cœur toroïdal, une tôle en Fe-Si à grains orientés a pour but d'amplifier le champ magnétique, dont les lignes de champ que l'on s'attend à obtenir sont représentées en figure 2.3.

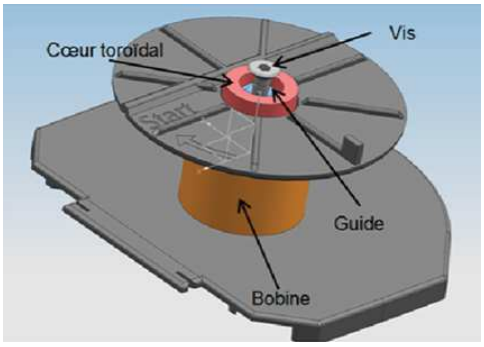


FIGURE 2.4: Bobine d'un BigMag 5100

La disposition des bobines ainsi que le choix des matériaux ont été choisis de façon à obtenir une sensibilité de 125 µV/m/s quel que soit le diamètre du débitmètre. La justification sera donnée dans le chapitre VII. Les électrodes de mesure sont elles réalisées avec les matériaux suivants [79] :

— Aciers fortement alliés (inoxydables) : adéquats pour la plupart des liquides non corrosifs,
— Alliages à haute teneur en nickel (Hastelloy) : teneur en fer faible voire nulle. Ces alliages sont adéquats pour des liquides oxydants et l'eau,
— Métaux rares et précieux : titane, tantale, or. Le platine, par exemple, est extrêmement résistant aux agressions chimiques. L'inconvénient majeur de ces matériaux est leur coût,
— Carbures métalliques : résistants aux abrasions.

Dans notre cas les électrodes du BigMag 5100 sont des Hastelloy C-276.

2.3 Le transmetteur

Le transmetteur est un élément indispensable pour le débitmètre électromagnétique. Il permet de convertir le signal analogique recueilli par les électrodes en un signal numérique, pour ensuite, après différents calculs et traitements de signaux, afficher la valeur du débit que l'on mesure sur un écran. L'impédance du capteur étant inversement proportionnelle à la conductivité du fluide [79], l'impédance d'entrée du transmetteur doit donc être suffisamment grande pour que la tension induite ne dépende pas de la conductivité du fluide. Selon Christensen [26], elle doit être de l'ordre de $10^{12}\Omega$. Siemens utilise pour ses débitmètres deux types de transmetteurs. On ne s'intéressera ici qu'au modèle Mag6000, figure 2.5 . Il alimente les bobines du capteur avec un courant DC pulsé de 125 mA, figure 2.6. Cette

technique de courant pulsé a l'avantage d'améliorer la stabilité du zéro [79]. En effet, la fréquence d'excitation est basse et comprise, en général entre 6 et 12 Hz. C'est donc également la fréquence du signal mesuré via les électrodes : la constante de temps est au moins égale à l'inverse de la fréquence d'excitation. En pratique, cette constante de temps doit être suffisamment grande pour filtrer les fluctuations rapides du débit. Pour cela, on diminue la fréquence [79]. Chez Siemens, pour un BigMag 5100 ayant un diamètre nominal de 400 mm, cette fréquence est de : 1,5625 Hz.

FIGURE 2.5: Transmetteur : Mag6000

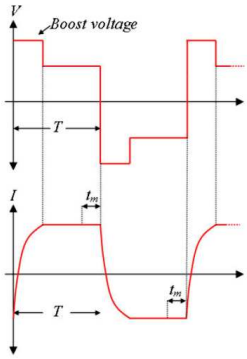


FIGURE 2.6: Courant DC pulsé [26]

La figure 2.6 montre l'évolution du courant en fonction du temps. Au début du cycle, une haute tension appelée "boost voltage" est utilisée (60 V) afin que le courant atteigne sa phase continue le plus rapidement possible. Lorsqu'elle est atteinte, le transmetteur agit comme un générateur de courant. Une fenêtre d'échantillonnage est alors ouverte à $t = t_m$ pendant une fraction de temps durant laquelle le champ magnétique créé est constant : courant constant. C'est à cet instant précis que la mesure est effectuée [1].
Une fois cette dernière réalisée, le transmetteur amplifie et convertit le signal analogique en un signal numérique. Ces appareils restent cependant sensibles aux bruits électrochimiques dus aux particules qui peuvent se fixer sur la surface des électrodes. Les particules n'ayant pas forcément la même conductivité que le fluide dont on souhaite mesurer le débit, un offset apparaît. Il représente en quelque sorte le bruit du signal mesuré. Ce bruit est aussi lié à la présence de courants induits dans les pièces métalliques qui rendent le champ magnétique non stationnaire lors de la mesure.

1. Possibilité de mesurer la tension induite pour un courant d'excitation nul : amélioration de la stabilité du zéro

2.4 Conclusion

Ce chapitre avait pour but d'introduire et de présenter une variété de débitmètres électromagnétiques produits par Siemens, et qui font l'objet de cette thèse. Il a ainsi été montré que la détermination du champ magnétique est loin d'être évidente, puisqu'il faut tenir compte de l'assemblage de matériaux divers et variés, dont la géométrie a une influence sur la valeur de l'induction magnétique. Cela va être démontré dans le chapitre III, par l'intermédiaire de la fonction de poids. Dans la suite de cette thèse une étude des propriétés magnétiques des matériaux sera donc effectuée, car ces derniers ont tous un rôle prédéfini sur la distribution du champ magnétique à l'intérieur du tube de mesurage. La prochaine étape sera donc de présenter une théorie permettant de comprendre le fonctionnement général de ces appareils, en se basant sur les travaux effectués jusqu'ici.

Chapitre 3

Théorie générale des débitmètres électromagnétiques

L'objectif de ce chapitre est de décrire les phénomènes physiques se produisant dans un débitmètre électromagnétique. La première partie sera consacrée au principe de fonctionnement d'un débitmètre électromagnétique pour ensuite établir, par la théorie,l'équation de Poisson régissant le fonctionnement de ces appareils. La suite du chapitre portera notamment sur les différentes méthodes de résolution de cette équation.

3.1 Définition du débit

Le débit est la mesure d'un volume ou d'une matière traversant une surface par unité de temps. Le plus souvent il s'agit de la mesure du débit d'un liquide. Cela peut être tout aussi bien la mesure du débit d'un fleuve que celle d'un liquide s'écoulant dans une conduite. On distingue deux types de débits :

— Le débit volumique : $Q_v = S.v_m$,
— Le débit massique : $Q_m = S.\rho.v_m$

où v_m est la vitesse moyenne du fluide en $m.s^{-1}$, S est la section de la conduite en m^2 et ρ la masse volumique en $kg.m^{-3}$. Le débit volumique s'exprime en $m^3.s^{-1}$ et le débit massique en $kg.s^{-1}$

Le débit Q du fluide dépend directement de la vitesse $\boldsymbol{v}$ du fluide. Le débit volumique est une grandeur généralement utilisée dans le domaine de l'hydraulique, dès lors que l'on s'intéresse à l'écoulement d'un liquide. Dans ce cas, le débit volumique doit rester constant lors de l'écoulement : fluide

incompressible [25]. En d'autres termes, la masse volumique ne doit dépendre ni de la pression, ni de la température. Ce n'est pas forcément le cas pour les gaz, dont la masse volumique peut varier. La mesure de débit massique peut également s'appliquer aux liquides. Il existe plusieurs méthodes permettant de mesurer le débit d'un fluide liquide ou gazeux. Tout dépend de ce que l'on cherche à mesurer. Généralement on utilise des débitmètres dont le principe de fonctionnement dépend de la nature physique du fluide. L'avantage d'un débitmètre est de pouvoir mesurer un débit linéaire, non linéaire, massique ou volumétrique d'un liquide ou d'un gaz. La liste ci-dessous présente les principaux appareils de mesure de débit (liste non exhaustive) :

— Les débitmètres à ultrasons, tube de Pitot, courantomètre : mesure de la vitesse d'un fluide,
— Les organes déprimogènes(Tube de Venturi) : limite les écoulements de fluide.
— Les débitmètres massiques : thermique ou à effet Coriolis,
— Les débitmètres électromagnétiques : mesure de débits volumiques.

Dans le cadre de cette thèse, on étudiera les débitmètres électromagnétiques. Ils permettent de mesurer un débit par mesure directe de la vitesse d'écoulement.

3.2 Principe de fonctionnement

Les débitmètres électromagnétiques utilisent la propriété conductrice de certains fluides. Ils comportent, en effet, des particules chargées électriquement qui se déplacent à la vitesse $\boldsymbol{v}$ du fluide. Le but est de modifier la distribution locale de charges dans le fluide en appliquant un champ magnétique, puis de mesurer le potentiel (scalaire ou vecteur) associé à la nouvelle distribution de charges. En physique, ce principe repose sur la loi de Faraday : lorsqu'un conducteur de longueur L se déplace à une vitesse $\boldsymbol{v}$, sous un induction magnétique $\boldsymbol{B}$, cela a pour effet de générer un potentiel U_i aux bornes du conducteur, figure 3.1. Dans le cas des débitmètres électromagnétiques, c'est un fluide conducteur qui se déplace à la vitesse $\boldsymbol{v}$ sous une induction magnétique $\boldsymbol{B}$ dans une conduite de diamètre D.
Tout fluide conducteur est composé d'ions, que l'on appelle anions et cations qui sont respectivement chargés négativement et positivement. Sous l'action d'un champ magnétique, ces ions sont déviés de leur trajectoire dans des directions opposées. Cela provoque une accumulation de charges de part et d'autre de la conduite et induit une différence de potentiel U. Cette dernière peut être directement mesurée via des électrodes.

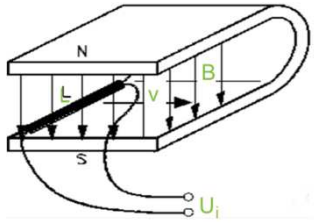


FIGURE 3.1: Principe de Faraday

3.3 Théorie

Considérons un fluide conducteur de conductivité σ en mouvement à la vitesse $\boldsymbol{v}$ soumis à une induction magnétique $\boldsymbol{B_{appliqué}}$ créée par les bobines du débitmètre électromagnétique et un champ électrique $\boldsymbol{E_E}$. Les ions de charge (+q) et (-q) du fluide en mouvement sont déviés par la force de Lorentz [58],[48](figure 3.2) :

$$\boldsymbol{F_L} = \boldsymbol{F_E} + \boldsymbol{F_m} = \pm q(\boldsymbol{E_E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B_{appliqué}}) \tag{3.3.1}$$

Les ions sont donc soumis à une force électrique $\boldsymbol{F_E}$ et une force magnétique $\boldsymbol{F}_m$. Le champ électrique total auquel sont soumis les charges est donné par :

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E_E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B_{appliqué}}) \tag{3.3.2}$$

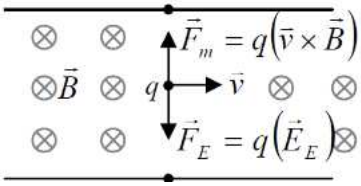


FIGURE 3.2: Force de Lorentz sur une particule chargée [26]

La loi d'Ohm appliquée au fluide conducteur s'écrit donc :

$$\boldsymbol{j_{fluide}} = \sigma \boldsymbol{E} = \sigma(\boldsymbol{E_E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B_{appliqué}}) \tag{3.3.3}$$

Le terme $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B_{appliqué}}$ représente la force électromotrice induite par le mouvement du fluide, $\boldsymbol{E}$ étant le champ électrique total présent dans le fluide. Le lien entre la tension induite et la vitesse étant établi, il faut désormais déterminer l'équation qui régit le fonctionnement des débitmètres électromagnétiques. Cette équation a été établie par plusieurs scientifiques, dont Shercliff[76], Christensen[26]. Pour cela, il faut passer par des hypothèses qui

sont détaillés dans le paragraphe suivant. Si la fréquence du champ magné-

tique $\boldsymbol{H}$ appliqué est importante, les distributions du champ électrique et du courant induit dans le fluide seront perturbées par le phénomène d'auto-induction (Loi de Lenz-Faraday) : apparition d'une force électromotrice s'opposant à la variation du champ magnétique. Cette tension va alors générer des courants induits qui vont créer un champ magnétique s'opposant au champ magnétique initial. Le courant induit est alors affecté par l'effet de peau, phénomène électromagnétique où le courant est d'autant plus restreint à circuler en surface du conducteur que la fréquence est élevée.
Dans son livre [76] Shercliff stipule que tous ces phénomènes peuvent être négligés, si la quantité $(\mu\sigma\omega)^{-0.5}$ qui correspond à l'épaisseur de peau est suffisamment grande par rapport au diamètre D = 400 mm du tube du débitmètre électromagnétique par exemple.

Prenons le cas de l'eau potable. La conductivité σ est d'environ $4\mu S/m$. La perméabilité magnétique $\mu = \mu_0$ car $\mu_r = 1$. La fréquence du champ magnétique étant de 1,5625 Hz dans notre cas, l'épaisseur de peau égale à $\delta \approx 201.10^3$m est largement supérieure à la valeur du diamètre du débitmètre électromagnétique. Le critère défini par Shercliff est donc juste. Des valeurs typiques sont données dans le tableau 3.1 [76].

Fluide	**Sodium à 100°C**	**Mercure à 20°**	**Meilleur électrolyte**
$\omega(s^{-1})$	770	7600	8.10^7

Table 3.1: Fréquence angulaire pour lesquelles l'épaisseur de peau est égale à 1 [76]

A ces fréquences ω, l'épaisseur de Peau est égale à 1 cm [76]. Pour des fréquences inférieures à celle du tableau 3.1, l'effet de Peau et les phénomènes d'auto-induction dans le fluide peuvent être négligés. Des courants de déplacements peuvent également apparaître, si le champ électrique $\boldsymbol{E}$ varie au cours du temps (voir l'équation **??**). Shercliff a également défini un critère pour cette situation. Il suffit que la quantité $\frac{\omega\epsilon}{\sigma} << 1$.

Fluide	**Huile diélectrique**	**Eau pure**	**Eau potable**
$\omega(s^{-1})$	0,45	5700	$1,41.10^7$
$\epsilon(F/m)$	$2,5\epsilon_0$	$80\epsilon_0$	$80\epsilon_0$

Table 3.2: Valeurs usuelles pour lesquelles on a une relaxation diélectriques [76]

Où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,854.10^{-12}$ F/m. Si on reprend le cas de l'eau potable (Tape water), pour une fréquence de 1,5625 Hz, la quantité $\frac{\omega\epsilon}{\sigma} \approx 8,7.10^{-4}$ est très inférieure à 1. Pour des fréquences plus basses que $1,41.10^7$, la relaxation diélectrique est quasi-instantanée et le courant de déplacement peut être négligé. Mathématiquement, ces hypothèses permettent d'écrire que $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$. Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\boldsymbol{rotE} = 0 \tag{3.3.4}$$

$$\boldsymbol{rotB} = \mu \boldsymbol{j_{fluide}} \tag{3.3.5}$$

avec $\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}$ U, U étant le potentiel électrique en Volt. L'équation 3.3.5 montre comment des courants induits caractérisés par la densité de courant $\boldsymbol{j}$ peuvent affecter l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$. Mais comme ils sont négligeables, on peut écrire que :

$$div\boldsymbol{j_{fluide}} = 0 \tag{3.3.6}$$

La loi d'Ohm appliquée au fluide conducteur définie par l'équation 3.3.3 s'écrit donc :

$$div(\boldsymbol{j_{fluide}}) = \sigma.div(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B_{appliqué}}) = \sigma.div(-\boldsymbol{grad}U)+\sigma.div(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B_{appliqué}}) = 0 \tag{3.3.7}$$

Le laplacien d'un champ scalaire ou vectoriel est défini comme la divergence du gradient. L'équation (3.3.7) devient :

$$\boldsymbol{\nabla^2}U = div(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B_{appliqué}}) \tag{3.3.8}$$

C'est l'équation de Poisson, dont il faut déterminer la solution. Plusieurs méthodes pour la résoudre ont été proposées [76],[60],[64]. Le développement proposé par Maalouf est plus détaillé et compréhensible que celui de Shercliff. Elle a considéré une conduite circulaire ayant des parois isolées électriquement. Le fluide s'écoule dans la direction z et l'induction magnétique est uniforme suivant l'axe x comme illustré en figure 3.3.
D'après la figure 3.1, les composantes de l'induction magnétique et de la vitesse s'écrivent respectivement $B = (0, 0, B_z)$ et $v = (0, v_y, 0)$. Le potentiel induit aux bornes des électrodes s'écrit donc :

$$bm\nabla^2 U = div(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}.\nabla \wedge \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}.\nabla \wedge \boldsymbol{B} \tag{3.3.9}$$

Comme l'induction magnétique est uniforme sur l'axe z et que la vitesse n'a qu'une composante sur y, alors :

$$\nabla^2 U = B_z \frac{\partial v_y}{\partial x} \tag{3.3.10}$$

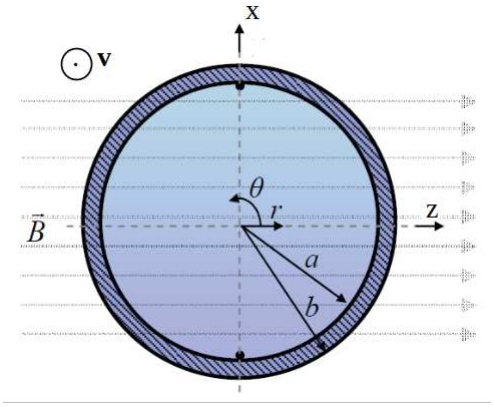


FIGURE 3.3: Conduite circulaire soumise à une induction magnétique B uniforme [26]

Si le profil des vitesses est symétrique par rapport à l'axe y : profil axisymétrique [60], la vitesse du fluide peut s'exprimer en coordonnées cylindriques :

$$v_y = f(r) \tag{3.3.11}$$

L'équation 3.3.10 s'écrit donc en supposant un champ d'induction uniforme B sur z :

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = B_z \frac{\partial v_y}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \tag{3.3.12}$$

avec :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + z^2\right)^{\frac{-1}{2}} 2x = \sin\theta \tag{3.3.13}$$

Le potentiel induit U s'écrit :

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = B_z \frac{\partial v_y(r)}{\partial r}\sin\theta \tag{3.3.14}$$

La solution peut être déterminée par la méthode de séparation des variables. Une solution de la forme $U(r,\theta) = R(r)\sin\theta$ est suggérée [60].

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{\sin\theta}{r}\frac{dR(r)}{dr} + \sin\theta\frac{d^2R(r)}{dr^2} \tag{3.3.15}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \frac{-R(r)\sin\theta}{r^2} \tag{3.3.16}$$

donc :

$$\nabla^2 U = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{d^2R(r)}{dr^2}\right)\sin\theta - \frac{R(r)}{r^2}\sin\theta = B_x\frac{\partial v_z(r)}{\partial r}\sin\theta \tag{3.3.17}$$

En divisant par $\sin\theta$, on obtient

$$\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{d^2R(r)}{dr^2} - \frac{R(r)}{r^2} = B_x\frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \tag{3.3.18}$$

On pose $\frac{dR(r)}{dr} = R'(r)$ et $\frac{d^2R(r)}{dr^2} = R''(r)$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{R(r)}{r^2} = B_x\frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \tag{3.3.19}$$

En remarquant que $\frac{d}{dr}\left(\frac{R(r)}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr} - \frac{R(r)}{r^2}$
alors :

$$R''(r) + \left(\frac{R(r)}{r}\right)' = B_x\frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \tag{3.3.20}$$

C'est une équation différentielle du second ordre, dont l'équation homogène peut s'écrire sous la forme :

$$Z''(r) + \left(\frac{Z(r)}{r}\right)' = 0 \tag{3.3.21}$$

Une solution de cette équation est $Z(r) = \frac{1}{r}$. Cependant, il en existe une autre qui peut se mettre sous la forme suivante : $R(r) = Z(r)m(r) = \frac{m(r)}{r}$ [60] .
On peut donc écrire que :

$$\left(\frac{R(r)}{r}\right)' = \left(\frac{m(r)}{r^2}\right)' = \frac{m'(r)r - 2m(r)}{r^3} \tag{3.3.22}$$

donc

$$R'(r) = \frac{m'(r)r - m(r)}{r^2} \tag{3.3.23}$$

et

$$R''(r) = \frac{m''(r)r^2 - 2m'(r)r + 2m(r)}{r^3} \tag{3.3.24}$$

En remplaçant les équations (3.3.23) et (3.3.24) dans l'équation (3.3.20) on obtient :

$$m''(r)r - m'(r) = B_z r^2\frac{\partial v_y(r)}{\partial r} \tag{3.3.25}$$

En remarquant à nouveau que :

$$\left(\frac{m'(r)}{r}\right)' = \frac{m''(r)r - m'(r)}{r^2} \tag{3.3.26}$$

On peut alors écrire que :

$$\left(\frac{m'(r)}{r}\right)' = B_z \frac{\partial v_y(r)}{\partial r} \tag{3.3.27}$$

En intégrant l'équation (3.3.27) on obtient :

$$\frac{m'(r)}{r} = B_z v_y(r) + C \tag{3.3.28}$$

La constante C est évaluée à partir des conditions aux limites. En effet, au niveau des parois de la canalisation, on a $r = a$ et $v_y(a) = 0$. De plus, en considérant les parois isolées électriquement, la composante radiale du potentiel induit est nulle, soit $R'(a) = 0$. En effet :

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} U = -\frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\boldsymbol{e_\theta} \tag{3.3.29}$$

car $U(r, \theta) = R(r)s \sin\theta$ On a alors :

$$m'(a) = aB_z v_y(a) + Ca \tag{3.3.30}$$

Comme $v_y(a) = 0$, on en déduit que $m'(a) = Ca$. L'équation (3.3.23) s'écrit alors :

$$R'(a) = \frac{m'(a)a - m(a)}{a^2} \tag{3.3.31}$$

donc

$$m'(a) = \frac{m(a)}{a} \tag{3.3.32}$$

Comme $m(a) = aR(a)$ alors $m'(a) = R(a)$. La constante C est donc égale à $\frac{R(a)}{a}$. D'où :

$$m'(r) = rB_z v_y(r) + \frac{R(a)}{a} r = (rR(r))' \tag{3.3.33}$$

En intégrant cela, on obtient :

$$m(r) = rR(r) = B_x \int r v_y(r) dr + \frac{R(a)}{a}\frac{r^2}{2} + C_1 \tag{3.3.34}$$

La valeur de la constante C_1 est déterminée en supposant qu'au centre du débitmètre ($r = 0$), le potentiel $U = 0$ soit $R(0) = 0$ donc $C_1 = 0$. Alors :

$$R(r) = \frac{B_z}{r} \int r v_y(r) dr + \frac{R(a)}{a} \frac{r}{2} \tag{3.3.35}$$

La vitesse moyenne du fluide dans la conduite est définie par :

$$v_m = \frac{\iint_S v_y(r) dS}{S} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a v_y(r) r dr d\theta}{\pi a^2} = \frac{\int_0^a 2\pi v_y(r) dr}{\pi a^2} = \frac{2}{a^2} \int_0^a v_y(r) r dr \tag{3.3.36}$$

Par identification on remarque que :

$$\frac{1}{a} \int_0^a v_y(r) r dr = \frac{v_m a}{2} \tag{3.3.37}$$

donc :

$$R(a) = \frac{B_z v_m a}{2} + \frac{R(a)}{2} \rightarrow R(a) = B_z v_m a \tag{3.3.38}$$

Les électrodes sont placées en $z = 0$ et $z = \pm a$. En coordonnées cylindriques les électrodes sont alors en $r = a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$. La tension aux bornes des électrodes s'écrit donc :

$$U_{ee} = U\left(a, \frac{\pi}{2}\right) - U\left(a, \frac{3\pi}{2}\right) = R(a) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - R(a) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2R(a) \tag{3.3.39}$$

soit

$$U_{ee} = 2R(a) = 2B_z v_m a \tag{3.3.40}$$

comme le diamètre de la canalisation vaut $D = 2a$ on a :

$$U_{ee} = 2R(a) = B_z D v_m \tag{3.3.41}$$

qui, dans un cas plus général s'écrit :

$$U_{ee} = BDv \tag{3.3.42}$$

C'est l'équation qui régit le fonctionnement des débitmètres électromagnétiques. En effet, à partir de la tension mesurée par les électrodes, on peut déterminer le débit volumique en multipliant la vitesse d'écoulement par la section du tube de mesurage. Il faut toutefois garder à l'esprit que cette relation se base en grande partie sur les hypothèses suivantes :

- Une induction magnétique $\boldsymbol{B}$ uniforme.
- Un écoulement du fluide axisymétrique.
- Des électrodes assimilées à des points.

En réalité, il est difficile de respecter ces hypothèses. Les débitmètres électromagnétiques industriels génèrent des champs magnétiques non homogènes dans la plupart des cas. La tension résultante dépend essentiellement du circuit magnétique (bobines, matériaux magnétiques), mais aussi de la taille, de la forme des électrodes, ainsi que du profil des vitesses du fluide. Il faut donc redéfinir la relation entre la tension induite et la vitesse d'écoulement en fonction de ces paramètres. C'est là qu'intervient la notion de fonction de poids $\boldsymbol{W}$ ("weight function" en anglais).

3.4 La fonction de poids W

Une autre solution à l'équation 3.3.10 a été donnée dans les articles [76],[11]. Cette solution fait apparaître la fonction de poids $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{j}$. Celle-ci permet de décrire mathématiquement la contribution de la géométrie des électrodes, de l'induction magnétique, et de l'influence du profil des vitesses, sur la tension mesurée par les électrodes . Shercliff fut alors le premier à introduire la notion de fonction de poids en deux dimensions, en procédant par une analyse de fonction complexe. Il a supposé un champ magnétique normal au sens de l'écoulement et une vitesse d'écoulement axisymétrique. Dans sa thèse[**?**], Christensen a utilisé une approche plus simple, en utilisant une décomposition en double série de Fourier. Les deux chercheurs aboutirent au résultat suivant :

$$W_z = \frac{2B}{a\pi} . \frac{a^4 - a^2 r^2 \cos(2\theta)}{a^4 + r^2 - 2a^2 r^2 \cos(2\theta)} \tag{3.4.1}$$

Dans cette approche, seule la composante z de $\boldsymbol{W}$ contribue au signal mesuré, car la vitesse d'écoulement est axisymétrique. En d'autres termes, le vecteur vitesse est orienté suivant le sens de l'écoulement mais la vitesse n'est pas uniforme. L'induction magnétique est uniforme sur toute la section du tube de mesurage. La composante W_z normalisée est représentée en figure 3.4.
Cette fonction fut étendue en trois dimensions par Bevir, qui lui introduisit la notion de densité de courant virtuel $\boldsymbol{j}$[9]. L'idée est de supposer qu'un courant circule entre les deux électrodes, en l'absence de champ magnétique, et lorsque le fluide est statique. La densité de courant est alors déterminée par la forme et la taille des électrodes, ainsi que par les propriétés électriques de l'isolant utilisé. D'un point de vue théorique, le courant virtuel est la solution à un problème électrocinétique [29], statique ou permanent. Le courant virtuel peut être exprimé par son potentiel scalaire noté G. De même, l'induction magnétique est exprimée en fonction du potentiel scalaire F, solution d'un problème magnétostatique.

$$\boldsymbol{B} = \nabla F \tag{3.4.2}$$

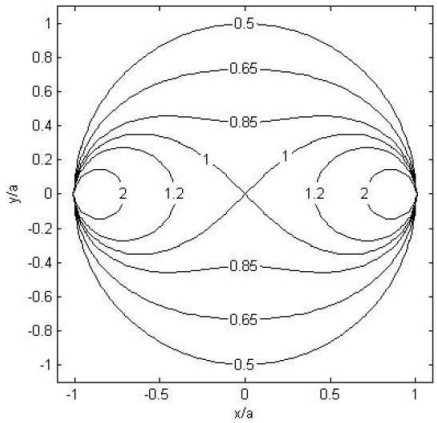


FIGURE 3.4: Fonction de poids normalisée $W_z/(2B/a\pi)$ [76]

$$\boldsymbol{G} = \nabla G \tag{3.4.3}$$

Par définition $div\boldsymbol{B} = 0$. Précédemment, il a été montré que $div\boldsymbol{j} = 0$. Les potentiels F et G sont alors une solution de l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 F = 0 \tag{3.4.4}$$

$$\nabla^2 G = 0 \tag{3.4.5}$$

Plusieurs modèles furent proposés pour les résoudre [11],[26],[44],[84] et permirent de retrouver le résultat de Shercliff. Bevir reprit ce résultat et l'étendit à une fonction de poids à trois dimensions. Le développement fut repris par Christensen [26] qui le détailla davantage que Bevir. Pour cela, il considéra un débitmètre de section circulaire isolé électriquement disposant de deux électrodes. Deux situations furent alors considérées.

1. Le fluide de conductivité σ est en mouvement à la vitesse $\boldsymbol{v}$ sous une induction magnétique $\boldsymbol{B}$. Un potentiel électrique U_{ind} est induit.
2. Un courant électrique circule entre les deux électrodes, mais aucun champ magnétique n'est présent. On note alors U et $\boldsymbol{j_{ind}}$ respectivement le potentiel électrique et la densité de courant induite.

Le théorème de Green-Ostrogradski permet d'écrire :

$$\oiint_S U_{ind}.\boldsymbol{j}.d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla.(U_{ind}.\boldsymbol{j})dV = {}^{1}\iiint_V \nabla U_{ind}.\boldsymbol{j}dV \tag{3.4.6}$$

1. $\nabla.(a\boldsymbol{A}) = a\nabla\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\nabla a$ *et* $div\boldsymbol{j} = 0$.

$$\oiint_S U.\boldsymbol{j_{ind}}.d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla.(U.\boldsymbol{j_{ind}})dV = \iiint_V \nabla U.\boldsymbol{j_{ind}}dV \tag{3.4.7}$$

où V décrit le volume occupé par le fluide dans le tube de mesurage et S est la surface intérieure du débitmètre. Les parois du tube sont isolées électriquement, donc :

$$\boldsymbol{n}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{j_{ind}} = 0 \tag{3.4.8}$$

où $\boldsymbol{n}$ représente le vecteur normal à la surface S. Soit S_1 et S_2 la surface de l'électrode 1 et 2 respectivement. Les équations (3.4.6) et (3.4.7) s'écrivent alors :

$$\iiint_V \nabla U_{ind}.\boldsymbol{j}dV = \oiint_S U_{ind}.\boldsymbol{j}.d\boldsymbol{S} = \iint_{S_1+S_2} U_{ind}.\boldsymbol{j}d\boldsymbol{S} \tag{3.4.9}$$

$$\iiint_V \nabla U.\boldsymbol{j_{ind}}dV = \oiint_S U.\boldsymbol{j_{ind}}.d\boldsymbol{S} = \iint_{S_1+S_2} U.\boldsymbol{j_{ind}}d\boldsymbol{S} \tag{3.4.10}$$

Dans le premier cas, si aucun courant ne circule entre les électrodes, alors :

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{j_{ind}}.d\boldsymbol{S} = \iint_{S_2} \boldsymbol{j_{ind}}.d\boldsymbol{S} = 0 \tag{3.4.11}$$

Dans le second cas, aucun champ magnétique n'est appliqué, mais un courant circule entre les deux électrodes :

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{j}.d\boldsymbol{S} = -\iint_{S_2} \boldsymbol{j}.d\boldsymbol{S} = I \tag{3.4.12}$$

En soustrayant les équations (3.4.9) et (3.4.10) on obtient :

$$U_{1ind}\underbrace{\iint_{S_2} \boldsymbol{j}.d\boldsymbol{S}}_{I} + U_{2ind}\underbrace{\iint_{S_2} \boldsymbol{j}.d\boldsymbol{S}}_{-I} - U_1\underbrace{\iint_{S_1} \boldsymbol{j_{ind}}.d\boldsymbol{S}}_{0} - U_2\underbrace{\iint_{S_2} \boldsymbol{j_{ind}}.\boldsymbol{dS}}_{0} \tag{3.4.13}$$

donc :

$$U_{1ind} - U_{2ind} = \frac{1}{I}\iiint_V \left(\nabla U_{ind}.\boldsymbol{j} - \nabla U.\boldsymbol{j_{ind}}\right) dV \tag{3.4.14}$$

La loi d'Ohm pour un fluide se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{v}$ et sous une induction magnétique $\boldsymbol{B}$ permet d'écrire que :

$$\boldsymbol{j_{ind}} = \sigma\left(-\nabla U_{ind} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}\right) \tag{3.4.15}$$

En l'absence de champ magnétique, elle s'écrit :

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(-\nabla U\right) \tag{3.4.16}$$

L'équation (3.4.14) devient :

$$U_{1ind} - U_{2ind} = \frac{1}{I}\iiint\limits_V \left(\nabla U_{ind}.\sigma\left(-\nabla U\right) - \nabla U.\sigma\left(-\nabla U_{ind} + \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}\right)\right) dV \tag{3.4.17}$$

Soit :

$$U_{1ind} - U_{2ind} = \frac{1}{I}\iiint\limits_V \left(\nabla U_{ind}.\sigma\left(-\nabla U\right) + \nabla U.\sigma\nabla U_{ind} - \nabla U.\sigma\left(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}\right)\right) dV \tag{3.4.18}$$

Dans son article Bevir [9] supposa que la conductivité σ du fluide était définie positive et symétrique . Les termes $\nabla U_{ind}.\sigma\left(-\nabla U\right)$ s'annule, alors l'équation (3.4.18) devient :

$$U_{1ind} - U_{2ind} = \frac{1}{I}\iiint\limits_V \left(-\nabla U.\sigma\left(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}\right)\right) dV \tag{3.4.19}$$

De plus, si la conductivité σ est isotrope (la même dans toutes les directions de l'espace) alors $\left(-\nabla U.\sigma\right) = -\sigma\nabla U = \boldsymbol{j}$ alors :

$$U_{1ind} - U_{2ind} = \frac{1}{I}\iiint\limits_V \boldsymbol{j}.\left(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}\right) dV \tag{3.4.20}$$

d'où :

$$U_{ee} = U_{1ind} - U_{2ind} = \frac{1}{I}\iiint\limits_V \boldsymbol{v}.\boldsymbol{W} dV \tag{3.4.21}$$

où $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{j}$ représente la fonction de poids et U_{ee} la tension aux bornes des électrodes en volt.

Cette expression permit de montrer la dépendance entre la tension induite et le profil des vitesses [47] du fluide, ainsi que l'influence de l'induction magnétique et des caractéristiques géométriques des électrodes sur le signal.

En effet, la densité de courant $\boldsymbol{j}$ change lorsque la géométrie des électrodes est modifiée. Ces effets sont bien représentés en figure 3.4, car on remarque que le débitmètre est plus sensible aux variations de l'induction magnétique et/ou au courant virtuel au niveau des électrodes (valeur de la fonction de poids plus élevée qu'ailleurs). En d'autres termes, la fonction de poids sert à

évaluer la sensibilité d'un débitmètre électromagnétique en fonction de l'induction magnétique, du profil des vitesses et de la géométrie des électrodes et de leur position. L'objectif principal est de s'affranchir de la distribution de $\boldsymbol{v}$, afin que le signal recueilli par les électrodes soit uniquement proportionnel au débit mesuré. Shercliff [76] montra que cela se vérifiait pour un débitmètre électromagnétique ayant une section circulaire. Le débit est alors rectilinéaire : profil des vitesses axisymétrique. Pour résumer, la fonction de poids est un indicateur de performance des débitmètres ; Shercliff définit la sensibilité S qui dépend directement de $\boldsymbol{W}$ et du profil des vitesses $\boldsymbol{v}$ [76].

$$S = \frac{\iint v\left(x,y\right) W\left(x,y\right) dxdy}{\iint v\left(x,y\right) dxdy} = \frac{U_{ee}}{DBv_m} \tag{3.4.22}$$

Cette relation confirma que la sensibilité d'un débitmètre électromagnétique ayant une section circulaire est constante lorsque :

— L'induction magnétique dans le débitmètre est uniforme.
— Le profil des vitesses est axisymétrique.
— Les électrodes sont diamétralement opposées et assimilées à des points.

3.5 Comparaison entre les deux approches pour le calcul de la tension induite

La méthode de résolution de l'équation de Poisson proposée par Maalouf repose sur plusieurs hypothèses : induction magnétique uniforme, profil de vitesse axisymétrique, section circulaire du tube de mesurage et vitesse nulle sur les parois. Cela permet d'aboutir à une relation de proportionnalité entre la tension induite et la vitesse du fluide. C'est sur cette équation que se base le fonctionnement des débitmètres industriels. Afin de s'assurer que l'équation est bien vérifiée, on procède à un étalonnage pour en déterminer son facteur K : $U_{ee} = K.v$. Ce point sera vu plus en détail dans le chapitre 7. Pour la deuxième approche, Shercliff et Bevir introduisirent la notion de fonction de poids qui permet d'évaluer la performance d'un débitmètre électromagnétique du point de vue de la sensibilité. Ce paramètre tient compte de la distribution de l'induction magnétique, qu'elle soit uniforme ou non, ainsi que du profil des vitesses et des caractéristiques géométriques des électrodes. Il est nécessaire de déterminer la fonction de poids dans une perspective d'optimisation des appareils.

3.6 Influence du profil des vitesses sur le signal mesuré

Un autre point essentiel à considérer est l'influence du profil des vitesses sur la mesure du débit. Précédemment, il a été question de la fonction de poids $\boldsymbol{W}$ qui permet de tenir compte de la géométrie et de l'induction magnétique sur le potentiel induit. Seulement, le profil des vitesses du fluide joue aussi un rôle prépondérant sur le signal mesuré. Dans sa forme la plus simple, la fonction de poids $\boldsymbol{W}$ permet de montrer l'influence de la distribution des vitesses sur le signal en tout point de la section transversale de la conduite [5]. En effet, comme l'illustre la figure 3.4, si on considère uniquement la vitesse, W_z est multipliée par 2 (valeur de la fonction de poids) au niveau des électrodes de mesure et est, de ce fait, deux fois plus influente sur le signal. Dans son livre Baker [5] expliqua également que, si le fluide passait uniquement près des électrodes et qu'il était stationnaire ailleurs, le signal mesuré serait deux fois plus important qu'il devrait l'être. En mécanique des fluides, il existe un paramètre sans dimension permettant de connaître le profil d'écoulement : le nombre de Reynolds R_e défini par l'équation ci-dessous [25],[83].

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \tag{3.6.1}$$

où v (m/s) est la vitesse moyenne du fluide, ρ la masse volumique (kg/m^3), μ la viscosité dynamique (Pa.s) et D (m) le diamètre de la conduite. Si le nombre de Reynolds est inférieur à environ 2300 [25],[83], le fluide est dans état stationnaire (nécessité d'avoir une longueur de conduite droite suffisamment grande) et s'écoule parallèlement à l'axe de la conduite : c'est le régime laminaire. Le profil des vitesses est parabolique et on peut considérer que la vitesse est nulle aux parois de la conduite (condition de non-glissement). Pour un nombre de Reynolds supérieur à environ 4000 [25],[83], l'écoulement du fluide présente un caractère tourbillonnaire. La taille, la position et la localisation des tourbillons varient constamment. Si l'écoulement est pleinement développé, on parle de régime turbulent. Le profil des vitesses est alors généralement plat : vitesse élevée au centre de la conduite, mais plus faible le long parois.
Pour un profil de vitesse turbulent, la figure 3.5 présente une vitesse moyenne qui n'est pas affectée par le caractère tourbillonnaire de l'écoulement [5]. En réalité, elle est sujette à fluctuations dans toutes les directions, ce qui peut porter préjudice au fonctionnement des débitmètres électromagnétiques qui doivent fournir des mesures précises, malgré ces fluctuations. La vitesse d'un écoulement turbulent peut être alors approximée par la relation [59],[5] ci-dessous.

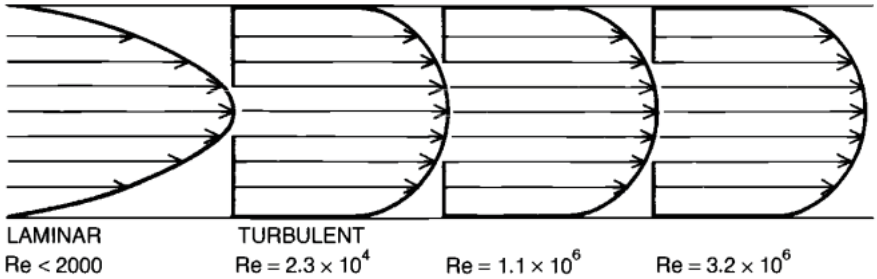


FIGURE 3.5: Les différents régimes d'écoulement [5]

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{3.6.2}$$

Où V_0 est la vitesse (m/s) au centre de la conduite, R (m) le rayon de la conduite et r (m) la distance par rapport à l'axe de la conduite. Le paramètre n est lié au nombre de Reynolds et est défini par [62].

$$n = 1,66 logRe \tag{3.6.3}$$

Afin de s'affranchir de ces perturbations, des experts chargés par l'ISO ont étudié les conditions d'essai des débitmètres électromagnétiques. Ils ont admis qu'une longueur droite en amont du débitmètre égale à cinq fois le diamètre était nécessaire pour éviter des erreurs importantes de mesurage [79]. En aval, la longueur est égale à trois fois le diamètre. En général, on suppose que, dans un débitmètre électromagnétique circulaire, le fluide s'écoule avec un profil axisymétrique. C'est le cas si la longueur de la conduite respecte les conditions citées précédemment. Pour conclure, chaque débitmètre réagit différemment au même type de perturbation ; il est donc impossible d'avoir une équation générale. C'est pourquoi l'analyse de la fonction de poids est indispensable pour en connaître les effets sur le signal mesuré.

3.7 Le débitmètre idéal

Un débitmètre électromagnétique est idéal, si le signal mesuré par les électrodes est proportionnel au débit, et ce indépendamment du profil des vitesses du fluide. La condition la plus générale [9] est de supposer que le fluide est incompressible et que $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{W} = \boldsymbol{0}$. Si le rotationnel de la fonction de poids est nul, il peut être exprimé en fonction d'un potentiel : $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\nabla} w$. Le signal s'écrit :

$$U_{ee} = \iiint_V \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla} w dV \tag{3.7.1}$$

L'identité vectorielle suivante permet d'écrire que :

$$\nabla.\left(w\boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{v}.\nabla w + w\nabla.\boldsymbol{v} \tag{3.7.2}$$

Le fluide étant incompressible : masse volumique constante lors de l'écoulement. L'équation de continuité s'écrit alors :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{0} + \nabla.\left(\rho\boldsymbol{v}\right) = 0 \tag{3.7.3}$$

donc $\nabla.\boldsymbol{v} = 0$. Les débits entrants et sortants sont les mêmes, d'où :

$$U_{ee} = \frac{1}{I}\iiint_V \nabla.\left(w.\boldsymbol{v} =\right) dV = \frac{1}{I}\oiint_S \left(w.\boldsymbol{v}\right).d\boldsymbol{S} \tag{3.7.4}$$

La fonction de poids peut alors être exprimée pour différents types d'écoulement [9] afin d'obtenir les conditions pour lesquelles un débitmètre est idéal.

Type d'écoulement	Hypothèse sur v	Condition sur $\boldsymbol{W}$	Débitmètre idéal
Non-spécifié	$div\boldsymbol{v} = 0$	$\boldsymbol{W}$	$\nabla \times \boldsymbol{W} = 0$
Mal-développé	$v = v_z(r,\theta,z)$	$W_z(r,\theta,z)$	$W_z(r,\theta,z) = f(z)$
Rectilinéaire	$v = v_z(r,\theta,z)$	$W_z(r,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_z(r,\theta,z)dz$	$W_z(r,\theta) = constante$
Rectilinéaire axisymétrique	$v = v_z(r)$	$W_z(r) = \int_{-\pi}^{+\pi} W_z(r,\theta)dz$	$W_z(r) = constante$

Table 3.3: Expression de W en fonction du type d'écoulement

3.8 Conclusion

Il est ainsi possible de concevoir des débitmètres électromagnétiques dont la sensibilité est indépendante du profil des vitesses du fluide. Pour cela, la fonction $\boldsymbol{W} = \nabla w$ doit être constante. Mathématiquement parlant, cela revient à dire que ∇F et ∇G sont constants : induction magnétique $\boldsymbol{B}$ et densité de courant $\boldsymbol{j}$ perpendiculaires entre eux. C'est le cas d'un débitmètre ayant une section rectangulaire [9]. Cependant, pour les débitmètres électromagnétiques industriels, il est difficile de réunir ces conditions. D'une part, il

est difficile d'obtenir une induction magnétique uniforme, à moins d'utiliser un aimant permanent, ce qui en pratique est impossible. D'autre part, il a été montré par Bevir [9] que les débitmètres ayant des électrodes assimilées à des points ne peuvent pas être idéaux, car il n'existe aucune situation où l'induction magnétique permettrait de satisfaire la condition $\nabla \wedge \boldsymbol{W} = 0$. Maintenant que la théorie sur le fonctionnement des débitmètres électromagnétique est connue, le chapitre suivant sera consacré à la caractérisation des propriétés magnétiques des matériaux.

Chapitre 4

Les matériaux magnétiques

L'objectif de ce chapitre est de présenter dans un premier temps les notions importantes à connaître sur le magnétisme et les effets que ce phénomène peut avoir sur les propriétés de certains matériaux. Cela permettra par la suite de mieux appréhender la partie modélisation du débitmètre électromagnétique. Dans un second temps, ce chapitre se concentrera sur la mesure des propriétés magnétiques des matériaux utilisés pour la conception d'un débitmètre électromagnétique.

