

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES, SCIENCES DE L'INFORMATION ET DE
L'INGÉNIEUR – ED269

IRMA (UMR 7501)

THÈSE présentée par :
Thibault LORSCHIEDER

soutenue le : 8 Novembre 2022

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : Mathématiques

**Singularités algébriques et domaines
symplectiques**

THÈSE dirigée par :

Mr OPSHTEIN Emmanuel

Maître de conférence, université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

Mr POPESCU-PAMPU Patrick

Professeur, Université de Lille

Mr RAMOS Vinicius Gripp Barros

Professeur, Institute for Advanced Studies, Princeton

AUTRES MEMBRES DU JURY :

Mr DAMIAN Mihai

Maître de conférence, université de Strasbourg

Mr SCHLENK Felix

Professeur, université de Neuchâtel

Mme SANDON Sheila

Chargée de Recherche, université de Strasbourg

**Thèse : Singularités algébriques et domaines
symplectiques**

IRMA

sous la direction d'Emmanuel OPSHTEIN

Thibault LORSCHIEDER

8 novembre 2022

À ma mère, mon père, ma famille.

Remerciements

C'est à l'approche de la fin de l'aventure qu'est la thèse que l'on se rend compte qu'il s'agit bien plus que d'une simple aventure scientifique ou universitaire. Le chemin parcouru pendant ces quatre années n'aurait pas été supportable sans les rencontres et les interactions humaines qui l'ont jalonnée. C'est pour cela que je ressens de vives émotions en écrivant ces quelques lignes (pages?). Tout d'abord un bonheur intense. En assistant à de nombreuses soutenances de thèse et en ayant lu un certain nombre de remerciements (souvent les seules parties des manuscrits que j'ai pu comprendre) je me suis toujours imaginé écrivant les miens, ce que je pourrais y dire et comment le dire. J'espère ainsi les rendre uniques et exprimer ma gratitude aux personnes qui m'ont soutenu durant ces années si dures, mais tant rêvées.

Tout d'abord, comme le veut la tradition (mais surtout parce que sans lui je n'aurai pas pu entreprendre ce périple mathématique), je remercie Emmanuel Opshtein pour ces 4 ans de partage, de formation, de soutien et surtout pour sa confiance. Merci pour ces échanges hebdomadaires, voir bihebdomadaires pour les derniers mois. Ils m'ont été d'une grande aide pour atteindre la ligne d'arrivée lors de ce marathon. La thèse est une aventure mathématiques mais aussi humaine et je te remercie pour ces deux aspects car tu as aussi su me faire rester sur les rails lorsque la vie m'a asséné le plus dur des coups. Une dernière fois, merci Emmanuel.

Je tiens ensuite à remercier les rapporteurs de ma thèse, Patrick Popescu-Pampu et Vinicius Ramos, pour avoir pris très à cœur la lecture de mon manuscrit et pour toutes les remarques et discussions qui ont pavées ces dernières semaines. Je remercie aussi les autres membres du jury, Mihai Damian, Sheila Sandon et Felix Schlenk. Je tiens particulièrement à remercier Mihai et Sheila, pour les cours que vous m'avez donné au cours de ma formation universitaire, votre accessibilité, et ensuite pour m'avoir aidé dans mes premiers pas d'enseignant à l'Université de Strasbourg.

Comme dit plus tôt, une thèse est une aventure humaine faite de haut et de bas, et je tiens à remercier Thomas Delzant pour m'avoir ouvert son bureau lorsque j'étais au plus bas dans cette aventure l'hiver dernier. Merci d'avoir été une oreille attentive et d'avoir apporté des solutions à ce blocage. Je remercie aussi les deux membres de mon comité de suivi, Nalini Anantharaman et Benjamin Enriquez, pour leurs précieux conseils et leur suivi au cours de cette thèse.

Je tiens également à remercier le personnel de l'IRMA et le personnel de l'UFR de Math-Info qui ont toujours su m'aiguiller dans les démarches administratives, tant en tant qu'étudiant qu'en tant que chargé de TDs, ou maintenant enseignant à l'UFR ainsi que les autres enseignants-chercheurs que j'ai pu côtoyer dans le cadre de mes enseignements ou de séminaires d'équipe.

Sans financement, pas de thèse. Je remercie donc la Région Grand-Est pour avoir financé le projet thèse soumis par Emmanuel et l'école doctorale ED269 MSII pour avoir rendu ce projet possible.

Une aventure ayant toujours un point de départ, je remercie Clément Bastian, mon professeur de Lycée pour m'avoir insufflé cet appétit des mathématiques, et Vincent Blanloeil et Li Han-Ping pour m'avoir permis d'entrer en Magistère et avoir une telle qualité d'enseignements et qui m'ont ouvert les portes de ce voyage et Abdallah Al-Amrani pour m'y avoir encouragé. Plus généralement, je remercie tout les enseignants qui ont jalonné mon cursus mathématique et m'ont partagé leurs connaissances.