4.1 Les différents types de magnétisme

Lorsqu'un matériau est soumis à un champ magnétique, il devient magnétiquement polarisé : il s'aimante. Il est donc généralement caractérisé par sa perméabilité magnétique relative $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ avec μ la perméabilité du matériau et μ_0 la perméabilité dans le vide. Il existe deux types de matériaux magnétiques :

— les matériaux doux : paramagnétique, ferromagnétique, antiferromagnétique.
— les matériaux durs : aimant permanent (ferromagnétique dur, ferrimagnétique.

4.1.1 Le diamagnétisme

Le diamagnétisme est un phénomène intra-atomique qui concerne absolument tous les corps. Contrairement aux matériaux paramagnétiques, les diamagnétiques sont caractérisés par une susceptibilité faible et négative : perméabilité magnétique relative inférieure à 1 [33],[28]. Elle est cependant quasiment indépendante de la température. Quant à l'aimantation, qui est elle induite par un champ magnétique extérieur, elle est relativement faible et s'oppose à ce dernier. Le diamagnétisme est très faible, il est donc masqué

dans les corps paramagnétiques, ferromagnétiques, ferrimagnétiques, antiferromagnétiques.

4.1.2 Le paramagnétisme

Les matériaux paramagnétiques sont caractérisés par une susceptibilité faible et positive. Sous l'action d'un champ magnétique extérieur, une aimantation induite parallèle au champ apparaît. Cependant, celle-ci reste très faible en comparaison avec des matériaux ferromagnétiques. Cette aimantation diminhe lorsque la température augmente. Plus celle-ci est élevée, plus les variations de l'aimantation en fonction du champ magnétique deviennent linéaires : c'est la loi de Curie [33],[20] . Dans de nombreux cas, le magnétisme dans les matériaux paramagnétiques est dû au moment magnétique permanent porté par les atomes ou les molécules.

4.1.3 Le ferromagnétisme

Dans les matériaux ferromagnétiques doux, les spins atomiques sont fortement corrélés au sein de domaines que l'on appelle domaines magnétiques ou domaines de Weiss séparés par des parois de Bloch [28]. En l'absence de champ magnétique, chacun de ces domaines possèdent un moment magnétique dirigé dans une direction arbitraire. Lorsqu'un champ magnétique extérieur est appliqué, les moments magnétiques tendent à s'aligner avec celui-ci.

Les matériaux ferromagnétiques présentent une aimantation spontanée : asymptotique en dessous de leur température de Curie à champ magnétique interne nul. Cette aimantation spontanée est cependant généralement nulle en moyenne sur l'ensemble des domaines de Weiss dans les matériaux magnétiques doux. La susceptibilité est positive et très grande. Au-delà de la température de Curie, l'aimantation spontanée disparaît [33],[28],[27]. D'une manière générale, un matériau ferromagnétique acquiert une forte aimantation sous l'action d'un champ magnétique extérieur.

Cycle d'hystérésis

Lorsqu'un matériau ferromagnétique non aimanté est soumis à un champ magnétique, une aimantation induite apparaît comme illustré en figure 4.1.

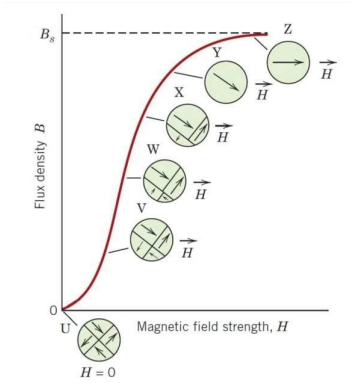


FIGURE 4.1: Courbe de première aimantation [45]

Si l'intensité du champ magnétique H augmente, l'induction magnétique B augmente aussi, jusqu'à atteindre la saturation et finalement devenir indépendante de H [23],[28]. D'après la figure 4.2, l'induction magnétique B n'est pas proportionnelle au champ magnétique H appliqué. A saturation (le point S sur la figure 4.2), si le champ H diminue et l'aimantation ne suit pas le chemin original (courbe bleue). C'est ce que l'on appelle un effet d'hystérésis. En effet, le fort couplage des spins dans les domaines de Weiss s'oppose fortement au déplacement des parois de Bloch (irréversibilité) et à la dislocation progressive des domaines de Weiss, de sorte que l'induction magnétique B diminue plus lentement que le champ magnétique H [49],[28]. De ce fait, lorsque H est nul, il existe encore une induction magnétique résiduelle B : c'est un champ rémanent. Cela signifie que le matériau reste aimanté en l'absence de champ magnétique extérieur. Heureusement, cette rémanence peut être supprimée en appliquant un champ magnétique dont l'intensité est égale à -Hc (direction opposée du champ original). Hc est appelé champ coercitif et représente le champ magnétique à appliquer pour que le matériau soit désaimanté. Une conséquence principale de cet effet d'hystérésis est une perméabilité magnétique non constante. En effet, si un champ magnétique a déjà été appliqué sur un matériau auparavant, la perméabilité magnétique relative ne sera pas la même avec ou sans champ, puisqu'il y a un champ rémanent et que la perméabilité magnétique relative μ_r dépend du champ H [28],[**?**].

Pertes par hystérésis

Ces pertes dissipatives sont liées au cycle d'hystérésis du matériau. Les pertes par cycle $P_{h/f}(J)$ à basse fréquence sont à peu près proportionnelles à la fréquence et sont liées à la structure du matériau ($\eta = 1,6$ pour les noyaux pleins et 2 pour les tôles minces [33]). B_M est l'induction magnétique

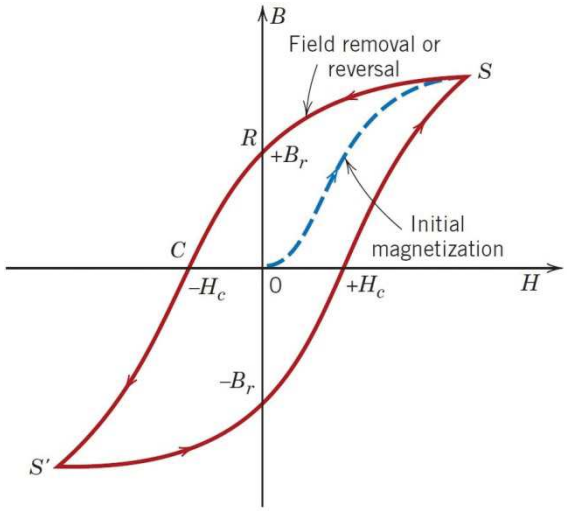


FIGURE 4.2: Cycle d'hystérésis [45]

maximale.

$$P_{h/f} = k_h.V.B_M^{\eta}.f \tag{4.1.1}$$

f la fréquence de la grandeur électrique à l'origine du champ d'induction B, V le volume du circuit magnétique et k_h une constante de proportionnalité.

Pertes par courant de Foucault

Les variations du champ magnétique dans le matériau génèrent des courants induits appelés courants de Foucault. Il y a alors un échauffement de la matière par effet Joule. La puissance thermique dissipée est dans ce cas proportionnelle au carré de la fréquence f et de l'induction magnétique B_M [33]

$$P_f = k_f.V.B_M^2.f^2 \tag{4.1.2}$$

4.2 Les matériaux durs et doux

4.2.1 Les matériaux durs

Les matériaux magnétiques durs sont difficiles à aimanter. Ils exigent un très fort champ magnétique pour atteindre la saturation. Un champ coercitif important doit être donc appliqué pour les désaimanter : il persiste une forte aimantation rémanente [28],[33],[20]. Les aimants permanents par exemple, sont des matériaux magnétiques durs et leurs cycles d'hystérésis sont très large. Ils sont également utilisés comme "source" de champ continu.

4.2.2 Les matériaux doux

Ils sont faciles à aimanter et à désaimanter : faible champ coercitif à appliquer, très grande perméabilité magnétique. Les matériaux doux ont donc des cycles d'hystérésis très étroits, alors que les matériaux durs en ont de très larges. Les matériaux doux ont pour fonction de renforcer ou de canaliser le flux d'induction magnétique. Ils doivent être de faible épaisseur pour limiter le développement des courants induits de Foucault (cas des matériaux conducteurs) [28], [33],[20]. Ils ont pour cela les caractéristiques suivantes :

- une aimantation élevée sur une large plage de températures : température de Curie élevée.
- une forte perméabilité.
- une dissipation d'énergie minimale.

L'énergie est dissipée sous forme de chaleur par des courants induits qui apparaissent dans les matériaux conducteurs. Trois paramètres doivent être pris en compte : la résistivité, l'épaisseur et la taille des domaines magnétiques [33]. La dissipation d'énergie peut être déterminée à partir de l'aire du cycle d'hystérésis, ce qui revient à calculer : $\oint H.dB$. Dans le cas de matériaux conducteurs, les pertes croissent en fonction de la fréquence. Les aciers S235 JR utilisés pour les "Return Path" et "Pole Piece", ainsi que l'acier S275 JR utilisé pour le "Casing", sont des matériaux ferromagnétiques doux.

Figure 4.3: Pole Piece

Figure 4.4: Return Path

4.2.3 Les tôles Fe-Si à grains orientés

Les tôles à grains orientés sont basées sur une texture en grains fortement orientés que l'on appelle : texture de Goss. Ces tôles sont élaborées par une série de laminages à chaud et de recuits qui induisent un cisaillement dans la structure et un accroissement de la taille des grains. On obtient ainsi une texture, dont l'axe de facile aimantation est dans le plan de la tôle et le plus près possible de la direction de laminage [57],[33]. Le champ coercitif de ces tôles est en général de l'ordre de 5 A/m. A titre d'exemple, sous un champ de 800 A/m, l'induction magnétique atteint déjà environ 1,75 T pour une tôle normale et 1,85 T pour une tôle à haute perméabilité[33].

FIGURE 4.5: Le cœur toroïdal est une tôle Fe-Si à grains orientés

Lorsque la fréquence de travail augmente, une tôle trop épaisse ne serait pas appropriée d'un point de vue magnétique, car quelques couches seulement contribueraient à l'induction magnétique : c'est l'effet de peau. L'épaisseur de Peau ne peut être calculée de manière rigoureuse, puisque dans ce cas, la tôle n'a pas de réponse linéaire, ni de perméabilité constante. Toutefois, on peut avoir un ordre de grandeur : en effet, avec une perméabilité magnétique relative de 20000, valeur typique d'une tôle à grains orientés, l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi\mu f}}$ vaut 0,35 mm à 50 Hz et est inférieure de 0,1 mm à 1 kHz [33]. Cela montre que, si l'on souhaite accroître la fréquence de fonctionnement, il est nécessaire d'obtenir des tôles de plus en plus minces. En dessous de 0,2 mm, on parle de tôles de faible épaisseur. Par ailleurs, la variation périodique de l'induction magnétique B entraîne l'apparition d'une tension électrique aux extrémités de la tôle perpendiculaire à la direction de l'induction due aux courants de Foucault. Les pertes associées à ce phénomène sont exprimées par la relation 4.2.1 dans le cas pour lequel il n'y a pas d'effet de peau : c'est-à-dire quand les courants de Foucault ne perturbent pas la diffusion du champ magnétique dans la tôle [57].

$$P_c = \frac{\pi^2}{6}.\sigma.d^2.(Bf)^2 \tag{4.2.1}$$

On s'aperçoit ainsi, que pour réduire ces pertes, il faut, soit réduire l'épaisseur de la tôle, soit augmenter sa résistivité. En effet, plus l'épaisseur est faible, plus l'induction magnétique B se diffusera dans la tôle, empêchant la création d'un gradient d'induction dans la tôle. Le même effet est obtenu en augmentant la résistivité électrique.

4.2.4 Choix d'un matériau doux

Le choix d'un matériau ne limite pas qu'à ses performances magnétiques. Il faut veiller à respecter toutes les contraintes d'assemblage et/ou de construction. De ce fait, il faut réaliser un compromis entre [24] :

- Propriétés magnétiques
- Corrosion
- Mécanique
- Usinabilité
- Coût

Le fer pur et les aciers doux sont généralement utilisés en condition quasi-statique sous forme de blindages magnétiques, de circuits et de noyaux pour relais et dispositifs électromécaniques [24]. Une des difficultés principales réside dans la suppression des impuretés qui abaissent la polarisation à saturation, mais qui dégradent surtout la perméabilité magnétique relative [33]. Une métallurgie soignée permet de maîtriser ces problèmes.
Le fer pur est caractérisé par une composition de fer supérieur à 99.99 %. Il a l'avantage de s'aimanter très facilement, possède une aimantation à saturation importante (environ 2T) et une bonne résistance à la corrosion et à l'oxydation [24]. Il possède, cependant, des propriétés mécaniques médiocres : limite élastique d'environ 540 MPa et une limite de rupture d'environ 50 MPa.

Les aciers forgés

Leurs propriétés mécaniques sont meilleures que celles du fer. En effet, les aciers sont des alliages principalement constitués de fer et de carbone [24].

- limite élastique élevée
- excellente résistance aux chocs
- possibilité d'une grande aimantation à saturation

D'autres éléments peuvent y être ajoutés tel que le manganèse ou le chrome pour résister aux contraintes chimiques.

Les aciers de construction

Les aciers de construction sont aussi des alliages à base de fer et de carbone principalement. Les matériaux comme le S235 JR utilisé pour le "Pole Piece" et le "Return Path" sont des aciers de construction. L'ajout de carbone en améliore les qualités mécaniques, mais en diminue les performances magnétiques.

Les aciers inoxydables

D'un point de vue magnétique, on s'intéresse ici aux aciers inoxydables ferritiques et martensitiques. Les ferritiques offrent un bon compromis entre les caractéristiques magnétiques, électriques, mécaniques et ont une bonne résistance à la corrosion [24]. Les martensitiques sont magnétiquement plus dur que les ferritiques (donc moins bons sur le plan magnétique), mais ils ont une résistance mécanique plus élevée et une bonne résistance à la corrosion. En effet, ils ont des champs coercitifs compris entre 1000 et 2500 A/m et font partie des matériaux magnétiques mi-durs [24]. Leur perméabilité magnétique relative est inférieure à 500. La polarisation magnétique à saturation est de l'ordre de 1,5 T [24].

Famille	C	Cr	Ni	Autres
Ferritiques	0,020% à 0.080%	10,5% à 29%		Mo, Ti, Nb, S
Martensitiques	$> 0.1\%$	11% à 17%		Mo, V, Ni, S

Table 4.1: Composition chimique des aciers inoxydables ferromagnétiques [24]

L'influence de la composition chimique des aciers inoxydables sur leurs propriétés physiques est résumé dans le tableau 4.2.

Propriétés physiques	C	Cr	Si	Mo	Mn	Al	N	S
Magnétisme	–	-	/	-	-	/	-	?
Résistivité	/	+	++	/	/	++	/	-
Résistance à la corrosion	-	++	/	++	-	/	/	—
Usinabilité	-	/	/	/	/	/	-	++

Table 4.2: Influence de la composition chimique : + : effet positif sur la propriété et - : effet négatif sur la propriété [24]

Ce tableau permet de montrer qu'il est possible d'améliorer la résistivité électrique des aciers inoxydables en ajoutant du silicium et de l'aluminium ; ce qui peut être intéressant pour limiter les courants de Foucault. L'ajout de

carbone dans un alliage induit une diminution des performances magnétiques et une amélioration de la tenue mécanique des aciers inoxydables.

4.3 La perméabilité magnétique relative

L'objectif de cette partie est de connaître les caractéristiques magnétiques des différentes pièces composant le circuit magnétique du débitmètre et qui influencent la distribution de l'induction magnétique dans le tube de mesurage. Siemens dispose d'un appareil permettant de mesurer la perméabilité magnétique relative d'un matériau faiblement magnétique, i.e $1,001 \leq \mu_r \leq 1,999$. L'appareil contient un aimant permanent qui est incorporé dans la pointe de la sonde. Cet aimant va magnétiser l'échantillon que l'on mesure. Cette aimantation provoque une distorsion des lignes de champ de l'aimant mesurable par des capteurs de champ magnétique. Pour de faibles perméabilités magnétiques relatives, la distorsion est proportionnelle à la perméabilité magnétique relative. Cet appareil est donc utilisé afin de vérifier que les pièces supposées amagnétiques du débitmètre le sont effectivement.

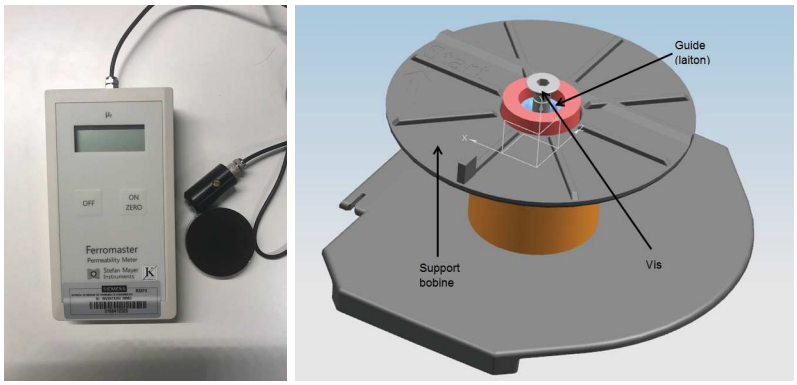


FIGURE 4.6: Mesure de la perméabilité magnétique relative des matériaux

Les mesures ont été effectuées en différents points de chaque pièce afin d'avoir un résultat fiable. Les résultats sont résumés dans le tableau 4.3 ci-dessous.

Pièces mesurées	μ_r	Ecart-type
Guide	1,0023	0.0005
Vis	1,0055	0.002
Revêtement intérieur	0.999	0.002
Support bobine	1,001	0.0005

TABLE 4.3: Perméabilité magnétique relative de matériaux faiblement magnétiques

Les résultats montrent que ces matériaux sont bien amagnétiques et n'ont aucune influence sur l'induction magnétique B. Il ne sera alors pas nécessaire d'en tenir compte dans la modélisatio. L'étape suivante est de mesurer la perméabilité magnétique relative μ_r des éléments suivants :

— Return Path
— Pole Piece
— Outer Case
— Toroidal Core
— Tube Ring

Les débitmètres électromagnétiques de Siemens fonctionnent en champ faible (courant d'excitation de 125 mA). Or le champ magnétique terrestre aux altitudes moyenns et élevée est de l'ordre de $50\mu T$. Des précautions sont donc à prendre pour s'assurer qu'il n'interfère pas avec les débitmètres. Historiquement, le domaine des champs faibles fut découvert en 1887 par Rayleigh et est connue sous le nom de domaine de Rayleigh [73]. Dans ce dernier, l'aimantation ne change qu'avec le mouvement des domaines magnétiques [28]. Rayleigh mesura donc le comportement du fer et d'un fil d'acier en interaction avec un champ faible. Il découvrit que pour des champs magnétiques allant de 3 mA/m à 3 A/m, la perméabilité magnétique relative μ était constante et indépendante du champ H L'induction magnétique B varie alors linéairement et réversiblement avec le champ magnétique H. Pour des champs magnétiques plus importants (6,4-96 A/m), un cycle d'hystérésis apparait et la perméabilité μ n'est plus constante, mais augmente linéairement avec H [28] :

$$\mu = \mu_i + \eta H \, (SI) \tag{4.3.1}$$

où μ_i est la perméabilité magnétique initiale et η la constante de Rayleigh. Cette relation fut appelée loi de Rayleigh. Le terme ηH devient négligeable par rapport à μ_i lorsque le champ magnétique H est faible. Cela explique pourquoi Rayleigh découvrit une perméabilité constante. L'équation ci-dessus permet de trouver la perméabilité initiale : les valeurs expérimentales de μ sont tracées en fonction du champ magnétique H et extrapolées au champ zéro.
En multipliant l'équation 4.3.1 par H, on obtient :

$$\mu H = B = \mu_i H + \eta H^2 (SI) \tag{4.3.2}$$

Rayleigh montra également que le cycle d'hystérésis pouvait être décrit par deux paraboles [28] :

$$B = (\mu_i + \eta H_m) H \pm (\frac{\eta}{2})(H_m^2 - H^2) \tag{4.3.3}$$

où H_m est le champ magnétique maximal appliqué et où les signes plus et moins s'appliquent aux portions descendantes et montantes du cycle respectivement. La figure ci-dessous montre un exemple de cycle que l'on obtient en champ faible. A noter que les cycles d'hystérésis ont toujours une forme elliptique dans le domaine de Rayleigh.

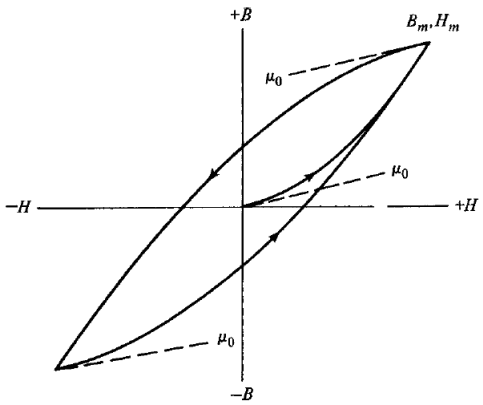


FIGURE 4.7: Cycle d'hystérésis d'un matériau magnétique dans le domaine de Rayleigh

4.4 Méthode utilisée pour caractériser les matériaux en champ faible

La caractérisation de matériaux doux massifs se fait généralement en les plaçant dans une culasse de fermeture de flux. Les matériaux magnétiques massifs doivent être caractérisés en régime quasi-statique, afin d'éviter les courants de Foucault qui écrantent le champ magnétique présent dans l'échantillon aussi bien en haute qu'en basse fréquence [28].

4.4.1 Le perméamètre

Lorsqu'on souhaite mesurer les propriétés magnétiques de tôles plus ou moins épaisses, il faut utiliser un perméamètre. Ce dispositif est en général réalisé avec deux culasses en C et constitue un circuit magnétique fermé. Cette structure en double C est représentée en figure 4.8 [28] :
L'échantillon a la forme d'une tôle de longueur fixe et d'épaisseur variable. Elle est coincée entre les deux culasses en C. Celles-ci sont constituées de tôles en Fe-Si empilées, à grains orientés, ayant une grande perméabilité magnétique relative. Elle sont laminées afin de réduire les courants de Foucault [28]. La section doit être grande par rapport à celle de l'échantillon afin que la réluctance soit très faible. En effet, plus la réluctance est faible, plus le flux

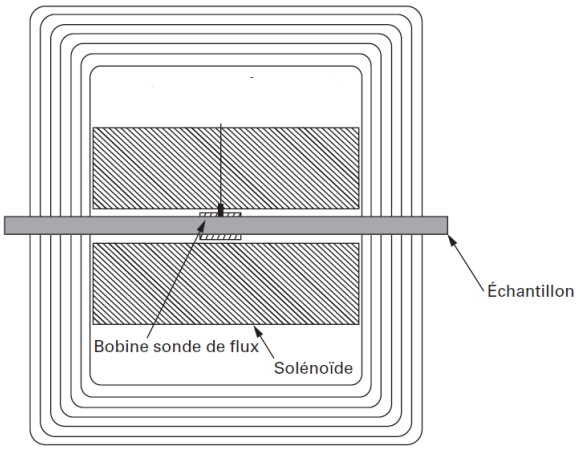


FIGURE 4.8: Schéma de principe d'un perméamètre [37]

FIGURE 4.9: Perméamètre utilisé à l'ENS Cachan

magnétique traversant l'échantillon sera important. Le champ magnétique est appliqué à une fréquence de 1,5625 Hz par un solénoïde sur un gabarit autour de la bobine sonde de flux (un fluxmètre), qui est centré sur l'échantillon. C'est ce type de perméamètre qui est utilisé au laboratoire SATIE de l'ENS Cachan [65](figure 4.9) et sur lequel les mesures magnétiques des échantillons ont été effectuées. Les échantillons ont une longueur de 300 mm sur 30 mm de large avec une épaisseur variable. Si un échantillon de section droite d'aire A est entouré par une bobine de produit aire-tours N_2A_2, alors le flux détecté est [37]

$$\Phi = N_2AJ + N_2A_2\mu_0H \tag{4.4.1}$$

avec $\boldsymbol{J} = \mu_0\boldsymbol{M}$ la polarisation magnétique de l'échantillon et $M = \chi_m\boldsymbol{H}$ son aimantation.
D'après la loi de Lenz-Faraday, la variation du flux magnétique dans un circuit fermé induit une force électromotrice opposée à cette variation qui lui a donnée naissance. De ce fait, il est possible de mesurer le signal du flux magnétique traversant l'échantillon, ainsi que celui du solénoïde à l'aide d'un oscilloscope, figure 4.10.
A partir de ces signaux, il est possible de déterminer les cycles d'hystérésis des échantillons notamment. Les appareils de mesures (oscilloscope et GBF) sont reliés à un programme Matlab permettant de traiter les signaux reçus. Les mesures des propriétés magnétiques sont faites avec des échantillons de formes spécifiques définies précédemment. Le solénoïde comprend un nombre de tours fixe, alors que pour la bobine de sonde de flux le nombre de tours est variable pour quelques échantillons pour des raisons pratiques.

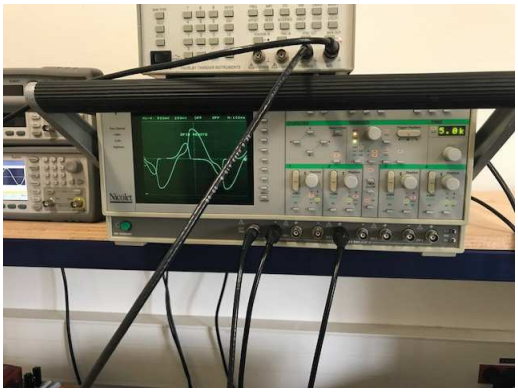


FIGURE 4.10: Détection du signal généré par le flux magnétique traversant l'échantillon

Les paramètres sont détaillés dans le tableau 4.4.

Paramètres	
Fréquence	1.5625 Hz
Taille de l'échantillon	L= 300 mm et l=30 mm
Nombre de tours du solénoïde	449
Nombre de tours de la bobine sonde de flux	489 ou 200

TABLE 4.4: Paramètres expérimentaux

4.4.2 Résultats

Cette partie est consacrée aux résultats obtenus ainsi qu'à leur analyse et interprétation. L'objectif est de déterminer la perméabilité magnétique relative. Ce paramètre est essentiel pour la modélisation numérique des débitmètres électromagnétiques. Les mesures ont été effectuées sur les matériaux suivants :

— Pole piece/Return Path
— Toroidal core
— Tube ring
— Outer case

D'autres matériaux non présentés dans ce chapitre n'ont pas pu être analysés, car ce sont des matériaux faiblement magnétiques. De ce fait, aucun signal n'a pu être détecté par l'oscilloscope. Les mesures ont été faites en faisant varier la valeur du champ magnétique H appliqué par le solénoïde, afin de déterminer l'évolution de la perméabilité magnétique relative. Pour

chaque valeur de champ magnétique H, le programme Matlab donne les paramètres : Hp(valeur max), Bp(valeur max), J, l'induction rémanente Hr, le champ coercitif Hc, la puissance volumique perdue. La perméabilité magnétique relative est calculée par la relation 4.4.2 :

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H_p} \tag{4.4.2}$$

Mesure de la perméabilité magnétique relative du Casing

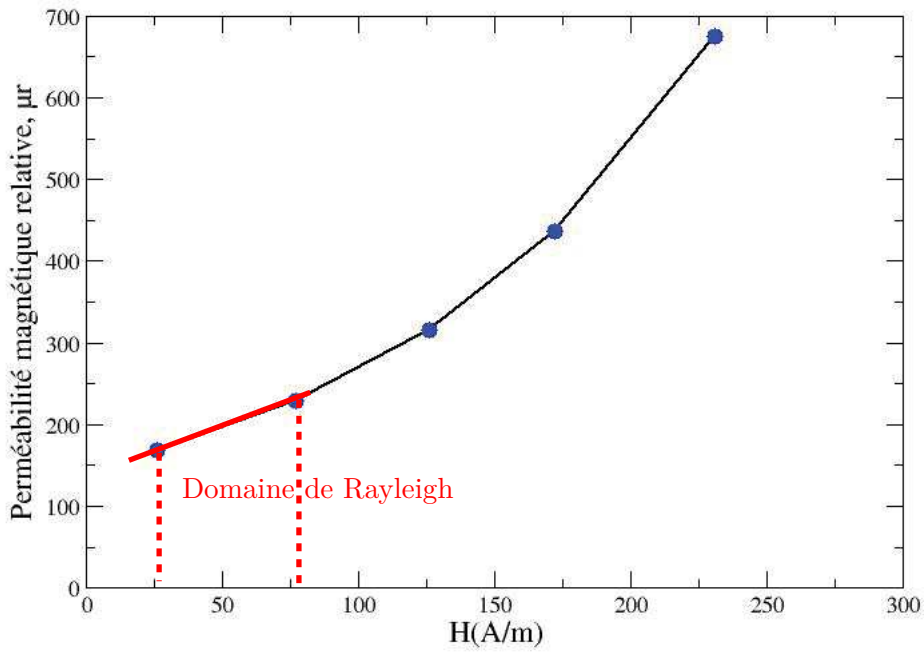


FIGURE 4.11: Perméabilité magnétique relative en fonction du champ magnétique H pour le "Casing". La ligne rouge correspond au domaine de Rayleigh

Mesure de la perméabilité magnétique relative du Cœur toroïdal

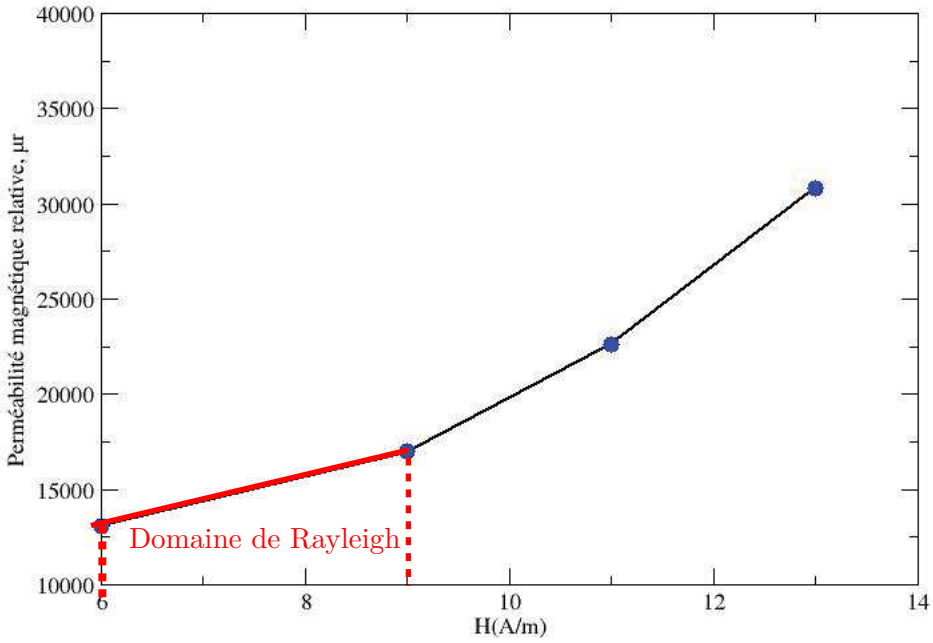


FIGURE 4.12: Perméabilité magnétique relative en fonction du champ magnétique H pour le "cœur toroïdal". La ligne rouge correspond au domaine de Rayleigh

Mesure de la perméabilité magnétique relative du Pole Piece/Return Path

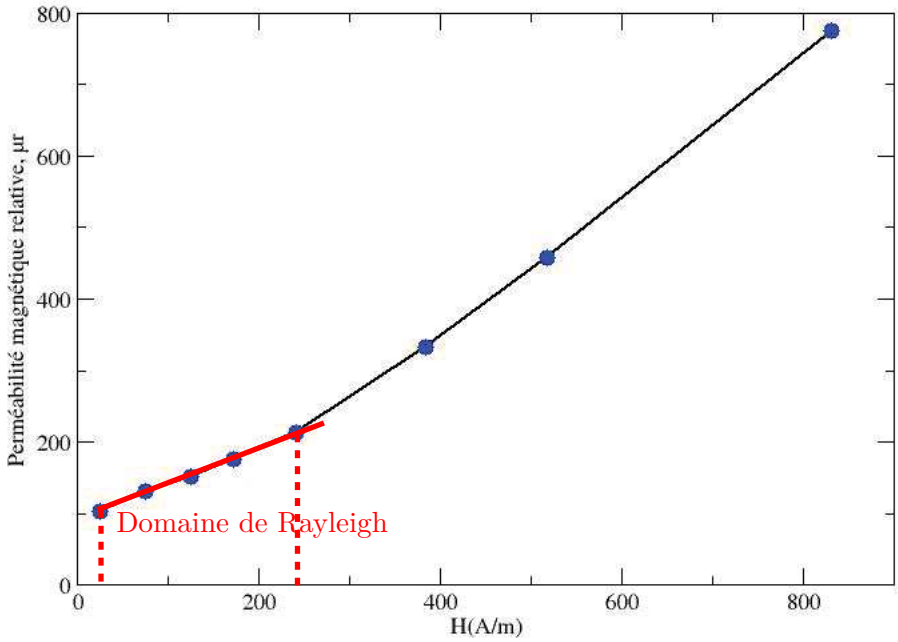


FIGURE 4.13: Perméabilité magnétique relative en fonction du champ magnétique H pour le "Pole Piece/Return Path". La ligne rouge correspond au domaine de Rayleigh

Mesure de la perméabilité magnétique relative du Tube ring

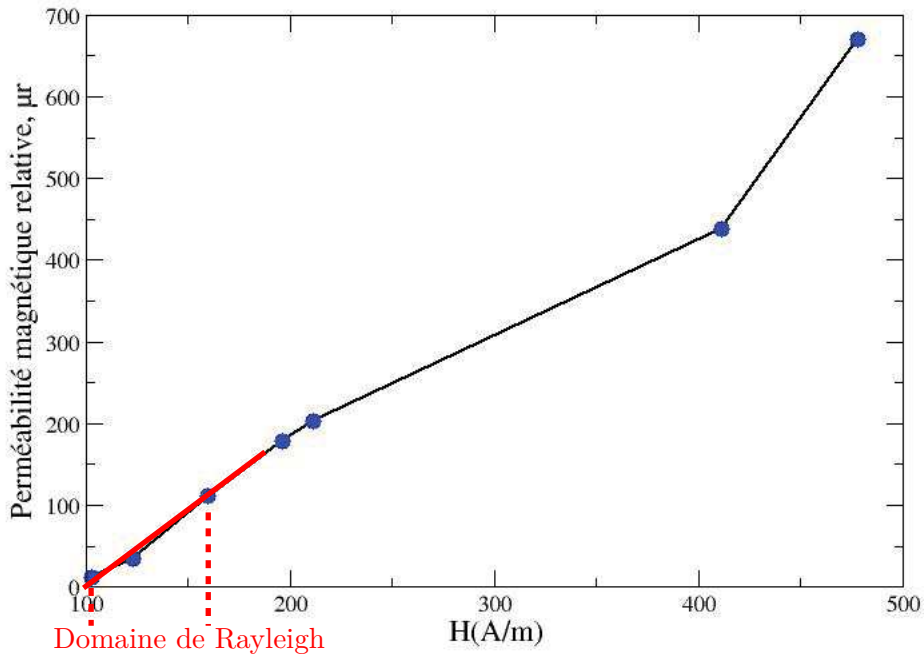


FIGURE 4.14: Perméabilité magnétique relative en fonction du champ magnétique H pour le "Tube Ring". La ligne rouge correspond au domaine de Rayleigh

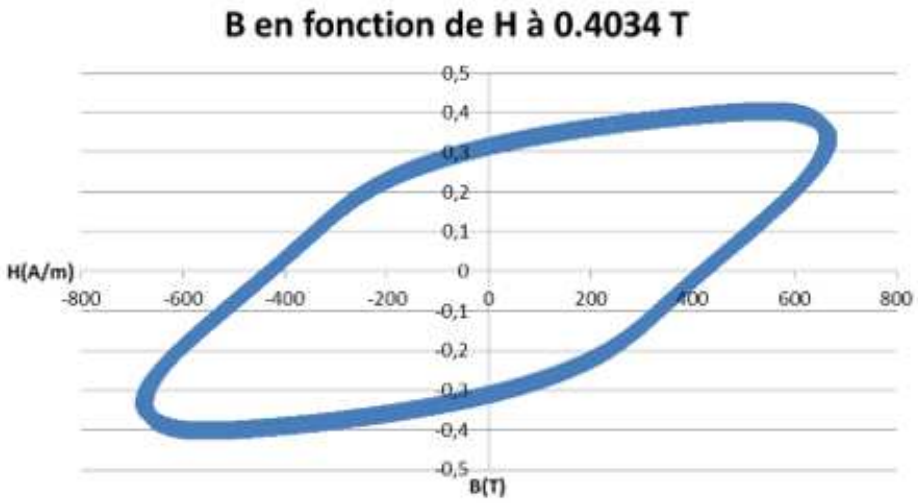


FIGURE 4.15: Cycle d'hystérésis du "Tube Ring"

4.4.3 Analyse des résultats

Les courbes $\mu_r = f(H)$ de chaque pièce font toutes apparaître le domaine de Rayleigh. Dans ce chapitre, on a vu que, lorsque la perméabilité $\mu = \mu_0\mu_r$ est constante, l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ varie de manière linéaire et réversible avec $\boldsymbol{H}$. On verra dans le chapitre V que la variable d'entrée pour les simulations est le courant I. Une autre variable d'entrée sera la perméabilité magnétique relative μ_r. En choisissant ce paramètre, cela supposera que l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ dépendra linéairement de $\boldsymbol{H}$. Cela signifiera qu'il faudra déterminer un μ_r pour chaque matériau en tenant compte du domaine de Rayleigh, pour être certain que l'on sera dans le domaine linéaire. Les valeurs minimales et maximales à respecter pour μ_r de chaque pièce sont listées dans le tableau 4.5

Pièces	μr_{min}	μr_{max}
Casing	169	230
Return Path/Pole Piece	103	213
Tube ring	103	211

TABLE 4.5: Domaine de validité de μ_r

Le choix de la perméabilité magnétique relative du cœur toroïdal mérite d'être discuté. En effet, la perméabilité magnétique relative le long de la direction de laminage est beaucoup plus grande que dans la direction transverse : environ 10^4. Or, dans le cas du débitmètre électromagnétique étudié dans cette thèse, c'est la direction transverse du cœur toroïdal qui est uti-

lisée. Le long de cette dernière, la taille des grains (texture de Goss) est beaucoup plus faible que le long de la direction de laminage. La taille des grains a une influence sur les propriétés magnétiques d'un matériau. En général, la perméabilité magnétique relative décroît avec la diminution de la taille des grains [77],[70].
Sachant que le but du cœur toroïdal est d'amplifier l'induction magnétique $\boldsymbol{H}$, on choisira une valeur relativement grande pour la perméabilité magnétique relative μ_r par rapport à celle des autres pièces. Une estimation raisonnable est d'avoir un $\mu_r \pm 700 - 750$.
Pour le "Tube Ring" on constate que, pour des champs magnétiques importants, la perméabilité magnétique relative augmente, puis diminue. Cela est dû à la présence des courants de Foucault dans l'échantillon. Cela est caractérisé par des "bosses" sur le cycle d'hystérésis de la figure 4.15. En effet, les courants de Foucault sont proportionnels au carré de l'épaisseur. Plus l'épaisseur de l'échantillon est importante, plus il y a de courants de Foucault.

4.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de mieux comprendre le magnétisme dans son ensemble et de déterminer les principaux paramètres dont il faut tenir compte pour une modélisation réaliste des débitmètres électromagnétiques. En l'occurrence, il s'agit de connaître avec précision la perméabilité magnétique relative μ_r des différentes pièces du circuit magnétique. Les mesures effectuées ont montré que, pour une région dite "domaine de Rayleigh", l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ est linéairement dépendante du champ magnétique $\boldsymbol{H}$. Il est, cependant, assez compliqué d'avoir une idée précise de μ_r pour chaque pièce. Il faudra donc, dans la partie modélisation, choisir une valeur correspondant au domaine de Rayleigh défini par des valeurs minimales et maximales de μ_r.

Chapitre 5

Modélisation du débitmètre électromagnétique

Ce chapitre a pour but de décrire les différentes étapes à suivre pour obtenir un modèle réaliste de débitmètre électromagnétique. La première partie concernera la méthode mathématique utilisée par le logiciel de simulation NX. La deuxième partie présentera le modèle créée pour simuler la distribution de l'induction magnétique dans le débitmètre électromagnétique. Enfin, la dernière partie présentera le dispositif expérimental mis en place pour mesurer le champ magnétique et comparer les résultats aux données issues de la simulation.

5.1 Méthode utilisée

La modélisation 3D du débitmètre électromagnétique est une étape importante de cette thèse. Elle offre une compréhension détaillée et précise de la performance des produits d'un point de vue physique. Elle apporte également un gain de temps et d'argent considérable, en évitant la production de prototypes. L'objectif est de disposer d'une modélisation réelle, fidèle et fiable du dispositif en vue d'une optimisation. En effet, les possibilités d'optimisation sont nombreuses :

— position des bobines
— géométrie et choix des matériaux
— taille et position des électrodes
— etc...

Le but est de connaître la distribution de l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ à l'intérieur du tube de mesurage. La détermination précise des lignes de champ dans le BigMag 5100 est complexe. En effet, la géométrie de ce dispositif dictée par les contraintes d'utilisation et d'élaboration est bien souvent à

l'origine de champs magnétiques induits, préjudiciables à la précision des mesures. C'est là que la modélisation 3D apporte sa valeur ajoutée, puisqu'elle permet de tenir compte de ces critères, ainsi que des paramètres physiques des matériaux pouvant influencer le champ magnétique. Les progrès récents dans le domaine de la modélisation 3D de structures complexes permettent une compréhension précise et fine des dispositifs étudiés. Cela donne des simulations très fidèles à la réalité, tout en gardant un degré de confiance élevé. C'est là qu'entre en jeu la simulation numérique (on parle également de calcul numérique) qui intervient en général lorsque la résolution analytique est impossible, trop idéalisée ou onéreuse en temps de calcul. Suivant le domaine d'étude et le type de problème à résoudre, diverses méthodes de résolution peuvent être utilisées. Les systèmes d'équations linéaires sont par exemple résolus en utilisant des méthodes standard telles que l'élimination de Gauss-Jordan et la décomposition LU. En physique, ce sont souvent des équations différentielles classiques ou des équations aux dérivées partielles. Pour les premières, on retrouve des méthodes de résolutions numériques telles que la méthode d'Euler ou de Runge-Kutta [34]. L'équation de Poisson établie dans la section 3.3 du chapitre 3 est une équation aux dérivées partielles. Elle est résolue en discrétisant l'équation dans un espace de dimension finie. On retrouve dans ce cas la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies ou la méthode des volumes finis. On s'intéressera dans notre cas à la méthode des éléments finis, qui permet de calculer une solution approchée de l'équation aux dérivées partielles, et qui tient compte des conditions aux limites du problème. Couramment, on parle de conditions de Dirichlet (valeurs de la fonction aux limites) et de Neumann (valeurs de la dérivée aux limites).

5.1.1 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis [7],[63],[85],[50] est une approche numérique utilisée pour résoudre un problème physique gouverné par son équation différentielle et ses conditions aux limites. Le principe est de décomposer la région géométrique continue du problème en petites régions appelées éléments finis : c'est une discrétisation, figure 5.1. On parle en général de maillage de la région. La solution de l'équation différentielle est approchée par des fonctions d'interpolation/de base (généralement des polynômes). Les fonctions sont ensuite calculées aux nœuds de chaque élément. La précision de la solution dépendra alors, parmi d'autres facteurs, de l'ordre de ces polynômes [68]. Le choix de l'ordre dépend de la forme de l'élément fini. Ainsi, la méthode des éléments finis va permettre de remplacer la fonction (solution de l'équation aux dérivées partielles) recherchée par son interpolation entre les nœuds. L'équation aux éléments finis est ensuite obtenue grâce à deux méthodes couramment utilisées que sont la méthode variationnelle et la méthode du résidu pondéré [68],[50]. Il y a une équation par éléments

fini ; elle peut-être décrite par une matrice. Cependant, il est impossible de résoudre indépendamment chaque système matriciel, car les conditions aux limites sont définies aux frontières du problème physique [68]. Il faut donc effectuer un assemblage afin d'obtenir une matrice globale.

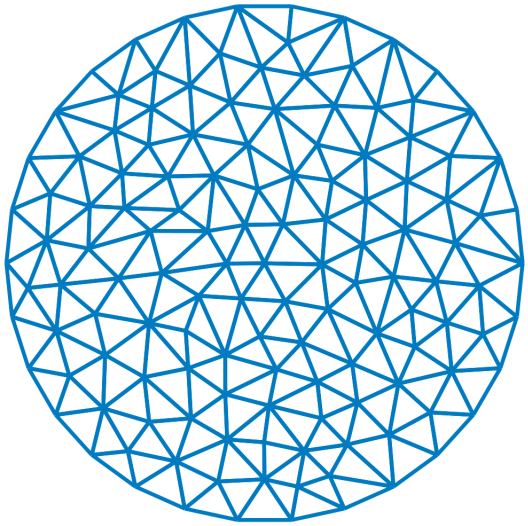


FIGURE 5.1: Décomposition en éléments simples d'une surface circulaire (source : Wikipédia)

En résumé la méthode des éléments finis est construite via les étapes suivantes :

— discrétisation ou décomposition de la région en éléments finis
— choix des fonctions d'interpolation
— formulation du système d'équations
— résolution du système d'équations

Chaque étape mentionnée ci-dessus est décrite dans les paragraphes suivants.

5.1.2 La discrétisation ou maillage

La discrétisation de la région-notée ici Ω-du problème physique est la première et l'une des étapes les plus importantes de la méthode. En effet, la façon dont la région est discrétisée influera sur le temps de calcul et la précision des résultats numériques notamment [50]. La région est ainsi subdivisée en un nombre fixe (ou évolutif dans le cas des maillages adaptatifs) de régions que l'on va noter $\Omega^e = (e = 1, 2, 3, ..., N)$, où N désigne le nombre total d'éléments simples. La forme de ces derniers dépend de la géométrie de la région [50]. Dans le cas d'une géométrie 1D, les éléments sont généralement

des segments (ou des lignes curvilignes) : figure 5.2(a). En 2D, on retrouve soit des triangles soit des rectangles, figure 5.2(b). Ils sont adéquats respectivement pour des régions irrégulières (ou circulaires)et rectangulaires, comme représenté en figure 5.1. Enfin en 3D, ce sont des tétraèdres, des prismes qui sont généralement utilisés, figure 5.2(c).

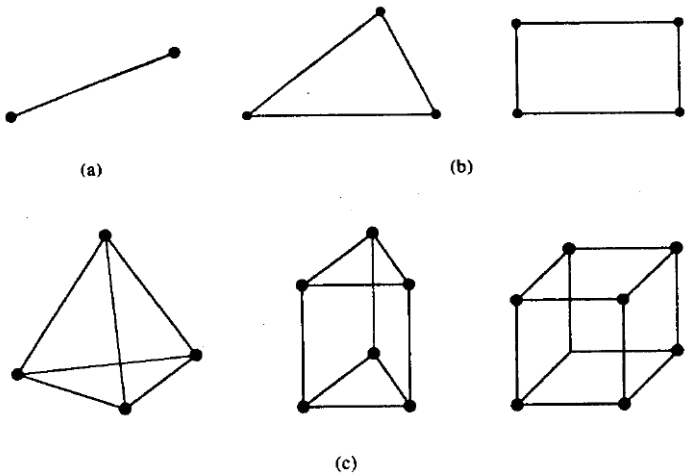


FIGURE 5.2: Géométrie d'éléments simples [50]

Comme mentionné dans la section précédente, la solution de l'équation aux dérivées partielles est approchée par des fonctions d'interpolation. Elle est associée aux nœuds de chaque élément. Pour un élément linéaire (un segment), il y a deux nœuds à chaque extrémité de l'élément. Le principe est le même pour les autres géométries : le triangles aura trois nœuds ; le tétraèdre en aura quatre. Un nœud contient ses propres coordonnées caractérisées par un numéro local et global. Le numéro local indique la position du nœud dans un élément donné, alors que le numéro global indique sa position dans la totalité de la région Ω discrétisée[68].

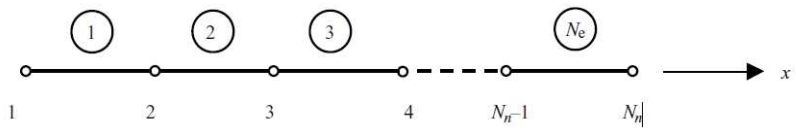


FIGURE 5.3: Numéro local et global d'un nœud pour un élément fini linéaire [68]

Les numéros globaux de la figure sont donnés par les chiffres entourés par des cercles. Les autres chiffres correspondent aux numéros des nœuds de l'élément considéré. La connaissance précise de ces coordonnées est indispen-

sable. En effet, il est nécessaire de les connaître pour effectuer l'assemblage des matrices de chaque élément pour la résolution de la matrice globale et l'application des conditions aux limites.

5.1.3 Choix des fonctions d'interpolations

L'étape suivante est le choix des fonctions d'interpolation permettant d'approximer la solution inconnue notée Φ dans chaque élément. On rappelle que ce sont des polynômes d'ordre 1, 2 ou d'ordre plus élevé qui sont utilisés. Les polynômes dont l'ordre est élevé sont plus précis, car ils donnent une meilleure approximation de la fonction inconnue, mais sont plus délicats à formuler [50]. La solution inconnue dans un élément e est déterminée par la relation suivante [50] :

$$\Phi^e = \sum_{j=1}^{n} N_j^e \Phi_j^e = \{N^e\}^T \{\Phi^e\} = \{\Phi^e\}^T \{N^e\} \tag{5.1.1}$$

où les {} représentent des vecteurs colonnes, T désigne la transposée du vecteur en question et :

— n le nombre de nœuds dans l'élément e.
— Φ_j^e est la valeur de la solution Φ au noeud j de l'élément e.
— N_j^e est la fonction d'interpolation du nœud j.

Rappelons que, si les fonctions d'interpolation N_j^e sont linéaires, alors l'élément e correspondant l'est aussi. Ces fonctions étant associées aux nœuds, elles sont nécessairement nulles dans et en dehors de l'élément e.

5.1.4 Formulation du système d'équations

La troisième étape consiste à établir pour chaque élément un système d'équations qui est, en général, sous forme matricielle. Deux méthodes sont couramment utilisées pour formuler ces équations aux éléments finis : la méthode variationnelle et la méthode des résidus pondérés. [68],[50].
La première est, comme son nom l'indique, une approche variationnelle qui consiste à construire une "fonctionnelle". C'est une fonction exprimée sous la forme d'une intégrale possédant des arguments qui sont eux-mêmes des fonctions. La solution du problème est obtenue en la minimisant ou en la maximisant. Le minimum correspond à l'équation différentielle sous des conditions aux limites données. En d'autres termes, il faut annuler la/les dérivée(s) de la fonctionnelle. Cette méthode est également appelée méthode de Ritz [50].
La seconde, connue sous le nom de méthode de Galerkine consiste à chercher la solution en pondérant le résidu de l'équation différentielle. Le résidu est formé en faisant passer tous les termes de l'équation différentielle vers un seul côté [68]. Il est ensuite multiplié par une fonction de pondération

et intégré sur la région de l'élément e. Cependant, comme l'équation différentielle est d'ordre 2, ce qui est généralement le cas en physique, il est nécessaire que les fonctions d'interpolation soient dérivables deux fois [68]. En effet, la fonction de pondération ne sera pas du même ordre de dérivation que la fonction d'interpolation. Pour cela, on abaisse l'ordre de dérivation de l'équation différentielle en faisant une intégration par partie : c'est ce qu'on appelle la formulation faible. Les fonctions de pondération doivent être du même type (linéaires par exemple) que les fonctions d'interpolation.

Considérons un problème physique gouverné par l'équation suivante [50] :

$$L\Phi = f \tag{5.1.2}$$

Ici L est un opérateur différentiel, f une fonction et Φ est la fonction inconnue à déterminer. C'est ce type d'équation que l'on rencontre souvent en physique : équation de Poisson, comme celle qui régit le fonctionnement des débitmètres électromagnétiques.

$$\nabla^2 U = div\,(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \tag{5.1.3}$$

Il est possible de résoudre analytiquement ce type d'équation, mais ce n'est pas toujours le cas. C'est pourquoi on a recours à la méthode des éléments finis, car elle permet d'utiliser des méthodes approximatives comme celles de Ritz et de Galerkine. L'approche variationnelle est complexe à mettre en œuvre puisqu'il faut chercher une formulation (la fonctionnelle) alternative et équivalente à l'équation différentielle d'origine. C'est pourquoi on va s'intéresser uniquement à la méthode des résidus pondérés avec la méthode de Galerkine implémentée sur le logiciel de simulation utilisé dans le cadre de cette thèse et dont on reparlera par la suite.

La méthode de Galerkine

Cette formulation appartient à la famille des méthodes des résidus pondérés qui consiste à chercher une solution en pondérant le résidu de l'équation différentielle. Si on suppose que Φ est une solution de l'équation 5.1.2 :

$$r = L\Phi - f \neq 0 \tag{5.1.4}$$

La meilleure approximation pour Φ est celle qui réduit le résidu R à la plus petite des valeurs de l'ensemble des points de la région Ω étudiée. On en déduit que pour un élément e [50] :

$$R_i^e = \int_\Omega \omega_i^e (L\Phi^e - f) d\Omega = 0 \tag{5.1.5}$$

R_i^e représente l'intégrale du résidu pondéré de l'élément e et les ω_i sont des fonctions de pondération. Supposons maintenant que la solution Φ^e soit donnée par l'équation 5.1.1. L'équation 5.1.5 s'écrit :

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} \omega_i^e L \{N^e\}^T d\Omega \{\Phi^e\} - \int_{\Omega^e} f \omega_i^e d\Omega \tag{5.1.6}$$

Avec $i = 1, 2, 3...n =$ où n représente le nombre de nœuds dans l'élément e. Cette équation peut s'écrire sous forme matricielle [50] :

$$\{R^e\} = [K^e] \{\Phi^e\} - \{b^e\} \tag{5.1.7}$$

Ici $R^e = [R_1^e, R_1^e, ..., R_n^e]^T$ et où $[K^e]$ et $\{b^e\}$ sont respectivement une matrice $n \times m$ et un vecteur colonne $n \times 1$. Ils sont donnés par les expressions suivantes [50].

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \omega_i^e L N_j^e d\Omega \tag{5.1.8}$$

$$b_i^e = \int_{\Omega^e} f N_i^e d\Omega \tag{5.1.9}$$

La fonction de pondération ω associée à un nœud i englobe tous les éléments e connectés à celui-ci. C'est pourquoi il y a un indice i et un indice j pour la fonction de pondération et la fonction d'interpolation respectivement. D'où l'importance de connaître le numéro local et global d'un nœud. Le résidu pondéré R_i associé au nœud i est une somme sur l'ensemble des éléments directement connectés au nœud i [50].Il suffit ensuite de faire une somme des résidus R_i sur l'ensemble des éléments (M éléments) de la région Ω. L'équation5.1.7 s'écrit alors [50] :

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{M} \{R^e\} = \sum_{e=1}^{M} ([K^e] \{\Phi^e\} - \{b^e\}) \tag{5.1.10}$$

Le système d'équations aux élément finis s'obtient finalement en annulant l'équation 5.1.10.

$$\sum_{e=1}^{M} ([K^e] \{\Phi^e\} - \{b^e\}) = \{0\} \tag{5.1.11}$$

Sous sa forme matricielle, l'équation 5.1.12 s'écrit :

$$[K] \{\Phi\} = \{b\} \tag{5.1.12}$$

5.1.5 Résolution du système d'équations

Avant de passer à la résolution du système matriciel, il faut imposer des conditions aux limites sur la fonction inconnue Φ. Il y a deux types de conditions aux limites : Dirichlet et Neumann. La première impose une valeur explicite à la fonction inconnue. En d'autres termes, la condition de Dirichlet permet de fournir une valeur à un nœud spécifique de la région discrétisée. La condition de Neumann est, elle, satisfaite automatiquement et implicitement lors de la résolution du système, puisqu'il s'agit d'une condition qui agit sur la dérivée de la fonction inconnue [50]. Le système d'équations de la méthode aux éléments finis peut donc aussi s'écrire sous la forme [50] :

$$[A]\{\Phi\} = \lambda\{B\}\{\Phi\} \tag{5.1.13}$$

Toujours d'après [50], l'équation 5.1.12 est déterministe car elle aboutira au même résultat quels que soient les arguments d'entrée du système. On retrouve cette situation dans les deux cas suivants :

— conditions aux limites inhomogènes
— équation aux dérivées partielles et conditions aux limites inhomogènes

L'équation 5.1.13 est une équation aux valeurs propres que l'on retrouve avec des équations aux dérivées partielles et conditions aux limites homogènes.

5.1.6 Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis sur NX

De nos jours, il existe une multitude de logiciels de conception 3D assistée par ordinateur : Solid Works, Pro-Engineer, AutoCad entre autres. En ce qui concerne les simulations multiphysiques, on trouve des logiciels comme ANSYS ou COMSOL par exemple. Dans le cadre de cette thèse, c'est le logiciel NX CAE [1] qui est utilisé, aussi bien pour la modélisation 3D, que pour la simulation électromagnétique par la méthode des éléments finis. Il est développé par Siemens PLM (Product Lifecycle Management) Software qui précédemment s'appelait Unigraphics Solutions. C'est une entreprise leader sur le marché des logiciels 3D. C'est pourquoi tout le travail décrit dans la partie suivante est menée avec ce logiciel.

1. Le terme NX a été remplacé depuis peu par Simcenter 3D. Pour la suite on écrira NX, dans un souci de simplification

5.2 Modélisation du débitmètre électromagnétique sur NX

5.2.1 Création du modèle

La modélisation du débitmètre électromagnétique s'effectue en trois étapes sur NX :

— création du modèle (fichier .prt)
— maillage du modèle, définition des paramètres physiques (fichier.fem : Finite Element Method)
— conditions aux limites (fichier .sim)

Siemens dispose dans sa base de données "TeamCenter" des modèles 3D de tous leurs produits, dont les débitmètres électromagnétiques. Le BigMag 5100 est représenté en figure 5.8. A partir de ce modèle, il faut en recréer un nouveau en supprimant les pièces dont l'importance sera négligeable durant la simulation électromagnétique, comme les pièces amagnétiques mesurées dans le chapitre IV. Il faut, néanmoins, laisser les contraintes d'assemblage, afin de rester proche de la réalité. Le modèle simplifié utilisé pour la simulation est représenté en figure 5.5.

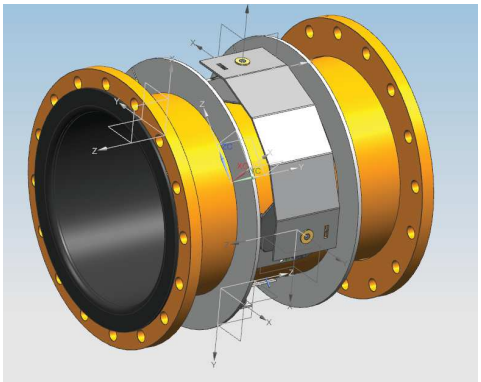


FIGURE 5.4: Modèle 3D d'un BigMag 5100

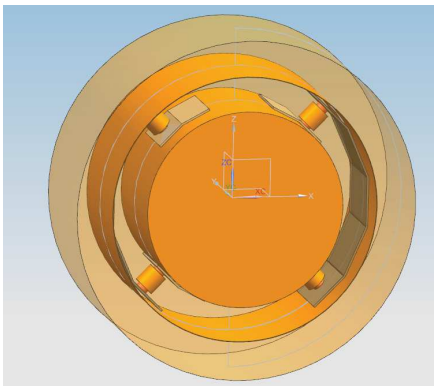


FIGURE 5.5: Modèle simplifié pour la simulation

Modèle électromagnétique utilisé

Le modèle étant créé, il faut utiliser le module "Advanced Simulation" (Pre/Post processing sur la version 12 de NX) permettant le démarrage de la paramétrisation de la simulation. Après avoir choisi Pre/post, une nouvelle fenêtre s'affiche. C'est là qu'on sélectionne le module "Magnetics" qui permettra par

la suite d'accéder aux fichiers ".sim" et ".fem". C'est dans ces fichiers que le maillage est effectué et que les conditions aux limites sont appliquées. Le module "Magnetics" est un outil développé par Dr Binde GmbH, société spécialisée dans tous les aspects de la simulation multi-physique sous NX : mécanique des structures, mécanique des fluides, thermodynamique et électromagnétisme.

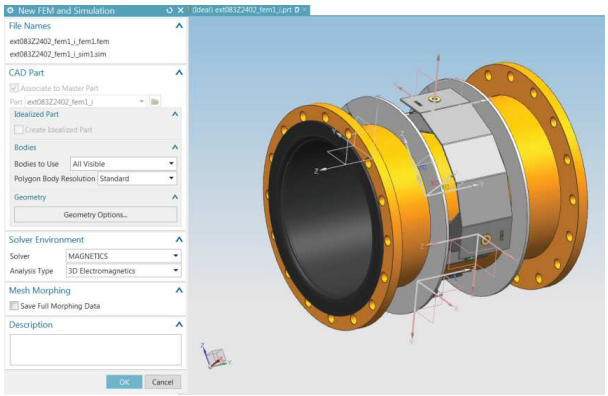


FIGURE 5.6: Choix du module Magnetics

"Magnetics" permet à l'utilisateur de choisir parmi plusieurs solutions : électrostatique, magnétostatique, magnétodynamique entre autres. En électromagnétisme, ce sont les équations de Maxwell qui sont résolues. Suivant les solutions voulues, des simplifications peuvent être effectuées. Dans notre cas, on s'intéressera uniquement à la solution magnétostatique. C'est donc cette solution qui est choisie, figure 5.7.

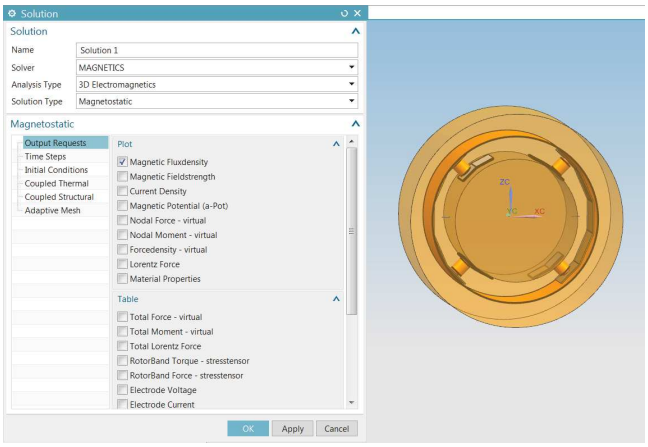


FIGURE 5.7: Choix de l'option Magnétostatique

Le champ magnétique est donc considéré comme étant statique (indépendant du temps) et peut être créé via des aimants ou des courants électriques continus. Les équations de Maxwell sont donc la base du modèle permettant de décrire les effets électromagnétiques. Pour rappel, ce sont ces quatre équations :

$$Maxwell - Ampère : \boldsymbol{rotB} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{5.2.1}$$

$$Maxwell - Faraday : \boldsymbol{rotE} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5.2.2}$$

$$Maxwell - Gauss : div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.2.3}$$

$$Maxwell - Thomson : div\boldsymbol{B} = 0 \tag{5.2.4}$$

avec $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j_l} + \boldsymbol{rotM} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$ et $\rho = \rho_l - \nabla \boldsymbol{P}$.

En magnétostatique le champ électrique est indépendant de l'induction magnétique et du temps. Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$Maxwell - Ampère : \boldsymbol{rotB} = \mu_0 \boldsymbol{j} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j_l} + \boldsymbol{rotM}\right) \tag{5.2.5}$$

$$Maxwell - Faraday : \boldsymbol{rotE} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{5.2.6}$$

$$Maxwell - Gauss : div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.2.7}$$

$$Maxwell - Thomson : div\boldsymbol{B} = 0 \tag{5.2.8}$$

L'induction magnétique est, dans ce cas, régie par les équations de Maxwell-Thomson et Maxwell-Ampère. Pour satisfaire à ces équations en statique, on introduit la notion de potentiel-vecteur $\boldsymbol{A}$ défini par l'équation 5.2.9.

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{rotA} \tag{5.2.9}$$

En substituant l'équation 5.2.9 dans l'équation 5.2.5 on obtient :

$$\boldsymbol{rotB} = \boldsymbol{rot}\left(\boldsymbol{rotA}\right) = \mu \boldsymbol{j} \tag{5.2.10}$$

Le rotationnel du rotationnel du potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ peut s'exprimer en fonction de son laplacien par la relation 5.2.11 :

$$\boldsymbol{rot}\left(\boldsymbol{rotA}\right) = \boldsymbol{grad}\left(div\boldsymbol{A}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{5.2.11}$$

La solution de l'équation 5.2.10 n'est pas unique car une fonction du type $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \nabla f$ est également une solution [50]. En effet, le potentiel vecteur est défini à "un gradient près". Pour lever cette indétermination, on impose au potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ d'être lui aussi un champ de vecteur à flux conservatif comme l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$. Pour cela, on impose une condition sur sa divergence : une jauge $div\boldsymbol{A} = 0$. C'est la jauge de Coulomb. L'équation 5.2.11 s'écrit donc :

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{rot}\,(\boldsymbol{rotA}) \tag{5.2.12}$$

Soit :

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{j} \tag{5.2.13}$$

C'est cette équation qui est utilisée par la méthode des éléments finis, car c'est à partir du potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ qu'on déduit l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$. L'influence des matériaux, notamment à travers leur perméabilité magnétique relative, est aussi à considérer. Pour cela, c'est la relation liant l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ et le champ magnétique $\boldsymbol{H}$ défini par l'équation 5.2.14 qui est utilisée.

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} \tag{5.2.14}$$

Il est néanmoins nécessaire de tenir compte des relations constitutives exactes non-linéaires intervenant dans la matériaux ferromagnétiques.

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}\right) = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} \tag{5.2.15}$$

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{5.2.16}$$

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \boldsymbol{E} \tag{5.2.17}$$

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \epsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{5.2.18}$$

Maillage du modèle

L'équation aux éléments finis étant maintenant définie, il faut passer par la méthode des élément finis pour la résoudre. Il a été vu dans la section précédente qu'il fallait discrétiser le problème. Ici c'est le débitmètre électromagnétique dont il s'agit. Pour effectuer ce maillage, il faut passer par le fichier ".fem" du module "Magnetics". Comme le modèle est en 3D et que c'est la seule option possible sur le module, les éléments du maillages seront des tétraèdres. On utilise un maillage fin [2] de façon à avoir la meilleure approximation possible de la solution.

2. Plus le maillage est fin, plus il y a d'éléments finis.

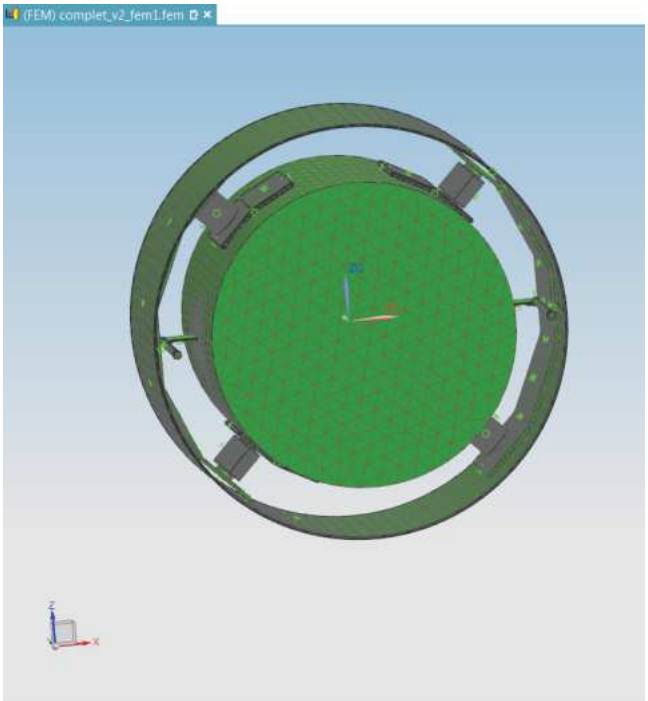


FIGURE 5.8: Maille du débitmètre électromagnétique

Cette étape finie, un système d'équations linéaires est défini sur chaque élément du maillage.

Conditions aux limites

Le maillage effectué, la solution est obtenue en résolvant une équation matricielle issue d'un assemblage de tous les systèmes d'équations obtenus sur chaque élément. Avant cela, les conditions aux limites doivent être définies. En plus du débitmètre électromagnétique, un volume d'air doit être créé puisque le champ magnétique "circule" obligatoirement dans un milieu physique caractérisé par sa perméabilité magnétique μ et/ou sa permittivité diélectrique ϵ. Dans notre cas, c'est de l'air qui est représenté en bleu en figure 5.9.
Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de 50 μT et n'a donc pas d'influence sur le champ magnétique créé par le débitmètre électromagnétique. Dans ce cas, on peut appliquer un potentiel-vecteur $\boldsymbol{A}$ nul à l'infini. Cela se fait sous NX par la fonction "Zero potential-Flux tangent" qui se trouve dans le module ".sim" de "Magnetics". Mathématiquement parlant, cela revient à écrire que $\boldsymbol{A} = 0$. Les lignes de champ magnétique sont, elles, tangentielles à la surface (sur les bords du volume d'air de la figure 5.9). En effet, le théorème de Stokes permet d'écrire que :

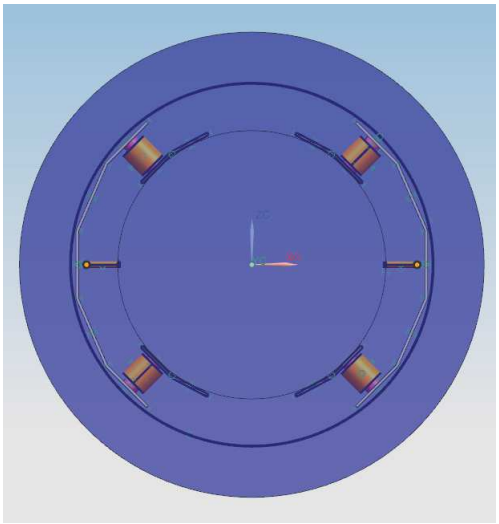


FIGURE 5.9: Intégration du volume d'air

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{rotA}.d\boldsymbol{S} \tag{5.2.19}$$

où S représente la surface du volume d'air. Comme $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{rotA}$, l'équation 5.2.20 s'écrit :

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{B}.d\boldsymbol{S} \tag{5.2.20}$$

Le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ étant nul, le produit scalaire $\boldsymbol{B}.d\boldsymbol{S}$ doit l'être aussi. Cela est le cas, si l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ est perpendiculaire à la surface S du volume d'air. Le vecteur surface $\boldsymbol{S}$ étant orienté perpendiculairement à la surface S du volume d'air, l'induction magnétique est donc tangentielle aux bords de la surface d'air. C'est aussi dans le module ".sim" que l'on attribue la valeur du courant qui alimente les bobines. Cela se fait via la fonction "Current".

5.2.2 Paramètres de la simulation

Après le maillage, il faut attribuer des paramètres aux différentes pièces. Sur "Magnetics", il existe une librairie permettant d'utiliser plusieurs matériaux comme le cuivre pour les bobines par exemple. Cependant, pour ce qui est des autres pièces, il faut les créer afin de leur affecter la perméabilité magnétique relative qui a été mesurée : voir chapitre IV.

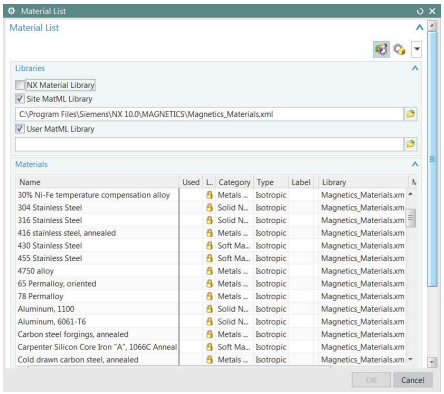


FIGURE 5.10: Choix de matériaux

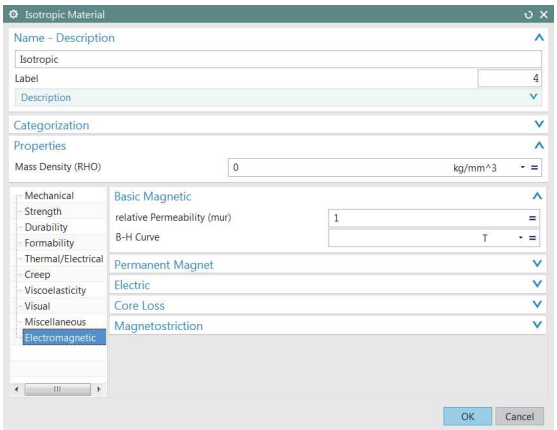


FIGURE 5.11: Création d'un matériau magnétique

L'ensemble de ces paramètres est listé dans le tableau 5.4. Les perméabilités magnétiques relatives utilisées sont celles dont les résultats de mesure ont été présentés dans le chapitre IV. Les données de la bobine proviennent de la fiche de spécifications techniques.

Bobine	N	1280
	I (A)	0.125
	S (mm^2)	205
Cœur toroïdal	$\mu_r[1]$	750
Casing		169
Pole Piece/Return Path		103

TABLE 5.1: Paramètres physiques de la simulation avec μ_{r-min}

5.2.3 Résultats et discussions

Le maillage, les conditions aux limites et le paramétrage définis, la simulation peut démarrer. Le but est tout d'abord de représenter les lignes de champ magnétique, afin de vérifier si le comportement physique est correct.
Les deux "Return Path" et les quatre "Pole Piece" remplissent bien leur rôle. En effet, on observe que le "Return Path" permet de bien guider les lignes de champ magnétique d'une bobine à l'autre, ainsi que de les faire reboucler sur elles-mêmes. Les "Pole Piece" quant à eux permettent bien de distribuer l'induction magnétique B à l'intérieur du débitmètre. Le "Casing" assure son rôle également en canalisant $\boldsymbol{B}$. L'objectif est de connaître la plage de valeurs admissible de l'induction magnétique, en tenant compte du domaine de

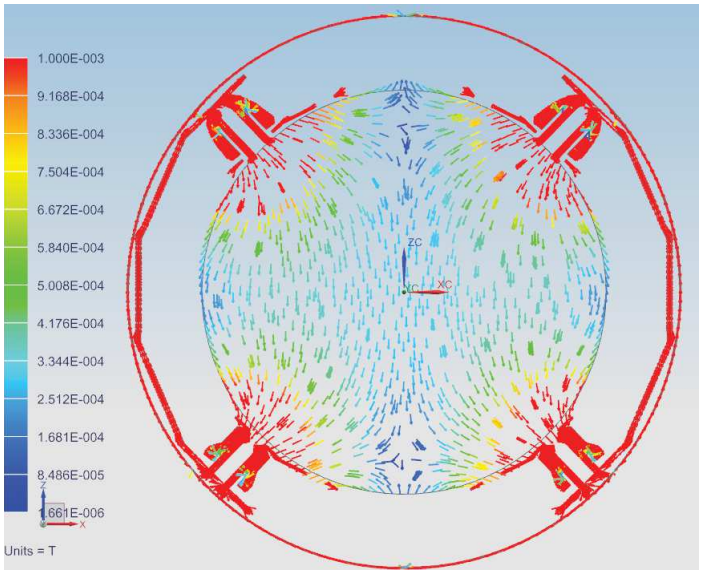


FIGURE 5.12: Lignes de champ magnétique dans le BigMag 5100

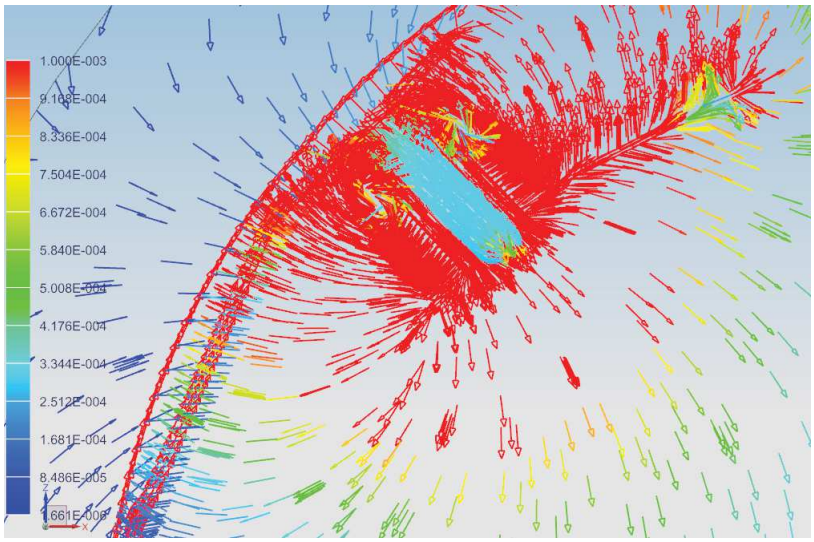


FIGURE 5.13: Lignes du champ magnétique autour de la bobine

linéarité de μ_r établi dans la section 4.4.2 du chapitre 4. C'est pourquoi ce sont d'abord les valeurs minimales des perméabilités magnétiques relatives mesurées qui sont utilisées. L'idée est maintenant de faire une autre simulation avec, cette fois-ci les perméabilités relatives maximales, sans autre changement de paramétrage.
Pour les résultats, on trace l'évolution de l'induction magnétique B le long

Bobine	N I (A) S (mm^2)	1280 0.125 205
Cœur toroïdal Casing Pole Piece/Return Path	$\mu_r[1]$	750 230 213

TABLE 5.2: Paramètres physiques de la simulation avec μ_{r-max}

des axes x et z définis en figure 5.12.

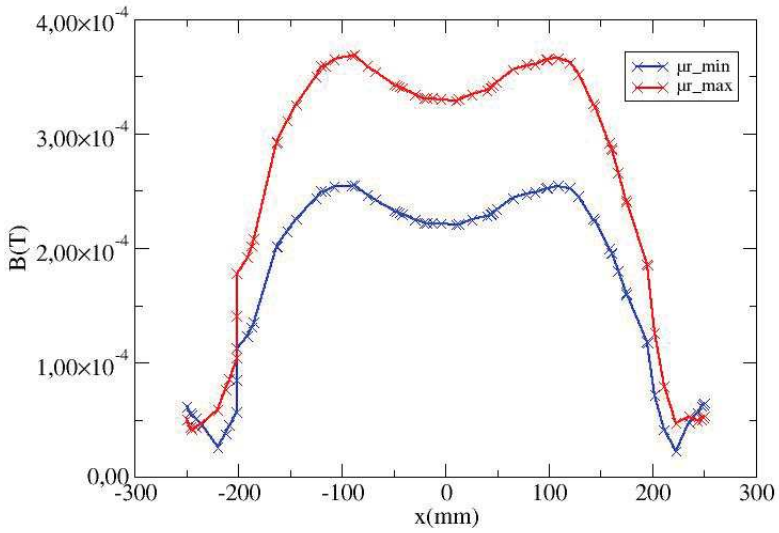


FIGURE 5.14: Induction magnétique le long de l'axe x

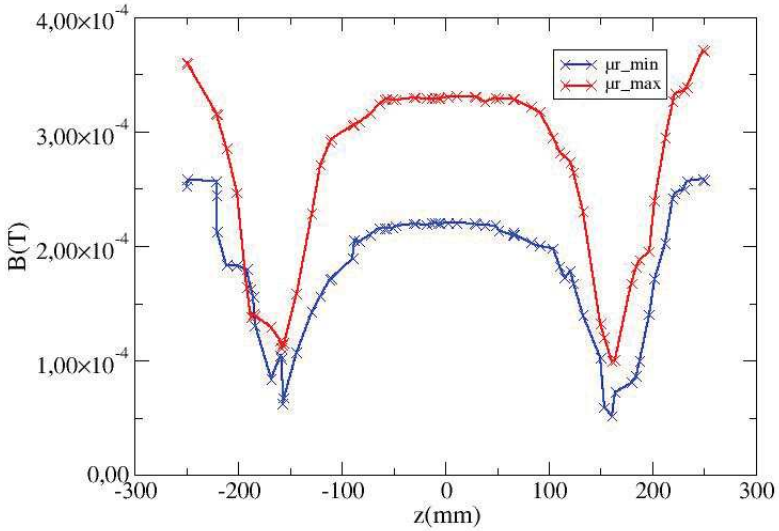


FIGURE 5.15: Induction magnétique le long de l'axe z

On peut constater qu'il y a une différence de 0,1 mT entre les perméabilités maximales et minimales, et ce sur les deux axes. En soi, 0,1 mT de différence n'est pas grand-chose. On pourrait en conclure que la perméabilité magnétique relative n'a pas d'influence sur la valeur de l'induction magnétique. Cependant, si on regarde bien l'ordre de grandeur de l'induction magnétique dans le tube de mesurage, on remarque que celle-ci est de l'ordre 0,2 mT ; un choix précis de la perméabilité magnétique relative est nécessaire. En effet, la valeur de l'induction magnétique a une répercussion sur le facteur d'étalonnage du débitmètre et donc sur sa fonctionnalité. Cette limite de fonctionnement sera établie dans la partie étalonnage (chapitre VII). Cela nous amène à une étude supplémentaire, à savoir l'étude de la variation de l'induction magnétique en utilisant d'autres perméabilités magnétiques relatives. Cela revient donc à changer de matériaux. Le but est de réaliser un abaque de matériaux susceptibles d'être utilisés pour une optimisation du débitmètre. Il est possible de créer divers matériaux grâce à la bibliothèque disponible sous NX. Les matériaux étudiés dans ce cas sont essentiellement des alliages de Fe-Ni, des aciers au carbone, ainsi que du fer pur par exemple. Des simulations sont alors effectuées pour chaque type de matériau. Ce seront les mêmes matériaux pour le "Pole Piece", le "Return Path" et le "Casing". La perméabilité magnétique relative du "Cœur Toroïdal" ne changera pas. L'induction magnétique est à nouveau évaluée le long

des axes x et z. Les résultats sont donnés en figures 5.16 et 5.17 :

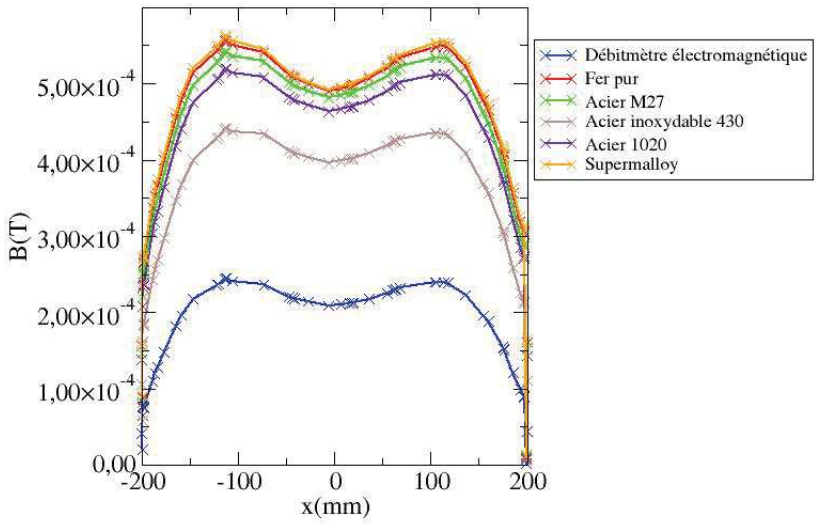


FIGURE 5.16: Induction magnétique sur l'axe x pour différents matériaux

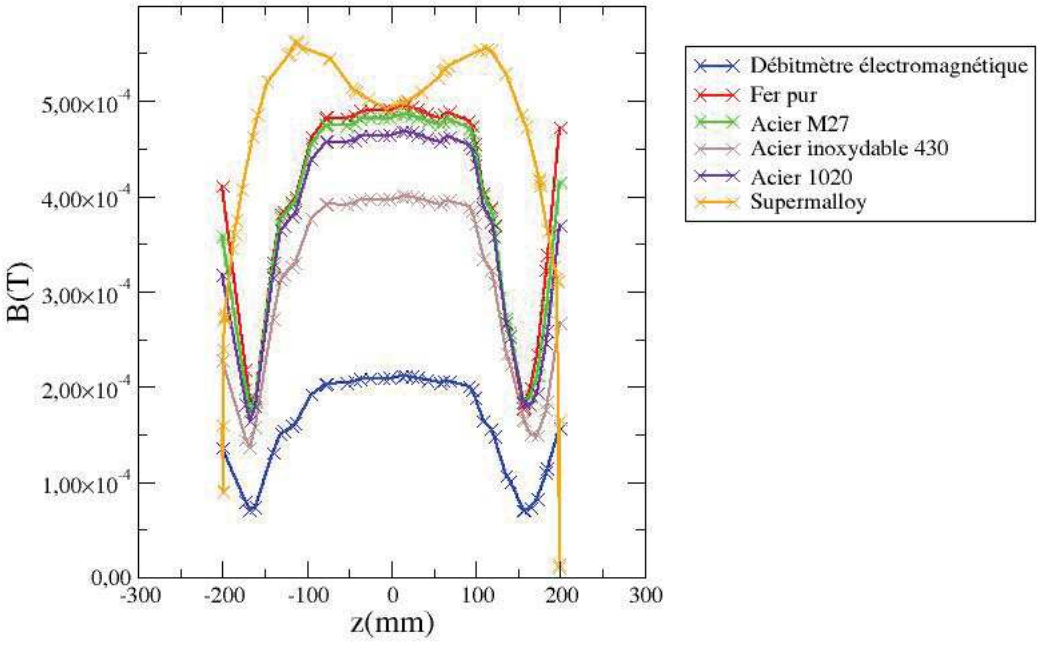


FIGURE 5.17: Induction magnétique sur l'axe z pour différents matériaux

Les résultats montrent, qu'à ce stade, les matériaux utilisés ne permettent pas de maximiser l'induction magnétique dans le débitmètre électromagnétique. En effet, si on compare avec le fer pur qui est fortement magnétique, il est possible de doubler l'induction magnétique. Cela est également possible en utilisant un alliage de Fe-Ni (Acier M27) comme le Supermalloy ou un acier inoxydable. La question est maintenant de savoir pourquoi il existe telle différence. Pour ce faire, il faut étudier chaque pièce individuellement afin de connaître son rôle et son influence sur l'induction magnétique. Pour réduire les temps de calcul, le modèle du débitmètre peut être simplifié du fait de sa géométrie. De ce fait on n'utilise qu'un huitième du dispositif comme illustré en figure 5.18.

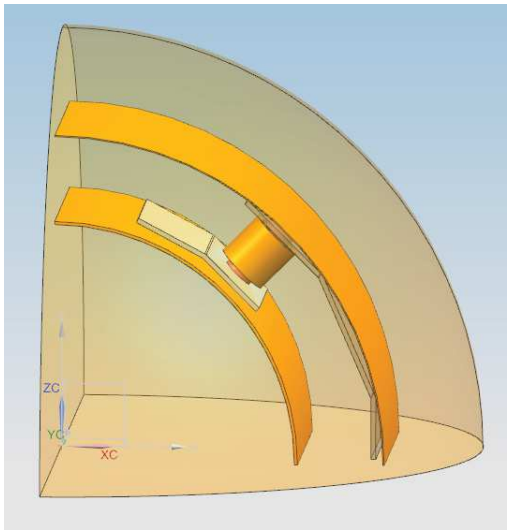


FIGURE 5.18: Modèle réduit et simplifié du débitmètre

La première pièce étudiée est le tube, dont le matériau est de l'acier inoxydable non magnétique, il n'a donc a priori aucune influence sur l'induction magnétique. Plusieurs valeurs de perméabilité magnétique relative sont donc analysées pour le vérifier. L'induction magnétique est évaluée le long de l'axe x, figure 5.18. Les résultats obtenus sont détaillés en figures 5.19 et 5.20 .

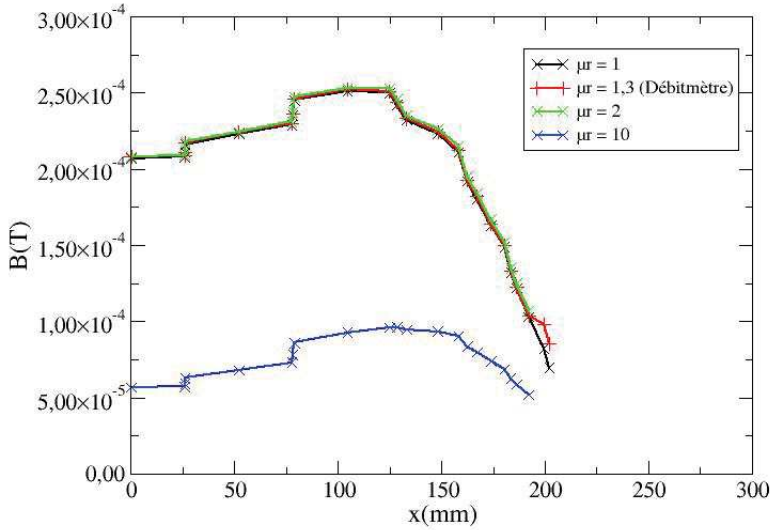


FIGURE 5.19: Evolution de B le long de l'axe x du débitmètre pour différents μ_r du tube

La figure 5.20 montre une induction magnétique B constante pour de faibles valeurs de μ_r. Pour la production des appareils sur le site de Siemens, la spécification technique du tube préconise une valeur maximale de perméabilité magnétique relative de 1,3. Les résultats permettent de montrer qu'il est possible d'utiliser d'autre matériaux ayant une perméabilité comprise entre 1 et 2. Au-delà, il y aurait une perte significative de la densité de flux magnétique dans les appareils. En revanche, les résultats permettent de conclure que le tube peut être assimilé à de l'air. Il n'est donc pas nécessaire de le modéliser puisque les résultats sont les mêmes pour une perméabilité magnétique relative de 1 et 1,3 par exemple.
La pièce suivante à étudier pour d'autres perméabilités magnétiques relatives est le "Pole Piece" qui, on l'a vu précédemment, permet essentiellement de distribuer le champ magnétique dans le débitmètre.