Les quelques lignes qui suivent seront presque sûrement parmi les plus importantes. Merci Dupont! Pour nos cafés, nos bière, nos restaurants, nos soirées Rick & Morty, nos discussions mathématiques, nos débats politiques. Tout ces moments que l'on a partagé pendant une, deux,

trois... huit années dans la même université. Ton soutien au cours de toutes ces années, ton indéfectible amitié me sont précieux. Merci pour tout Yohann.

Merci à mes compagnons d'infortune *aka* les autres doctorants. Merci d'abord à ceux qui ont partagé mon bureau, plus ou moins longtemps : Luca Berti, Suzanne Schlicht, Antoine Szabo, Frédéric Valet et le petit dernier : Thomas (dont je ne connais pas le nom de famille, désolé). Je remercie bien entendu tout les autres doctorants, collègues mais néanmoins amis : Tintin, Mickael, Marie, Philippe, Emmanuelle, Claire, Victoria, Antoine, Archia, Pierre-Alexandre, Florian, Martin, Valdo, Clarence, Clément, Guillaume, Martin, Alexander, Alexandre, Alexandre, Francisco, Adam, Marianne, Laura, Xavier, Thomas, Briec, Raoul, Basile... Je dois bien entendu en oublier.

Merci à mes amis Jérémy, Laura, Marie, Lucas, Nicolas, Adrien, Guillaume, Jocelyn, Amélie, Jo, Leila, Gigi, Moody, Julie et Trystan, qui bien que n'ayant jamais compris mon attrait pour les mathématiques, m'ont soutenu et permis de m'évader le temps d'une soirée ou d'un week-end en leur compagnie.

Merci à ceux qui ont du me supporter le plus longtemps, ma famille. Merci pour votre amour et votre présence si réconfortante à mes cotés tout au long de mon parcours. Merci Maman, sans toi je ne serai pas l'homme que je suis aujourd'hui. Merci à mes grands-parents, mon frère et Patrice. Ces derniers mots sont durs à écrire, j'aurai tant aimé que mon père puisse être présent, qu'il puisse lire ces lignes et ces travaux, le voir fier... Voilà Papa, je finis enfin mes études.

Le meilleur pour la fin. Pour m'avoir supporter (et subis) pendant un an et demi, dans ma folies, mes doutes, mes angoisses, mes craintes. Pour avoir trouver les bons mots aux bons moments et m'avoir encouragé à finir ce voyage. Merci Julien. Ça y est ! On est au bout !

"Ouais... C'est pas faux."

Introduction

L'objectif de cette thèse est d'explorer une relation entre les plongements symplectiques et les singularités algébriques planes observée dans [Bir01, MP94, Ops14b].

Le problème des plongements symplectiques peut s'énoncer très généralement ainsi :

Question 1. *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique, $U \subset \mathbb{C}^n$ un domaine, c'est-à-dire une sous-variété connexe compacte lisse de dimension $2n$. Quelle est la valeur maximale $\lambda > 0$ pour laquelle λU se plonge symplectiquement dans M ?*

Pour mettre cette question en perspective, rappelons qu'une variété symplectique est une variété différentielle M munie d'une 2-forme différentielle fermée et non-dégénérée ω :

$$\begin{cases} d\omega = 0, \\ \omega \wedge \cdots \wedge \omega = \omega^{\wedge n} \text{ est une forme volume sur } M. \end{cases}$$

La non-dégénérescence de ω implique que la variété M est orientable de dimension paire. Les deux exemples de variétés symplectiques les plus pertinents pour notre discussion sont :

- $(\mathbb{R}^{2n} \sim \mathbb{C}^n, \omega_{st} = \pi^{-1} \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j)$
- $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$, la forme ω_{FS} est appelée forme de Fubini-Study. Elle est normalisée de sorte que l'espace projectif $\mathbb{C}P^1 = L_\infty$ a aire 1. Dans $\mathbb{C}P^2$, les courbes algébriques de degré d sont symplectiques d'aire d .

Définition 2. *Un plongement $f : U \subset \mathbb{C}^n \hookrightarrow (M, \omega)$ est symplectique s'il vérifie $f^*\omega = \omega_{st}$.*

Le théorème de Darboux 1.1.1 assure que pour tout point p d'une variété symplectique (M, ω) , il existe un plongement symplectique $f : B(\varepsilon) \hookrightarrow (M, \omega)$ tel que $f(0) = p$ pour ε suffisamment petit. Ici, $B(\varepsilon) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z|^2 \leq \varepsilon\}$ désigne la boule fermée standard de taille ε , c'est-à-dire la boule dont la capacité de Gromov [Gro85]

$$c_{Gr}(B(\varepsilon), \omega_{st}) = \sup\{a \in \mathbb{R} \mid B(a) \text{ se plonge symplectiquement dans } B(\varepsilon)\}$$

est égale à ε . En particulier, si $U \subset \mathbb{C}^n$ est borné, il existe toujours des $\lambda > 0$ pour lesquels λU se plonge dans (M, ω) . La question 1 fait donc sens.