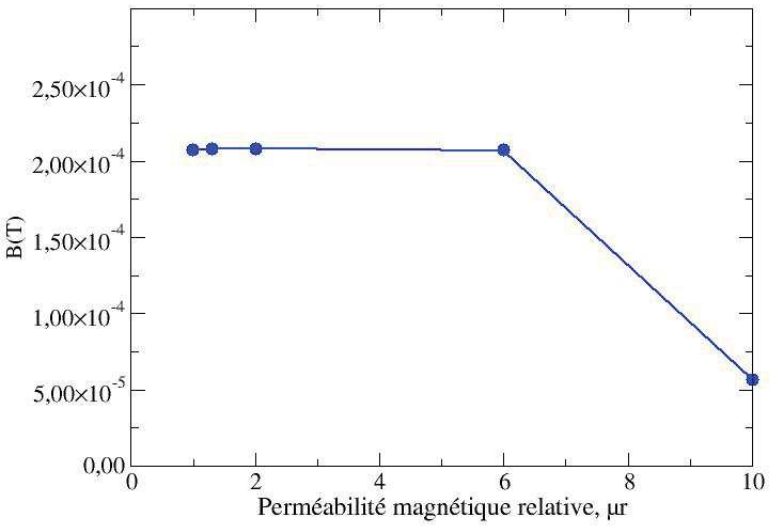


FIGURE 5.20: Evolution de B en fonction de μ_r du tube

A première vue, ces résultats montrent encore une fois l'importance du "Pole Piece" pour le dispositif. En effet, si la pièce est non magnétique, c'est-à-dire de perméabilité magnétique relative de 1, on observe une baisse significative de l'induction magnétique. Celle-ci peut être augmentée en changeant de matériau comme le montre la figure 5.22. Il est possible de trouver des matériaux possédant des perméabilités magnétiques relatives élevées comme par exemple l'Anhyster D (Imphy), dont la valeur de perméabilité magnétique relative est de 10 000. Le "Return Path", quant à lui, permet de guider les lignes de champ entre les deux bobines . A priori, son comportement magnétique devrait être le même que celui du "Pole Piece", puisqu'il contient les mêmes éléments chimiques. Les résultats sont représentés en figures 5.23 et 5.24.

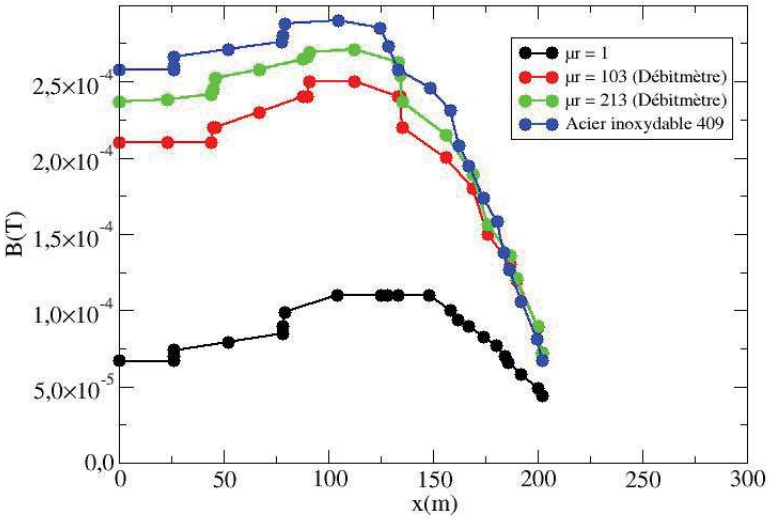


FIGURE 5.21: Evolution de B le long de l'axe x du débitmètre pour différents μ_r du "Pole Piece"

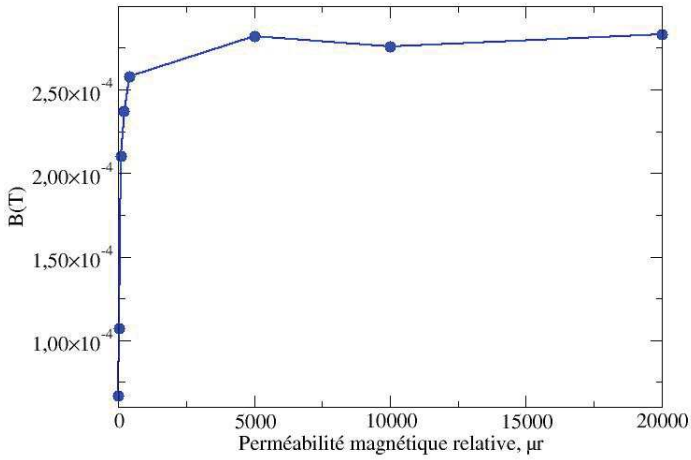


FIGURE 5.22: Evolution de B en fonction de μ_r du "Pole Piece"

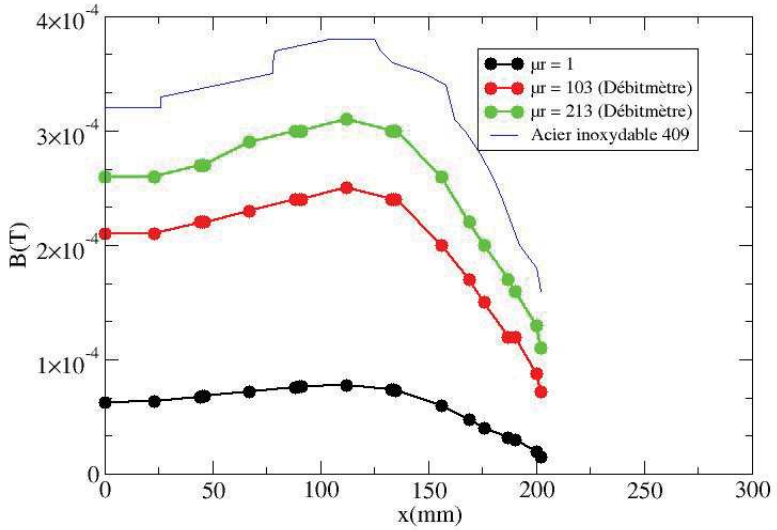


FIGURE 5.23: Evolution de B le long de l'axe x du débitmètre pour différents μ_r du "Return Path"

On peut constater que dans ce cas il est possible de quasiment doubler l'induction magnétique en utilisant de l'acier inoxydable de grade 409. Tout comme dans le "Pole Piece", si le matériau est assimilé à de l'air, l'induction magnétique diminue fortement. Là aussi, l'induction magnétique peut être augmentée en utilisant un autre alliage tel que le Fer-Ni proposé précédemment. Cela permet de conclure sur l'importance du "Pole Piece" et du "Return Path" dans la distribution et la valeur d'intensité de l'induction magnétique dans le débitmètre électromagnétique.

La quatrième pièce, tout aussi importante, est le cœur toroïdal. Il a été vu dans le chapitre IV que le cœur toroïdal est un enroulement de tôle Fe-Si à 3%, à grains orientés. Malheureusement, les mesures n'ont pu être faites que dans le sens de l'enroulement (dans le sens du laminage). Le cœur toroïdal est doté d'une plus faible perméabilité magnétique relative que prévu. Cela ne diminue en rien son rôle dans le dispositif, comme le montrent les résultats présentés en figures 5.25 et 5.26.

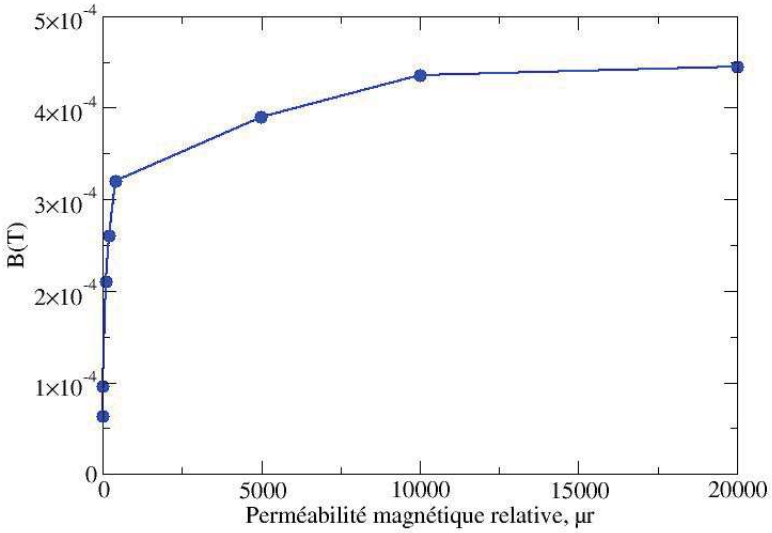


FIGURE 5.24: Evolution de B en fonction de μ_r du "Return Path"

Là encore, si le cœur toroïdal est assimilé à de l'air, l'induction magnétique dans le débitmètre sera fortement diminuée. La partie la plus intéressante de ces résultats concerne les perméabilités magnétiques relatives. Dans le chapitre IV, il a été vu que le cœur toroïdal était utilisé dans le sens transverse : l'induction magnétique n'est pas orientée suivant la direction de laminage. La perméabilité magnétique relative s'en retrouvait donc affectée. Or, pour les simulations, le cœur toroïdal est considéré comme isotrope, car c'est la seule propriété avec l'orthotropie proposée sous NX. Pour conclure : que le cœur toroïdal soit utilisé dans le sens transverse ou non n'affecte que très peu la valeur de l'induction magnétique.

La dernière pièce analysée est le "Casing (Outer Case)" qui joue un rôle tout aussi important, puisqu'il permet de protéger l'appareil des perturbations électromagnétiques extérieures notamment. Les résultats obtenus sont détaillés en figures 5.27 et 5.28.

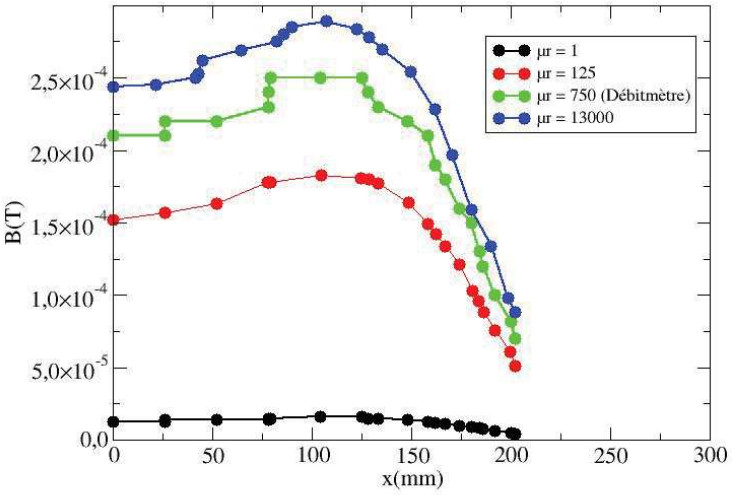


FIGURE 5.25: Evolution de B le long de l'axe x du débitmètre pour différents μ_r du "Cœur toroïdal"

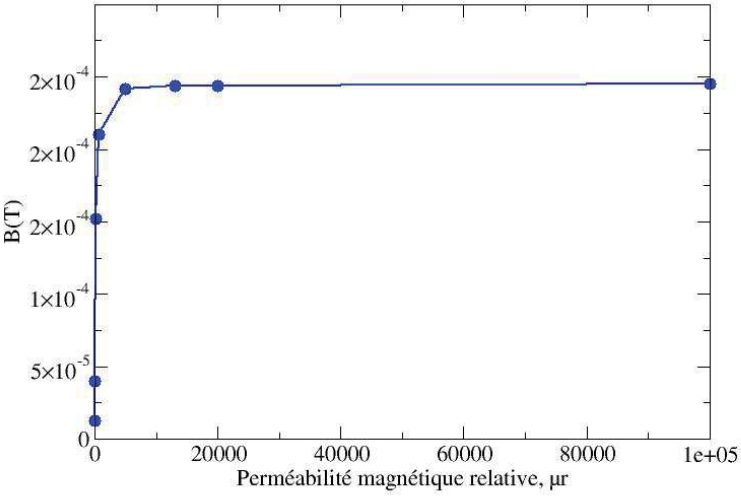


FIGURE 5.26: Evolution de B en fonction de μ_r du "Cœur toroïdal"

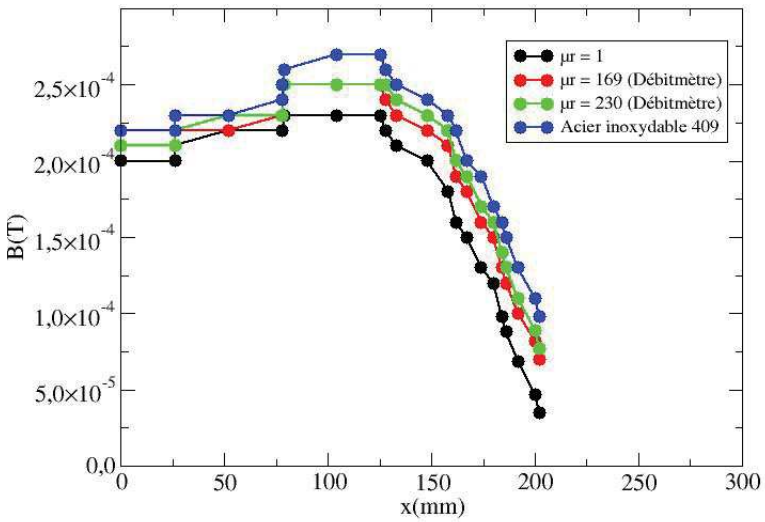


FIGURE 5.27: Evolution de B le long de l'axe x du débitmètre pour différents μ_r de "Outer Case"

Les résultats montrent que, pour des perméabilités magnétiques relatives inférieures à 200, la différence en terme d'induction magnétique est très faible. La question qui se pose est de savoir si le "Casing" peut être assimilé à de l'air. On verra dans la partie suivante que cette possibilité n'est pas réaliste. D'ailleurs, les résultats précédents ont montré que cette pièce jouait un rôle important et permettait de contenir le champ magnétique à l'intérieur du tube de mesure.

5.3 Conclusion

La méthode des éléments finis est une méthode largement utilisée dans les sciences physiques, car elle permet d'obtenir des solutions fiables et réalistes des équations aux dérivées partielles. Le logiciel NX, notamment le module "Magnetics" utilisé dans cette thèse, exploite cette méthode. Malheureusement, par rapport à d'autres logiciels, les choix sont limités sur certains points.

- Le premier point concerne le maillage en 3D : seul des tétraèdres peuvent être choisis pour mailler les différentes pièces du débitmètre électromagnétique. Dans le cadre de cette thèse cela était suffisant puisque les géométries du dispositif étaient simples. Les tétraèdres restent cependant

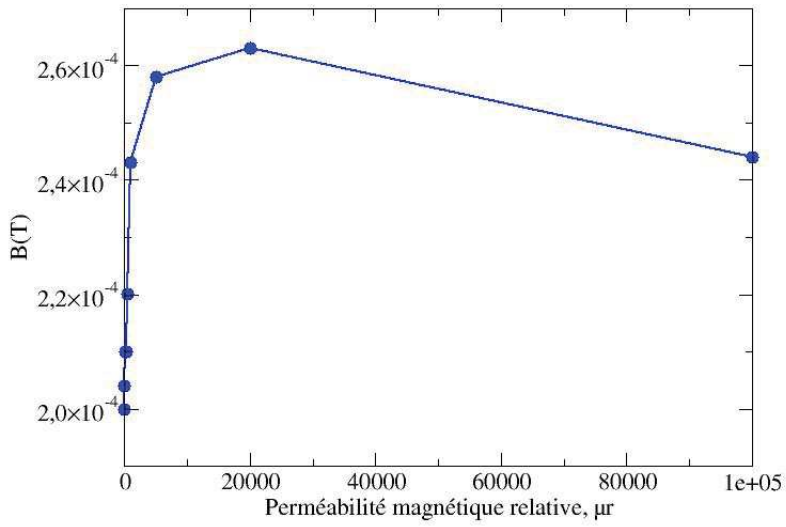


FIGURE 5.28: Evolution de B en fonction de μ_r de "l'Outer Case"

le choix le plus simple et le plus adéquat pour des régions-volumes arbitraires [50]. Il serait également intéressant dans le futur de redessiner toutes les pièces pour, par exemple, appliquer un maillage plus fin sur une zone de pièce où l'induction magnétique est plus importante et appliquer un maillage grossier ailleurs. Cela nécessiterait du temps, mais pourrait améliorer la précision de la simulation et faire gagner du temps de calcul.

- Le second point concerne la définition magnétique des matériaux. Le logiciel "Magnetics" propose plusieurs solutions :

— comportement physique : isotrope ou orthotrope (cas particuliers de l'anisotropie)
— choix du matériau

Un matériau anisotrope aurait pu être intéressant notamment pour la modélisation du cœur toroïdal. Ensuite, il faut choisir la valeur de la perméabilité magnétique relative ou de la courbe B-H qui est en fait la courbe de première aimantation des matériaux magnétiques. Les cycles d'hystérésis sont donc dans ce cas inutiles pour la modélisation. Malgré cela, les résultats obtenus sont convaincants et décrivent bien la distribution de l'induction magnétique dans le tube de mesurage. Ils valident également le rôle des pièces du circuit magnétique dans le fonctionnement du débitmètre électromagnétique. La

suite de cette thèse a pour objet de conforter les résultats numériques en les comparant à des mesures expérimentales détaillées dans la section suivante.

5.4 Mesure expérimentale de l'induction magnétique B

L'objectif de cette partie est de présenter le protocole mis en place afin de comparer les résultats de modélisation aux relevés de tests expérimentaux. L'idée est de disposer d'une méthode fiable pour valider la modélisation.

- La première partie est consacrée à la présentation du dispositif expérimental et des tests proposés.
- La seconde est consacrée à la présentation des mesures du champ magnétique.
- Enfin la dernière partie concerne la comparaison des résultats expérimentaux avec ceux issus de la modélisation numérique.

5.4.1 Cahier des charges

1. Besoin
   - Pouvoir communiquer les données via USB ou Ethernet.
   - Pouvoir mesurer le champ magnétique en 3 dimensions.
2. Software
   - Le programme gérant le système de mesure doit être contrôlé via un logiciel de pilotage.
   - Le programme doit pouvoir déterminer le diamètre du débitmètre automatiquement.
   - Les résultats doivent être donnés à l'utilisateur dès que la mesure est terminée.
3. Hardware
   - Les appareils contrôlés par le software doivent pouvoir communiquer avec le logiciel de pilotage.
   - Le débitmètre doit être alimenté par un courant de 125 mA. Pour rappel, c'est le transmetteur qui alimente les bobines avec ce courant afin d'avoir une sensibilité de 125ţ$V/m/s$.

5.4.2 Le système de mesure

Au départ de ce projet, il était prévu de récupérer le matériel et le banc de test qui avait été mis en place par Siemens au Danemark. Malheureusement, tout le matériel était obsolète. La sonde utilisée était complètement tordue et les valeurs affichées par le gaussmètre présentaient des dérives importantes. Il a donc fallu tout d'abord renvoyer le gaussmètre au constructeur

(Lakeshore) pour le faire étalonner. Ensuite, il a fallu repenser le système en s'inspirant de ce qui avait été fait au Danemark. Un schéma de principe est donné en figure 5.29. L'objectif était de mettre en place un banc de mesure du champ magnétique des débitmètres électromagnétiques pour des diamètres nominaux compris entre 50 et 900 mm. Le système est composé d'un bras tri-axes motorisé permettant de faire des mesures dans un système de coordonnées à 3 dimensions. Sur un des axes est fixée une sonde à effet Hall directement reliée à un gaussmètre indiquant la valeur de l'induction magnétique et de ses composantes.

5.4.3 Présentation du système

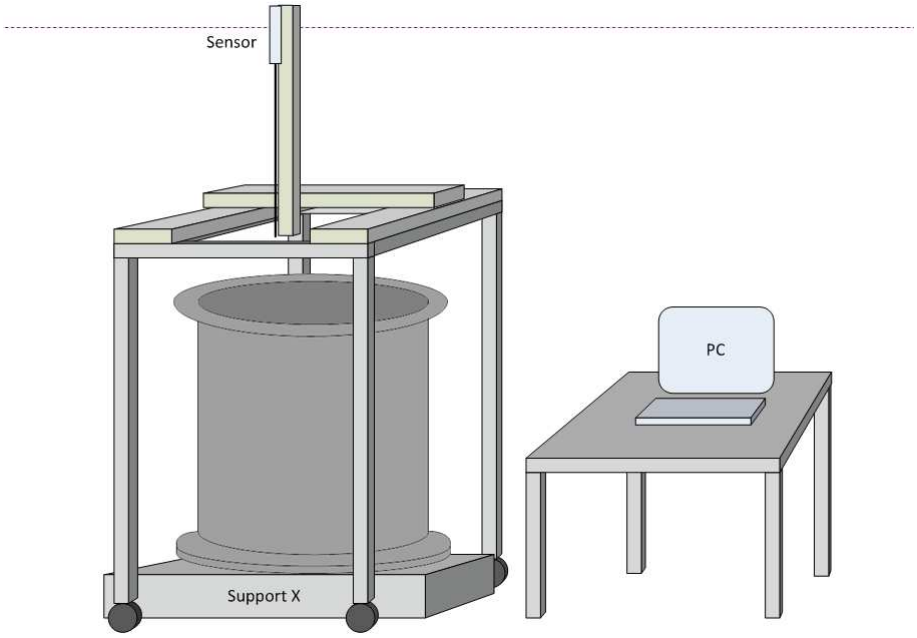


FIGURE 5.29: Schéma de principe du banc de test

La sonde à effet Hall

Une sonde à effet Hall est un capteur inductif, puisqu'il permet de mesurer la variation du champ magnétique. Son principe de fonctionnement découle directement de la force de Lorentz qui, on le rappelle, est définie par l'équation :

$$\boldsymbol{F_L} = \boldsymbol{F_E} + \boldsymbol{F_m} = (\boldsymbol{E_E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \tag{5.4.1}$$

Dans ce cas précis, c'est un courant électrique I qui circule dans un conducteur métallique. Les charges sont déviées de part et d'autre du conducteur par le champ magnétique que l'on souhaite mesurer. Un champ électrique que l'on appelle champ de Hall E_H, figure 5.31, apparaît alors et s'oppose au champ magnétique. Dès lors, les charges ne sont plus déviées et une tension apparaît à partir de laquelle on peut déduire le champ magnétique.

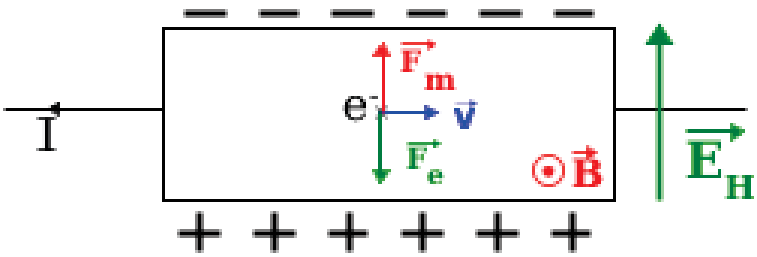


FIGURE 5.30: Principe de l'effet Hall

La sonde à effet (Lakeshore Cryotronics) permet de mesurer les composantes du champ magnétique dans les 3 directions de l'espace.

FIGURE 5.31: La sonde à effet Hall utilisée

Les caractéristiques principales du gaussmètre sont les suivantes :

- matériau métallique : Aluminium (semi-conducteur dopé)
- gamme en fréquence : DC et alternatif : 10 à 400 Hz.
- gamme de mesure : 3 mT, 30 mT, 300 mT et 3T.
- gamme en température : 10°C à 40°C.
- dispose d'un capteur de température

Les faces de la sonde mesurent les composantes normales de $\boldsymbol{B}$: mesure locale simultanée de B_x, B_y, B_z

Le gaussmètre

Le gaussmètre (Lakeshore Inc. model 46 3-Channel) est utilisé pour afficher la mesure du champ magnétique effectuée par la sonde à effet Hall.

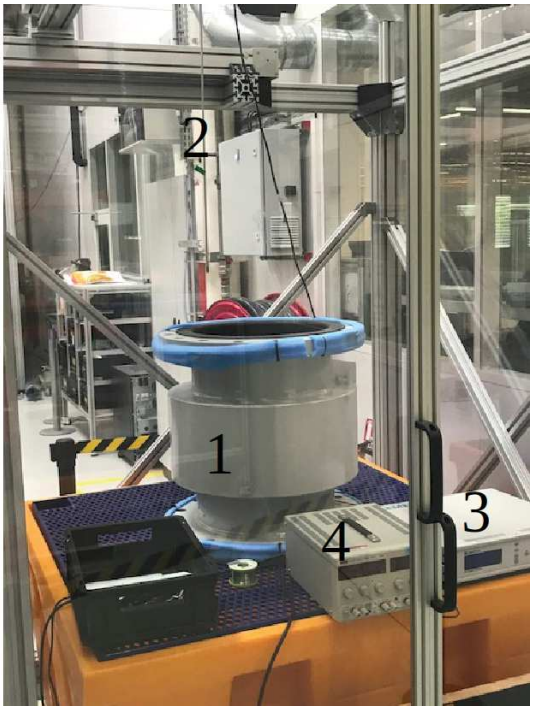
FIGURE 5.32: Le gaussmètre utilisé

Les caractéristiques principales du gaussmètre sont les suivantes :

— précision de la lecture : $\pm 0.10\%$.
— stabilité en température : 9 $\mu T/°C$.
— gamme de mesure : 30 $\mu T - 30T$.
— unité : Gauss ou Tesla.
— interface : IEEE-488 and RS232.

5.4.4 Le banc de test

Le banc est composé d'un châssis comprenant un ensemble de 3 axes X Y Z. Chaque axe est composé d'un système linéaire de type LMS 90 avec une course de 1000 mm. Les chariots des systèmes linéaires LMS sont guidés par des chariots de précision avec circulation à billes. Ces derniers sont entraînés par des moteurs Siemens de type SIMOTICS-1FL6+SINAMICS V90.



1 : Débitmètre.
2 : Sonde à Effet Hall.
3 : Gaussmètre.
4 : Générateur de courant.

FIGURE 5.33: Banc de test pour la mesure de champ magnétique

La sonde à effet Hall est, quant à elle, fixée sur un l'axe z du bras motorisé, comme illustré en figure 5.34 Le gaussmètre est directement connecté à la sonde afin de mesurer les 3 composantes du champ magnétique. La source de courant permet d'alimenter les bobines du débitmètre avec un courant de 125 mA.

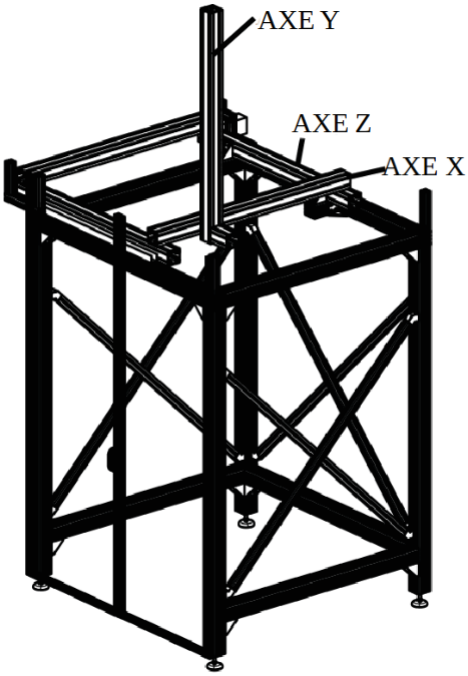


FIGURE 5.34: Bras tri-axes motorisé

5.4.5 Déplacement des axes

Le déplacement des axes grâce aux moteurs Siemens en utilisant un panneau de commande, figure 5.35. Cela permet de placer la sonde là où l'utilisateur le souhaite. Il faudra l'utiliser pour avoir des points de référence lors du centrage de la sonde. Il est nécessaire de maintenir le bouton 1 et d'appuyer sur l'une flèche pour déplacer l'axe souhaité. L'axe z se déplace verticalement. De même, les axes x et y se déplacent horizontalement. Le bouton situé à droite du bouton 1 n'est jamais utilisé.

5.4.6 Utilisation du banc de test

Cette partie décrit l'utilisation du banc de test avec le logiciel adéquat permettant d'automatiser la mesure. Ce logiciel a été conçu en C# par Mr. Hickel, ingénieur chez Siemens, afin de pouvoir utiliser le banc de test simplement et avec efficacité. L'exécutable du logiciel se trouve dans un dossier nommé" Girafe". L'utilisateur a deux choix pour faire la mesure : soit de la faire automatiquement soit manuellement. Ici on s'attardera uniquement à la partie automatique qui est en général la plus utilisée.

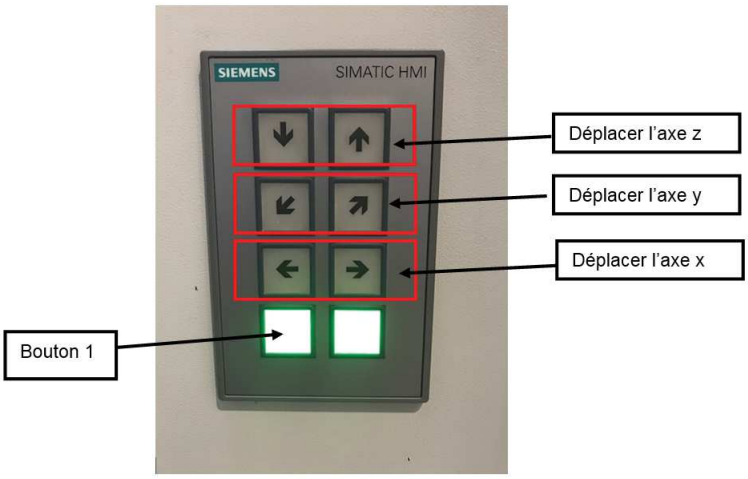


FIGURE 5.35: Commande de contrôle pour le déplacement d'un axe du bras motorisé

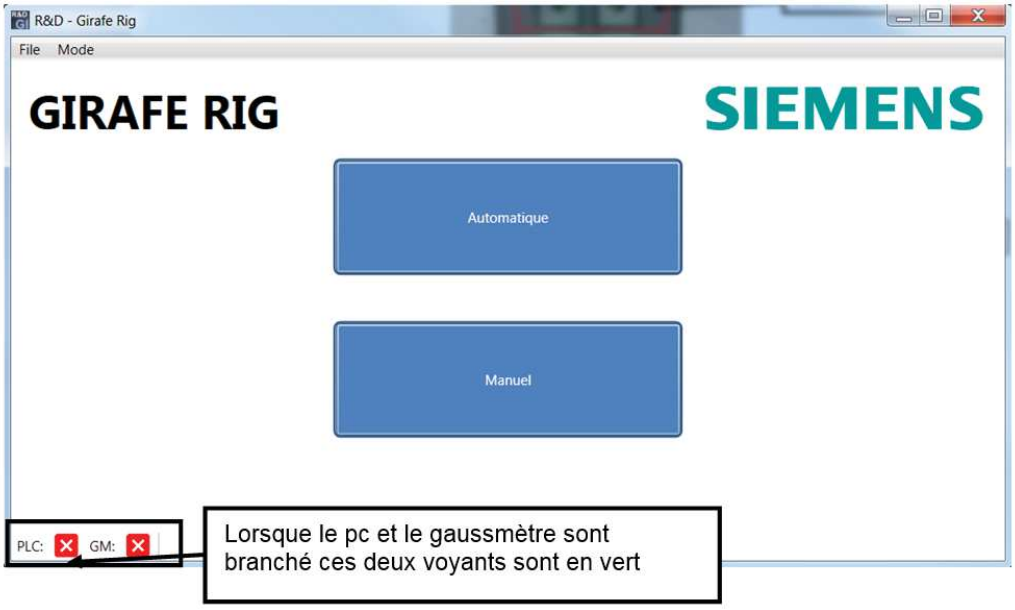


FIGURE 5.36: Choix du type de mesure : automatique ou manuel

La matrice de coordonnées

La première chose à effectuer est de fournir un fichier d'entrées : la matrice de coordonnées. Il est bien sûr possible d'utiliser une autre dénomination. La matrice se présente comme suit :

FIGURE 5.37: Configuration de la mesure

Index	x	z	y	B_x	B_y	B_z
0	0	-9,8	0	valeur	valeur	valeur
1	0	-9,4	0	valeur	valeur	valeur
2	0	-9	0	valeur	valeur	valeur
3	0	-8,6	0	valeur	valeur	valeur
4	0	-8,2	0	valeur	valeur	valeur
5	0	-7,8	0	valeur	valeur	valeur
6	0	-7,4	0	valeur	valeur	valeur
7	0	-7	0	valeur	valeur	valeur
8	0	-6,6	0	valeur	valeur	valeur
9	0	-6,2	0	valeur	valeur	valeur

TABLE 5.3: Matrice de coordonnées

L'index représente le nombre de points nécessaire. Les valeurs dans les cellules x, y et z sont normalisées de -10 à +10. Il est cependant obligatoire d'utiliser une valeur inférieure à 10 ou -10,car ces valeurs correspondent, pour un débitmètre électromagnétique, aux extrémités de l'appareil. La sonde risquerait d'être abîmée. Les valeurs (0,0,0) correspondent ainsi au centre du dispositif. Si la mesure nécessite 50 points suivant un axe en particulier, il

faudra un pas de 10/50 soit 0.4. Le nom du fichier d'entrées doit être spécifié de la manière suivante : "nom.csv". Les données peuvent ainsi être exploitées via le tableur Excel où l'on retrouve les coordonnées x, y, z avec les valeurs de l'induction magnétique B_x, B_y et B_z correspondantes.

Calcul des composantes radiales et orthoradiales du champ d'induction B

La géométrie du débitmètre électromagnétique étudié étant à symétrie axiale, les composantes cartésiennes du champ d'induction $\boldsymbol{B}$ ne permettent pas de connaître sa structure spatiale en 3D. Il est donc nécessaire de connaître les composantes radiales et orthoradiales de $\boldsymbol{B}$. En les connaissant, on est alors en mesure d'évaluer avec plus de précision les résultats obtenus par la simulation numérique. Les composantes radiales et orthoradiales du champ d'induction $\boldsymbol{B}$ sont représentés respectivement par B_r et B_θ sur la figure 5.38.

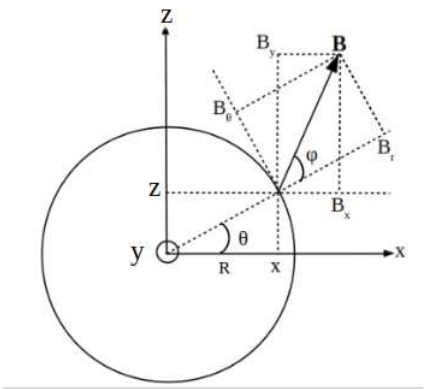


FIGURE 5.38: Composantes radiale B_r et orthoradiale B_θ du champ d'induction B.

Les coordonnées x, y et z ainsi que les composantes B_x, B_y et B_z étant connus, la seule inconnue à déterminer est φ. En effet, on a $B_r = B\cos\varphi$ et $B_\theta = B\sin\varphi$. D'après la figure 5.38 on a :

$$\begin{cases} B_x = B\cos(\theta+\varphi) = B\cos\varphi\cos\theta - B\sin\varphi\sin\theta = B_r\cos\theta - B_\theta\sin\theta \\ B_z = B\sin(\theta+\varphi) = B\cos\varphi\sin\theta + B\sin\varphi\cos\theta = B_r\sin\theta + B_\theta\cos\theta \end{cases} \tag{5.4.2}$$

La résolution du système d'équations 5.4.2 permet d'écrire les composantes radiales et orthoradiales de B en fonction de ses coordonnées cartésiennes.

$$\begin{cases} B_r = B_x \cos\theta + B_z \sin\theta \\ B_\theta = -B_x \sin\theta + B_z \cos\theta \end{cases} \tag{5.4.3}$$

Comme $\cos\theta = \frac{x}{R}$ et $\cos\theta = \frac{z}{R}$, le système d'équations 5.4.4 s'écrit :

$$\begin{cases} B_r = B_x \frac{x}{R} + B_y \frac{z}{R} \\ B_\theta = -B_x \frac{z}{R} + B_z \frac{x}{R} \end{cases} \tag{5.4.4}$$

Le champ d'induction $\boldsymbol{B}$ peut finalement être déterminer en calculant son module : $B = \sqrt{(B_r + B_\theta)^{\frac{1}{2}}}$.

Le référencement

Il y a lieu ensuite d'effectuer un centrage, le référencement, afin de définir l'origine de la mesure. Les trois premiers points à référencer sont les points "XY1", "XY2" et "XY3". Pour ceux-ci, il faut veiller à ce que la sonde soit positionnée à l'extrémité du dispositif : le débitmètre, par exemple, en figure 5.39.

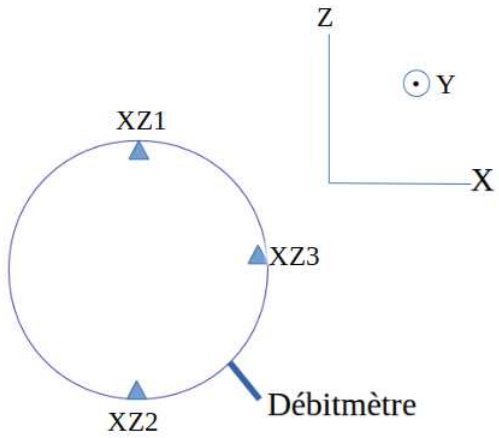


FIGURE 5.39: Etape de centrage

Il faut ensuite régler la position en z de la sonde en référençant deux points "Z1" et "Z2". La sonde se positionnera alors au point $Z = \frac{Z1+Z2}{2}$. Les points étant référencés, le centrage peut être effectué. Si celui-ci convient à l'utilisateur, la mesure peut démarrer.

5.4.7 Tests de qualification

Cette partie présente le protocole mis en place pour mesurer le champ magnétique d'un débitmètre électromagnétique. L'objectif est de tester le bon fonctionnement du système de mesure et de vérifier qu'il répond aux spécifications demandées. Pour cela, un test est effectué sur les bobines du débitmètre électromagnétique, dont on connaît le résultat théorique, afin de pouvoir ensuite comparer les relevés expérimentaux aux résultats issus de la modélisation numérique. Le premier test consiste en la mesure de l'induction magnétique produite par une bobine. On procède d'abord par approche théorique, avant d'effectuer les mesures expérimentales.

Approche théorique

Un exemple de bobine du BigMag 5100 est représenté en figure 5.40. C'est sur ce type de bobine que les mesures ont été effectuées. L'idée est de retrouver par l'expérience le champ magnétique calculé théoriquement. Cela permet de qualifier avec exactitude le banc de mesure.

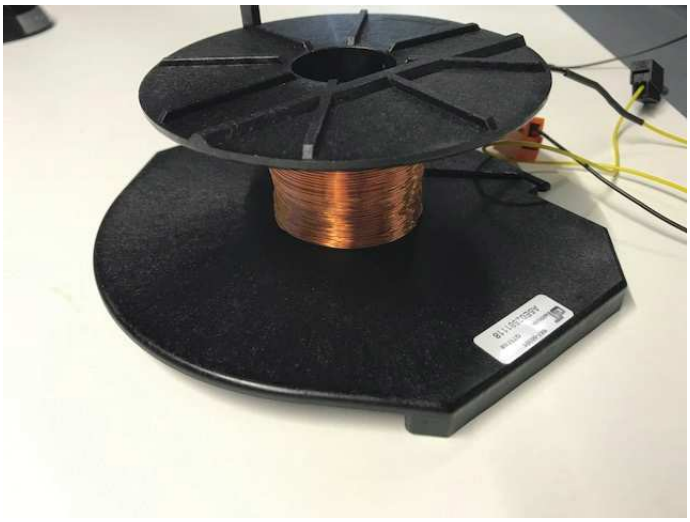


FIGURE 5.40: Bobine d'un BigMag 5100

L'induction magnétique d'une bobine et celle d'un solénoïde monocouche (une seule couche de spires), peut être exprimée au centre par la relation :

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L} \cos\alpha \tag{5.4.5}$$

La longueur de cette bobine est L= 41 mm et son rayon R = ± 22,5 mm. Ce dernier peut varier de 0.1 mm d'une bobine à l'autre. On a donc au centre de la bobine :

$$\cos\alpha = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}} \tag{5.4.6}$$

Les autres paramètres sont les suivants :

- N = 1280
- $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m
- I = 0.125 A

Une application numérique de la relation 5.4.5 donne une induction B au centre de 3,3 mT.

D'un point de vue théorique, une bobine est constituée de N spires de courant. On va dans un premier temps,considérer la spire de courant de rayon R, parcouru par un courant d'intensité I et déterminons l'induction magnétique au point M.

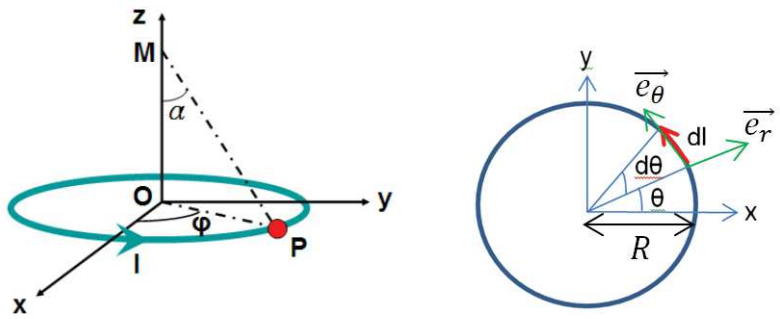


FIGURE 5.41: Boucle de courant générant un champ magnétique au point M

La loi de Biot et Savart s'écrit :

$$\boldsymbol{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{PM}}{PM^3} \tag{5.4.7}$$

Ici $\boldsymbol{PM} = \boldsymbol{PO} + \boldsymbol{OM} = -R\boldsymbol{e_r} + z\boldsymbol{e_z}$ donc $PM^2 = R^2 + z^2$
D'après la figure 5.41, $d\boldsymbol{l} = Rd\theta\boldsymbol{e_\theta}$
Le plan xOy est plan de symétrie pour le courant I, il est donc plan d'antisymétrie pour l'induction magnétique donc $Bx = By = 0$. L'induction magnétique au point M s'écrit alors :

$$\boldsymbol{B}(M) = B_z\boldsymbol{e_z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.4.8}$$

Alors

$$\boldsymbol{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2R} sin^3\alpha \tag{5.4.9}$$

Au centre l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \tag{5.4.10}$$

De cette expression on peut déduire l'induction magnétique créée par une bobine. En effet, une bobine est un enroulement de N spires de courant.

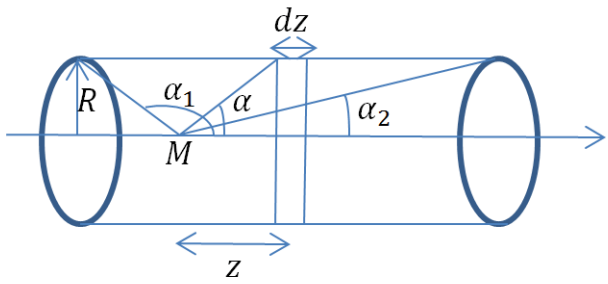


FIGURE 5.42: Solénoïde

Dans ce cas précis, la longueur L est considérée comme suffisamment grande par rapport au rayon R.
Il y a donc $\frac{N}{L}dz$ spires de courant sur une tranche dz d'où :

$$d\boldsymbol{B} = \frac{N}{L}dz\frac{\mu_0 I}{2R}sin^3\alpha \tag{5.4.11}$$

Or $z = \frac{R}{tan\alpha}$ donc $dz = \frac{-R}{sin^2\alpha}d\alpha$ donc :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2L}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}(-\sin\alpha)\,d\alpha = \frac{\mu_0 NI}{2L}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) \tag{5.4.12}$$

avec au centre de la bobine bobine, on a $\pi = \alpha_1 + \alpha_2$. L'induction magnétique s'écrit donc au centre de la bobine :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L}\cos\alpha \tag{5.4.13}$$

Cette équation confirme bien l'équation 5.4.5 donnée précédemment. En réalité, les bobines utilisées sont des solénoïdes multicouches, il faut donc intégrer l'expression 5.4.13 entre le rayon intérieur R_1 et le rayon extérieur R_2. On a donc :

$$B(0)_{multicouche} = \int_{R_1}^{R_2} B(0)_{monocouche}.n'dr \tag{5.4.14}$$

On va supposer qu'il y a n couches de $N \times L$ spires dont l'épaisseur e dépend du rayon intérieur R_1 et extérieur R_2 calculé à partir de la relation $e = R_2 - R_1$. Chaque couche n de la bobine possède une épaisseur notée r soit un nombre de couche par unité d'épaisseur de $n' = \frac{n}{(R_2 - R1)}$. Il y a finalement $n'dr$ couches de $N \times L$ spires dans l'intervalle dr d'où :

$$B(0)_{multicouche} = \int_{R_1}^{R_2} \mu_0 NI\frac{L}{2R^2 + L^2}.\frac{n}{(R_2 - R_1)}dr \tag{5.4.15}$$

où n est le nombre de couches.