Notons qu'un plongement symplectique $f : U \subset \mathbb{C}^n \hookrightarrow (M, \omega)$ vérifie

$$f^*\omega^{\wedge n} = (f^*\omega)^{\wedge n} = (\omega_{st})^{\wedge n} = d_{Vol}.$$

Les difféomorphismes symplectiques préservent donc les volumes, mais la condition $f^*\omega = \omega_{st}$ est strictement plus contraignante que la préservation du volume. En effet, en 1985, M. Gromov met en évidence une différence quantitative importante entre les difféomorphismes préservant les volumes et les symplectomorphismes : Il existe un plongement $f : B^{2n}(R) \hookrightarrow Z^{2n}(r) := \mathbb{D}^2(r) \times \mathbb{C}^{n-1}$ préservant le volume pour tout r, R , mais il faut avoir $r \geq R$ pour qu'un plongement symplectique existe. C'est le théorème de non-tassement de Gromov :

Théorème 3 (Non-squeezing [Gro85]). *Soit $(B^{2n}(r), \omega_{st})$ la boule symplectique standard et soit $(Z_R := B^2(R) \times \mathbb{R}^{2n-2}, \omega_{st})$ le cylindre symplectique standard. Si il existe un plongement symplectique $\varphi : B^{2n}(r) \hookrightarrow Z(R)$, alors $R > r$.*

Suite au théorème 3, de nombreux travaux se sont concentrés sur l'existence ou non de plongements de boules de tailles maximales dans certaines variétés symplectiques.

Exemple 4. *Il existe un plongement de l'intérieur $\overset{\circ}{B}(1)$ de la boule $B^4(1)$ dans $\mathbb{C}P^2$.*

En effet, $(\mathbb{C}P^2, \omega_{FS})$ est la réduction symplectique de $B^4(1)$ le long des courbes caractéristiques du bord de $B^4(1)$ (les courbes intégrales du champ de direction $\text{Ker}(\omega_{st}|_{\partial B^4(1)})$) et l'image du bord par cette réduction symplectique est exactement la droite L_∞ . En d'autres termes, $\mathbb{C}P^2 \setminus L_\infty$ est symplectomorphe à l'intérieur de la boule $B^4(1)$.

Le même article de Gromov montre la pertinence de l'étude des plongements de plusieurs boules disjointes dans les variétés symplectiques. Cette question est connue sous le nom de *problème d'empilement* de boules. Il s'agit d'un cas particulier de la question 1 lorsque U est une union disjointe de boules.

Question 5. *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$ et soit $U = \bigsqcup_{i=1}^K \overset{\circ}{B}(a_i, \omega_{st})$. Pour quels a_i l'ensemble U se plonge-t-il symplectiquement dans (M, ω) ?*

Dans le cas de $\mathbb{C}P^2$, les travaux de Gromov [Gro85], McDuff-Polterovich [MP94] et de Biran [Bir97] donnent une réponse complète à cette question lorsque toutes les boules ont même taille.

Théorème 6 ([MP94, Bir97]). *La solution du problème d'empilement de boules dans $(\mathbb{C}P^2, \omega_{FS})$ est donnée par :*

Nombre de boules	2	3	4	5	6	7	8	$K \geq 9$
taille maximale des boules	1/2	1/2	1/2	2/5	2/5	3/8	6/17	$1/\sqrt{K}$
Volume total de l'empilement	1/2	3/4	1	20/25	24/25	63/64	288/289	1

Dans les années 2000 (voir [Hut14]), Hutchings a défini des invariants pour les domaines de \mathbb{C}^2 qui donnent une liste d'obstructions aux problèmes de plongements. Dans [McD11], McDuff montre finalement que ces invariants donnent une liste d'invariants totaux pour le problème d'empilement de boules de $\mathbb{C}P^2$, apportant une réponse définitive à ce problème. Il est important dans cette discussion d'insister sur la calculabilité aisée de ces invariants pour les unions disjointes de boules. Le problème d'empilement de boules dans $\mathbb{C}P^2$ a ainsi reçu une réponse théorique, mais également complètement décidable. Finalement, McDuff a expliqué comment les plongements de certains domaines, particuliers mais intéressants, se ramènent à des problèmes d'empilements de boules dans $\mathbb{C}P^2$, ouvrant la voie à l'étude des plongements de domaines plus généraux que les unions de boules disjointes. Ces domaines particuliers sont appelés domaines toriques concaves, et contiennent en particulier les ellipsoïdes [McD09, HR14, CG19].

Dans [MP94, Bir01], McDuff-Polterovic et Biran exhibent un lien entre les problèmes de plongements et les problèmes de réalisabilité de singularités par des courbes algébriques. Ils établissent donc un lien entre la théorie des singularités des courbes planes et les problèmes de plongements.

Définissons d'abord :

Définition 7. Une singularité de courbe plane est une paire (S, C) , où S est un germe de surface analytique complexe et C est un sous-germe de courbe complexe réduite. Deux singularités (S_1, C_1) et (S_2, C_2) sont équisingulières s'il existe un germe d'homéomorphisme $\varphi : (S_1, C_1) \rightarrow (S_2, C_2)$ qui préserve à la fois les orientations complexes des surfaces et des courbes.

Le problème algébrique est le suivant :

Question 8. Soit (S, C) une singularité algébrique plane isolée. Quel est le degré minimal d'une courbe algébrique $\Sigma \subset \mathbb{C}P^2$ réalisant la singularité (S, C) ?

Un exemple de tel problème est la conjecture de Nagata, énoncée en 1959. On dit qu'une courbe présente une singularité étoilée de multiplicité m en un point p si elle est localement difféomorphe à une union de m disques lisses deux à deux transverses.

Conjecture 9 (à la Nagata (version [Bir01]¹)). Soient p_1, \dots, p_K des points génériques dans $\mathbb{C}P^2$ et soient m_1, \dots, m_K des entiers strictement positifs. Pour $K > 9$, toute courbe $C \subset \mathbb{C}P^2$ irréductible passant par ces K points et présentant une singularité étoilée de multiplicité m_i en p_i vérifie

$$\deg(C) > \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{i=1}^K m_i.$$

Remarque 10. La conjecture ci-dessus est une version affaiblie de la conjecture formulée par Biran dans la partie 1.2 de [Bir01], équivalente à celle formulée par McDuff et Polterovich à la page 410 de [MP94]. Leurs conjectures ne font pas intervenir des singularités spécifiques, elles demandent seulement que les multiplicités soient prescrites. La version de Nagata ne suppose quant à elle rien de plus que de passer par les points p_1, \dots, p_K avec multiplicités $m_1 = \dots = m_K$. Dans l'énoncé de sa conjecture, elle peut présenter d'autres singularités en d'autres points et n'est pas supposée irréductible.

Biran fait la remarque que la conjecture de Nagata est très similaire au problème d'empilement. On peut en effet réécrire le cas $K \geq 9$ du théorème 6 comme suit :

Corollaire 11. Soit un réel $a > 0$ et $B(a)$ la boule symplectique standard dans \mathbb{C}^2 de taille a . Si $K > 9$, la réunion disjointe des K boules ouvertes $\overset{\circ}{B}(a)$ se plonge symplectiquement dans $\mathbb{C}P^2$ dès que $K \text{Vol}(B(a)) \leq \text{Vol}(\mathbb{C}P^2)$, ce qui se réécrit $\sqrt{K}a \leq 1$.

Pour voir explicitement le lien entre ces deux énoncés on a besoin du résultat suivant :

Théorème 12 ([MP94]). Soient $C \subset \mathbb{C}P^2$ une courbe algébrique de degré d (ou symplectique d'aire d) avec K singularités étoilées de multiplicité m . Si la résolution des singularités de C fournit une courbe \widehat{C} dont la classe d'homologie est de carré positif, alors on peut plonger symplectiquement K boules $\overset{\circ}{B}(m/d)$ disjointes dans $(\mathbb{C}P^2, \omega_{FS})$.

Le volume de cette union disjointe de boules est alors donnée par $K \text{Vol}(B(m/d)) = Km^2/d^2$. Or, celui-ci doit être inférieur au volume de $\mathbb{C}P^2$ qui est égal à 1. On obtient donc

$$Km^2/d^2 \leq 1 \iff \sqrt{K}m \leq d$$

On retrouve ainsi l'inégalité de la conjecture de Nagata 9, qui admet donc une démonstration symplectique lorsque $[\widehat{C}]^2 \geq 0$ et lorsque toutes les multiplicités m_i sont égales. L'idée permettant d'établir ce lien entre singularités étoilées et plongements de boules est l'existence d'un analogue à l'éclatement algébrique dans la catégorie symplectique. Précisément, l'analogue à l'éclatement d'un point dans une variété algébrique, qui remplace un voisinage de ce point par un voisinage d'une copie de $\mathbb{C}P^1$, est une construction dans laquelle on remplace un voisinage d'une boule symplectique plongée par un voisinage d'une copie de $\mathbb{C}P^1$, choisi de sorte que son aire symplectique soit égale à la capacité symplectique de la boule. Notons que pour démontrer ces résultats, un éclatement symplectique ou bien plusieurs éclatements symplectiques le long de boules disjointes sont nécessaires.