L'équation 5.4.15 s'écrit :

$$B(0)_{multicouche} = \frac{\mu_0 NILn}{(R_2 - R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{L\sqrt{\left(\frac{4R^2}{L^2}\right) + 1}} dr \tag{5.4.16}$$

Posons $x = \frac{2R}{L}$ on a alors :

$$B(0)_{multicouche} = \frac{\mu_0 NIn}{(R_2 - R_1)} \int_{\frac{2R_1}{L}}^{\frac{2R_2}{L}} \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \tag{5.4.17}$$

soit

$$B(0)_{multicouche} = \frac{\mu_0 NInL}{2\,(R_2 - R_1)} \int_{\frac{2R_1}{L}}^{\frac{2R_2}{L}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \tag{5.4.18}$$

Par définition la dérivée de la fonction $arcsinh$ est $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Cette fonction peut également être exprimé en fonction du logarithme népérien : $arcsinh = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$. On a finalement :

$$B(0)_{multicouche} = \frac{\mu_0 NInL}{2\,(R_2 - R_1)} ln \left[\frac{\frac{2R_2}{L} + \sqrt{1 + \frac{4R_2^2}{L^2}}}{\frac{2R_1}{L} + \sqrt{1 + \frac{4R_1^2}{L^2}}} \right] \tag{5.4.19}$$

avec :

- $N = 1280$ tours
- $R_1 = 17{,}5$ mm : rayon intérieur
- $R_2 = 22{,}5$ mm : rayon extérieur
- $L = 41$ mmm : longueur de la bobine
- $e = 5$ mm : épaisseur de la bobine (R_2-R_1)
- $d = 0{,}375$ mm : diamètre du fil de cuivre

Ces données nous permettent de calculer le nombre de couche via le rapport $\frac{e}{d} = 13$. Il y a donc $\frac{1280}{13} = 98$ spires par couche.
Une application numérique de l'équation 5.4.19 donne une induction B au centre de 1,9 mT. Les résultats donnés par les expressions 5.4.5 et 5.4.19 sont sensiblement dfférents. La mesure expérimentale permettra de valider l'une des deux expressions.

5.4.8 Mesure de l'induction magnétique des bobines

L'objectif est de valider le résultat théorique par l'expérience afin de pouvoir le comparer aux résultats de simulation. C'est une étape essentielle, car les bobines produisent le champ magnétique dans les débitmètres électromagnétiques. Il est donc impératif de disposer d'un modèle le plus fiable possible. Le champ magnétique est mesuré le long de l'axe de la bobine. Dans ce cas

précis, il s'agit de l'axe z uniquement. Pour cela, on utilise une matrice de coordonnées, comme présentée dans le paragraphe précédent, en mesurant une cinquantaine de points.

Résultats

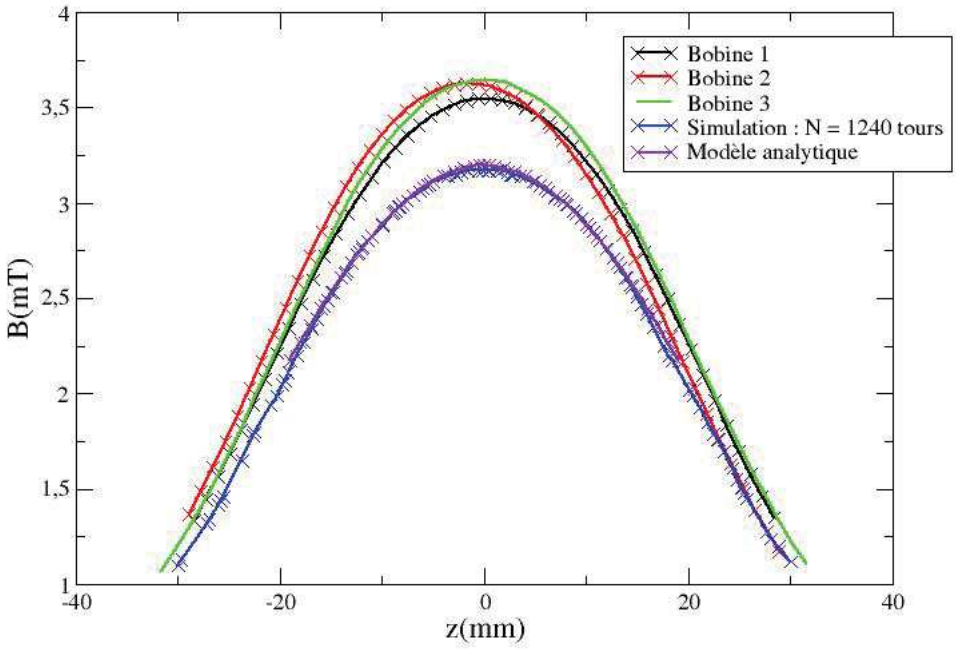


FIGURE 5.43: Mesure de l'induction magnétique et comparaison avec le modèle numérique

On constate la bonne reproductibilité des mesures effectuées sur 3 bobines ayant chacune les mêmes spécifications techniques. Cela garantit que le champ magnétique créée par chaque bobine dans le débitmètre sera plus ou moins identique. On constate, en outre, que la modélisation numérique correspond à l'approche théorique (expression 5.4.5). En revanche, il est surprenant d'observer que les résultats expérimentaux indiquent une induction magnétique au centre de la bobine légèrement plus grande en terme d'intensité, par rapport aux résultats numériques et théoriques. En effet, sur la simulation on a un bobine parfaite, contrairement aux bobines réelles. Ces dernières se comportent comme si le nombre de tours dépassait la valeur

indiquée par la spécification technique. Pour palier à cela, il faut modifier le nombre de tours de la bobine simulée pour parvenir à une concordant entre les résultats expérimentaux et numériques. Procéder de cette façon permettra par la suite de s'affranchir de cette erreur, lorsqu'on comparera les résultats numériques aux résultats expérimentaux de l'induction magnétique mesurée à l'intérieur du débitmètre électromagnétique. En effet, l'objectif est de disposer d'un modèle fiable et réaliste du dispositif.

Ajustement du modèle

Pour déterminer le nombre de tours adéquat, il existe deux solutions possibles. La première est de se servir du résultat théorique et de trouver la valeur de N qui permet d'obtenir l'induction magnétique mesurée. La seconde est de modifier le nombre de tours dans le modèle numérique. Elle est plus fastidieuse. Dans les deux cas, c'est un changement artificiel des paramètres . Il serait préférable dans le futur d'utiliser un facteur de correction pour le solénoïde à plusieurs couches.

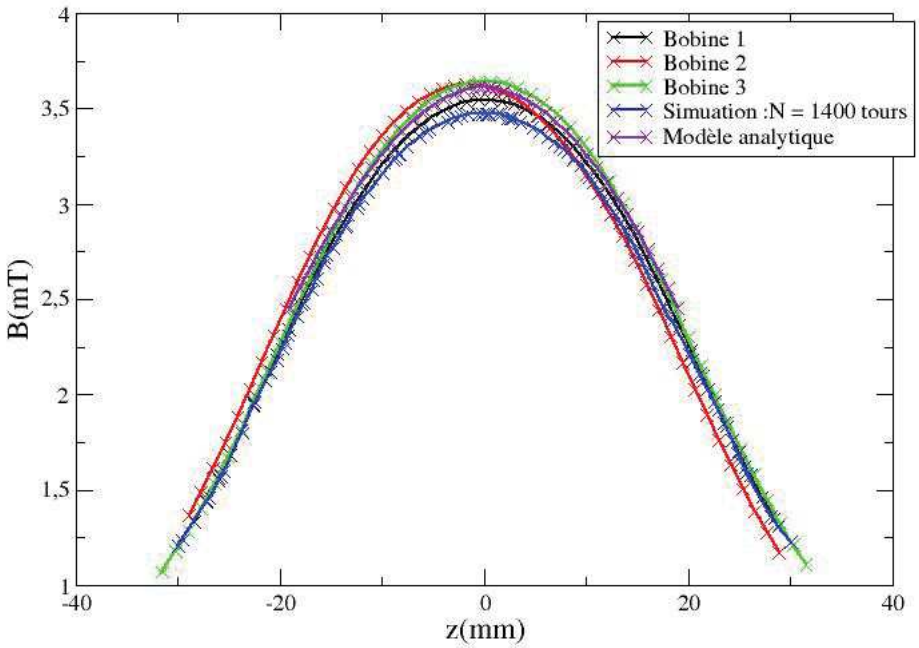


FIGURE 5.44: Ajustement du modèle numérique

5.4.9 Mesure de l'induction magnétique dans le débitmètre

Le modèle des bobines étant validé, l'étape suivante consiste à mesurer l'induction magnétique dans le débitmètre électromagnétique et de le comparer au résultat de la simulation. Pour cela, l'induction magnétique est mesurée suivant les trois axes, l'un après l'autre. La première mesure est effectuée entre les électrodes de mesure, la deuxième entre les électrodes de masse. La figure 5.45 permet de rappeler où se situent les différentes électrodes, ainsi que les différents points mesurés.

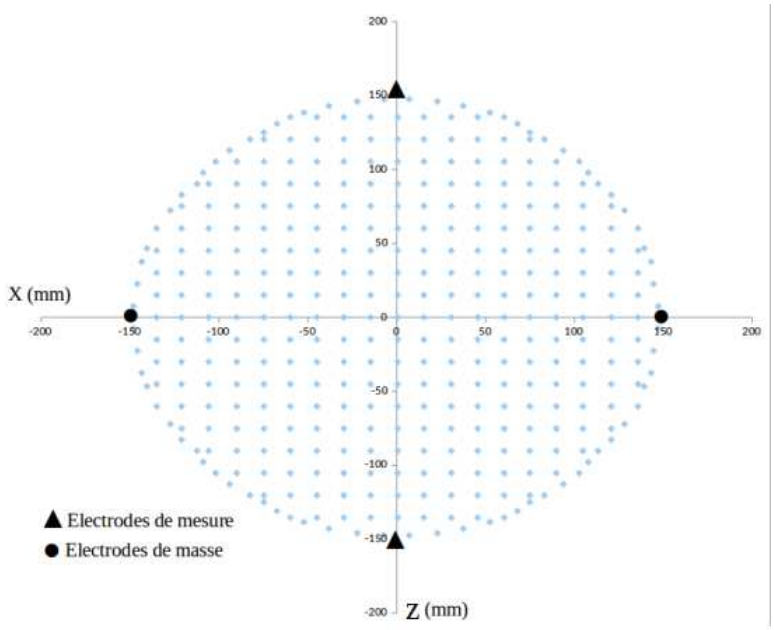


FIGURE 5.45: Cartographie du champ magnétique

Résultats

Les paramètres de la simulation sont ceux de la bobine et ceux des différents matériaux utilisés. Pour la bobine, on utilisera un courant de 125 mA et un nombre de tours égal à 1400 déterminé lors du test de qualification précédent. Pour les matériaux, on se sert des résultats obtenus dans le chapitre IV. Afin d'évaluer la correspondance et la simulation numérique , on utilise les valeurs minimales et maximales des perméabilités magnétiques relatives mesurées. Ces valeurs sont données dans le tableau 5.4. Deux simulations ont été effectuées : une en utilisant les perméabilités magnétiques relatives maximales mesurées de chaque pièce, l'autre en utilisant les valeurs minimales.

Bobine	N I (A) S (mm^2)	1400 0,125 205
Cœur toroïdal Casing Pole Piece/Return Path Tube ring	$\mu_r[1]$	750 $\mu_{r-min} = 169$, $\mu_{r-max} = 230$ $\mu_{r-min} = 103$, $\mu_{r-max} = 213$ $\mu_{r-min} = 103$, $\mu_{r-max} = 211$

Table 5.4: Paramètres physiques de la simulation.

Les résultats obtenus sont les suivants :

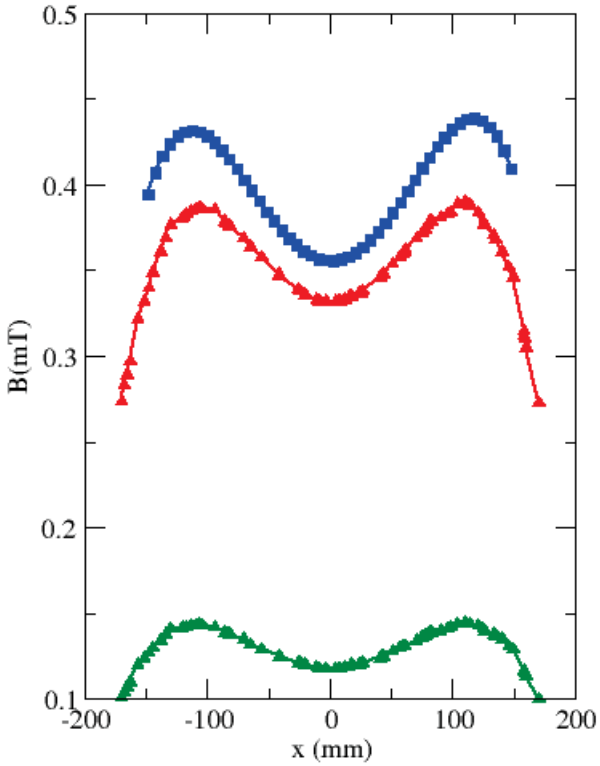


FIGURE 5.46: Comparaison entre les valeurs mesurées (bleue) et calculées du champ d'induction B pour des perméabilités magnétiques maximales (rouge) et minimales (vert) entre les électrodes de mesure

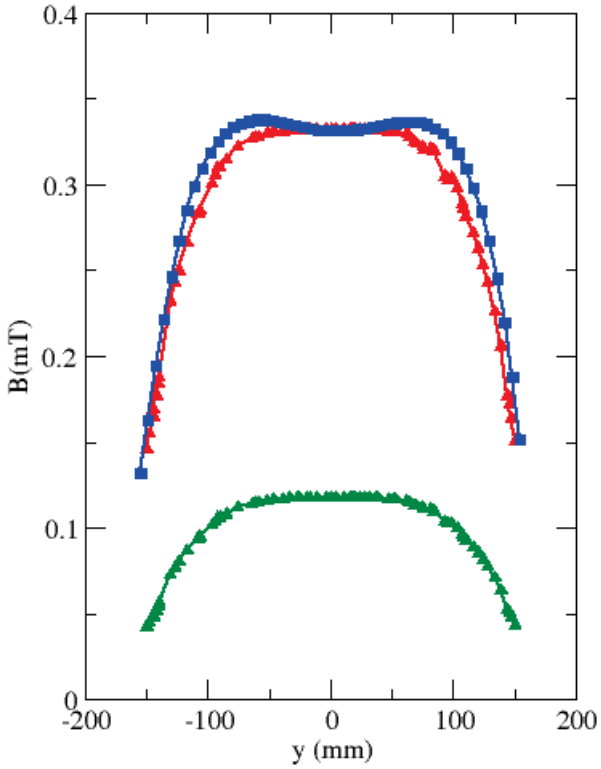


FIGURE 5.47: Comparaison entre les valeurs mesurées (bleue) et calculées du champ d'induction B pour des perméabilités magnétiques maximales (rouge) et minimales (vert) entre les électrodes de masse

A première vue, les résultats obtenus avec les perméabilités magnétiques relatives maximales donnent une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et la simulation au niveau du comportement physique (distribution de l'induction magnétique). On peut néanmoins constater un écart en terme d'intensité de l'induction magnétique. L'idée est maintenant d'ajuster le modèle, afin d'obtenir une meilleure correspondance en ce qui concerne l'intensité de l'induction magnétique. Pour cela, il faut jouer avec la valeur des différentes perméabilités magnétiques relatives. La manière la plus efficace est d'attribuer la valeur 1 aux perméabilités magnétiques relatives : les matériaux sont donc considérés comme de l'air et n'ont aucune influence sur l'induction magnétique. De cette façon, on peut connaître l'influence de chaque pièce sur l'intensité de l'induction magnétique. Les paramètres ci-dessous, permettent d'obtenir une bonne concordance, aussi bien en terme de distribution de l'induction magnétique, qu'en terme d'intensité.

Bobine	N I (A) S (mm^2)	1400 0.125 205
Cœur toroïdal Casing Pole Piece Tube ring Return Path	μ_r[1]	750 230 103 103 550

TABLE 5.5: Paramètres physiques de la simulation.

Résultats après ajustement des perméabilités magnétiques relatives

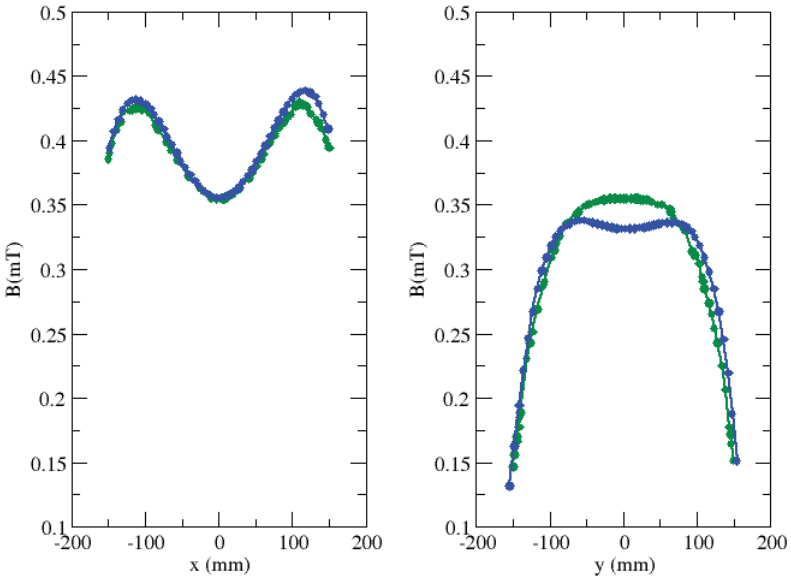


FIGURE 5.48: Comparaison entre les valeurs mesurées (bleu) et calculées (vert) du champ d'induction B (gauche) et les électrodes de masse (droite) après ajustement du modèle

Les résultats témoignent d'une bonne concordance entre la simulation et la mesure expérimentale, en particulier en ce qui concerne la distribution de l'induction magnétique entre les deux électrodes de mesure. En effet, il y a parfaite symétrie de l'induction magnétique par rapport à l'origine (centre du débitmètre). On peut néanmoins constater une légère différence de l'intensité de l'induction magnétique à +125 mm et -125 mm. Il peut y avoir plusieurs explications :

— La première concerne la géométrie du circuit magnétique qui n'est sans doute pas aussi parfaite que dans la simulation (contraintes d'assemblage, matériaux utilisés, etc...). Cela peut affecter l'intensité et la distribution de l'induction magnétique.
— La seconde concerne le positionnement de la sonde qui peut induire de légères variations dans la mesure de l'induction magnétique, du fait de sa taille. Son positionnement au mm près est difficile.

Les mêmes remarques s'appliquent pour les résultats au niveau des électrodes de masse. Cela se confirme par la valeur de l'induction magnétique à l'origine. On a 0.36 mT en figure gauche et 0.34 mT en figure droite, alors que la valeur de l'induction magnétique est identique dans les deux cas de simulation.

5.5 Conclusion

La mise en place d'un protocole expérimental a permis de valider les résultats numériques obtenus en début de chapitre. En effet, les résultats expérimentaux concordent avec ceux issus de la simulation numérique. D'un point de vue pratique, cela permet d'identifier très rapidement des défauts de production des débitmètres électromagnétiques par exemple. Il est en effet facile de les repérer, puisque toute dissymétrie de la distribution de l'induction magnétique par rapport au centre du dispositif serait identifiée. En effet, la géométrie du circuit magnétique est connue. Les résultats expérimentaux permettent également de déterminer le domaine de fonctionnement des débitmètres électromagnétiques. Ceci sera étudié dans le chapitre VII, en se focalisant sur le facteur d'étalonnage.

Chapitre 6

Modèle et calcul réaliste du potentiel entre les électrodes de mesure

6.1 Introduction

Le fonctionnement d'un débitmètre électromagnétique repose sur le principe selon lequel des particules chargées soumises à une induction magnétique subissent une force - la force de Lorentz - proportionnelle à leur vitesse et à leur charge[48].
En appliquant une induction magnétique, $\boldsymbol{B_{conduite}}$, dans une conduite dans laquelle circule un fluide contenant des particules chargées à la vitesse $\boldsymbol{v}$, la force de Lorentz est donnée par l'expression :

$$\boldsymbol{F_{Lorentz}} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B_{conduite}}. \tag{6.1.1}$$

La force de Lorentz dévie la trajectoire des particules dans des régions de la conduite opposées, selon la charge des particules (positive ou négative), figure 6.1. Il en résulte un déséquilibre dans la distribution des charges dans le fluide. Ceci induit une distribution d'énergie électrostatique sur les parois de la conduite caractéristique de la vitesse du fluide. En plaçant judicieusement des électrodes de mesure en des points spécifiques de la paroi, on est capable de mesurer des différences de potentiel caractéristiques de la vitesse du fluide dans la conduite.
Bien que simple sur le principe, la mise en pratique de ce type de mesure est compliquée, en raison des interactions coulombienne régnant entre l'ensemble des particules chargées du fluide.

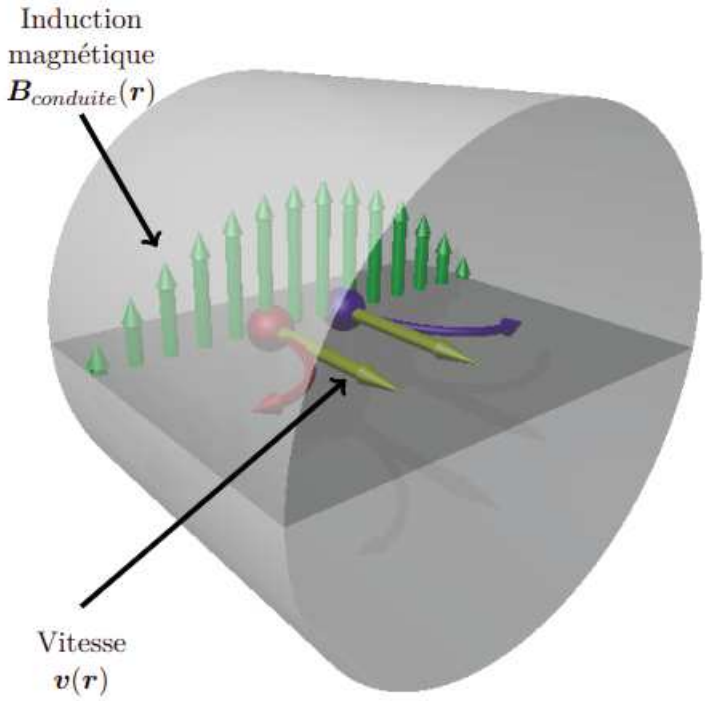


FIGURE 6.1: Trajectoires des particules chargées (positivement en rouge, négativement en bleu) appartenant au fluide soumises à la force de Lorentz.

Il a été montré, dans la section 3.4 d chapitre 3, que même dans le cas d'un système idéal du point de vue de la géométrie du débitmètre, de la distribution du champ d'induction dans la conduite et des conditions d'écoulement du fluide, il est compliqué d'un point de vue qualitatif, voire impossible d'un point de vue quantitatif, d'obtenir des expressions simples reliant la tension mesurée à la vitesse du fluide.
L'idée défendue à travers cette thèse est qu'il est possible d'obtenir des modèles quantitatifs en ayant recours à des méthodes numériques. Pour cela, une approche en deux étapes est utilisée : (i) le calcul numérique du champ d'induction dans la conduite décrit au chapitre V, et (ii) le calcul de la tension mesurée entre les électrodes décrit dans ce chapitre.
Cette étape consiste à déterminer l'évolution temporelle des s chargées du fluide sous l'effet d'un champ d'induction magnétique. Pour cela, deux approches sont considérées : l'approche mécanique et l'approche statistique. Dans les deux cas, la même distribution de charges initiale est considérée.
Avec l'approche mécanique, les équations de Newton sont résolues pour cha-

cune des particules chargées pour déterminer leur position et leur vitesse au cours du temps sous l'influence de l'induction magnétique B, ainsi que des forces d'interaction électrostatiques entre les particules chargées. L'approche statistique consiste à résoudre l'équation de Maxwell-Vlasov qui décrit l'évolution temporelle de la distribution de charges.
Outre le champ d'induction magnétique généré dans la conduite par les bobines, chaque charge est soumise à une interaction Coulombienne de la part de ses voisines. En toute rigueur, on devrait considérer chaque interaction individuellement. Toutefois, en raison du nombre important d'interactions à considérer, l'interaction Coulombienne entre les particules chargées a été traitée dans le cadre de la méthode "Particle In Cell (PIC)"[35]. Le principe est de calculer le champ électrostatique, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, aux points d'un maillage, à partir du potentiel électrostatique, $\phi(\boldsymbol{r})$, obtenu en résolvant l'équation de Poisson associée à la distribution de charge dans la conduite, $\rho(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0\epsilon_r}. \tag{6.1.2}$$

Le champ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ est calculé à partir du gradient du potentiel électrostatique :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}). \tag{6.1.3}$$

Le champ de Neumann $-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ étant négligé, le champ à la position de chaque particule chargée est calculé en faisant une interpolation trilinéaire.
Les algorithmes et les méthodes utilisés pour réaliser la simulation sont détaillés dans la suite de ce chapitre.

6.2 Approche mécanique

6.2.1 Calcul de la trajectoire des particules

Considérons un ensemble de particules de charge q_i, de masse m_i dont on connaît la position, $\boldsymbol{r}_i$, et la vitesse, $\boldsymbol{v}_i$, et à l'instant t circulant dans une conduite (figure 6.1). Leurs trajectoires au cours du temps sont déterminées par la seconde loi de Newton :

$$\frac{d\boldsymbol{p_i}(t)}{dt} = q_i\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_i(t);t) + \frac{q_i}{m_i}\boldsymbol{p}_i(t) \wedge \boldsymbol{B_{conduite}}(\boldsymbol{r_i}) = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r_i}, \boldsymbol{p_i}; t), \tag{6.2.1}$$

avec

$$\boldsymbol{p_i} = m_i\frac{d\boldsymbol{r_i}}{dt}, \tag{6.2.2}$$

la quantité de mouvement de la particule i.
En utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2 de la position des particules, on peut déterminer leur position à l'instant $t + \delta t$:

$$\boldsymbol{r}_i(t+\delta t) = \boldsymbol{r}_i(t) + \frac{d\boldsymbol{r}_i(t)}{dt}\delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2\boldsymbol{r}_i(t)}{dt^2}\delta t^2 + \mathcal{O}(\delta t^3), \tag{6.2.3}$$

soit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_i(t+\delta t) &= \boldsymbol{r}_i(t) + \frac{\boldsymbol{p}_i(t)}{m_i}\delta t + \frac{\boldsymbol{F_i}(\boldsymbol{r}_i(t),\boldsymbol{p}_i(t);t)}{2m_i}\delta t^2 + \mathcal{O}(\delta t^3) \quad (6.2.4)\\
\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r_i},\boldsymbol{p_i};t) &= q_i\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_i(t);t) + \frac{q_i}{m_i}\boldsymbol{p}_i(t)\wedge\boldsymbol{B_{conduite}}(\boldsymbol{r_i}). \quad (6.2.5)
\end{aligned}$$

Les deux composantes de la force $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r_i},\boldsymbol{p_i};t)$ agissant sur la particule i à l'instant t sont entièrement déterminées par la connaissance de la position, $\boldsymbol{r_i}$, et de la quantité de mouvement, $\boldsymbol{p_i}$, de la particule à l'instant t :

— la composante électrostatique, $\boldsymbol{F_E}(\boldsymbol{r}_i(t);t) = q_i\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_i(t);t)$ décrivant l'interaction Coulombienne de la particule i avec l'ensemble des particules chargées du fluide est calculée dans le cadre d'une approche de champ moyen : à partir de la distribution de charge $\rho(\boldsymbol{r};t)$ dans la conduite, on calcule le potentiel électrostatique en résolvant l'équation de Poisson :

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi(\boldsymbol{r};t) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r};t)}{\epsilon_0\epsilon_r}. \quad (6.2.6)$$

Le champ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r};t)$ dans la conduite est ensuite déterminé à partir du gradient du potentiel électrostatique :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r};t) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r};t). \quad (6.2.7)$$

— la composante magnétique, $\boldsymbol{F_B}(\boldsymbol{r}_i(t),\boldsymbol{p}_i(t);t) = \frac{q_i}{m_i}\boldsymbol{p}_i(t)\wedge\boldsymbol{B_{conduite}}(\boldsymbol{r_i})$, est calculée à partir des valeurs de l'induction magnétique calculées dans le cadre d'une approche par éléments finis, prenant en compte la géométrie du débitmètre (chapitre V).

Pour le calcul des quantités de mouvement des particules à l'instant $t+\delta t$, on considère les développements de Taylor de la quantité de mouvement et de sa dérivée à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_i(t+\delta t) &= \boldsymbol{p}_i(t) + \frac{d\boldsymbol{p}_i(t)}{dt}\delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2\boldsymbol{p}_i(t)}{dt^2}\delta t^2 + \mathcal{O}(\delta t^3), \quad (6.2.8)\\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t}(t+\delta t) &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t^2}(t)\delta t + \mathcal{O}(\delta t^3), \quad (6.2.9)
\end{aligned}$$

soit

$$\boldsymbol{p}_i(t+\delta t) = \boldsymbol{p}_i(t) + \frac{\delta t}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t}(t+\delta t) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t}(t)\right) + \mathcal{O}(\delta t^3), \quad (6.2.10)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_i(t+\delta t) = \boldsymbol{p}_i(t) + \frac{\delta t}{2}\,&(F_{\boldsymbol{E}}\,(\boldsymbol{r}_i(t+\delta t);t+\delta t) + F_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}_i(t);t)\\
&+F_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}_i(t+\delta t),\boldsymbol{p}_i(t+\delta t);t+\delta t) + F_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}_i(t),\boldsymbol{p}_i(t);t)) + \mathcal{O}(\delta t^3).
\end{aligned} \quad (6.2.11)$$

Les positions des particules aux instants t et $t+\delta t$ étant connues, les composantes électrostatiques aux instant t et $t+\delta t$ sont connues de même que la composante magnétique à l'instant t. En revanche, ce n'est pas le cas de la composante magnétique à l'instant $t+\delta t$ qui dépend de la quantité de mouvement $\boldsymbol{p}_i$ à l'instant $t+\delta t$ qui est précisément la quantité que l'on cherche à déterminer.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_i(t+\delta t) = \boldsymbol{p}_i(t) + \frac{\delta t}{2}\Big(F_{\boldsymbol{E}}\left(\boldsymbol{r}_i(t+\delta t); t+\delta t\right) + F_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}_i(t); t) \\ + F_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}_i(t), \boldsymbol{p}_i(t); t) + \frac{q_i}{m_i}\boldsymbol{p}_i(t+\delta t) \wedge \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{conduite}}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t+\delta t))\Big) + \mathcal{O}(\delta t^3).\end{aligned} \tag{6.2.12}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_i(t+\delta t) - \frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}\boldsymbol{p}_i(t+\delta t) \wedge \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{conduite}}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t+\delta t)) = \boldsymbol{p}_i(t) + \frac{\delta t}{2}\Big(F_{\boldsymbol{E}}\left(\boldsymbol{r}_i(t+\delta t); t+\delta t\right) \\ + F_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}_i(t); t) + F_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}_i(t), \boldsymbol{p}_i(t); t)\Big) + \mathcal{O}(\delta t^3).\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_i(t+\delta t) - \frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}\boldsymbol{p}_i(t+\delta t) \wedge \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{conduite}}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t+\delta t)) = \\ \boldsymbol{p}_i(t) + \frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}\boldsymbol{p}_i(t) \wedge \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{conduite}}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t)) + \frac{\delta t}{2}\Big(F_{\boldsymbol{E}}\left(\boldsymbol{r}_i(t+\delta t); t+\delta t\right) + F_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}_i(t); t)\Big) + \mathcal{O}(\delta t^3)\end{aligned} \tag{6.2.14}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_z(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t+\delta t)) & \frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_y(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t+\delta t)) \\ \frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_z(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t+\delta t)) & 1 & -\frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_x(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t+\delta t)) \\ -\frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_y(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t+\delta t)) & \frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_x(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t+\delta t)) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{x,i}(t+\delta t) \\ p_{y,i}(t+\delta t) \\ p_{z,i}(t+\delta t)\end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_z(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t)) & -\frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_y(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t)) \\ -\frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_z(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t)) & 1 & \frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_x(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t)) \\ \frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_y(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t)) & -\frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_x(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t)) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{x,i}(t) \\ p_{y,i}(t) \\ p_{z,i}(t)\end{pmatrix} \\ + \frac{\delta t}{2}\Big(F_{\boldsymbol{E}}\left(\boldsymbol{r}_i(t+\delta t); t+\delta t\right) + F_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}_i(t); t)\Big) \\ + \mathcal{O}(\delta t^3).\end{aligned} \tag{6.2.15}$$

On pose $\alpha_{i,\beta}(t) = \frac{\delta t}{2}\frac{q_i}{m_i}B_\beta(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}(t))$

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{i,z}(t+\delta t) & \alpha_{i,y}(t+\delta t) \\ \alpha_{i,z}(t+\delta t) & 1 & -\alpha_{i,x}(t+\delta t) \\ -\alpha_{i,y}(t+\delta t) & \alpha_{i,x}(t+\delta t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{x,i}(t+\delta t) \\ p_{y,i}(t+\delta t) \\ p_{z,i}(t+\delta t) \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{i,z}(t) & -\alpha_{i,y}(t) \\ -\alpha_{i,z}(t) & 1 & \alpha_{i,x}(t) \\ \alpha_{i,y}(t) & -\alpha_{i,x}(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{x,i}(t) \\ p_{y,i}(t) \\ p_{z,i}(t) \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad + \frac{\delta t}{2} \left(F_{\boldsymbol{E}} \left(\boldsymbol{r}_i(t+\delta t); t+\delta t \right) + F_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}_i(t); t) \right) \\
&\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(\delta t^3).
\end{aligned} \tag{6.2.16}
$$

Les composantes de la quantité de mouvement pour chacune des charges sont alors déterminées en résolvant le système d'équations linéaires :

$$
A_i(t+\delta t)\boldsymbol{p}_i(t+\delta t) = B_i(t)\boldsymbol{p}_i(t) + \frac{\delta t}{2} \left(F_{\boldsymbol{E}} \left(\boldsymbol{r}_i(t+\delta t); t+\delta t \right) + F_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}_i(t); t) \right). \tag{6.2.17}
$$

La matrice $A_i(t+\delta t)$ est facilement inversible :

$$
A_i^{-1}(t+\delta t) = \frac{1}{D} adj \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{i,z}(t+\delta t) & \alpha_{i,y}(t+\delta t) \\ \alpha_{i,z}(t+\delta t) & 1 & -\alpha_{i,x}(t+\delta t) \\ -\alpha_{i,y}(t+\delta t) & \alpha_{i,x}(t+\delta t) & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.2.18}
$$

avec le déterminant $\Delta_i(t+\delta t)$ donné par

$$
D = \Delta_i(t+\delta t) = 1 + \sum_{\beta=x,y,z} \alpha_{i,\beta}^2(t+\delta t) = 1 + \left(\frac{q_i \delta t}{2 m_i} \right)^2 \boldsymbol{B}^2(t+\delta t). \tag{6.2.19}
$$

$$
\boldsymbol{p}_i(t+\delta t) = A_i^{-1}(t+\delta t) B_i(t) \boldsymbol{p}_i(t) + \frac{\delta t}{2} A_i^{-1}(t+\delta t) \left(F_{\boldsymbol{E}} \left(\boldsymbol{r}_i(t+\delta t); t+\delta t \right) + F_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}_i(t); t) \right). \tag{6.2.20}
$$

Dans le cas d'une géométrie simple de débitmètres pour laquelle seule la composante de l'induction magnétique selon l'axe z est non nulle ($\boldsymbol{B}_{conduite} =$

$B_z \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$), on a

$$\begin{pmatrix} p_{x,i}(t+\delta t) \\ p_{y,i}(t+\delta t) \\ p_{z,i}(t+\delta t) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{q_i \delta t}{2m_i} B_z(t+\delta t\right))^2} \begin{pmatrix} 1+\alpha_{i,z}(t)\alpha_{i,z}(t+\delta t) & \alpha_{i,z}(t)-\alpha_{i,z}(t+\delta t) & 0 \\ -(\alpha_{i,z}(t)+\alpha_{i,z}(t+\delta t)) & 1+\alpha_{i,z}(t)\alpha_{i,z}(t+\delta t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{x,i}(t) \\ p_{y,i}(t) \\ p_{z,i}(t) \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\delta t}{2} \left(F_{\boldsymbol{E}} \left(\boldsymbol{r}_i(t+\delta t); t+\delta t \right) + F_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}_i(t); t) + (\mathcal{O}(\delta t^3)) \right. \quad . \tag{6.2.21}$$

On retrouve bien dans ce cas que l'impact du champ d'induction orienté selon l'axe z est de transférer une partie de la quantité de mouvement p_β de la direction $\hat{\boldsymbol{e}}_\beta$ (terme $1-\alpha_z(t)\alpha_z(t+\delta t)$) dans la troisième direction perpendiculaire à β et z, déviant la particule de sa trajectoire initiale.

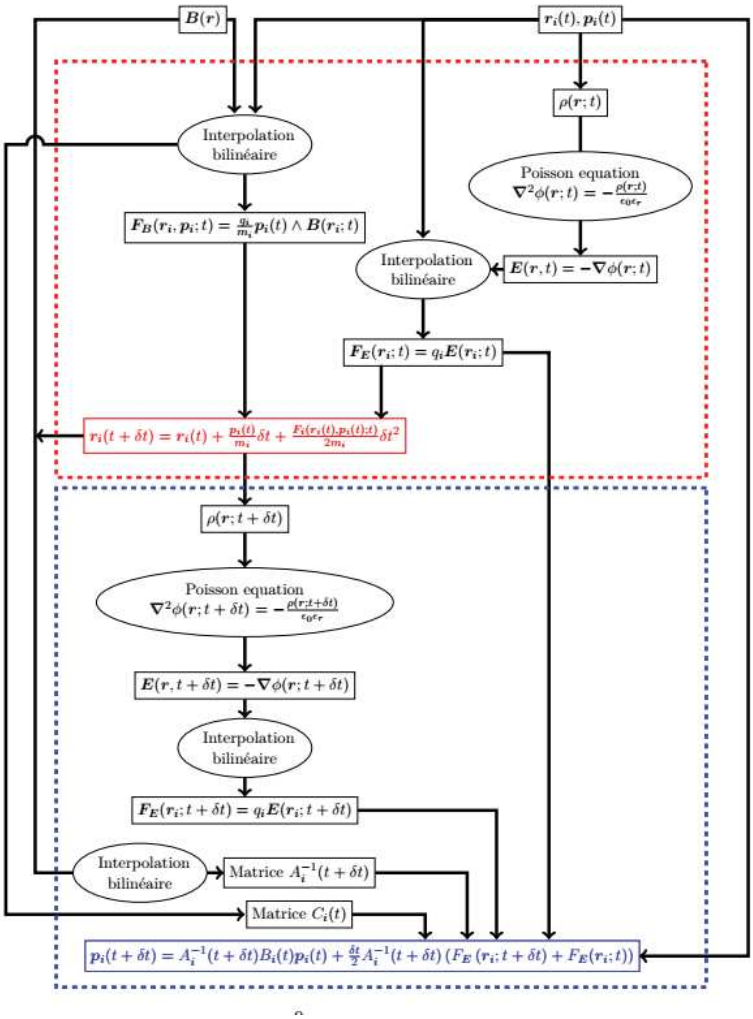


FIGURE 6.2: Algorithme utilisé pour la détermination du potentiel électrostatique

6.2.2 Calcul du champ électrostatique $\boldsymbol{E}$

L'interaction Coulombienne entre les particules chargées est traitée dans le cadre de la méthode "Particle In Cell (PIC)" [35], [18],[31],[69],[30]. Le principe est de calculer le champ électrostatique, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, aux points d'un maillage, à partir du potentiel électrostatique, $\phi(\boldsymbol{r})$, obtenu en résolvant l'équation de Poisson associée à la distribution de charge dans la conduite, $\rho(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0\epsilon_r}. \tag{6.2.22}$$

où $\epsilon_0 = 8,85418782.10^{-12} F.m^{-1}$ est la permittivité diélectrique du vide et

ϵ_r la permittivité diélectrique relative du milieu considéré. Le champ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ est calculé à partir du gradient du potentiel électrostatique :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}). \tag{6.2.23}$$

Le champ, à la position de chaque particule chargée, est calculé en faisant une interpolation bilinéaire (2D) ou trilinéaire (3D).
A noter que la distribution de charge est calculée en comptant le nombre de charges situées dans un volume d$\boldsymbol{r}$ autour de chaque nœud du maillage.
Pour résoudre l'équation de Poisson, la méthode des différences finies a été utilisée. Cette méthode consiste à remplacer l'opérateur laplacien, ∇^2, par une approximation en différences finies. La première étape est de définir un maillage aux nœuds duquel seront calculées des quantités telles que le potentiel électrostatique, $\phi(\boldsymbol{r})$.

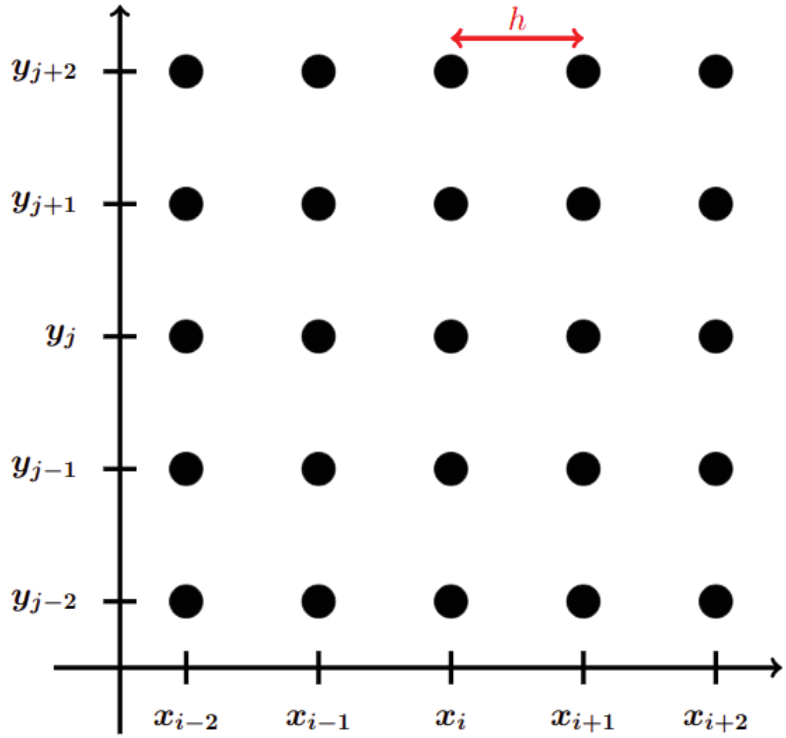


FIGURE 6.3: Maillage à deux dimensions utilisé dans la méthode des différences finies.

La figure 6.3 présente un exemple d'un maillage utilisé dans le cas d'un système bidimensionnel. On définit h comme étant la distance minimale entre deux nœuds voisins du maillage. Chaque nœud est alors défini par un couple de coordonnées $x_i = ih$ et $y_j = jh$, où i et j sont des entiers.

En pratique i et j sont utilisés comme indices des matrices représentant les quantités que l'on veut calculer ou dont on a besoin pour faire les calculs (potentiel électrostatique, distribution de charge, $\cdots$) : $\phi(x_i, y_i) \equiv \phi(i, j)$.

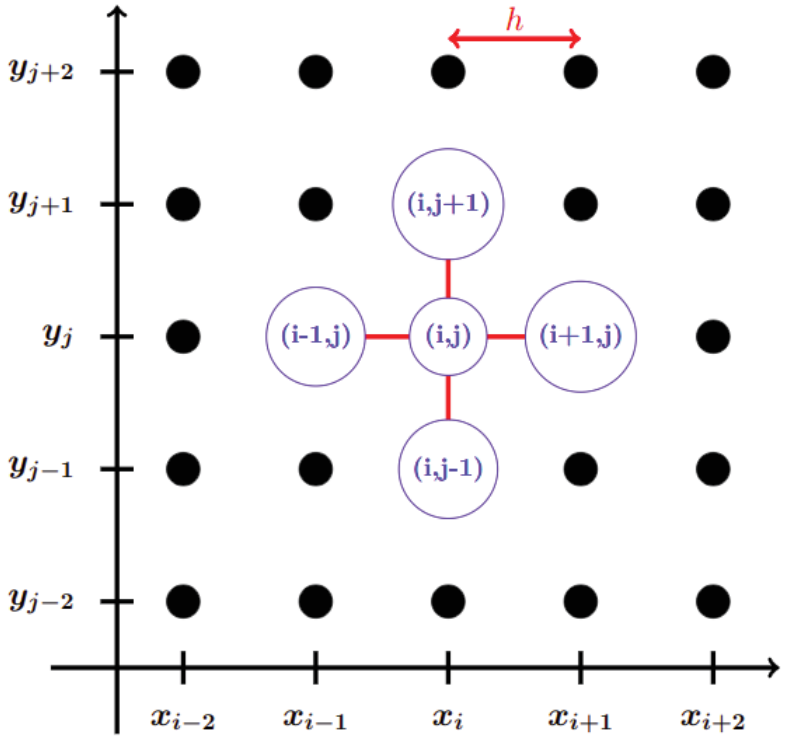


FIGURE 6.4: Exemple des nœuds impliqués dans l'approximation de l'opérateur laplacien.