Remarque 13. *Les techniques d'éclatement symplectique et de contraction symplectique étaient déjà bien connues dans le cas des boules et des diviseurs exceptionnels disjoints, mais nécessitaient des constructions plus précises pour itérer ces processus le long de plongements de boules intersectant le diviseur exceptionnel de l'éclatement ou la contraction de diviseurs exceptionnels à croisements normaux. Ce travail est fourni dans les parties 2.2 et 3.1.1.*

Pour aller plus loin dans ces liens mis en évidence par McDuff-Polterovich et Biran, Opshtein s'est intéressé aux liens entre singularités cuspidales présentées par des courbes symplectiques dans $\mathbb{C}P^2$ et le plongement d'ellipsoïdes dans $\mathbb{C}P^2$ [Ops14b]. On peut également noter que Michael Hutchings a construit des invariants symplectiques qui empêchent ces plongements et donnent donc potentiellement des invariants symplectiques de ces singularités algébriques [Hut14].

Dans cette thèse on se propose de considérer des singularités plus compliquées que les singularités étoilées (pour lesquels seul un éclatement algébrique est nécessaire pour les résoudre). On cherche en particulier à comprendre quelles correspondances il y a entre des domaines symplectiques de dimension 4 et des singularités algébriques planes. Pour cela, on étudie le domaine associé à la contraction symplectique du diviseur exceptionnel singulier associé à une singularité donnée. Et inversement, on cherche à associer une courbe symplectique singulière à un domaine symplectique provenant d'un diviseur exceptionnel singulier symplectique.

On rappelle pour cela que la résolution algébrique d'une singularité \mathcal{S} réalisée par une courbe complexe C produit un diviseur exceptionnel à croisement normaux \mathcal{T} et une courbe complexe lisse \widehat{C} intersectant transversalement le diviseur \mathcal{T} . La courbe lisse \widehat{C} est appelée transformée stricte de la courbe C .

Dans cette thèse, on construit un analogue symplectique à la résolution algébrique des singularités. Précisément, on veut effectuer un certain nombre d'éclatements symplectiques successifs et non-disjoints, dans le sens où le $(n+1)$ -ème éclatement est réalisé le long d'un plongement de boule intersectant le n -ème diviseur. Pour cela, on construit sur l'éclatement complexe itéré une forme symplectique qui rend symplectique le diviseur \mathcal{T} et tel qu'on ait une courbe symplectique \widetilde{C} homologue à la résolution \widehat{C} et intersectant le diviseur \mathcal{T} orthogonalement (relativement à la forme symplectique construite) et positivement. De plus, au cours de la construction de cette forme symplectique, on montre que l'on peut s'arranger de sorte que les composantes du diviseur \mathcal{T} s'intersectent elles aussi orthogonalement relativement à la forme symplectique construite (2.0.4). De même, on définit un analogue symplectique à la contraction algébrique et on montre que celle-ci peut-être itérée dans la partie 3.1.2. Celle-ci nous permet alors d'associer au diviseur \mathcal{T} un domaine symplectique, construit dans la partie 3.2 par "agglomération" des boules associées au diviseur \mathcal{T} . On en détaille les propriétés dans la proposition II, propriétés que l'on démontre dans la partie 3.3. Enfin, la contraction itérée nous permet aussi d'associer à toute

courbe symplectique intersectant le diviseur symplectique \mathcal{T} orthogonalement une courbe symplectique réalisant une singularité algébrique. Cependant, l'existence d'une telle courbe symplectique intersectant \mathcal{T} n'est pas assurée en général. Pour en construire une, on utilise la méthode de Donaldson qui nous produit une telle courbe [Don96]. Mais cette courbe intersecte chaque composante du diviseur \mathcal{T} un très grand nombre de fois et on ne peut donc espérer retrouver la singularité \mathcal{S} dont on est parti. On trouve à sa place une singularité \mathcal{S}' dont le germe contient $\mathcal{S}^{\otimes k}$ composée de k différentes branches modelées sur \mathcal{S} .

Le théorème principal de la thèse est :

Théorème I. *Soit \mathcal{S} une singularité algébrique plane isolée. Il existe une suite de domaines $\mathcal{D}_n(\mathcal{S}) \subset \mathbb{C}^2$ dont les propriétés sont énoncées ci-après (proposition II) telle que pour toute variété symplectique (M, ω) de dimension 4 de classe symplectique entière ($[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$) on a :*

1. *Soit $d \in \mathbb{N}$. Si $C \subset M$ est une courbe symplectique Poincaré duale à $d\omega$ réalisant la singularité \mathcal{S} et \widehat{C} est une courbe produite par résolution algébrique de \mathcal{S} , alors pour $N \gg 1$, $\alpha \mathcal{D}_N(\mathcal{S})$ se plonge symplectiquement dans M :*
 - (a) *pour tout $\alpha < 1/d$ si $[\widehat{C}]^2 \geq 0$.*
 - (b) *pour tout $\alpha < \frac{A_\omega(C)}{[\widehat{C}]^2 + dA_\omega(C)}$, si $[\widehat{C}]^2 < 0$.*
2. *Si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha \mathcal{D}_N(\mathcal{S})$, $\alpha \in \mathbb{Q}^{+*}$ se plonge symplectiquement dans M , alors pour tout $q \in (\alpha^{-1} \mathbb{N}) \cap \mathbb{N}$, $q \gg 1$, il existe une courbe symplectique $C \subset M$ Poincaré duale à $q\omega$ qui réalise $\mathcal{S}^{\otimes q\alpha}$.*

On démontre ce résultat en deux parties (voir 4.1.3 pour $1 \Rightarrow 2$ et 4.2.3 pour $2 \Rightarrow 1$).

Les domaines associés à ces singularités ont un certain nombre de propriétés qu'on énumère à présent. Dans la proposition suivante, une variété symplectique M de dimension 4 est dite dans la classe \mathcal{C}^* [McD96] si cette variété est :

- $\mathbb{C}P^2$, une surface réglée, ou un de leurs éclatements,
- une variété avec $b_1 = 0$, $b_2^+ = 1$ et
- une variété avec $b_1 = 2$ et $(H^1(M))^2 \neq 0$.

Proposition II. *Soient \mathcal{S} une singularité algébrique plane isolée, $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{D} := \mathcal{D}_n(\mathcal{S}) \subset \mathbb{C}^2$. Il existe des nombres réels $a_i(\mathcal{D}) > 0$, $i = 1, \dots, K$ (indépendant de n) tels que :*

1. *L'union $\bigsqcup_{i=1}^K \overset{\circ}{B}(a_i(\mathcal{D}))$ se plonge symplectiquement dans \mathcal{D} .*
2. *$\text{Vol}(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^K \text{Vol}(B(a_i(\mathcal{D})))$.*
3. *Pour toute variété (M, ω) de la classe \mathcal{C}^* , si $\bigsqcup_{i=1}^K \alpha B(a_i(\mathcal{D}))$ se plonge symplectiquement dans M , alors $\alpha \mathcal{D}$ se plonge symplectiquement dans M .*
4. *\mathcal{D} est un domaine de Liouville.*

De plus, si $\mathcal{D}_n(\mathcal{S})$ est associé à une singularité plane isolée, les nombres $(a_i(\mathcal{D}_n(\mathcal{S})))_n$, convergent vers des nombres réels $(a_1(\mathcal{S}), \dots, a_K(\mathcal{S}))$ strictements positifs, pour tout $i = 1, \dots, K$.

Le dernier point de la proposition II est évident, puisque les nombres $a_i(\mathcal{D}_n(\mathcal{T}))$ convergent, par la construction faite dans la démonstration de la proposition 4.1.3, vers le nombre $a_i = [\widehat{\mathcal{S}}] \cdot [E_i]$, où $\widehat{\mathcal{S}}$ désigne la transformée stricte de \mathcal{S} par résolution complexe et E_i désigne la i -ème -1 -sphère produite par la résolution de \mathcal{S} . On peut aussi affirmer, via la construction de la partie 3.2, que ces domaines sont homéomorphe à une boule de dimension 4.

Le Théorème I associe ainsi à chaque singularité une suite de domaines de Liouville de $(\mathbb{C}^2, \omega_{st} = d\lambda_{st})$, c'est-à-dire des domaines à bord non-vide de dimension 4 tel que le champ de vecteur $X_{\lambda_{st}}$, satisfaisant $\omega_{st}(X_{\lambda_{st}}, \cdot) = \lambda_{st}$, pointe vers l'extérieur du domaine et soit transverse au bord. Cette association singularité-domaine transfère ainsi le problème de réalisabilité de \mathcal{S} par une courbe de degré d dans $\mathbb{C}P^2$ en un problème de plongement de ce domaine dans $\mathbb{C}P^2$. La Proposition II garantit par ailleurs que ce problème est équivalent à un problème d'empilement de boules, qu'on sait donc étudier complètement grâce aux invariants *ECH* de Hutchings (des exemples de telles études sont menées dans [MS10]). On obtient ainsi une théorie symplectique des singularités algébriques, dont les conséquences restent à étudier.

Ouvertures

Aller plus loin sur la description des domaines

L'exemple 5.1.6 montre que les domaines construits par le théorème I à partir de certaines singularités peuvent être des domaines toriques concaves. C'est-à-dire :

Définition 14. *Un domaine torique est la pré-image d'un ouvert de $(\mathbb{R}^+)^2$ par l'application moment qui à (z, w) associe $(|z|^2, |w|^2)$.*

Un domaine torique concave est un domaine torique \mathcal{D}_Ω où Ω est une région fermée du premier quadrant bornée par les axes et le graphe d'une fonction convexe $f : (0, a) \rightarrow (0, b)$, pour a et b des réels positifs et tels que $f(0) = b$ et $f(a) = 0$.

Un domaine torique concave rationnel est un domaine torique concave pour lequel la fonction f est convexe linéaire par morceaux et dont les pentes sont rationnelles.