L'étape suivante consiste à approximer l'opérateur laplacien, ∇^2, agissant sur le potentiel électrostatique ϕ, en une somme pondérée de valeurs du potentiel électrostatique prises aux nœuds du maillage. Pour calculer les coefficients de pondération, on utilise un développement de Taylor du potentiel électrostatique, $\phi(x)$[80] :

$$\phi(x+h, y) = \phi(x, y) + h\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^3), \quad (6.2.24)$$

$$\phi(x, y) = \phi(x, y), \quad (6.2.25)$$

$$\phi(x-h, y) = \phi(x, y) - h\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^3). \quad (6.2.26)$$

On forme ensuite la somme

$$\begin{aligned}
&a\phi(x+h,y)+b\phi(x,y)+c\phi(x-h,y)\\
&=(a+b+c)\phi(x,y)+(a-c)h\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}+(a+c)\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}+\mathcal{O}(h^3)
\end{aligned} \quad . \tag{6.2.27}$$

A partir de l'équation (6.2.27), on constate que l'expression de la dérivée seconde du potentiel électrostatique peut être obtenue en résolvant le système d'équations linéaires :

$$a+b+c = 0 \tag{6.2.28}$$
$$a-c = 0 \tag{6.2.29}$$
$$a+c = 1 \tag{6.2.30}$$
$$\tag{6.2.31}$$

ce qui implique $a=c=1$ et $b=-2$:

$$\frac{\partial^2\phi(i,j)}{\partial x^2}\simeq\frac{\phi(i-1,j)-2\phi(i,j)+\phi(i+1,j)}{h^2}. \tag{6.2.32}$$

On peut dériver une expression similaire pour y :

$$\frac{\partial^2\phi(i,j)}{\partial y^2}\simeq\frac{\phi(i,j-1)-2\phi(i,j)+\phi(i,j+1)}{h^2}, \tag{6.2.33}$$

L'opérateur laplacien, à 2D, $\nabla^2\phi(i,j)=\frac{\partial^2\phi(i,j)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi(i,j)}{\partial y^2}$, peut alors être approximé par l'expression :

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi(i,j)\simeq&\frac{\phi(i-1,j)-2\phi(i,j)+\phi(i+1,j)}{h^2}+\frac{\phi(i,j-1)-2\phi(i,j)+\phi(i,j+1)}{h^2}\\
&=-\frac{\rho(i,j)}{\varepsilon_0}
\end{aligned} \tag{6.2.34}$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{h^2}\left(\phi(i-1,j)+\phi(i,j-1)-4\,\phi(i,j)+\phi(i+1,j)+\phi(i,j+1)\right)=-\frac{\rho(i,j)}{\varepsilon_0}. \tag{6.2.35}$$

On constate à partir de l'équation (6.2.35) que la discrétisation de l'équation de Poisson relie la valeur du potentiel électrostatique au point (i,j) avec les valeurs aux points voisins de (i,j) et à la valeur de la densité de charge en ce

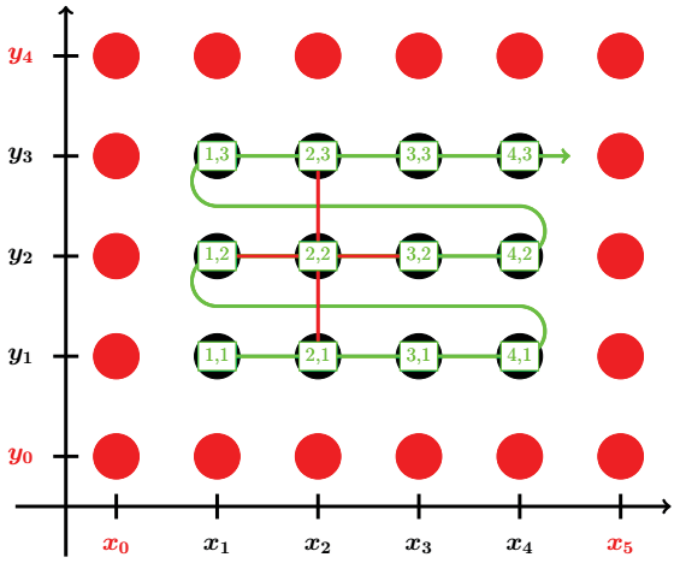


FIGURE 6.5: Exemple d'un maillage $N_x(= 4) \times N_y(= 3)$. Les nœuds en noir représentent les points où l'on calcule le potentiel électrostatique ; les nœuds en rouge représentent les nœuds appartenant aux limites du domaine de calcul.

point. Il y a autant d'équations (6.2.35) qu'il y a de nœuds dans le maillage, une pour chaque nœud.
La figure 6.5 présente un exemple d'un maillage $N_x(= 4) \times N_y(= 3)$. Pour résoudre l'équation de Poisson, on doit alors considérer un système de $N_x \times N_y = 12$ équations linéaires couplées.

$$
\begin{aligned}
(1,1) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\phi(0,1) + \frac{1}{h^2}\phi(1,0) - \frac{4}{h^2}\phi(1,1) + \frac{1}{h^2}\phi(2,1) + \frac{1}{h^2}\phi(1,2) &= -\frac{\rho(1,1)}{\varepsilon_0} \\
(2,1) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\phi(1,1) + \frac{1}{h^2}\phi(2,0) - \frac{4}{h^2}\phi(2,1) + \frac{1}{h^2}\phi(3,1) + \frac{1}{h^2}\phi(2,2) &= -\frac{\rho(2,1)}{\varepsilon_0} \\
(3,1) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\phi(2,1) + \frac{1}{h^2}\phi(3,0) - \frac{4}{h^2}\phi(3,1) + \frac{1}{h^2}\phi(4,1) + \frac{1}{h^2}\phi(3,2) &= -\frac{\rho(3,1)}{\varepsilon_0} \\
(4,1) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\phi(3,1) + \frac{1}{h^2}\phi(4,0) - \frac{4}{h^2}\phi(4,1) + \frac{1}{h^2}\phi(5,1) + \frac{1}{h^2}\phi(4,2) &= -\frac{\rho(4,1)}{\varepsilon_0} \\
(1,2) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\phi(0,2) + \frac{1}{h^2}\phi(1,1) - \frac{4}{h^2}\phi(1,2) + \frac{1}{h^2}\phi(2,2) + \frac{1}{h^2}\phi(1,3) &= -\frac{\rho(1,2)}{\varepsilon_0} \\
(2,2) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\phi(1,2) + \frac{1}{h^2}\phi(2,1) - \frac{4}{h^2}\phi(2,2) + \frac{1}{h^2}\phi(3,2) + \frac{1}{h^2}\phi(2,3) &= -\frac{\rho(2,2)}{\varepsilon_0} \\
(3,2) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\phi(2,2) + \frac{1}{h^2}\phi(3,1) - \frac{4}{h^2}\phi(3,2) + \frac{1}{h^2}\phi(4,2) + \frac{1}{h^2}\phi(3,3) &= -\frac{\rho(3,2)}{\varepsilon_0} \\
(4,2) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\phi(3,2) + \frac{1}{h^2}\phi(4,1) - \frac{4}{h^2}\phi(4,2) + \frac{1}{h^2}\phi(5,2) + \frac{1}{h^2}\phi(4,3) &= -\frac{\rho(4,2)}{\varepsilon_0} \\
(1,3) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\phi(0,3) + \frac{1}{h^2}\phi(1,2) - \frac{4}{h^2}\phi(1,3) + \frac{1}{h^2}\phi(2,3) + \frac{1}{h^2}\phi(1,4) &= -\frac{\rho(1,3)}{\varepsilon_0} \\
(2,3) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\phi(1,3) + \frac{1}{h^2}\phi(2,2) - \frac{4}{h^2}\phi(2,3) + \frac{1}{h^2}\phi(3,3) + \frac{1}{h^2}\phi(2,4) &= -\frac{\rho(2,3)}{\varepsilon_0} \\
(3,3) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\phi(2,3) + \frac{1}{h^2}\phi(3,2) - \frac{4}{h^2}\phi(3,3) + \frac{1}{h^2}\phi(4,3) + \frac{1}{h^2}\phi(3,4) &= -\frac{\rho(3,3)}{\varepsilon_0} \\
(4,3) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\phi(3,3) + \frac{1}{h^2}\phi(4,2) - \frac{4}{h^2}\phi(4,3) + \frac{1}{h^2}\phi(5,3) + \frac{1}{h^2}\phi(4,4) &= -\frac{\rho(4,3)}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

Dans les équations ci-dessus, les termes en rouge représentent le potentiel électrostatique aux limites du domaine de calcul. Ils n'appartiennent pas à ce domaine, mais sont nécessaires pour résoudre le système d'équations linéaires.

$$
\begin{aligned}
-\frac{4}{h^2}\phi(1,1)+\frac{1}{h^2}\phi(2,1)+\frac{1}{h^2}\phi(1,2) &= -\frac{\rho(1,1)}{\varepsilon_0}-\frac{1}{h^2}\phi(0,1)-\frac{1}{h^2}\phi(1,0)\\
\frac{1}{h^2}\phi(1,1)-\frac{4}{h^2}\phi(2,1)+\frac{1}{h^2}\phi(3,1)+\frac{1}{h^2}\phi(2,2) &= -\frac{\rho(2,1)}{\varepsilon_0}-\frac{1}{h^2}\phi(2,0)\\
\frac{1}{h^2}\phi(2,1)-\frac{4}{h^2}\phi(3,1)+\frac{1}{h^2}\phi(4,1)+\frac{1}{h^2}\phi(3,2) &= -\frac{\rho(3,1)}{\varepsilon_0}-\frac{1}{h^2}\phi(3,0)\\
\frac{1}{h^2}\phi(3,1)-\frac{4}{h^2}\phi(4,1)+\frac{1}{h^2}\phi(4,2) &= -\frac{\rho(4,1)}{\varepsilon_0}-\frac{1}{h^2}\phi(4,0)-\frac{1}{h^2}\phi(5,1)\\
\frac{1}{h^2}\phi(1,1)-\frac{4}{h^2}\phi(1,2)+\frac{1}{h^2}\phi(2,2)+\frac{1}{h^2}\phi(1,3) &= -\frac{\rho(1,2)}{\varepsilon_0}-\frac{1}{h^2}\phi(0,2)\\
\frac{1}{h^2}\phi(1,2)+\frac{1}{h^2}\phi(2,1)-\frac{4}{h^2}\phi(2,2)+\frac{1}{h^2}\phi(3,2)+\frac{1}{h^2}\phi(2,3) &= -\frac{\rho(2,2)}{\varepsilon_0}\\
\frac{1}{h^2}\phi(2,2)+\frac{1}{h^2}\phi(3,1)-\frac{4}{h^2}\phi(3,2)+\frac{1}{h^2}\phi(4,2)+\frac{1}{h^2}\phi(3,3) &= -\frac{\rho(3,2)}{\varepsilon_0}\\
\frac{1}{h^2}\phi(3,2)+\frac{1}{h^2}\phi(4,1)-\frac{4}{h^2}\phi(4,2)+\frac{1}{h^2}\phi(4,3) &= -\frac{\rho(4,2)}{\varepsilon_0}-\frac{1}{h^2}\phi(5,2)\\
\frac{1}{h^2}\phi(1,2)-\frac{4}{h^2}\phi(1,3)+\frac{1}{h^2}\phi(2,3) &= -\frac{\rho(1,3)}{\varepsilon_0}-\frac{1}{h^2}\phi(0,3)-\frac{1}{h^2}\phi(1,4)\\
\frac{1}{h^2}\phi(1,3)+\frac{1}{h^2}\phi(2,2)-\frac{4}{h^2}\phi(2,3)+\frac{1}{h^2}\phi(3,3) &= -\frac{\rho(2,3)}{\varepsilon_0}-\frac{1}{h^2}\phi(2,4)\\
\frac{1}{h^2}\phi(2,3)+\frac{1}{h^2}\phi(3,2)-\frac{4}{h^2}\phi(3,3)+\frac{1}{h^2}\phi(4,3) &= -\frac{\rho(3,3)}{\varepsilon_0}-\frac{1}{h^2}\phi(3,4)\\
\frac{1}{h^2}\phi(3,3)+\frac{1}{h^2}\phi(4,2)-\frac{4}{h^2}\phi(4,3) &= -\frac{\rho(4,3)}{\varepsilon_0}-\frac{1}{h^2}\phi(5,3)-\frac{1}{h^2}\phi(4,4)
\end{aligned}
$$

En arrangeant les valeurs du potentiel électrostatique aux nœuds du maillage 2D, $\phi(i,j)$, sous la forme d'un vecteur, en suivant le chemin en vert présenté sur la figure 6.5, les équations ci-dessus peuvent être représentées sous la forme matricielle :

$$
\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\phi(1,1)\\ \phi(2,1)\\ \phi(3,1)\\ \phi(4,1)\\ \phi(1,2)\\ \phi(2,2)\\ \phi(3,2)\\ \phi(4,2)\\ \phi(1,3)\\ \phi(2,3)\\ \phi(3,3)\\ \phi(4,3)
\end{bmatrix}
= -\frac{1}{\varepsilon_0}
\begin{bmatrix}
\rho(1,1)\\ \rho(2,1)\\ \rho(3,1)\\ \rho(4,1)\\ \rho(1,2)\\ \rho(2,2)\\ \rho(3,2)\\ \rho(4,2)\\ \rho(1,3)\\ \rho(2,3)\\ \rho(3,3)\\ \rho(4,3)
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{L}\,|\phi\rangle = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,|\rho\rangle - \frac{1}{\hbar^2}\,|b\rangle\,. \tag{6.2.36}
$$

Excepté $|\phi\rangle$, toutes les quantités de l'équation (6.2.36) sont connues. Pour résoudre cette équation, les routines suivantes ont été utilisées :

— la routine `dgesv` de LAPACK pour les maillages comportant un petit nombre de nœuds,
— un routine de gradient conjugué pour les maillages comportant un grand nombre de nœuds.

Les valeurs du champ électrostatique, $\phi(\boldsymbol{r}_{limite})$, aux limites du domaine de calcul, nécessaire à la résolution du système linéaire, sont calculées par sommation direct du potentiel Coulombien généré par chaque charge du système :

$$\phi(\boldsymbol{r_{limite}}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_i}{\mid \boldsymbol{r}_{limite} - \boldsymbol{r}_i \mid}. \tag{6.2.37}$$

6.2.3 Interpolation bilinéaire (2D) et trilinéaire (3D)

Le principe du calcul du champ électrostatique à partir de la méthode des différences finies implique que le champ n'est connu qu'aux nœuds du maillage. Or les particules sont libres de se déplacer n'importe où dans la conduite, y compris en des points qui n'appartiennent pas au maillage. Cela implique d'avoir un moyen d'évaluer le champ électrostatique en n'importe quel points de la conduite. Selon la dimensionnalité du système, une procédure d'interpolation bilinéaire (cas bidimensionnel) ou une procédure d'interpolation trilinéaire (cas tridimensionnel) est utilisé.

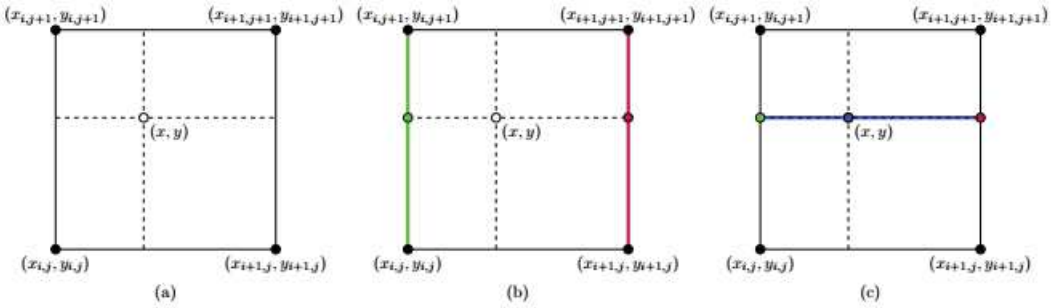


FIGURE 6.6: Principe de l'interpolation bilinéaire

La procédure dans le cas bidimensionnel est décrite dans la suite, le principe étant le même pour le cas tridimensionnel. La figure 6.6 présente une partie du maillage aux alentours du nœud (i, j). Les valeurs du champ sont connues aux points $(x_{i,j}, y_{i,j})$, $(x_{i+1,j}, y_{i+1,j})$, $(x_{i,j+1}, y_{i,j+1})$ et $(x_{i+1,j+1}, y_{i+1,j+1})$, et on veut calculer la valeur du champ au point (x, y) *via* une interpolation bilinéaire. Le calcul nécessite deux étapes (trois pour une interpolation trilinéaire). La première consiste à interpoler le champ aux points $(x_{i,j}, y)$ et $(x_{i+1,j}, y)$ en les interpolant respectivement à partir des valeurs du champ aux points $(x_{i,j}, y_{i,j})$ et $(x_{i,j+1}, y_{i,j+1})$ d'une part et $(x_{i+1,j}, y_{i+1,j})$

et $(x_{i+1,j+1}, y_{i+1,j+1})$ d'autre part :

$$\begin{aligned}
\phi\left(x_{i,j}, y\right) &= \frac{y - y_{i,j}}{h}\phi_{i,j+1} + \frac{y_{i,j+1} - y}{h}\phi_{i,j}, \\
\phi\left(x_{i+1,j}, y\right) &= \frac{y - y_{i+1,j}}{h}\phi_{i+1,j+1} + \frac{y_{i+1,j} - y}{h}\phi_{i+1,j+1}.
\end{aligned}$$

Le seconde étape consiste à interpoler la valeur du champ au point (x, y) à partir des valeurs interpolées à la première étape, $\phi\left(x_{i,j}, y\right)$ et $\phi\left(x_{i+1,j}, y\right)$:

$$\begin{aligned}
\phi\left(x, y\right) &= \frac{x - x_{i,j}}{h}\phi(x_{i+1,j}, y) + \frac{x_{i+1,j} - x}{h}\phi(x_{i,j}, y), \\
\phi\left(x, y\right) &= \left(\frac{x - x_{i,j}}{h}\right)\left(\frac{y - y_{i+1,j}}{h}\right)\phi_{i+1,j+1} \\
&+ \left(\frac{x - x_{i,j}}{h}\right)\left(\frac{y_{i+1,j+1} - y}{h}\right)\phi_{i+1,j} \\
&+ \left(\frac{x_{i+1,j} - x}{h}\right)\left(\frac{y - y_{i,j}}{h}\right)\phi_{i,j+1} \\
&+ \left(\frac{x_{i+1,j} - x}{h}\right)\left(\frac{y_{i,j+1} - y}{h}\right)\phi_{i,j}.
\end{aligned}$$

En réalité, dans le code développé, le calcul n'est pas effectué au point (x, y) mais aux quatre points voisins du point (x, y), $(x + h/2, y)$, $(x - h/2, y)$, $(x, y+h/2)$ et $(x, y-h/2)$ car ce dont on a besoin est la force électrostatique exercée sur la particule donnée par l'expression :

$$\boldsymbol{F}_E(x, y) = -q\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_y\right). \tag{6.2.38}$$

Les composantes du gradient dans l'expression ci-dessus sont calculées à partir de l'expression :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y) &= \frac{\phi(x + h/2, y) - \phi(x - h/2, y)}{h}, \\
\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y) &= \frac{\phi(x, y + h/2) - \phi(x, y - h/2)}{h}.
\end{aligned}$$

Dans le cas tridimensionnel, l'interpolation du potentiel au point (x, y, z) est donnée par :

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, z) &= \frac{1}{h^3}\left(\ \phi_{i+1,j+1,k}\left(z_{i,j,k+1} - z\right)\left(y - y_{i,j,k}\right)\left(x - x_{i,j,k}\right)\right. \\
&+ \phi_{i+1,j+1,k+1}\left(z - z_{i,j,k}\right)\left(y - y_{i,j,k}\right)\left(x - x_{i,j,k}\right) \\
&+ \phi_{i,j+1,k}\left(z_{i,j,k+1} - z\right)\left(y_{i,j+1,k} - y\right)\left(x - x_{i,j,k}\right) \\
&+ \phi_{i,j+1,k+1}\left(z - z_{i,j,k}\right)\left(y_{i,j+1,k} - y\right)\left(x - x_{i,j,k}\right) \\
&+ \phi_{i+1,j,k}\left(z_{i,j,k+1} - z\right)\left(y - y_{i,j,k}\right)\left(x_{i+1,j,k} - x\right) \\
&+ \phi_{i+1,j,k+1}\left(z - z_{i,j,k}\right)\left(y - y_{i,j,k}\right)\left(x_{i+1,j,k} - x\right) \\
&+ \phi_{i,j,k}\left(z_{i,j,k+1} - z\right)\left(y_{i,j+1,k} - y\right)\left(x_{i+1,j,k} - x\right) \\
&+ \left.\phi_{i,j,k+1}\left(z - z_{i,j,k}\right)\left(y_{i,j+1,k} - y\right)\left(x_{i+1,j,k} - x\right)\ \right).
\end{aligned}$$

6.2.4 Traitement des parois de la conduite

L'approche de dynamique moléculaire que nous avons utilisée pour modéliser le mouvement des particules chargées dans la conduite nécessite de contraindre les particules dans un espace donné, la conduite. Pour cela, les parois de la conduite ont été modélisées au moyen d'un potentiel répulsif de la forme :

$$V_{Wall}(x) = \sigma\epsilon \left(\frac{e^{\sigma/x}}{x^4} - \frac{e^{\sigma/(L_x - x)}}{(L_x - x)^4} \right) \tag{6.2.39}$$

où L_x représente la largeur de la conduite et x la position des particules chargées entre les deux extrémités des parois de la conduite

6.2.5 Validation du code

Une série de tests a été effectuée sur des systèmes simples permettant de valider les différentes procédures impliquées dans le calcul :

— l'algorithme de Verlet,
— la résolution numérique de l'équation de Poisson.

Test de l'algorithme de Verlet

On considère le cas d'une particule isolée dans la conduite qui n'est alors soumise qu'à la force d'induction. L'équation de Newton s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{B}. \tag{6.2.40}$$

Dans le repère $(\hat{\boldsymbol{e}}_x, \hat{\boldsymbol{e}}_y, \hat{\boldsymbol{e}}_z)$, la quantité de mouvement $\boldsymbol{p}(t)$ s'écrit :

$$\boldsymbol{p}(t) = p(t) \left(\cos\theta(t)\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\theta(t)\hat{\boldsymbol{e}}_y \right), \tag{6.2.41}$$

et par construction,

$$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{B} = p(t)B \left(\sin\theta(t)\hat{\boldsymbol{e}}_x - \cos\theta(t)\hat{\boldsymbol{e}}_y \right). \tag{6.2.42}$$

Dans ces conditions, l'équation de Newton (6.2.40) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\cos\theta(t) - p(t)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta(t) \right)\hat{\boldsymbol{e}}_x + \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\sin\theta(t) + p(t)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta(t) \right)\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ &= \frac{qB}{m}p(t)\left(\sin\theta(t)\hat{\boldsymbol{e}}_x - \cos\theta(t)\hat{\boldsymbol{e}}_y \right). \end{aligned}$$

En égalant les composantes selon $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ et $\hat{\boldsymbol{e}}_y$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\cos\theta(t) - p(t)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta(t) = \frac{qB}{m}p(t)\sin\theta(t), \tag{6.2.43}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\sin\theta(t) + p(t)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta(t) = -\frac{qB}{m}p(t)\cos\theta(t), \tag{6.2.44}$$

$$\tag{6.2.45}$$

d'où l'on extrait deux équations différentielles, l'une régissant le comportement de la norme de la quantité de mouvement,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{6.2.46}$$

l'autre décrivant le comportement temporel de l'angle θ :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{qB}{m}. \tag{6.2.47}$$

On constate ainsi que, bien que soumise à un champ d'induction magnétique, la quantité de mouvement de la particule chargée reste constante ($p(t) = p_0$). L'évolution temporelle de l'angle θ est donnée par :

$$\theta(t) = \theta_0 - \frac{qB}{m}t. \tag{6.2.48}$$

La quantité de mouvement de la particule chargée est ainsi donnée par l'expression :

$$\boldsymbol{p}(t) = p_0 \left(\cos\left(\theta_0 - \frac{qB}{m}t)\right) \hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\left(\theta_0 - \frac{qB}{m}t)\right) \hat{\boldsymbol{e}}_y \right). \tag{6.2.49}$$

p_0 est la quantité de mouvement de la particule dès qu'elle commence à subir l'influence du champ d'induction magnétique. L'évolution temporelle de la position de la particule est donnée par :

$$x(t) = \frac{p_0}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t - \theta_0\right) + x_0 + \frac{p_0}{qB} \sin\theta_0, \tag{6.2.50}$$

$$y(t) = \frac{p_0}{qB} \cos\left(\frac{qB}{m}t - \theta_0\right) + y_0 - \frac{p_0}{qB} \cos\theta_0, \tag{6.2.51}$$

x_0 et y_0 sont les coordonnées de la particule dès qu'elle commence à subir l'influence du champ d'induction magnétique. L'angle θ_0 est donné par l'angle entre la direction de la quantité de mouvement de la particule et l'axe $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ (Figure6.7).

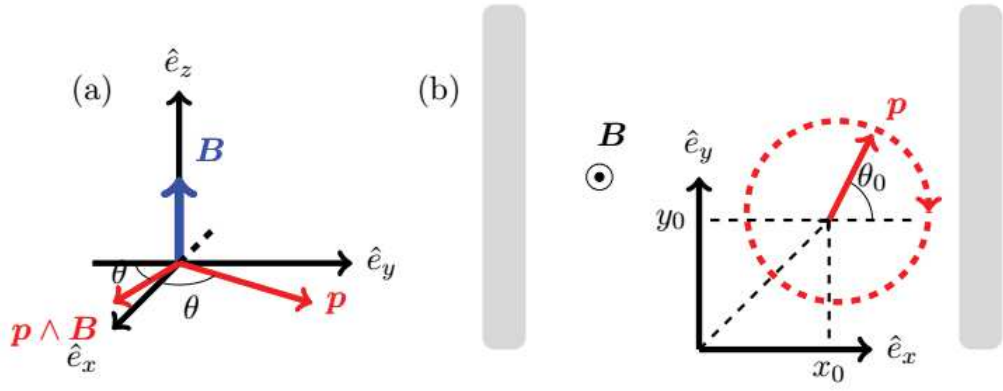


FIGURE 6.7: Angle et direction de la quantité de mouvement de la particule

Les équations (6.2.50) démontrent que la particule dans le champ d'induction magnétique a une trajectoire circulaire de centre $(x_0 + \frac{p_0}{qB}\sin\theta_0, y_0 - \frac{p_0}{qB}\cos\theta_0)$ et de rayon p_0/qB. La fréquence cyclotron de rotation de la particule est déterminée par la masse et la charge de la particule, ainsi que par la valeur du champ d'induction magnétique ($\Omega = \frac{qB}{m}$) [16],[32],[72].
La figure 6.8 présente la trajectoire calculée avec le code développé dans le cas d'une particule unique dans la conduite soumise à un champ d'induction uniforme orienté perpendiculairement au plan de coupe. On observe bien une trajectoire circulaire. La figure 6.9 présente l'évolution temporelle de la composante x pour deux valeurs de champ d'induction magnétique. On vérifie bien que la fréquence cyclotron est divisée par deux lorsque le champ est divisé par deux, alors que le rayon est multiplié par deux.
Ces résultats permettent d'affirmer que le code reproduit correctement le comportement d'une particule chargée soumise à un champ d'induction magnétique, ce qui valide l'implémentation de l'algorithme de Verlet.

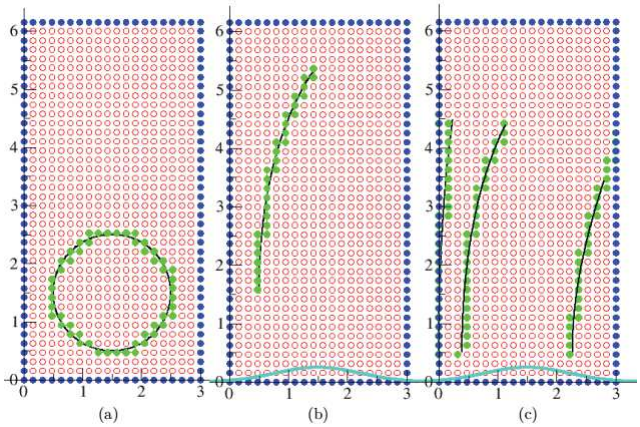


FIGURE 6.8: Plan de coupe de la conduite du débitmètre : les nœuds du maillage utilisé pour résoudre l'équation de Poisson sont symbolisés par des ronds rouges. Les ronds bleus symbolisent les nœuds aux limites. Le cercle noir représente la trajectoire d'une particule unique dans le débitmètre soumise à un champ d'induction magnétique uniforme (a) et de distribution gaussienne (b) orienté perpendiculairement au plan de coupe ; les ronds verts symbolisent les nœuds du maillage successifs occupés par la particule au cours de son mouvement. La courbe en cyan donne la répartition du champ d'induction magnétique dans la conduite. (c) cas de trois particules chargées.

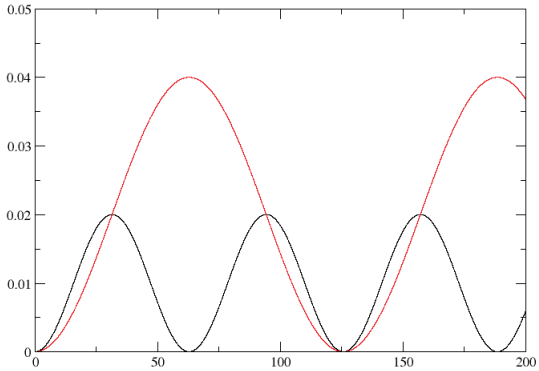


FIGURE 6.9: Coordonnée x en fonction du temps t dans le cas d'une particule isolée dans la conduite soumise à un champ d'induction magnétique : 1 mT (noir) et 0,5 mT (rouge).

Test de l'algorithme de résolution de l'équation de Poisson

Pour ces tests, on considère une équation de Poisson pour laquelle il existe des solutions numériques.
La source considérée est :

$$\rho(r) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \left(\frac{r^2}{\sigma_i^2} - 1 \right) e^{-r^2/\sigma_i^2} \tag{6.2.52}$$

avec $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ ((Fig. 6.10(c)). Le potentiel électrostatique associé à cette distribution de charge est donné par l'expression :

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\alpha_i \sigma_i^2}{4} e^{-r^2/\sigma_i^2}. \tag{6.2.53}$$

Les valeurs des coefficients σ_i^2 et α_i ont été attribuées de façon à ce que le potentiel électrostatique corresponde à sa densité de charge associée. .

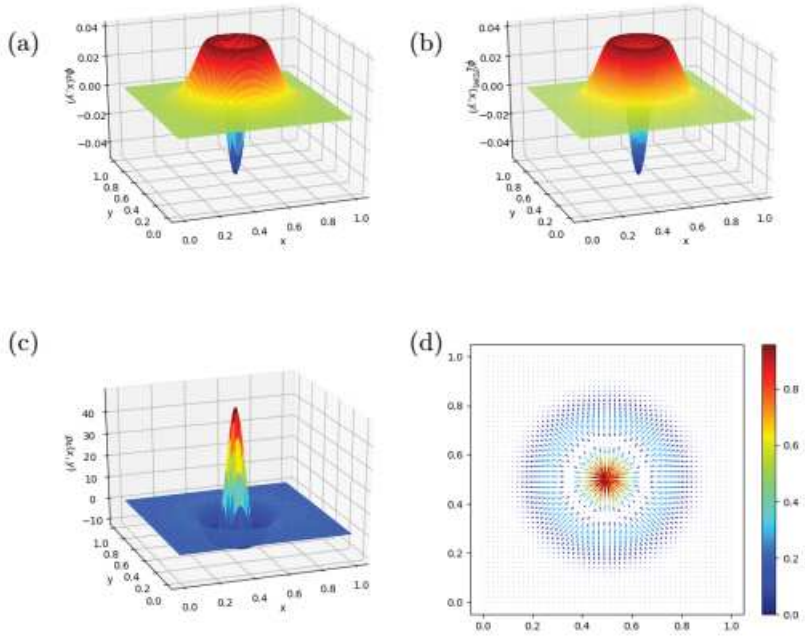


FIGURE 6.10: Potentiel électrostatique calculé (a) à partir de sa forme analytique et (b) en utilisant la méthode des différences finies (100×100 grid) ; (c) source du potentiel (d) force électrostatique dérivant du potentiel (50×50 grid). Les paramètres du calcul sont $\alpha_1 = 10$, $\sigma_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 60$, $\sigma_2 = 0,1$, $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Pour la résolution, les valeurs du potentiel aux limites du domaine de calcul ont été calculées à partir de l'équation (6.2.53). La figure 6.10 présente les résultats obtenus. La comparaison du potentiel électrostatique calculé avec la méthode des différences finies implémentée dans le code (figure 6.10(b)) avec le calcul à partir de la forme analytique (équation 6.2.53) montre une excellente correspondance, ce qui valide la procédure numérique pour résoudre l'équation de Poisson.

6.3 Résultats

6.3.1 Cas des champs faibles

Pour les résultats qui vont suivre dans, le champ électrostatique E est calculé à partir de l'équation de Poisson (équation 6.5.21. La figure 6.11 présente les trajectoires de 500 particules chargées, sur un intervalle de temps de 5 s, dans une conduite dans laquelle règne un champ d'induction uniforme de 0,1 mT, dirigé perpendiculairement au plan de la figure. Le pas d'intégration en temps est de 1 ms. Les positions initiales des particules, avant action du champ d'induction, ont été choisies de manière aléatoire. Les répartitions initiales des charges positives et négatives sont homogènes sur l'ensemble de la conduite.

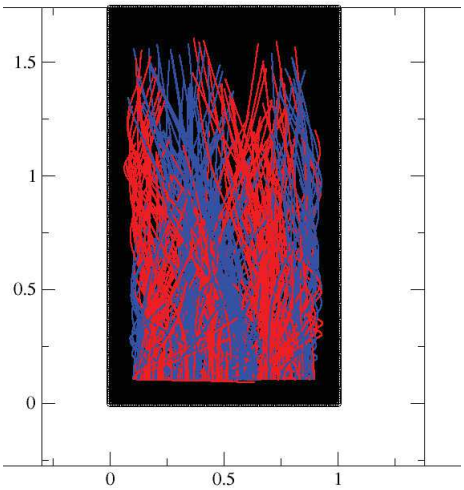


FIGURE 6.11: Trajectoires de 500 particules chargées (positivement en rouge , négativement en bleu) dans une conduite dans laquelle règne un champ d'induction magnétique uniforme $(0,1mT)$ sur un intervalle de temps de 5 s

La figure 6.12 donne la position des particules. Alors que les positions des particules ont été choisies de manière aléatoire initialement, avant qu'elles n'entrent dans le domaine de la conduite où agit le champ d'induction, on

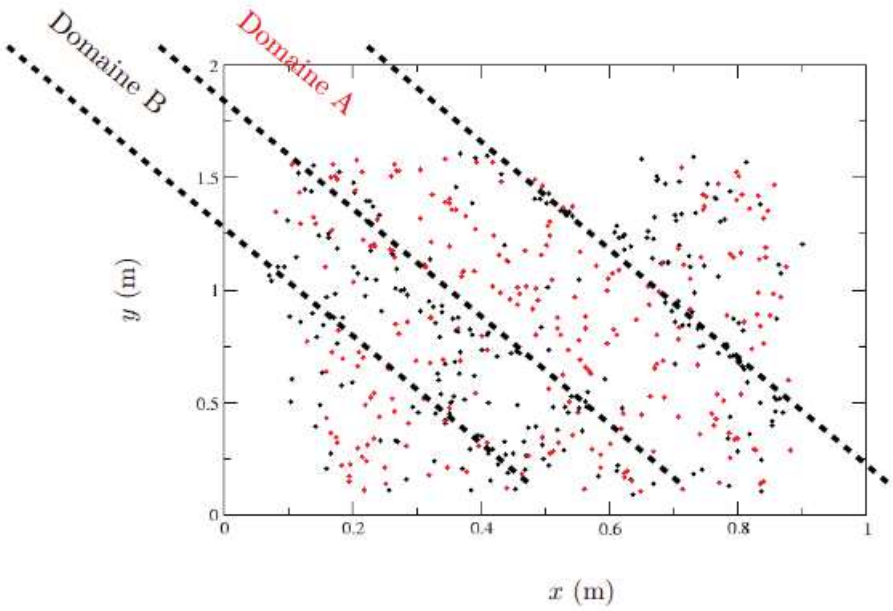


FIGURE 6.12: Positions des 500 particules chargées (positivement en rouge, négativement en bleu) ayant circulé dans une conduite dans laquelle règne un champ d'induction magnétique uniforme (0,1 mT) durant 5 s.

constate au bout de 5 s de déplacement des particules dans le champ, un début de répartition inhomogène selon le signe des charges. On observe en effet une alternance de "bandes" regroupant alternativement majoritairement des charges positives (domaine A) et des charges négatives (domaine B).
Toutefois ces bandes ne sont pas orientées selon l'axe de la conduite mais elles font un angle d'environ 50° avec les parois latérales. Il résulte de cette distribution inhomogène, une différence de potentielle entre les parois latérales de la conduite (Fig. 6.13). La différence de potentiel a été calculée en prenant la différence de potentiel électrostatique sur les parois latérales de la conduite. La zone grisée repère la zone de la conduite dans laquelle se trouvent les particules.

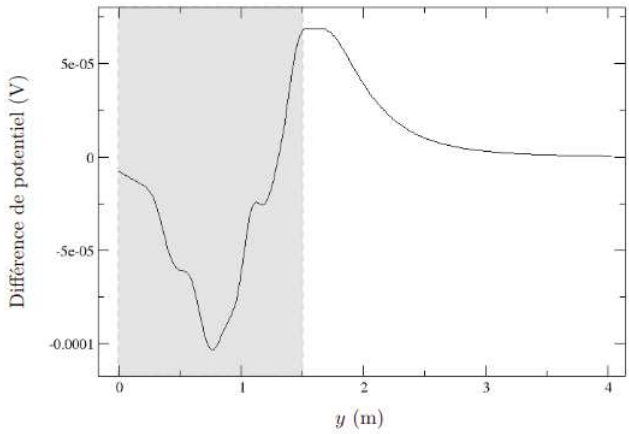


FIGURE 6.13: Différence de potentiel entre les parois latérales de la conduite (500 particules chargées après 5 s de circulation dans un champ d'induction magnétique uniforme de 0,1 mT.

6.3.2 Cas des champs forts

Une conduite de 1 m de diamètre pour 4 m de long a été utilisée. Aucun champ d'induction magnétique n'est appliqué dans le premier mètre, ni dans le dernier.

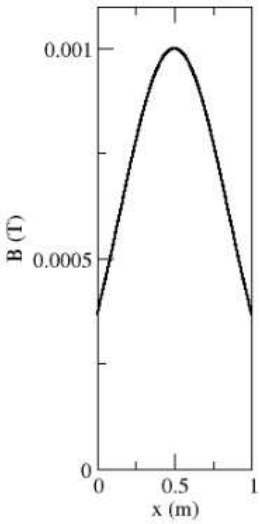


FIGURE 6.14: Profil transverse du champ d'induction magnétique dans la conduite

La figure 6.14 présente le profil du champ d'induction magnétique ré-

gnant dans la conduite. Dans la suite de ce manuscrit, l'aire grisée sur les figures indiquent la zone de la conduite dans laquelle règne un champ d'induction magnétique.
Le pas d'intégration est de 1 ms. Afin de réaliser des simulations sur des temps longs, lorsqu'une particule chargée sort de la conduite au bout des 4 m de trajet, une nouvelle particule entre dans la conduite à une position x choisie aléatoirement. La composante longitudinale (v_y) de la vitesse de chaque particule entrant dans la conduite est déterminée par sa position d'entrée selon l'axe x :

$$v_y(x) = v_0 \left(1 - \frac{(x - x_0)}{w_x}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{6.3.1}$$

où $w_x(m)$ est le diamètre de la conduite, $v_0(m/s)$ est la vitesse maximale des particules entrant dans la conduite et x_0 le centre de la conduite. $n = 1.66log(Re)$ où Re est le nombre de Reynolds définit comme :

$$Re = \frac{v_0 w_x \rho}{\mu}. \tag{6.3.2}$$

$\mu(Pa.s)$ étant la viscosité dynamique du fluide et $\rho(kg.m^{-3})$ sa masse volumique.
Comme mentionné dans la section 3.6 du chapitre 3, le profil des vitesses du fluide et par conséquent la vitesse des particules à une influence sur le potentiel mesuré par les électrodes.
A chaque pas de simulation, la différence de potentiel instantanée, $V_{inst}(y;t)$, est calculée comme la différence de potentiel électrostatique à l'instant t entre les points appartenant aux parois latérales de la conduite et localisés à la cote y. D'importantes fluctuations de la différence de potentiel instantanée sont constatées.

Les figures 6.15, 6.16 et 6.17 présentent les trajectoires des particules chargées dans la conduite sur un intervalle de temps de 3 minutes pour trois régimes de vitesses différents. En comparant les trois régimes entre eux, on observe une très faible différence de potentiel dans la zone où règne le champ d'induction pour le régime le plus rapide (figure 6.17(a)). L'examen de la figure 6.17(b) indique que cela est probablement dû à la faible déviation des particules chargées dans la zone où le champ d'induction est appliqué en raison de leur vitesse trop importante vis à vis du champ appliqué.

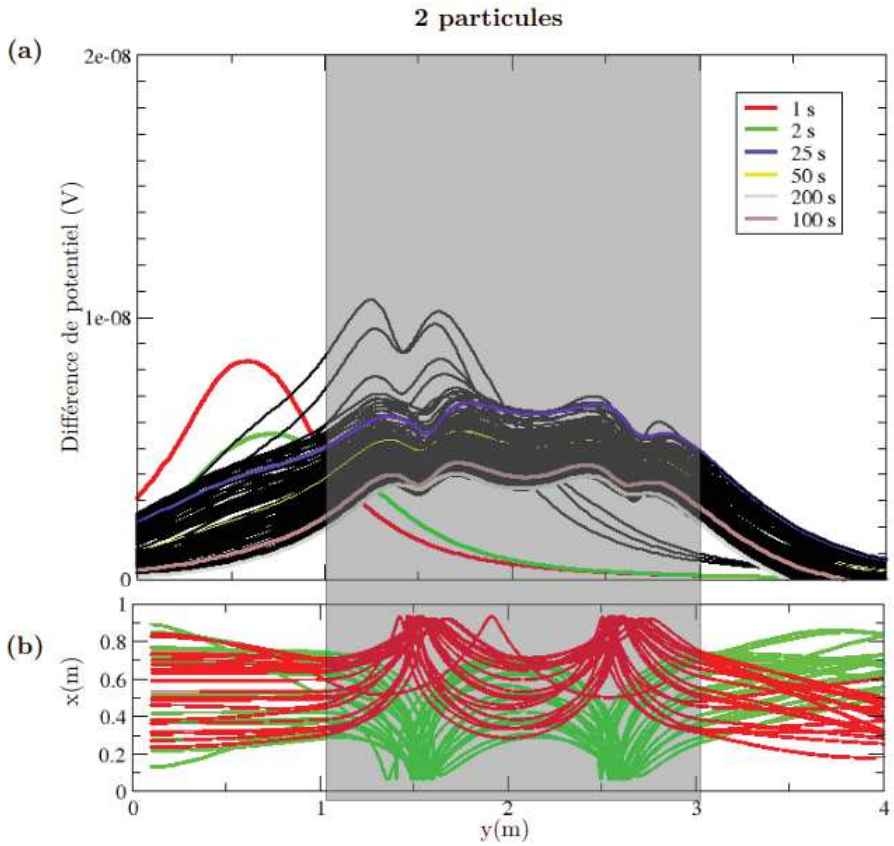


FIGURE 6.15: (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de deux particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $5,0\ 10^{-4}$ kg.m/s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique.

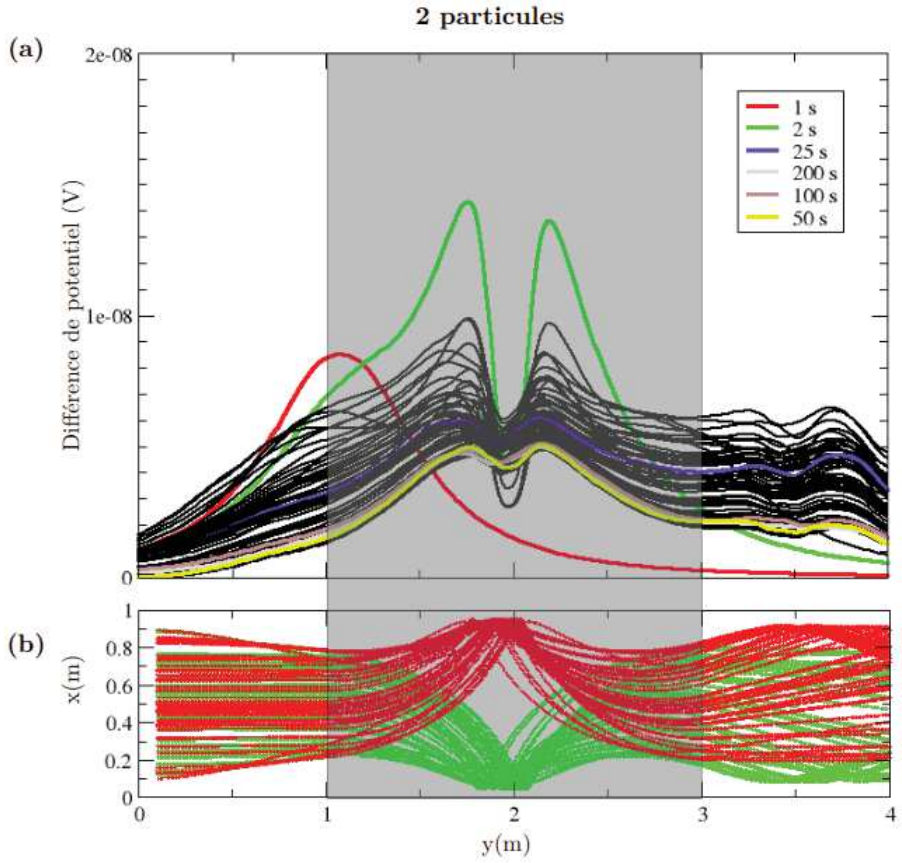


FIGURE 6.16: (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de deux particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $1,0\ 10^{-3}$ kg.m/s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique.