De plus, on montre dans la partie 4.2.2 que ces domaines toriques concaves sont des domaines associés à certaines singularités. Il est donc légitime, à la vue de ces exemples, de se demander si certains de ces domaines sortent de la catégorie des domaines toriques concaves. Une réponse positive à cette question serait intéressante du point de vue de la géométrie symplectique car elle montrerait que l'équivalence entre problème de plongement et empilement de boules dans les variétés de classe \mathcal{C}^* va au-delà des domaines toriques concaves.

L'exemple 5.1.8 nous fournit un candidat pour répondre à cette question. En effet, on montre qu'il existe des diviseurs exceptionnels symplectiques associés à des domaines pouvant être décrits comme des unions non-disjointes de $N \geq 3$ ellipsoïdes et d'une boule. De tels domaines ne sont pas des domaines toriques concaves de manière évidente.

Question 15. *Soit $\mathcal{E}(a, b)$ un ellipsoïde et soit $(\Phi_i : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2)_i$ $N \geq 3$ difféomorphismes symplectiques linéaires tels que $(\Phi_i(\mathcal{E}(a, b)) \cap \mathbb{S}^3(1)) \cap (\Phi_j(\mathcal{E}(a, b)) \cap \mathbb{S}^3(1)) = \emptyset, i \neq j$. On note*

$$\mathcal{D} := B(1) \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \Phi_i(\mathcal{E}(a, b)) \right).$$

Le domaine \mathcal{D} est-il symplectomorphe à un domaine torique ?

Une autre question à propos de la description de ces domaines concerne la monotonie de ceux-ci.

Question 16. *Si $\mathbf{a}(\mathcal{D}) \prec \mathbf{b}(\mathcal{D}')$ (c'est-à-dire $a_i(\mathcal{D}) < b_i(\mathcal{D}')$ pour tout i), a-t-on $\mathcal{D} \xrightarrow{\omega} \mathcal{D}'$?*

Dans le cas où $\mathbf{a}(\mathcal{D}') = \alpha \mathbf{a}(\mathcal{D})$, avec $\alpha > 1$, la proposition 3.3.5 de conformalité nous assure que c'est le cas.

Soit maintenant un domaine $\mathcal{D} = \mathcal{D}_n(\mathcal{S})$. Les propriétés du domaine décrites dans la proposition II nous assurent que \mathcal{D} est un domaine de Liouville de \mathbb{C}^2 . On peut alors lui associer une suite de nombres positifs appelés capacités *ECH* (pour Embedded Contact Homology) définie par Hutchings dans les années 2000 [Hut14]. Il a montré un certain nombre de propriétés les concernant et les a calculés pour des domaines particuliers comme les ellipsoïdes et les boules. Il donne aussi une méthode combinatoire simple pour calculer les capacités des unions disjointes de domaines de Liouville à partir de celles de ces domaines.

Toujours d'après la proposition II, on sait qu'on peut plonger une union disjointe de boules $U(\mathcal{D}) := \bigsqcup \overset{\circ}{B}(a_i)$ dans \mathcal{D} . Alors, la monotonie des capacités *ECH* assure que

$$c_{ECH}(U(\mathcal{D})) \leq c_{ECH}(\mathcal{D}).$$

On a donc une minoration des capacités *ECH* de \mathcal{D} , dont le calcul relève de formules combinatoires simples permettant le calcul des capacités *ECH* de $U(\mathcal{D})$.

Dans le cas d'un domaine torique concave \mathcal{D}_Ω , Choi & al ont montré que $c_{ECH}(\mathcal{D}_\Omega) = c_{ECH}(U(\mathcal{D}_\Omega))$ [HR14]. On peut donc se poser la question suivante.

Question 17. *A-t-on $c_{ECH}(\mathcal{D}) = c_{ECH}(U(\mathcal{D}))$?*

Remarque 18. *Deux réponses sont possibles. Premièrement, si la réponse à cette question est affirmative, on étend alors les résultats de Choi & al à une liste de domaines de Liouville potentiellement plus grande que celle donnée dans [HR14]. Deuxièmement, si la réponse est négative, on a alors montré que l'on atteint d'autres domaines que les domaines toriques concaves, puisque ceux-ci vérifient l'égalité.*

Pour continuer avec ces questions d'empilements, on peut se poser la question du cas où deux domaines sont associés à la même union disjointe de boules.

Question 19. *Deux domaines associés au même empilement de boules (cf :proposition II) sont-ils symplectomorphes ?*

Questions algébriques

Associer un domaine du type $\alpha \mathcal{D}_n(\mathcal{S})$ à une singularité algébrique plane \mathcal{S} permet de faire correspondre à \mathcal{S} des invariants symplectiques liés au domaine. Puisque ce domaine est un domaine de Liouville de \mathbb{C}^2 on peut par exemple lui associer les capacités *ECH* de ce domaine [Hut14]. On obtient ainsi une suite infinie croissante de nombres réels.