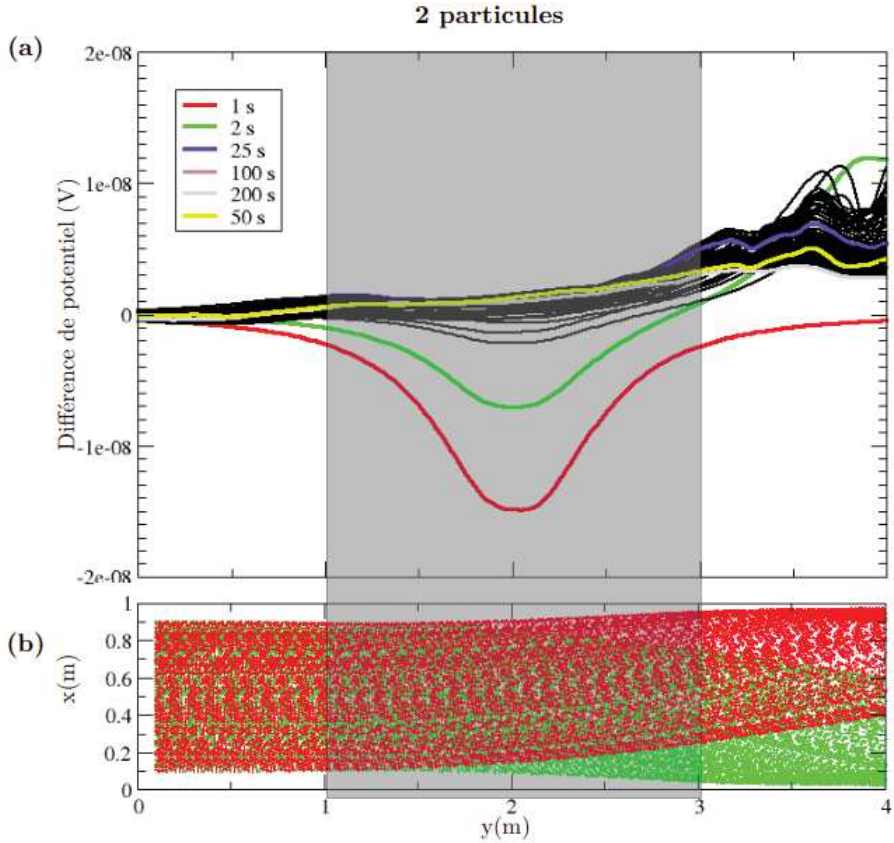


FIGURE 6.17: (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de deux particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $1,0\ 10^{-2}$ kg.m/s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique.

La figure **??** qui présente une comparaison des différences de potentiel moyennées sur un intervalle de temps de 200 s confirme cette observation, et indique un effondrement du signal dès $50,0\ 10^{-3}$ kg.m/s.

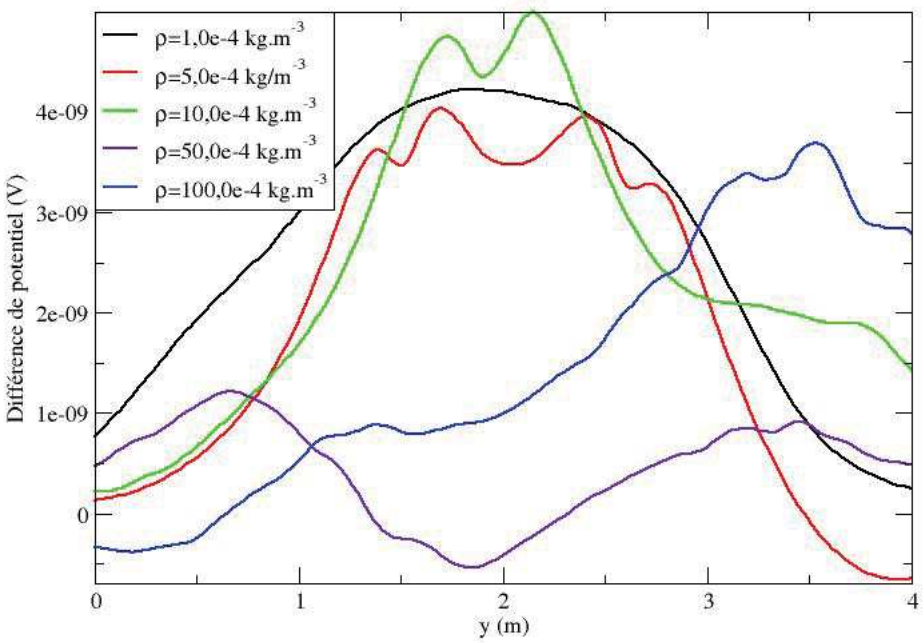


FIGURE 6.18: Différence de potentiel moyenne prise sur un intervalle de temps de 200 s pour différentes valeurs de la quantité de mouvement maximale des particules à l'entrée de la conduite.

6.3.3 Etude en fonction de la densité de charges dans la conduite

Les figures 6.19 et 6.20 présentent la différence de potentiel dans le cas d'une densité de charge plus importante (20 particules et 200 particules). Le signal pour le cas avec 2 particules a été superposé et multiplié par un facteur 10 aux différences de potentiel calculées pour 20 particules pour comparaison. On constate un comportement globalement similaire au cas d'une simulation avec deux particules, indiquant que la densité de charge n'est pas suffisante pour induire d'éventuels effets liés à la répulsion coulombienne entre les particules.

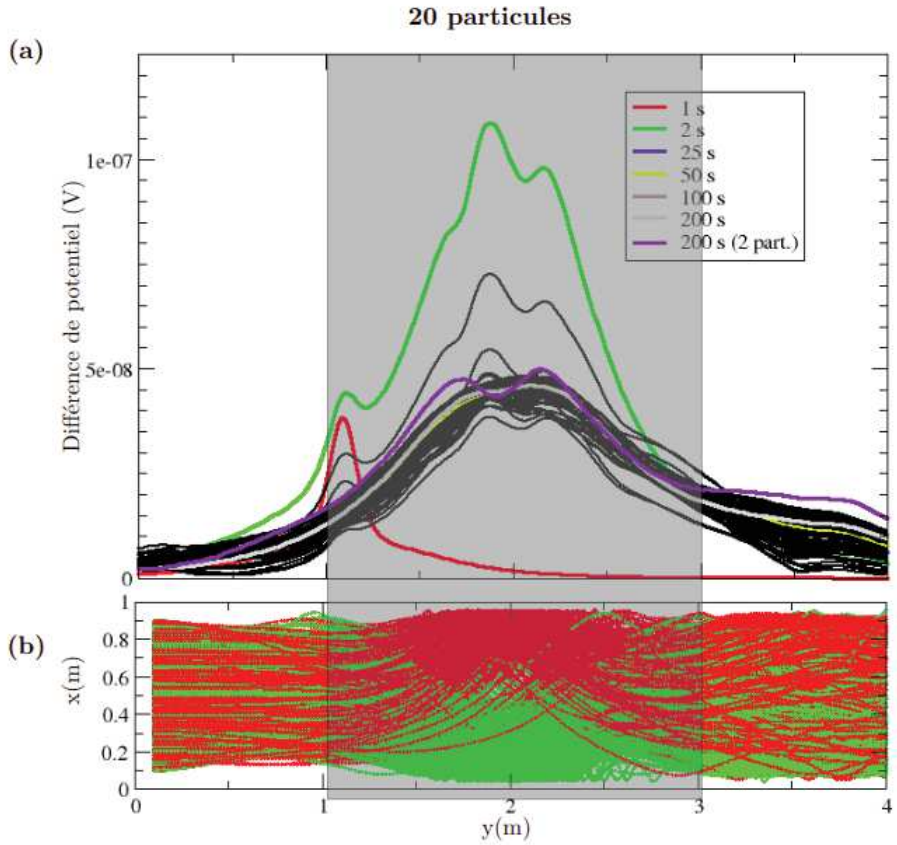


FIGURE 6.19: (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de 20 particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $1,0\ 10^{-3}$ kg.m/s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique. Le signal pour le cas avec deux particules a été superposé et multiplié par un facteur 10 aux différences de potentiel calculées pour 20 particules pour comparaison.

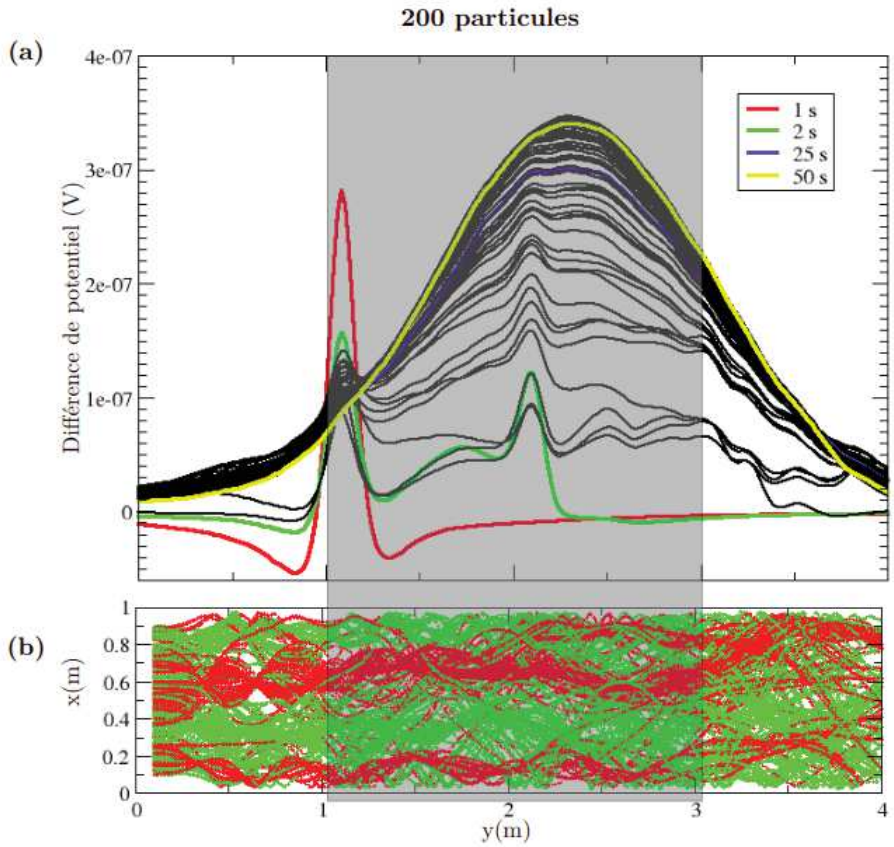


FIGURE 6.20: (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de 200 particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $1,0\ 10^{-3}$ kg.m/s et un intervalle de temps de 4s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique.

En revanche, pour les situations à plus de 200 particules (Figure 6.20, figure 6.21 et figure 6.22) montrent la formation de "bandes" de particules chargées dans la conduite, similaire à celles observées pour les faibles champs d'induction magnétique. Il est intéressant de noter que ces "bandes" apparaissent avant que les particules n'aient atteint la zone où règne le champ d'induction magnétique. Ceci nous permet d'affirmer que la formation des "bandes" de charges est due aux interactions Coulombiennes régnant entre les particules dans la conduite. Par ailleurs on constate que le nombre d'alternances "bande +" /"bande -" tend à croître à mesure que la densité de charge augmente.

Enfin on remarque que le champ d'induction magnétique tend à détruire les "bandes" de charges. Ceci est particulièrement visible pour le cas de la

circulation de la situation à 1000 particules (Fig. 6.22(b)) pour laquelle les "bandes" disparaissent à partir de la cote $y = 2$.

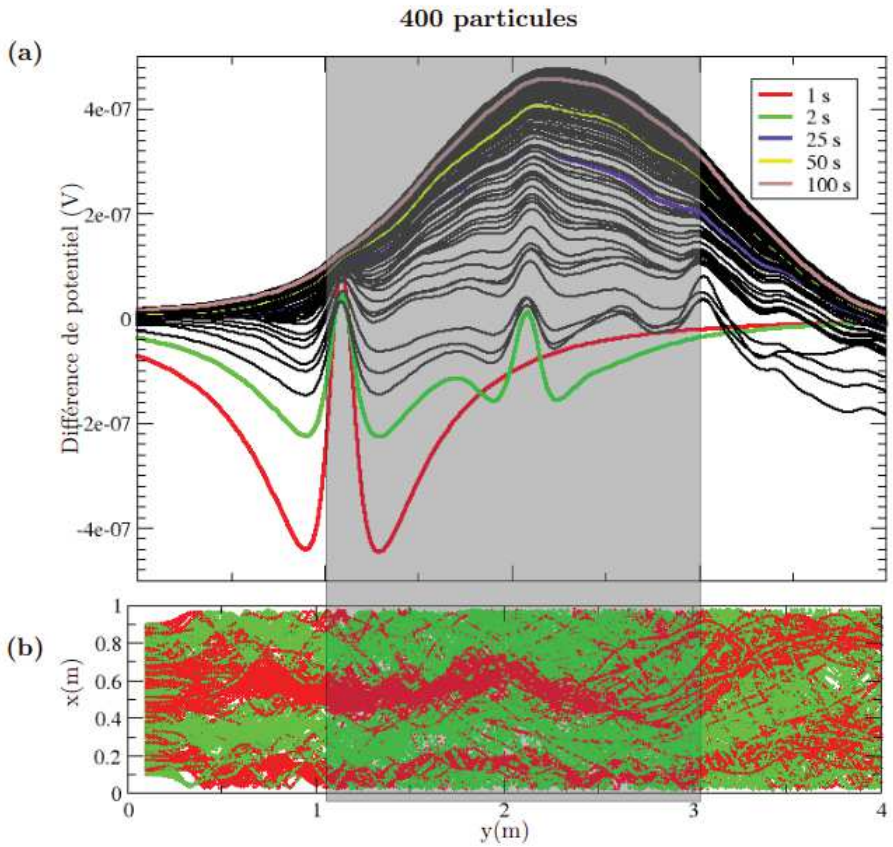


FIGURE 6.21: (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de 400 particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $1,0\ 10^{-3}$ kg.m/s et un intervalle de temps de 4s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique.

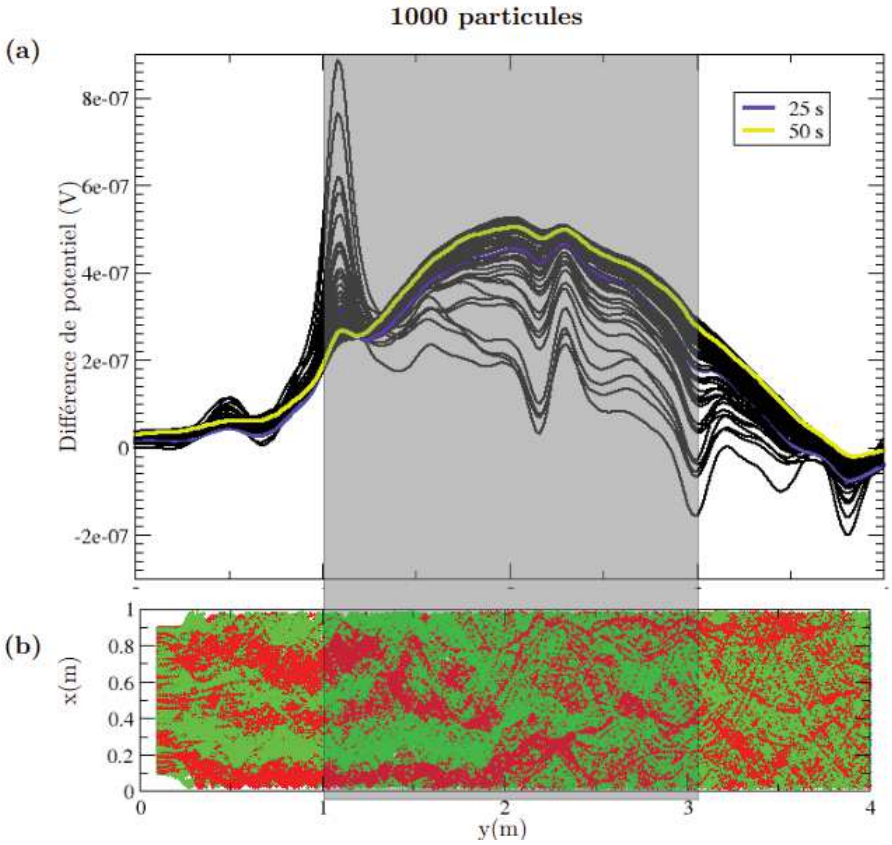


FIGURE 6.22: (a) Différence de potentiel et (b) trajectoires d'un ensemble de 1000 particules chargées positivement (rouge) et négativement (vert) dans la conduite pour une quantité de mouvement maximale à l'entrée de la conduite de $1,0\ 10^{-3}$ kg.m/s et un intervalle de temps de 4s. La partie grisée représente le domaine de la conduite où règne le champ d'induction magnétique.

6.4 Conclusion

L'approche mécanique a montré qu'il est possible de calculer des trajectoires réalistes de particules chargées soumises à un champ d'induction magnétique. En outre, grâce à la position et à la vitesse des particules, on a été en mesure de déterminer le potentiel électrostatique généré dans la conduite. Les résultats ont également confirmé la théorie sur plusieurs aspects, notamment :

- La conservation de la quantité de mouvement des particules lorsqu'elles sont soumise à un champ d'induction ;
- La trajectoire circulaire des particules dans le cas d'une seule particule soumise à un champ d'induction uniforme ;
- La trajectoire hélicoïdale des particules par superposition d'une rotation et d'une translation autour et le long des lignes de champ d'induction respectivement ;
- La distribution inhomogène des particules (selon le signe de leur charge) sous un champ d'induction magnétique.

Les résultats ont également montré que lorsque la vitesse des particules est trop importante, la différence de potentiel est faible. En effet, les particules n'ont pas suffisamment le temps d'être déviées pour atteindre les parois de la conduite. La densité de charge aux extrémités est donc plus faible. De plus, la densité de charge initiale est relativement importante. Si le nombre de particules chargées est faible, les effets liés à la répulsion coulombienne le seront aussi. Cela a pour conséquence d'induire une faible différence de potentiel : la probabilité d'avoir une particule aux parois de la conduite est faible. Par contre, si la densité de charge est élevée, les interactions coulombiennes font apparaître des "bandes" de charges. Ce sont des domaines distincts où il y aura majoritairement des particules chargées positivement et négativement. La différence de potentiel est alors élevée.

Cependant, sous l'action d'un champ magnétique élevé, ces bandes ont tendance à disparaître, effet probablement lié à la force de Lorentz, qui en plus des interactions coulombiennes modifie la trajectoire des particules.

Le modèle comprend, toutefois, quelques inconvénients. En effet, seule l'interaction coulombienne a été prise en compte dans cette approche. En toute rigueur, il aurait aussi fallu modéliser les collisions entre particules. La trajectoire de ces dernières, et donc la distribution des charges, en auraient été modifiées. La suite de ce chapitre est consacrée à un modèle bien plus réaliste : l'approche statistique. Toutefois, cette partie sera restreinte aux équations, ainsi qu'aux méthodes à utiliser pour les résoudre

6.5 Approche statistique

Une autre façon de calculer le potentiel entre les électrodes est de passer par une approche statistique décrivant l'évolution temporelle des particules chargées. Pour la connaître , on utilise en général des équations de transport et de diffusion, modèles mathématiques qui ont pour but de décrire la dynamique des particules ou les transferts thermiques. Dans notre cas, c'est la dynamique des particules.

L'avantage de cette approche est qu'elle permet de prendre en compte les collisions entre particules et des forces de répulsion. Pour cela, il faut tout d'abord déterminer la fonction de distribution $f(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t), t)$ qui représente la probabilité de trouver une particule chargée à une position $\boldsymbol{r}(t)$ et une vitesse $\boldsymbol{v}(t)$ à un instant t [82]. A chaque instant t, chaque espèce chargée a une position et une vitesse définie.

Ces différentes configurations peuvent être caractérisées par la densité d'espèces chargées en chaque point $\boldsymbol{r}(t)$,$\boldsymbol{v}(t)$ dans l'espace des phases (espace 6 dimensions des coordonnées des vecteurs positions et vitesses $\boldsymbol{r}(t)$ et $\boldsymbol{v}(t)$) [2],[52]. La fonction de distribution est déterminée en effectuant la résolution de l'équation de transport de Boltzmann.

6.5.1 Etablissement de l'équation de transport

Le nombre de particules chargées dans un volume $d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{v}$ à l'instant t est donné par [2] :

$$\delta N\left(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t\right)=f\left(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t\right)d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{v} \tag{6.5.1}$$

Pour connaître le nombre total de particules, il suffit d'intégrer l'équation 6.5.1. Cela donne :

$$N(t)=\iint d\boldsymbol{r}(t)d\boldsymbol{v}(t)\delta N\left(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t\right) \tag{6.5.2}$$

Il y a donc l'instant t, $\delta N\left(\boldsymbol{r_0},\boldsymbol{v_0},t\right)$ particules dans le fluide dont l'équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\delta N\left(\boldsymbol{r_0}(t),\boldsymbol{v_0}(t),t\right)=f\left(\boldsymbol{r_0}(t),\boldsymbol{v_0}(t),t\right)d\boldsymbol{r_0}d\boldsymbol{v_0} \tag{6.5.3}$$

Entre $t+\delta t$ le nombre d'espèce chargée change dans le volume $d\boldsymbol{r_0}d\boldsymbol{v_0}$. En effet, le nombre de particules entrant et sortant du volume $d\boldsymbol{r_0}d\boldsymbol{v_0}$ évolue dans le temps. Cependant, dans le cas présent, les collisions entre particules ne seront pas considérées. Cette variation de δN particules peut donc s'exprimer par la dérivée de la fonction de distribution $f\left(\boldsymbol{r_0},\boldsymbol{v_0},t\right)$:

$$\frac{\partial f\left(\boldsymbol{r_0}(t),\boldsymbol{v_0}(t),t\right)}{partialt} \tag{6.5.4}$$

Le variation du nombre de particules chargées entre $t+\delta t$ dans le volume $d\boldsymbol{r_0}d\boldsymbol{v_0}$ est donnée par :

$$d\left[\delta N(\boldsymbol{r_0}(t),\boldsymbol{v_0}(t),t)\right]=\frac{df\left(\boldsymbol{r_0}(t),\boldsymbol{v_0}(t),t\right)}{dt}d\boldsymbol{r_0}d\boldsymbol{v_0}.dt \tag{6.5.5}$$

Pour évaluer $d\left[\delta N\right]$, il est nécessaire de compter les particules entrant et sortant du volume $d\boldsymbol{r_0}d\boldsymbol{v_0}$ durant l'intervalle t et $t+\delta t$.
Les équations de mouvements des particules chargées en t et $t+\delta t$ sont données par :

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}(t+\delta t)=\boldsymbol{r}(t)+\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}+\partial(\delta t^2)\\ \boldsymbol{v}(t+\delta t)=\boldsymbol{v}(t)+\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}+\partial(\delta t^2)\end{cases} \tag{6.5.6}$$

Ces équations nous permettent de connaître le nombre de particules chargées à l'instant $t+\delta t$ en tenant compte des conditions initiales (position et vitesse). Mathématiquement, cela s'écrit :

$$d\left[\delta N(\boldsymbol{r_0}(t),\boldsymbol{v_0}(t),t+\delta t)\right]=\delta N\left[\boldsymbol{r_0}(t)-\boldsymbol{v_0}(t)dt,\boldsymbol{v_0}(t)-\frac{\boldsymbol{F}(t)}{m}dt,t\right] \tag{6.5.7}$$

où $\frac{\boldsymbol{F}(t)}{m} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ par application de la seconde loi de Newton. Il est désormais possible de déterminer la variation du nombre de particules durant l'intervalle $t + \delta t$ dans le volume d$\boldsymbol{r_0} d\boldsymbol{v_0}$.

$$d\left[\delta N\right] = \delta N\left(\boldsymbol{r_0}(t), \boldsymbol{v_0}(t), t + \delta t\right) - \delta N\left(\boldsymbol{r_0}(t), \boldsymbol{v_0}(t), t\right) \tag{6.5.8}$$

soit :

$$d\left[\delta N\right] = \delta N\left(\boldsymbol{r_0}(t) - \boldsymbol{v_0}(t)dt, \boldsymbol{v_0}(t) - \frac{\boldsymbol{F}(t)}{m}dt, t\right) - \delta N\left(\boldsymbol{r_0}(t), \boldsymbol{v_0}(t), t\right) \tag{6.5.9}$$

Considérons maintenant l'équation suivante :

$$f\left(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{v}(t)dt\right) = f\left(x - v_x dt, y - v_y dt, z - v_z dt\right) \tag{6.5.10}$$

En appliquant un développement limité du premier ordre sur la fonction de distribution $f\left(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{v}(t)dt\right)$ l'équation 6.5.10 peut s'approximer de la manière suivante sur la coordonnée x :

$$f\left(x, y - v_y dt, z - v_z dt\right) - v_x \frac{\partial f\left(x, y - v_y dt, z - v_z dt\right)}{\partial x} dt \tag{6.5.11}$$

On effectue le même développement sur les coordonnées x et y pour obtenir :

$$f\left(x, y, z\right) - \left[v_x \frac{\partial f\left(x, y, z\right)}{\partial x} + v_y \frac{\partial f\left(x, y, z\right)}{\partial y} + v_z \frac{\partial f\left(x, y, z\right)}{\partial z}\right] dt \tag{6.5.12}$$

En appliquant la même démarche sur la fonction $f\left(\boldsymbol{v}(t) - \frac{\boldsymbol{F}(t)}{m}dt\right)$, on obtient :

$$f\left(v_x, v_y, v_z\right) - \frac{1}{m}\left[F_x \frac{\partial f\left(v_x, v_y, v_z\right)}{\partial v_x} + F_y \frac{\partial f\left(v_x, v_y, v_z\right)}{\partial v_y} + F_z \frac{\partial f\left(v_x, v_y, v_z\right)}{\partial v_z}\right] dt \tag{6.5.13}$$

Finalement la différentielle de la fonction de distribution $f\left(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{v}(t)dt, \boldsymbol{v}(t) - \frac{\boldsymbol{F}(t)}{m}dt, t\right)$ s'écrit sous la forme :

$$f\left(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t), t\right) - \boldsymbol{v}(t).\boldsymbol{\nabla_r} f\left(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t), t\right) - \frac{\boldsymbol{F}(t)}{m}.\boldsymbol{\nabla_v} f\left(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t), t\right) \tag{6.5.14}$$

L'équation 6.5.9 s'écrit alors :

$$d\left[\delta N\right] = -\left[\boldsymbol{v}(t).\boldsymbol{\nabla_r} f\left(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t), t\right) - \frac{\boldsymbol{F}(t)}{m}.\boldsymbol{\nabla_v} f\left(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t), t\right)\right] d\boldsymbol{r} d\boldsymbol{v} \tag{6.5.15}$$

En comparant les équations 6.5.15 et 6.5.4 on obtient l'équation de transport de Boltzmann.

$$\frac{\partial f\left(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t\right)}{\partial t}+\boldsymbol{v}(t).\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}f\left(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t\right)+\frac{\boldsymbol{F}(t)}{m}.\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}f\left(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t\right)=0 \tag{6.5.16}$$

où le gradient $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}f\left(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t\right)$ représente la dispersion spatiale de la position des particules arrivant et les particules quittant la position $\boldsymbol{r}(t$ pendant dt, et le gradient $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}f\left(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t\right)$ représente la dispersion spatiale des vitesses (accélération) des particules durant dt suite à la force $\boldsymbol{F}(t)$. Cette équation est communément appelé équation de Maxwell-Vlasov. Ce type d'équation est utilisé dans un large spectre de phénomènes physiques : dynamique des fluides, cinétique des gaz ou plasma.

6.5.2 Interactions entre particules et équation de transport

L'équation 6.5.16 établie précédemment ne tient pas compte des collision entre particules. Pour cela, un opérateur dit de "collision" est ajouté à l'équation de transport de Boltzmann, comme le montre l'équation 6.5.17 [40],[14] :

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)}{\partial t}+\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)+\frac{\boldsymbol{F}}{m}.\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)=\frac{\partial f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)}{\partial\delta t}\mid_{coll} \tag{6.5.17}$$

$\boldsymbol{F}$ est la force extérieure appliquée, $\boldsymbol{v}$ la vitesse de la particule et $\frac{\partial f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)}{\partial\delta t}\mid_{coll}$ caractérise l'évolution de la distribution de charges dues aux collisions : interactions entre les particules. D'après [40], le terme $\frac{\partial f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)}{\partial\delta t}\mid_{coll}$ permet de tenir compte de phénomènes tels que, la diffusion, l'absorption et l'ionisation des particules :

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)}{\partial\delta t}\mid_{coll}=\int d\boldsymbol{v'}K(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v'}\rightarrow\boldsymbol{v})f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v'},t)-\nu\sum(\boldsymbol{r},\nu)f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v'},t) \tag{6.5.18}$$

Le terme $\nu\sum$ est en général, composée des fréquences de collisions de diffusion, d'absorption et d'ionisation. Le noyau K est conventionnellement de la forme

$$K=K_S+\nu_I K_I \tag{6.5.19}$$

où ν_I est le nombre moyen de particules produites par la ionisation ($\nu_I=2$) ou la diffusion inélastique($\nu_I=1$)

6.5.3 Méthodes de résolution de l'équation de Vlasov

L'équation de Vlasov est une équation aux dérivées partielles qui appartient à une classe d'équations dites "équations de transport" qui s'écrivent sous la forme suivante [41] :

$$\frac{\partial f(t,x,y)}{\partial t} + \nabla_{x,y}.\left[U(t,x,y)f(t,x,y)\right] = 0 \tag{6.5.20}$$

avec $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \geq 0$ et Ω étant l'espace des phases. Le champ de vecteurs $U = (U_1, U_2)$ est à divergence nulle et peut dépendre de la fonction f. [41] pour des liquides incompressibles . Cela revient à écrire que $\nabla_{x,y}.U = 0$. Par le passé plusieurs méthodes numériques ont été utilisées pour résoudre les équations. On peut les diviser en deux principales catégories [15] :

— Les méthodes particulaires (Particle in Cell).
— Les méthodes de Vlasov.

Ces méthodes considèrent des macro-particules et permettent de résoudre les équations de transport en calculant leurs trajectoires dans l'espace des phases. Le principe de ces méthodes est donné dans la section suivante.

6.5.4 La méthode "Particle In Cell"

La méthode "Particle In Cell" que l'on note PIC est une technique qui a vu le jour dans les années 1960 pour l'étude des plasma [18], [21]. Elle fait partie de la classe des méthodes Lagrangiennes car elle permet de simuler le déplacement de particules chargées ou des plasmas [41]. En réalité, le mouvement de particules chargées dans un fluide ou un plasma sous un champ électromagnétique est difficile à modéliser puisqu'il faut tenir compte des champs extérieurs et induits, ainsi que des interactions entre les particules : collisions et répulsions. Dans notre cas on ne considérera que la force de répulsion qui est donnée par la loi de Coulomb :

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{r_{12}} \tag{6.5.21}$$

Dans la méthode PIC, l'interaction de Coulomb entre les particules chargées est remplacée par un champ moyen déterminé par les équations de Poisson ou de Maxwell [67].
L'idée de la méthode PIC est alors non pas de considérer les particules individuellement mais comme un ensemble de particules que l'on appelle macro-particules [82]. Ces derniers représentent donc la densité de charge à partir de laquelle on calcule le potentiel électrostatique via l'équation de Poisson. Cela nous permet de nous affranchir de l'interaction particule à particule comme pour l'approche mécanique. La force agissant sur cet ensemble sera alors uniquement calculée via la force de Lorentz. Les macro-particules

représentent alors une loi de probabilité associée à la fonction de distribution $f(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t), t)$ dont l'intégrale vaut 1. L'objectif est donc d'approcher les fonctions de distributions de chaque macro-particule par un ensemble fini de macro-particules [15]. Un algorithme typique de cette méthode est donnée en figure 6.23[42].

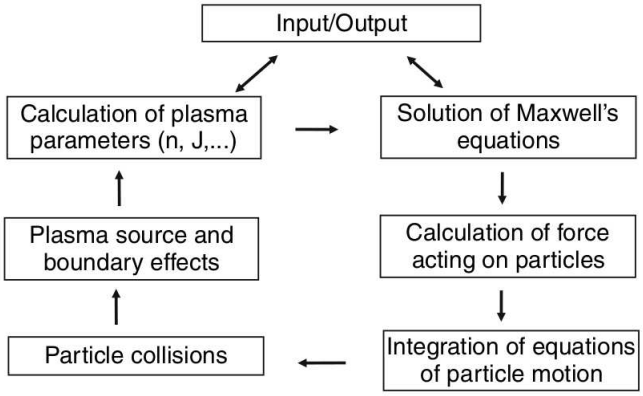


FIGURE 6.23: Schéma de principe de l'algorithme [42]

Le déplacement des macro-particules est résolu numériquement par les équations de mouvement données par la seconde loi de Newton :

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{X}(t)}{dt} = \boldsymbol{v} \\ \frac{d\boldsymbol{P}(t)}{dt} = q.\left[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}\right] \end{cases} \tag{6.5.22}$$

Le couple de fonctions $(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{P}(t))$ sont les solutions du système d'équations ci-dessus et sont appelées caractéristiques de l'équation de Vlasov [15]. Elles représentent la trajectoire dans l'espace des phases de chaque macro-particule de masse m et de charge q sous un champ électromagnétique. La caractéristique peut être vue comme une courbe sur laquelle la fonction de distribution f est conservée. Le champ électrique $\boldsymbol{E}$ est un "champ moyen" créé par chaque macro-particule. Il dérive directement d'un potentiel $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ où ϕ est le potentiel électrostatique donné par l'équation de Poisson :

$$\nabla^2\phi_r = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0\epsilon_r} \tag{6.5.23}$$

La méthode PIC peut être donc vu comme un couplage d'une méthode particulaire et d'une méthode numérique classique utilisant une grille (maillage). En effet, le mouvement des macro-particules se déplaçant suivant le champ électromagnétique est déterminé par les équations de Maxwell [41]. La grille est alors utilisée pour le calcul des champs électromagnétiques grâce aux

équations de Poisson ou de Maxwell. L'inconvénient majeur est leur faible précision lorsque la densité de charges est faible. La conséquence direct est un bruit numérique [15], [61].

6.5.5 Les méthodes de Vlasov

Ces méthodes permettent de résoudre directement les équations de Vlasov et n'engendrent pas de bruits numériques. La méthode la plus couramment utilisée est le "Time Splitting" qui consiste à découper l'équation de transport en équations de Vlasov [22]. C'est une méthode à pas fractionnaire en temps. Le principe est de séparer un champ d'advection en deux à condition que celui-ci soit de divergence nulle. L'équation 6.5.16 peut ainsi s'écrire en deux équations distinctes :

$$\frac{\partial f\left(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t\right)}{\partial t}+\boldsymbol{v}(t).\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}f\left(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t\right)=0 \tag{6.5.24}$$

et

$$\frac{\partial f\left(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t\right)}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{F}(t)}{m}.\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}f\left(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t\right)=0 \tag{6.5.25}$$

L'opérateur advection correspond au produit scalaire du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}(t)$ par le vecteur gradient $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}$ de l'équation 6.5.24
La méthode à pas fractionnaire permet alors de discrétiser ces équations en les intégrant successivement sur un pas de temps δt [15],[22]. L'algorithme proposé par Knorr et Cheng [22] s'écrit de la façon suivante, avec pour distribution initiale f^0 :

$$\left\{\begin{array}{c} f^{*}(r(t),v(t))=f^{t}(r(t)-v\Delta t/2,v(t)) \\ f^{**}(r(t),v(t))=f^{*}(r(t),v(t)+(F(t)/m)\Delta t) \\ f^{t+1}(r(t),v(t))=f^{*}(r(t)-v(t)\Delta t/2,v(t)) \end{array}\right. \tag{6.5.26}$$

Ces équations montrent que entre les instants t et $t+1$, la solution avance dans un premier temps suivant la direction $r(t)$ sur un demi-pas de temps sur la direction $v(t)$ pendant un pas de temps entier. Enfin, la solution avance nouveau suivant la direction $r(t)$ pendant un demi-pas de temps. Ici, f^n est la solution à l'instant t. D'autres méthodes permettent de calculer la fonction de distribution, comme les méthodes semi-lagrangiennes ou les méthodes par éléments finis mais elles restent inutilisables lorsque l'espace des phases est plus grand que trois [74], [36]. Cette liste n'est pas exhaustive et d'autres méthodes peuvent être utilisées. Pour cela, le lecteur pourra consulter la thèse de Solenne Le Bourdiec [15].

6.6 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de développer un calcul réaliste du potentiel entre les deux électrodes. Deux approches ont été considérées : mécanique et statistique. L'approche mécanique a été plus approfondie que l'approche statistique. En effet, elle permet rapidement, en ayant recours à des algorithmes et des hypothèses simples, de déterminer avec fiabilité la trajectoire de particules chargées. En les connaissant, ainsi que leur répartition dans la conduite, il est aisé d'en déduire le potentiel électrostatique via l'équation de Poisson. Les résultats de ce chapitre ont montré qu'une densité de charges élevée faisait apparaître des bandes de charge. Le modèle présenté dans cette thèse, présente néanmoins quelques inconvénients. Les collisions entre particules n'ont pas été prises en compte. Si cela avait été le cas, leurs trajectoires auraient été modifiées, avec une conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique par exemple (choc élastique). En outre, la vitesse des particules chargées a aussi son importance. En effet, si elle est très élevée, les particules chargées n'ont pas le temps d'être suffisamment déviées sous l'action d'un champ magnétique. Cet effet peut néanmoins être réduit en augmentant la densité de charges et ainsi favoriser les interactions coulombiennes, qui permettent elles aussi de modifier la trajectoire des particules.

L'approche statistique présentée dans ce chapitre pourrait être plus adéquat que l'approche statistique. En effet, il a été montré qu'en utilisant l'équation de transport des particules, on peut directement tenir compte des collisions entre particules via l'opérateur de collisions. Ce dernier, tient compte de tous les phénomènes physiques relatifs aux chocs : diffusion, absorption et ionisation. La méthode "PIC" est également utilisée avec cette approche, puisqu'elle permet de considérer tous les particules comme un ensemble appelé macro-particules. De là, il est ainsi possible de calculer les forces de répulsions via la loi de Coulomb. D'un point de vue algorithmique, le déplacement des macro-particules se calcule aussi via les équations de Newton.

Chapitre 7

Etalonnage d'un débitmètre électromagnétique

Ce chapitre a pour but d'introduire l'étalonnage des débitmètres électromagnétiques. C'est une étape préalable à toute commercialisation. L'objectif est de confronter les résultats issus de la production du site de Siemens avec ceux issus du modèle théorique présenté dans ce chapitre. Pour cela, on se servira des résultats obtenus dans les chapitres précédents.

7.1 Définition de l'étalonnage

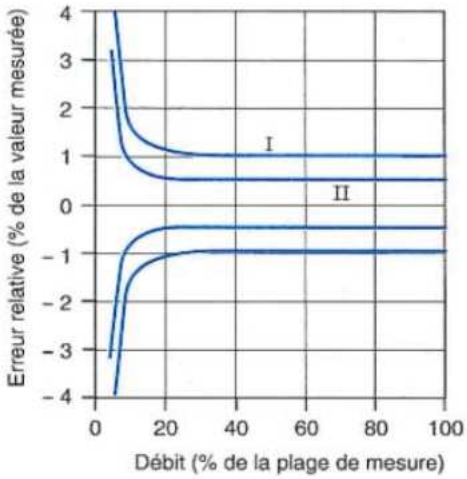
L'étalonnage a pour but de déterminer la constante de mesurage dans toute l'étendue de l'échelle de mesure [1] (ici c'est la vitesse du fluide) en trouvant le coefficient par lequel il faut multiplier la tension mesurée pour obtenir le débit. En d'autres termes, il faut établir une relation de proportionnalité entre la tension mesurée par les électrodes U_{ee} et la vitesse moyenne v du fluide. Cette relation sera explicitée par la suite.

$$U_{ee} = F.v \tag{7.1.1}$$

où F représente la constante de mesurage. Chez Siemens cette constante est appelée "calibration factor" que l'on appellera facteur d'étalonnage.
L'étalonnage induit forcément une erreur de mesurage. Le banc utilisé pour étalonner les débitmètres électromagnétiques doit être qualifié et son incertitude caractérisée par un organisme de certification international [79]. Le facteur d'étalonnage est ainsi déterminé pour plusieurs valeurs de débits entre 0 et 100 % de l'échelle de mesure. D'après [79], le facteur d'étalonnage ne dépend pas du débit. Les résultats d'étalonnage sont donnés sous forme de courbes enveloppes, figure 7.1. Les étalonnages peuvent se faire à

1. NF EN 29104

sec (sans eau), ou avec de l'eau. C'est ce dernier, utilisé par Siemens sur le site de Haguenau qui sera traité dans la suite du chapitre.



Définition des courbes enveloppes pour une vitesse d'écoulement > 1 m/s :
I de 20 à 100 % de la plage de mesure, erreur relative de 1 %
de 10 à 20 % de la plage de mesure, erreur relative croissant de 1 à 3 %.

II de 20 à 100 % de la plage de mesure, erreur relative de 0,5 %
de 10 à 20 % de la plage de mesure, erreur relative croissant de 0,5 à 1 %.

FIGURE 7.1: Courbes d'enveloppes de précision [79]

Ces courbes permettent de définir l'erreur minimale acceptable de la mesure d'un débit pour diverses gammes de débitmètres. Elles montrent que, pour de faibles vitesses débitantes, l'erreur de mesure est importante. C'est là qu'intervient le choix du diamètre nominal[2] d'un débitmètre. Il est choisi pour que la vitesse d'écoulement soit suffisante et la plus élevée possible. Typiquement, pour un débitmètre supportant des vitesses allant jusqu'à 10 m/s , la vitesse idéale est comprise entre 2 et 5 m/s [79].

7.2 Principe du banc d'étalonnage

La détermination du facteur d'étalonnage se fait par le biais d'un banc d'étalonnage qui dispose d'un système de drainage à partir duquel l'eau est puisée jusqu'au débitmètre. Le masse d'eau est connue avec précision par l'intermédiaire d'un réservoir (weighting tank sur la figure 7.2) qui mesure le débit massique. En outre, connaissant la température et la pression du fluide qui circule dans le banc, on en déduit le débit volumique. Au début de l'étalonnage, l'eau circulera d'abord entre le système de drainage et le débitmètre. Lorsque le débit est stable, un déflecteur permet à l'eau d'atteindre un réservoir. Le principe de ce test est représenté en figure 7.2. Le compteur du débitmètre électromagnétique indique alors la valeur qu'il a vu passer. Cette dernière est ensuite comparée au volume d'eau produit par le banc. La différence entre les deux valeurs permet de calculer un coefficient qui, inséré dans le transmetteur, "corrige" la valeur lue par le débitmètre électromagnétique. Ce coefficient correspond au facteur d'étalonnage K.

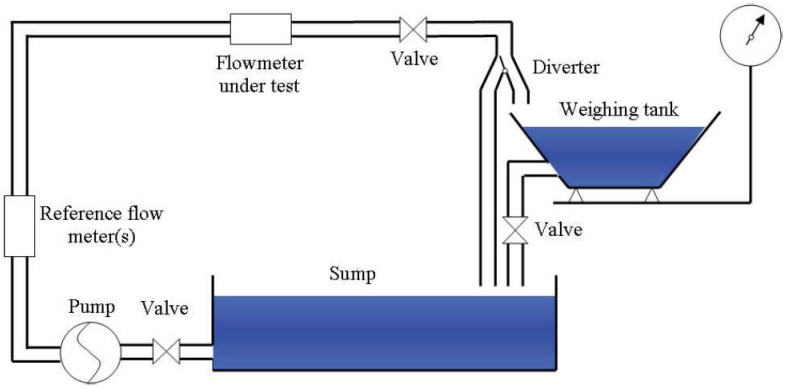


FIGURE 7.2: Principe de fonctionnement d'un banc d'étalonnage [26]

L'étalonnage d'un débitmètre électromagnétique se fait en trois étapes distinctes. Elles sont détaillées dans les paragraphes suivants.

2. Le diamètre nominal noté DN correspond au diamètre du tube sans tenir compte de l'épaisseur du revêtement

7.2.1 La détermination du zéro

La détermination du zéro revient à calculer l'offset appelé "zero point" chez Siemens. Le banc d'étalonnage est rempli d'eau, mais le fluide est statique (vitesse nulle). Le signal mesuré correspond alors à du bruit. Ce dernier peut être dû à des inductions parasites d'origine électrique et/ou magnétique. Pour les minimiser, les constructeurs préconisent généralement des conditions d'installation. D'après [26], le bruit peut également être dû aux courants de Foucault qui s'établissent dans les parties métalliques du débitmètre, si la fréquence du champ excitateur est importante. Dans ce cas, lors de la mesure du débit, le champ magnétique n'est pas stationnaire ; il se peut donc que les courants de Foucault ne soient pas complètement évanouis.

7.2.2 Détermination du facteur d'étalonnage K et vérification

La détermination du facteur d'étalonnage repose sur le principe suivant. Deux mesures de débit sont effectuées : la première à environ 20% du débit nominal, la deuxième à environ 80% du débit nominal.
On obtient alors deux points que l'on appelle "calibration point", voir figure 7.3. Cela permet d'ajuster le signal avec le signal de référence. Une fois le facteur d'étalonnage déterminé, il est enregistré dans le transmetteur ; on procède ensuite à une vérification. Cela consiste à mesurer 4 points : deux à environ 20% du débit nominal et deux à environ 80% du débit nominal.

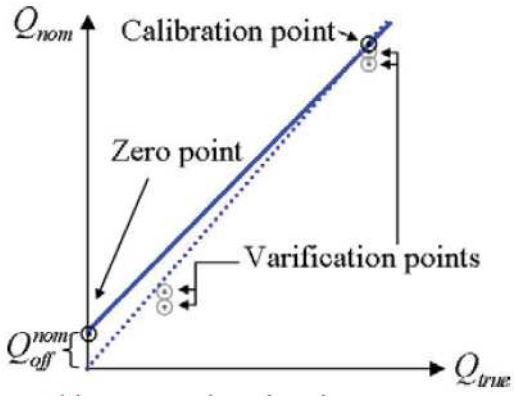


FIGURE 7.3: Détermination du facteur d'étalonnage et points de vérification [26].

Afin de s'assurer de la répétabilité des mesures, la différence pour les deux points de mesures au même débit ne doit pas excéder 0.2% chez Siemens pour un débitmètre ayant une précision de 0.25 % [26]. Les points de vérification doivent aussi respecter les courbes d'erreurs évoquées précédemment. Un

exemple d'une courbe d'erreur spécifiée par Siemens est représenté en figure 7.4.

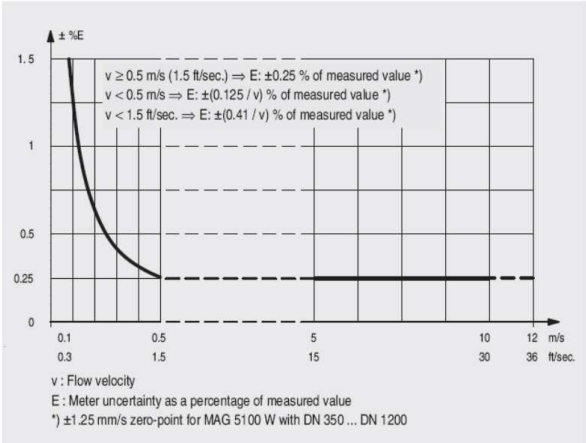


FIGURE 7.4: Courbes d'erreurs

7.3 Approche théorique du facteur d'étalonnage

7.3.1 Rappel théorique

Il a été vu dans le chapitre III que, lorsque l'induction magnétique est uniforme et que les vitesses présentent une symétrie axiale (profil axisymétrique), la tension recueillie par les électrodes s'écrivait :

$$U_{ee} = BDv \tag{7.3.1}$$

En réalité, l'induction magnétique dans un débitmètre électromagnétique est non uniforme. Shercliff [76] montra que la sensibilité S d'un débitmètre électromagnétique dépendait non seulement de la distribution de l'induction magnétique, mais aussi de la distance entre les électrodes, ainsi que du profil des vitesses du fluide : voir la fonction de poids W au chapitre III. La prédiction de la tension U_{ee} devient alors compliquée. Dans l'industrie, les écoulements ne sont pas axisymétriques ; il est, toutefois, possible de s'en approcher en respectant les conseils d'installation. Les experts ISO ont montré qu'une longueur droite égale à cinq fois le diamètre en amont du débitmètre électromagnétique et à trois fois le diamètre en aval est nécessaire pour éviter les erreurs de mesurage [79]. Cela permet de limiter la sensibilité des débitmètres électromagnétiques aux perturbations du profil des vitesses. La vitesse d'écoulement peut donc être assimilée à une vitesse moyenne v_m.

7.3.2 Détermination du facteur d'étalonnage K

En tenant compte de la non uniformité de l'induction magnétique, de la géométrie des électrodes et de la vitesse locale du fluide, on définit le facteur d'étalonnage K du débitmètre électromagnétique pour établir une relation de proportionnalité entre la tension U_{ee} et la vitesse moyenne de l'écoulement. Ce facteur est unique pour chaque appareil quel que soit le diamètre du tube de mesurage. La tension recueillie par les électrodes est alors définie par la relation 7.1.1. Le débitmètre électromagnétique est donc supposé linéaire. Sa réponse peut être décrite par une droite reliant le potentiel induit et le débit dont le coefficient directeur correspond au facteur d'étalonnage K. L'ordonnée à l'origine correspond à l'offset ("zero point"), figure 7.5. Le débit du fluide, en fonction de la section A du débitmètre et de la vitesse moyenne v_m, s'exprime par la relation suivante :

$$Q = A.v_m \tag{7.3.2}$$

La vitesse moyenne est exprimée en [m/s] et la section en [l/m] afin d'obtenir le débit en [l/s].

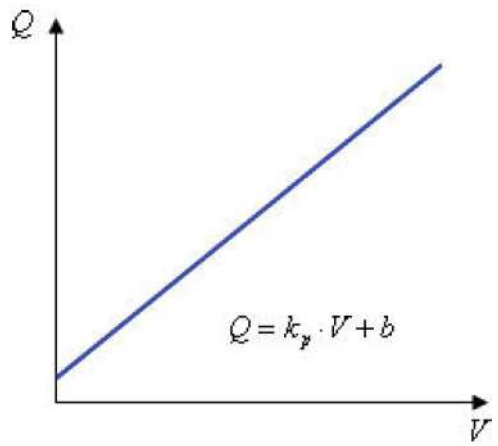


FIGURE 7.5: Débit volumique en fonction de la vitesse d'écoulement d'un débitmètre électromagnétique [26]

En s'inspirant de la relation 7.1.1, on peut exprimer le potentiel induit mesuré par les électrodes U_{ee} [µV] en fonction de la vitesse moyenne et de la sensibilité S [ţ$V.s.m^{-1}$] du débitmètre [26].

$$U_{ee} = S.v_m \tag{7.3.3}$$

La sensibilité est normalement dépendante du profil de vitesses. Cette dépendance est cependant négligée sous réserve de respecter les conditions

d'installation mentionnées précédemment. A première vue, l'équation 7.3.3 n'est pas facile à appréhender. En général, la sensibilité permet d'exprimer la variation du signal de sortie (U_{ee}) en fonction de la variation du signal d'entrée (v_m). Dans le cas d'un débitmètre électromagnétique, on peut alors écrire que :

$$S = \frac{\Delta U_{ee}}{\Delta v_m} \tag{7.3.4}$$

Le débitmètre électromagnétique sera d'autant plus sensible qu'une petite variation de la vitesse v_m entraîne une grande variation du potentiel induit U_{ee}. La relation 7.3.4 n'est valable que si le débitmètre est linéaire : relation de proportionnalité entre la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie. La sensibilité représente alors la pente d'une droite qui a sa propre unité de mesure et qui correspond à la pente de la réponse de l'appareil. Il ne faut donc pas la confondre avec le facteur d'étalonnage K qui, lui permet d'établir la relation de proportionnalité entre le potentiel induit U_{ee} et la vitesse moyenne v_m, afin que le débitmètre soit linéaire.

Enfin, la tension mesurée par le transmetteur U [µV] est la somme du potentiel induit recueilli par les électrodes U_{ee} [µV] et le bruit (offset : zero point) U_{off} [µV] [26]. Le convertisseur va filtrer le signal pour "supprimer" le bruit et convertir la tension analogique recueillie par les électrodes en une tension numérique.

$$U = U_{ee} + U_{offset} \tag{7.3.5}$$

La sensibilité S définie dans l'équation 7.3.3 est la sensibilité "vraie" du débitmètre électromagnétique, puisqu'elle relie le potentiel induit actuel et la vitesse du fluide. Shercliff a introduisit la notion de sensibilité dans son ouvrage [76] et l'exprima comme le ratio entre le potentiel induit avec l'induction magnétique, la distance entre les électrodes et la vitesse moyenne. Dans le chapitre III, il a été montré que le potentiel induit d'un débitmètre ayant une section circulaire sous une induction magnétique uniforme peut s'exprimer sous la forme : $U_{ee} = BDv_m$. A partir de cette expression, Siemens a défini un facteur de sensibilité s, expression établie par Shercliff [76] :

$$s = \frac{U_{ee}}{BD_e v_m} = \frac{\iint v\,(x,y)\,W\,(x,y)\,dxdy}{\iint v\,(x,y)\,dxdy} \tag{7.3.6}$$

Ici D_e est la distance entre les électrodes de mesure. Dans le cas d'un débitmètre idéal : une section circulaire et une induction magnétique uniforme, le facteur de sensibilité est $s = 1$. De là, il est possible d'établir une relation entre la sensibilité "vraie" S et le facteur de sensibilité s défini par Siemens :

$$S = BD_e s \tag{7.3.7}$$

La sensibilité "vraie" dépend donc fortement de la géométrie du circuit magnétique, de l'induction magnétique et de la géométrie des électrodes, puisqu'elle est directement liée à la fonction de poids W.
L'induction magnétique étant proportionnelle au courant injecté dans les bobines, la sensibilité doit aussi l'être d'où [26] :

$$S = \alpha I \tag{7.3.8}$$

où α la sensibilité du courant. Comme mentionné dans le chapitre II, les débitmètres électromagnétiques ont été conçus pour avoir une sensibilité "vraie" S de 125 $\left[\frac{\mu V}{m/s}\right]$: c'est la sensibilité nominale des débitmètres électromagnétiques produits par Siemens. Le coefficient α vaut alors 1 $\left[\frac{m\Omega}{m/s}\right]$ pour une sensibilité nominale $S_{nom} = 125$ de $\left[\frac{\mu V}{m/s}\right]$ et un courant de 125 mA.

Il faut bien garder à l'esprit que le moindre changement de design du circuit magnétique affectera l'induction magnétique et donc la fonction de poids W. Cela a pour conséquence de modifier la valeur du facteur de sensibilité s. Il n'est alors plus garanti d'avoir une sensibilité S de 125 $\left[\frac{\mu V}{m/s}\right]$. En réalité, la sensibilité S peut changer d'un débitmètre à l'autre. En effet, le diamètre de la section peut varier du fait des tolérances de production ; tout comme l'induction magnétique dont l'intensité peut varier en raison de la composition chimique des matériaux magnétiques qui changer. La perméabilité magnétique relative μ_r ne sera donc pas nécessairement la même. Ces variations doivent cependant être minimales afin de respecter les relations précédentes. L'étalonnage permet de tenir compte de ces fluctuations. Alors le facteur d'étalonnage est défini par la relation ci-dessous :

$$K \equiv A\left(\frac{S_{nom}}{S}\right) \tag{7.3.9}$$

Il a été vu qu'un débitmètre électromagnétique a une sensibilité nominale S_{nom} et une section $A_{nom} = \frac{\pi DN^2}{4}$, où DN est le diamètre nominal. Il est possible d'en déduire un facteur d'étalonnage nominal K_{nom} :

$$K_{nom} = A_{nom}\frac{S_{nom}}{S_{nom}} = \frac{\pi DN^2}{4}[mm^2] = \frac{\pi DN^2}{4000}\left[\frac{l}{m}\right] \tag{7.3.10}$$

D'après la thèse de Christensen, l'aire A du débitmètre est fonction du diamètre intérieur du débitmètre (qui tient compte de l'épaisseur du revêtement). Celui-ci n'est donc pas nécessairement égal à la distance entre les deux électrodes. Le facteur d'étalonnage s'écrit alors :

$$K\left[\frac{l}{m}\right] \equiv A\left(\frac{S_{nom}}{S}\right) = \frac{\pi D_L^2 I\alpha_{nom}}{4BD_e s} \tag{7.3.11}$$

Le facteur d'étalonnage relatif est défini par :

$$K_{rel} = \frac{K}{K_{nom}} = \frac{A}{A_{nom}}.\frac{S_{nom}}{S} = \left(\frac{D_L}{DN}\right)^2.\frac{I\alpha_{nom}}{BD_e s} \tag{7.3.12}$$

Toujours selon Christensen, un débitmètre électromagnétique est validé par la production, si le facteur d'étalonnage relatif est compris entre 0,7 et 1,4. D'après une étude interne de Siemens Haguenau, il faut tenir compte de deux autres facteurs de correction pour définir clairement les limites du facteur d'étalonnage relatif, voir tableau 7.1.

— facteur de correction pour le client
— facteur de correction lié à l'électronique du transmetteur.

Le facteur de correction pour le client est un argument commercial lui permettant de modifier le facteur d'étalonnage afin de changer la précision suivant le besoin et l'application.

Débitmètre		**Client**		**Electronique**	
$K_{min}[1]$	$K_{max}[1]$	$C_{min}[1]$	$C_{max}[1]$	$E_{min}[1]$	$E_{max}[1]$
$0,7$	$1,4$	$0,8$	$1,2$	$0,98$	$1,02$

Table 7.1: Facteurs de correction

En multipliant les valeurs minimales et maximales entre elles, le facteur d'étalonnage relatif est défini par des valeurs limites comprises entre 0,54 et 1,71. Ces valeurs sont stockées dans un circuit électronique appelé ASIC qui n'est pas reprogrammable pour le transmetteur utilisé (Mag6000). Si ces limites sont dépassées, l'ASIC sature et la mesure de débit sera impossible.

7.3.3 Calcul du facteur d'étalonnage K du BigMag 5100 DN400

Afin d'étalonner ses appareils, la production de Siemens se sert des valeurs définies dans le tableau 7.2. Les limites ainsi que le facteur d'étalonnage sont calculés pour chaque diamètre nominal de la gamme Mag5100. On se limitera ici aux valeurs concernant les diamètres supérieurs à 300 mm.

Diamètre	**Facteur d'étalonnage**		
DN(mm)	$K_{min}\left(\frac{l}{m}\right)$	$K_{max}\left(\frac{l}{m}\right)$	$K_{nom}\left(\frac{l}{m}\right)$
350	68,723	137,44	70
400	89,76	179,52	111,5
450	113,6	227,2	128,730
500	140,25	280,5	190
500	201,96	403,92	220
600	274,89	549,78	330,99
700	315,56	631,12	458,33
800	359,04	718,08	540
900	454,41	908,82	700
1000	775	1355	700
1050	561	1121,99	914,05
1100	678,81	1357,61	900
120	1170	1950	1291,02

Table 7.2: Valeurs du facteur d'étalonnage utilisées chez Siemens

Diamètre	**Facteur d'étalonnage**		
DN(mm)	$K_{min}\left(\frac{l}{m}\right)$	$K_{max}\left(\frac{l}{m}\right)$	$K_{nom}\left(\frac{l}{m}\right)$
350	52,80	164,87	96,21
400	68,96	215,34	125,66
450	87,28	272,54	159,04
500	107,76	336,46	196,35
500	155,17	484,51	282,74
600	211,20	659,47	384,85
700	242,45	757,05	441,79
800	275,86	861,35	502,65
900	349,13	1090,15	636,17
1000	431,03	1345,86	785.4
1050	475,21	1483,81	865,90
1100	521,54	1628,49	950,33
120	620,68	1938,04	1130,97

Table 7.3: Valeurs théoriques du facteur d'étalonnage

En utilisant la relation 7.3.10, on peut aisément vérifier les valeurs mentionnées dans le tableau 7.2. Les calculs ont été refaits et les résultats obtenus montrent une différence entre les facteurs d'étalonnage nominaux utilisés chez Siemens et ceux recalculés (voir 7.3). D'ailleurs, les DN900 et DN1000

du tableau 7.2 ont le même K_{nom}, mais des limites différentes, ce qui laisse à penser que la définition du K_{nom} chez Siemens est erronée. Il serait donc intéressant de voir l'impact d'un changement du facteur d'étalonnage nominal K_{nom} sur l'estimation du facteur d'étalonnage K en production. En effet, on verra par la suite que ce dernier dépend du facteur d'étalonnage nominal.
Prenons, par exemple le débitmètre DN400 étudié dans cette thèse. Les données de la production fournissent un K_{nom} de 111.5 l/m, alors qu'en utilisant la formule 7.3.10 le facteur d'étalonnage K_{nom} vaut 125 ;66 l/m. De même, pour les limites, on passe de 89,76 à 68,96 l/m pour la valeur minimale et de 179,52 à 215,34 l/m pour la valeur maximale. Si la théorie proposée par Christensen s'avère exacte, les valeurs utilisées par la production à Haguenau sont erronées. Il n'existe malheureusement aucun moyen de savoir comment ces dernières ont été calculées. Les valeurs du tableau 7.2 ont été reprises via un fichier Excel qui ne donne aucune indication quant à la détermination de K_{nom}. Pour la suite, on utilisera les valeurs calculées théoriquement.

7.3.4 Calcul de K

La mesure de l'induction magnétique dans le débitmètre a été effectuée dans le chapitre V. Cette cartographie nous permet d'en déduire une induction magnétique moyenne. Les paramètres utilisés pour le calcul de K sont donnés dans le tableau 7.7.

$\boldsymbol{B}(mT)$	$\boldsymbol{D_e}$(mm)	$\boldsymbol{D_L}$(mm)	$\boldsymbol{I}$(mA)	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{\alpha_{nom}}\left(\frac{m\Omega}{m/s}\right)$	$\boldsymbol{S}\left(\frac{\mu V}{m/s}\right)$
0,51	386	392	125	0,63	1	125

Table 7.4: Valeurs utilisées pour le calcul de K

Où :

- D_e est la distance entre les électrodes (mm)
- D_L est le diamètre intérieur (mm)
- s est le facteur de sensibilité
- S est la sensibilité "vraie" $\left(\frac{\mu V}{m/s}\right)$

En utilisant les relations 7.3.11 et 7.3.12, on peut calculer les facteurs d'étalonnage et d'étalonnage relatif, en tenant compte des facteurs de correction.

$$K = 120,68 \left[\frac{l}{m}\right] \tag{7.3.13}$$

$$K_{rel} = 0,96 \tag{7.3.14}$$

Le facteur d'étalonnage relatif est bien compris entre les valeurs limites imposées par l'électronique de l'ASIC : $0,5488 < Krel < 1.7136$. Ces résultats nous permettent d'établir les limites de fonctionnement du débitmètre électromagnétique.
En réalité, la sensibilité est fortement dépendante de l'induction magnétique qui dépend des perméabilités magnétiques relatives des matériaux utilisés, ainsi que de l'agencement du circuit magnétique. En effet, le facteur de sensibilité s est directement lié à l'induction magnétique via la fonction de poids, comme le rappelle l'équation donnée par Shercliff.

$$s = \frac{\iint v(x,y)\, W(x,y)\, dxdy}{\iint v(x,y)\, dxdy} = \frac{U_{ee}}{DBv_m} \tag{7.3.15}$$

Cela montre qu'une modification de la distribution de l'induction magnétique changerait considérablement la fonction de poids. Cela ne garantit plus une sensibilité S aux alentours de 125 ţ$V.s.m^{-1}$ car elle est exprimée en fonction du facteur de sensibilité s. Par ailleurs, l'équation 7.3.12 montre que si S est sensiblement égale à 125 ţ$V.s.m^{-1}$, alors le facteur d'étalonnage relatif est uniquement dépendant du rapport $\left(\frac{D_L}{DN}^2\right)$.
En conclusion, si l'on souhaite effectuer des modifications de matériaux ou d'agencement du circuit magnétique, il faut s'assurer que :

$$70,05 \left[\frac{\mu V}{m/s}\right] < S = B.De.s < 218,75 \left[\frac{\mu V}{m/s}\right] \tag{7.3.16}$$

7.3.5 Comparaison et vérification du modèle théorique du facteur d'étalonnage

Dans le cadre sa thèse, Christensen effectua des mesures du facteur d'étalonnage, afin de valider ses modèles statistiques sur la dépendance du facteur d'étalonnage en fonction du diamètre et de l'induction magnétique. En 2008, il effectua des mesures sur 27 échantillons différents. Les résultats sont donnés dans le tableau 7.5.

Paramètres	**BigMag 5100 DN400**
$\boldsymbol{K_{moyen}}$	121.703
Médiane	120,601 [l/m]
Ecart type	4,832 [l/m]
Variance	23,351 [l/m]
$\boldsymbol{K_{min}}$	113,889 [l/m]
$\boldsymbol{K_{max}}$	132,039 [l/m]
Nombre d'échantillons	27

Table 7.5: Valeurs expérimentales du facteur d'étalonnage

Les résultats montrèrent que le facteur d'étalonnage moyen était proche de celui déterminé par le calcul dans le cadre de cette thèse. Afin de valider le modèle théorique établi dans la section précédente, un calcul de la sensibilité S est effectué à partir de données provenant de la production du site de Siemens Haguenau pour le BigMag 5100 de diamètre nominal 400 mm.
Le débit mesuré est estimé à partir du facteur d'étalonnage que l'on peut exprimer en fonction du débit et du potentiel induit U_{ee} à l'aide des relations 7.3.3, 7.3.5 et 7.3.2.

$$Q = Av_m = A\frac{U_{ee}}{S} = A\frac{U - U_{off}}{S} \tag{7.3.17}$$

D'après la thèse de Christensen [26], le facteur d'étalonnage K est déterminé par la relation suivante :

$$K = K_{nom}.\left(\frac{Q_{true}}{Q_{nom} - Q_{off}}\right) \tag{7.3.18}$$

où $Q_{nom} = K_{nom}.\frac{U}{S_{nom}}$ est le débit nominal calculé à partir de K_{nom} déterminé précédemment.
On voit donc l'importance du facteur d'étalonnage nominal sur la détermination du facteur d'étalonnage K. Les valeurs utilisées par Siemens étant erronées, il serait intéressant de voir ce que l'on obtient lors de l'étalonnage des débitmètres en utilisant les K_{nom} de ce modèle théorique.
Connaissant K, on peut établir l'expression théorique du débit mesuré :

$$Q_{true} = \frac{K}{S_{nom}}(U - U_{off}) = \frac{KU}{S_{nom}} - \frac{KU_{off}}{S_{nom}} \tag{7.3.19}$$

où $Q_{off} = \frac{KU_{off}}{S_{nom}}$ qui est l'expression théorique de l'offset ("zero point").
Puis, le facteur d'étalonnage K est déterminé pour estimer la valeur du débit mesuré. La figure 7.5, montre le type de courbe que l'on obtient. Le débit Q_{true} représente le débit de référence (ou le débit "vraie" dans notre cas).
Les valeurs obtenues via l'étalonnage du BigMag 5100 DN 400 sont utilisées afin de valider les expressions théoriques établies. Les données sont listées dans le tableau 7.6 :

BigMag 5100 DN400			
$\boldsymbol{Q_{mes}}\left(\frac{m^3}{h}\right)$	$\boldsymbol{Q_{off}}\left(\frac{m^3}{h}\right)$	$\boldsymbol{Q_{ref}}\left(\frac{m^3}{h}\right)$	$\mathbf{K}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}}\right)$
1906,56	$4,01.10^{-9}$	1905,83	124,91

Table 7.6: Données mesurées lors d'un étalonnage

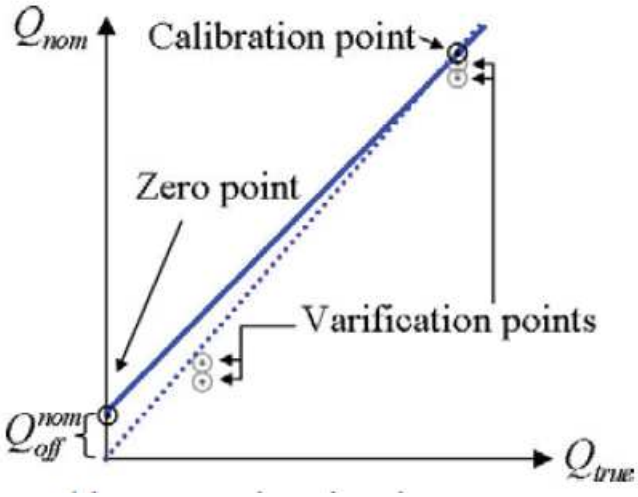


FIGURE 7.6: Détermination du débit volumique

où Q_{mes} et Q_{ref} représentent respectivement Q_{nom} et Q_{true} de la figure 7.6. A partir de ces données, il est possible de calculer la valeur de la tension induite au niveau des électrodes, ainsi que la sensibilité du débitmètre électromagnétique. Pour cela, on utilise la relation 7.3.19 :

$$U_{ee} = \frac{(Q_{mes} + Q_{off})\, S_{nom}}{K} \tag{7.3.20}$$

avec $S_{nom} = 125$ ţ$V.s.m^{-1}$. La sensibilité du débitmètre est déterminée à partir du débit de référence (débit "vraie") et en connaissant la valeur du diamètre intérieur D_L.

$$S = A\frac{U_{ee}}{Q_{ref}} = \frac{\pi D_L^2}{4000}.\frac{U_{ee}}{Q_{ref}} \tag{7.3.21}$$

Les valeurs calculées sont données dans le tableau 7.7 :

BigMag 5100 DN400		
$\boldsymbol{U_{ee}}\,(\mu V)$	$\boldsymbol{D_L}(mm)$	$\boldsymbol{S}\left(\frac{\mu V}{m/s}\right)$
1907,94	392	120,82

TABLE 7.7: Valeur expérimentale de la sensibilité

On retrouve bien une sensibilité S proche de 125 ţ$V.s.m^{-1}$, ce qui permet de valider l'approche théorique de l'étalonnage.

7.4 Conclusion

L'étalonnage des débitmètres électromagnétiques est une étape nécessaire avant toute mise en vente. Il garantit la fiabilité des mesures de débit ainsi qu'un fonctionnement optimal de l'appareil. Il permet également de vérifie la bonne qualité de fabrication des produits. Le facteur d'étalonnage est très sensible aux variations de l'induction magnétique, ainsi qu'à l'agencement du circuit magnétique. L'intensité de l'induction magnétique peut varier, à condition de respecter les limites de fonctionnement du point de vue de la sensibilité S. En revanche, si l'on souhaite changer de matériaux magnétiques, l'induction magnétique sera bien évidemment modifiée (perméabilité magnétique relative différente).
Il serait aussi intéressant d'analyser l'impact des courants de Foucault qui, parmi d'autres facteurs, sont responsables du bruit sur le signal mesuré. L'intensité de ces courants dépend notamment de la résistivité des matériaux.
Enfin, tout changement de la géométrie, de la position des matériaux et des bobines, modifie la fonction de poids W. Cela impacte directement la sensibilité réelle S de l'appareil et donc le facteur d'étalonnage. L'optimisation des débitmètres nécessite alors de connaître W par la simulation et la mesure expérimentale de la densité de courant j. Cette étape réalisée, on calcule le facteur de sensibilité s pour en déduire la sensibilité S "vraie" afin d'obtenir le facteur d'étalonnage K. La géométrie actuelle du circuit magnétique des débitmètres permet d'avoir une sensibilité "vraie" S de 125 ţ$V.s.m^{-1}$.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

Les travaux menés depuis la découverte du phénomène d'induction et l'apparition des premiers débitmètres électromagnétiques dans les années 1930 ont mis en évidence la difficulté majeure à les améliorer. En effet, les différentes études scientifiques ont montré qu'obtenir une induction magnétique uniforme et s'affranchir des contraintes fluidiques étaient compliqués. Les travaux réalisés dans cette thèse se sont basés sur les résultats théoriques obtenus dans le passé. Ces derniers ont été revus pour apporter plus de précision aux hypothèses retenues. Cela a permis également de montrer l'importante de l'évaluation de la fonction de poids avant toute amélioration et/ou optimisation des débitmètres électromagnétiques. La connaissance précise de l'induction magnétique et d'un profil de vitesse réaliste sont nécessaires pour déterminer la fonction de poids. Il sera donc primordial, à l'avenir, que Siemens établisse un protocole expérimental mesurant la densité de courant à l'intérieur du tube de mesurage pour calculer la fonction de poids.

L'objectif principal de cette thèse était de modéliser le débitmètre électromagnétique. La connaissance des propriétés physiques des matériaux utilisés pour chaque pièce était alors nécessaire. Ces matériaux, caractérisés par leur perméabilité magnétique relative, ont été mesurés à l'aide d'un perméamètre. Grâce aux résultats obtenus, il a été possible de définir un domaine de linéarité, pour lequel l'induction magnétique dépendait linéairement du champ magnétique pour chaque matériau. Cette dépendance linéaire était primordiale pour la modélisation du débitmètre électromagnétique. En effet, en ayant une induction magnétique proportionnelle au champ magnétique, la perméabilité magnétique restait constante. En dehors du domaine de linéarité, cela n'aurait plus été le cas. A l'aide de la caractérisation des matériaux, il a été possible de modéliser avec précision le débitmètre électromagnétique. En effet, les résultats de simulation du chapitre V ont montré que les pièces du circuit magnétique avaient une grande influence sur le fonctionnement de l'appareil.

La simulation numérique a permis effectivement de modifier l'intensité

et la distribution de l'induction magnétique dans le tube de mesurage. Un second objectif était de conforter les résultats numérique par la pratique. C'est pourquoi, un banc de test mesurant le champ magnétique à l'intérieur des débitmètres électromagnétiques a été mis en place, dans le but de conforter, par l'expérience, les résultats issus de la simulation numérique. Cela a permis de mettre en évidence une excellente concordance entre les mesures expérimentales et le calcul numérique. De plus, la mesure du champ magnétique permettra désormais à Siemens de repérer facilement les défauts de production, comme, par exemple, un mauvais positionnement des bobines. En effet, pour tout défaut dans le positionnement des bobines, il apparaîtra une dissymétrie du champ d'induction magnétique.

Un troisième objectif de cette thèse, était de développer un modèle réaliste pour la détermination du potentiel entre les deux électrodes de mesure. Pour obtenir ce modèle, une approche mécanique a été utilisée. Elle a consisté en la résolution de la seconde loi de Newton, afin de calculer la trajectoire des particules et leur quantité de mouvement. Cela a permis de calculer avec précision la distribution de charges soumises à un champ d'induction magnétique. Les résultats obtenus ont confirmé la théorie : conservation de la quantité de mouvement et trajectoire circulaire sous un champ d'induction uniforme. Ils ont également permis de montrer la répartition inhomogène des charges selon leur signe, sous un champ d'induction magnétique. Ces résultats plutôt satisfaisants devront être améliorés dans le futur, en prenant en compte d'autres phénomènes physiques non utilisés. En effet, les collisions entre particules n'ont pas été utilisées pour le développement du modèle.

Dans cette optique, l'idée serait d'utiliser une approche statistique dont le principe a été mentionné dans le chapitre VI. Comme pour l'approche mécanique, il faudrait se servir de la méthode PIC, en considérant les particules comme un ensemble de macro-particules, afin de calculer le champ électrique via l'équation de Poisson. L'approche statistique consisterait également à utiliser les équations de transport très utilisées en physique. Elles permettraient de décrire l'évolution temporelle de la distribution de charges en tenant compte des collisions ; ces dernières peuvent décrire plusieurs phénomènes comme la diffusion et l'absorption dues aux chocs entre particules. Enfin, pour affiner encore plus le modèle, il faudrait que les particules n'aient pas toutes la même vitesse dans la conduite, puisqu'en réalité les débitmètres électromagnétiques sont assez souvent utilisés avec des écoulements turbulents.

Le dernier chapitre de cette thèse portait sur l'étalonnage des débitmètres électromagnétiques : : une étape préalable avant la mise en vente. L'objectif de l'étalonnage était d'établir une relation de proportionnalité entre la tension mesurée par les électrodes et la vitesse du fluide. En effet, pour établir cette relation,il fallait passer par le facteur d'étalonnage. Ce dernier, était dépendant de plusieurs facteurs : géométrie des électrodes, du

circuit magnétique et valeur du champ d'induction magnétique. C'est pourquoi, pour toute optimisation future des débitmètres électromagnétiques, la détermination de la fonction de poids sera primordiale. Le changement des paramètres cités précédemment ont pour conséquence directe de modifier la fonction de poids et, de ce fait, le facteur d'étalonnage.

Le développement d'un modèle théorique du facteur d'étalonnage a, par ailleurs, permis d'établir un domaine de fonctionnalité des appareils en fonction du champ d'induction magnétique. En outre, les résultats expérimentaux du chapitre V, ont permis de vérifier le processus d'étalonnage des appareil et mis en évidence que les valeurs utilisées par Siemens étaient probablement erronées.

Bibliographie

[1] J. A. Arnold. An electromagnetic flowmeter for transient flow studies. *The review of scientific instruments*, Vol. 22 :p.43–47, 1951.

[2] D. Lederer B. Roulet B. Diu, C. Guthmann. *Physique Statistique*. ISBN 2 7056 6065 8. Hermann, 2011.

[3] R. C. Baker. Solutions of the electromagnetic flowmeter equation in cylindrical coordinates. *Journal of Physics D : Applied Physics*, Vol. 1 :p.895–899, 1968.

[4] R. C. Baker. Effects of non-uniform conductivity fluids in electromagnetics flowmeters. *Journal of Applied Physics*, Vol. 3 :p.637–639, 1970.

[5] R. C. Baker. *Flow measurement Handbook*. Cambridge University Press, 2000.

[6] B. Balko and R. L. Berger. Improved electromagnetic flowmeter. *The review of Scientific Instruments*, Vol. 38 :p.129–130, 1966.

[7] M. L. Barton and Z. J. Cendes. New vector finite elements for three-dimensional magnetic field computation. *Journal of Applied Physics*, Vol.61 :pp. 3919–3921, 1987.

[8] M. K. Bevir. Induced voltage electromagnetic flowmeters. *Ph.D. Thesis, University of Warwick*, 1969.

[9] M. K. Bevir. The theory of induced voltage in electromagnetic flowmeter. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 43 :p.577–590, 1970.

[10] M. K. Bevir. The predicted effects of red blood cells on electromagnetic flowmeter. *Journal of Applied Physics*, Vol. 4 :p.387–399, 1971.

[11] M. K. Bevir, V. T. Sullivan, and D. G. Wyatt. Computation of electromagnetic flowmeter characteristics from magnetic field date. *Journal of Physics D : Applied Physics*, Vol. 16 :p.373–388, 1981.

[12] R. Blickley and J. George. Vortex flowmeters provide higher accuracy lower pressure drops. *Control Eng. 42*, pages p 745–749, 1995.

[13] B. J. Boersma and F. T. M. Nieuwstadt. On the electric potential induced by a homogeneous magnetic field in a turbulent pipe flow. *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 62(Issue 1) :p.29–51, 1999.

[14] L. Boltzmann. *Wien. Ber.*, 1872.

[15] S. Le Bourdiec. *Méthodes déterministes de résolution des équations de Vlasov-Maxwelle relativistes en vue du calcul de la dynamique des ceintures de Van Allen.* PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2007.

[16] T. J. M. Boyd and J. J. Sanderson. Plasma dynamics. *Nelson UK*, 1969.

[17] W. R. Brody. Theoretical analysis of the cw doppler. *IEE Transaction on biomedical Engineering*, Vol.BME-21,3, 1974.

[18] O. Buneman. Dissipation of currents in ionized media. *Phys. Rev. 115 503*, 1959.

[19] T. H. Burgess. Flow measurement using vortex principles. *Proceedings of the Flow Conference : Brighton*, pages p. 321–339, 1977.

[20] K. H. J. Buschow and F. R. Boer. *Physics of Magnetism and Magnetic Material.* Kluwer Academic Publisher, 2004.

[21] A. B. Langdon C. Birdsall. Plasma physics via computer simulation. *CRC Press*, 2005.

[22] G. Knorr C. Z. Cheng. The integration of the vlasov equation in configuration space. *J. Comput. Phys.*, (22) :330–351, 1976.

[23] W. D. Callister and Rethwisch. Fundamentals of materials science and engineering. anintegred approach. *John Wiley and Son*, Hoboken.

[24] Cedrat Technologies Innovation in Mechatronics. *Le magnétisme pour la mécatronique*, 4 au 6 décembre 2017.

[25] Y. A. Cengel and J. M. Cimbla. *Fluid Mechanics : Fundamentals and Applications.* McGraw Hill Education, fourth edition, 2018.

[26] T. A. Christensen. *Advanced techniques in Electromagnetic Flow Measurement.* PhD thesis, 2009.

[27] J. M. D. Coey. *Magnetism and Magnetic Material.* Cambridge University Press, 2009.

[28] B. D. Cullity and Graham. *Introduction to magnetic material.*

[29] B. A. Ani D. M. Davidovi and V. M. Babovi. An electrostatic interpretation of the weighted flow theorem of electromagnetic flowmeters. *Electrical Engineering(Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 74 :p.267–273, 1991.

[30] R. Schneider D. Tskhakaya, K. Matyash and F. Taccogna. • . *Contrib. Plasma Phys. 47*, 2007.

[31] J. M. Dawson. One dimensional plasma model. *Phys. Fluids 5, 445*, 1962.

[32] J. L. Delcroix and A. Bers. Physique des plasma. *CNRS Ed., Paris*, 1994.

[33] Etienne du Trémolet de Lacheisserie. *Magnétisme : Matériaux et applications.* Collection Grenoble Sciences, 2000.

[34] C. Lubich E. Hairer and M. Roche. *The Numerical Solution of Differential-Algebric Systems by Runge-Kutta Methods*. Springer, 1980.

[35] M. E. Evans and F. H. Harlow. The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations. *Los Alamos National Laboratory*, A-2139, 1957.

[36] Z. Y. Ezzudin. *Numerical solutions of nonlinear plasma equations by the finite element methode*. PhD thesis, California University, 1975.

[37] F. Mazaleyrat F. Fiorillo. Mesures magnétiques-mesurage des propriétés magnétiques des matériaux. Technical Report Doc. D1505, Techniques de l'Ingénieur.

[38] M. Faraday. The bakerian lecture : Experimental researches in electricity. *Physical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 122 :p.163–194, 1832.

[39] D. L. Franklin and W. Schlegal. Blood flow measured by doppler frequency. *Science*, Vol. 134 :p.564–568, 1961.

[40] B. D. Ganapol and V. C. Boffi. The multiple collision method in solving the boltzmann equation for time-dependent test particle transport. • *Progress in Astrnautics and Aeronautics*, 1980.

[41] P. Glanc. *Aproximation numérique de l'équation de Vlasov par des méthodes de type remapping conservatif*. PhD thesis, Institut de Recherche Mathématique Avancée, 2013.

[42] A. Weisse H. Fehske, R. Schneider. *Computational Many-Particle Physics*. Springer, 2008.

[43] A.C. Haacke. Extended theory of the ultrasonic flowmeter. *Proceeding of FLOWMEKO 1983 IMEKO Conference*, pages p.141–145, 1984.

[44] J. Hemp and H. K. Versteeg. Prediction of electromagnetic flowmeter characteristics. *Journal of Physics D : Applied Physics*, Vol. 19 :p.1459–1476, 1986.

[45] J. Hoffmann. Upgrade of a labview control system of a 3d measuring robot to analyse the magnetic field inside an electromagnetic flowmeter. Master's thesis, Universiy of Southern Denmark, 2015.

[46] H. Holdaway. A note on electromagnetic flowmeters of rectangular cross section. *Helvetica Physica Acta*, Vol. 30 :p.85–88, 1957.

[47] G. Y. Tian J. Z. Wang and G. P. Lucas. Relationship between velocity profile and distribution of induced potential for an electromagnetic flowmeter. *Flow Measurement and Instrumentation*, Vol. 18, Issue 2 :p.99–105, 2007.

[48] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, Inc., New York, third edition edition, 1999.

[49] Jiles and D. C. Atherton. Theory of ferromagnetic hysteresis. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 61 :p.48–60.

[50] Jianming Jin. *The finite element method in electromagnetics.* John Wiley and Sons, Inc., New York, second edition edition, 2002.

[51] H. Kanai. The effects upon electromagnetic flowmeter sensitivity of non uniform fields and velocity profils. *Medical and Biological Engineering*, Vol. 7 :p.661–676, 1969.

[52] C. Kittel. *Elementary Statistical Physics.* John Wiley and Sons, 1958.

[53] A. Kolin. An alternating field induction flow meter of high sensitivity. *The review of scientific instruments*, Vol. 16 :p.109–116, 1945.

[54] A. Kolin. Improved apparatus and technique for electromagnetic determination of blood flow. *The review of scientific instruments*, Vol. 23 :p.235–242, 1952.

[55] L. M. Korsunskii. *Measurement Techniques*, Vol. 3 :p.893–899, 1960.

[56] L. M. Korsunskii. Electromagnetic flowmeter with errors not exceeding 0.5% of the full-scale deflection. *Measurement Techniques*, Vol. 4 :p.668–670, 1961.

[57] R. Lemaître and T. Belgrand. Matériaux magnétiques doux cristallins. acier électrique à grains orientés. Technical Report Ref. : D2124 V1, Techniques de l'Ingénieur, 2014.

[58] H. A. Lorentz. Versuch einer theorie der electrischen und optischen erscheinungen in bewegten körpen. 1895.

[59] E. Luntta and J. Halttunen. The effect of velocity profile on electromagnetic flow measurement. *Sensor and Actuator*, pages p.335–344, 1989.

[60] A. I. Maalouf. The derivation and validation of the pratical operating equation for electromagnetics flowmeters case of having an electrolytic conductor flowing through. *IEEE Sensor Journal*, 2006.

[61] A. Magni. *Méthodes particulaires avec remaillage : analyse numérique, nouveaux schémas et applications pour la simulation d'équations de transport.* PhD thesis, Université de Grenoble, 2006.

[62] R. W. Miller. Flow measurement engineering handbook. *McGraw Hill, New York*, pages p.5–1–5–67, 1983.

[63] G. Mur. The finite-element modeling of three-dimensional electromagnetic field using edge and nodal elements. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol.41(no. 7) :pp. 948–953, 1993.

[64] M. Nashed. Solution of the electromagnetic flowmeter equation. *Journal of Physics D : Applied Physics*, Vol. 5 :p ;L33–L36, 1972.

[65] M. Khan C. Appino F. Fiorillo O. de la Barrière, C. Ragusa and F. Mazaleyrat. A simple compensation method for the accurate measurement of magnetic losses with a single strip tester. *Philos. Mag. 23*, 1887.

[66] V. T. O'Sullivan. Performance of an eletromagnetic flowmeter with six points electrodes. *Journal of Physics E : Scientific Instrumentation*, Vol. 16 :p.1183–1186, 1983.

[67] J. Peyroux. *Simulations numériques de l'équation de Vlasov à l'aide d'outils parallèles*. PhD thesis, Université Henry Poincaré, Nancy I, 2005.

[68] A. C. Polycarpou. *Introduction to the finite element method in electromagnetics*. Morgan and Claypool Publishers, New York, 2006.

[69] J. Eastwood R. Hockney. Computer simulation using particles. *CRC Press*, 2010.

[70] N.N. Viswanathan V. Singal R. PremKumar, I. Samajdar and V. Seshadri. Relative effect(s) of texture and grain size on magnetics properties in a low silicon non-grain oriented electrical steel. *J. Magn. Mater*, 264, 2003.

[71] Raszillier and Durst. Coriolis effect in mass flow metering. *Archive of Applied Mechanics*, pages p.192–214, 1991.

[72] J.-M. Rax. Physique des plasmas. *Dunod*, 2005.

[73] L. Rayleigh. Xxv. notes on electricity and magnetism.-iii. on the behavior of iron and steel under the operation of feeble magnetic forces. *IEEE Transaction on Magnetics 52*, 2016.

[74] T. J. M. Boyd S. I. Zaki, L. R. Gardner. A finite element code for the simulation of one-mode dimensional vlasov i theory. *J. Comput. Phys.*, (79) :1p84–199, 1988.

[75] J. A. Shercliff. Relation between the velocity profile and the sensitivity of electromagnetic flowmeters. *Journal of Applied Physics*, Vol. 25 :p.817–818, 1954.

[76] J. A. Shercliff. *The theory of the electromagnetic flowmeter*. Cambridge University Press, 1962.

[77] M. Shiozaki and Y. Kurosaki. The effects of grain size on the magnetic properties of nonoriented electrical sheet. *J. Mater. En. 11*, 37, 1989.

[78] C. C. Smyth. Derivation of weight functions for the circular and rectanguar channel magnetics flowmeters, by means of green's theorem and conformal mapping. *Journal of Physics E : Scientific instrumentation*, Vol. 4 :p.29–34, 1971.

[79] J-N. Staub and L. Bergougnoux. Débitmètres électromagnétique. Technical Report Doc. R 2 275, Techniques de l'Ingénieur.

[80] K. Varga and J. A. Driscoll. Computational nanoscience. *Cambridge University Press*, 2011.

[81] E. J. Williams. The induction of electromotive forces in a moving liquid by a magnetic field. *Proceeding of the Physical Society London*, Vol. 42 :p.466–478, 1930.

[82] J. Proft Y. Cheng, I. M. Gamba. Positivity-preserving discontinuous galerkin schemes for linear vlasov-boltzmann transport equation. *Mathematics of Computation*, Volume 81 :153–190, 2011.

[83] Z. Abdullah Z. Husain. *Basic Fluid Mechanics and Hydraulic Machines.* BS Publications, 2008.

[84] Z. X. Zhang. A method for solving laplace's equation with mixed boundary condition in electromagnetic flowmeters. *Journal of Physics D : Applied Physics*, Vol. 22 :p.573–576, 1989.

[85] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume Vol.1 : Basic Formulation of Linear Problem. McGraw-Hill, 1989.