On peut alors se poser la question de savoir si les obstructions symplectiques associées au domaine données par les capacités *ECH* ajoutent des obstructions supplémentaires aux obstructions algébriques déjà connues quant à la réalisation de la singularité algébrique \mathcal{S} .

Si ces invariants symplectiques n'ajoutent pas d'obstructions à la réalisabilité de \mathcal{S} , on peut alors se demander si il est possible d'établir une correspondance entre les invariants symplectiques associés à $\alpha \mathcal{D}_n(\mathcal{S})$ et les obstructions algébriques liées à la réalisabilité de \mathcal{S} .

Organisation de la thèse

Cette thèse s'articule de la manière suivante. Dans la première partie on rappelle succinctement les notions élémentaires de géométrie symplectique qui seront nécessaires, les notions d'éclatement, de contraction algébrique et de résolution des singularités algébriques (et de diviseurs exceptionnels associés) ainsi que des résultats utiles concernant les courbes pseudo-holomorphes. Dans la deuxième partie, on rappelle la construction de l'éclatement symplectique de \mathbb{C}^2 avant de définir précisément l'éclatement symplectique d'une variété symplectique de dimension 4 quelconque et de construire un analogue symplectique de la résolution algébrique d'une singularité. Dans la troisième partie, on définit les contractions symplectiques simples et itérées ainsi que les domaines symplectiques associés à des diviseurs exceptionnels symplectiques à croisements normaux. On finit cette partie en démontrant les différentes propriétés du domaine, énoncées dans la Proposition II. Dans la quatrième partie on démontre le Théorème I. Enfin, dans la cinquième partie on donne des exemples de correspondances entre des singularités algébriques et des domaines symplectiques.

Notations

On adopte les notations suivantes tout au long de la thèse :

- On note $\omega_{st} = \pi^{-1}(dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2)$ la forme symplectique standard sur \mathbb{C}^2 . En choisissant des coordonnées polaires $(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)$ sur chaque facteur de \mathbb{C}^2 , on peut considérer la forme $\omega_{st} = dR_1 \wedge d\theta_1 + dR_2 \wedge d\theta_2$, où $R_i = r_i^2$ et $d\theta_i$ est normalisée de sorte que les angles θ_i aient leurs valeurs dans $[0, 1]$ et $\int_0^1 d\theta_i = 1$. Dans ces coordonnées, les disques de rayon 1 et centrés en l'origine contenus dans un facteur de \mathbb{C}^2 sont d'aire 1.
- On note encore $\omega_{st} = \pi^{-1} \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$ la forme symplectique standard sur \mathbb{C}^n de coordonnées $z_j = x_j + iy_j$.
- On note λ_{st} la forme de Liouville associée à $\omega_{st} = dR_1 \wedge d\theta_1 + dR_2 \wedge d\theta_2$ donnée par la formule $R_1 d\theta_1 + R_2 d\theta_2$ dans les coordonnées polaires $(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)$ définies ci-dessus.
- On note $B(a) := \{(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) \in \mathbb{C}^2 \mid R_1 + R_2 \leq a\}$ la boule fermée de taille a , c'est-à-dire la boule dont la capacité de Gromov

$$c_{Gr}(M, \omega) := \sup\{r \in \mathbb{R} \mid B(r) \text{ se plonge symplectiquement dans } M\}$$

est égale à a .

- On note $\mathcal{E}(a, b)$ l'ellipsoïde $\{(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) \in \mathbb{C}^2 \mid R_1/a + R_2/b \leq 1\}$.
- On appelle boule symplectique ou ellipsoïde symplectique d'une variété symplectique (M, ω) l'image du plongement symplectique d'une boule standard $B(a)$ ou d'un ellipsoïde standard $\mathcal{E}(a, b)$, de $(\mathbb{C}^2, \omega_{st})$ dans (M, ω) .
- On utilise la lettre E pour noter les sphères plongées représentant une classe $[E]$ de l'ensemble $H_2(M, \mathbb{Z})$, quand ils existent, dont l'auto-intersection est égale à -1 . Ces éléments sont appelés -1 -sphères. On note e le dual de Poincaré $PD(E)$ d'une -1 -sphère.
- Plus généralement, on utilise C ou Σ pour désigner une courbe compacte lisse, symplectique ou J -holomorphe selon le contexte et $[C]$ ou $[\Sigma]$ pour désigner la 2-classe d'homologie de celle-ci.

Remarque 20. *Bien que C ou Σ soient de dimension réelle 2, on se permet d'utiliser le terme "courbe" pour désigner de telles sous-variétés de dimension 2, puisque la restriction d'une forme symplectique à une sous-variété de dimension 1 ne peut-être symplectique, car dégénérée.*

— Si C est une courbe symplectique dans une variété symplectique (M, ω) , on note

$$\mathcal{A}_\omega(C) = \int_C \omega,$$

l'aire symplectique de C relativement à la forme symplectique ω .

- On note \mathcal{T}^K le diviseur exceptionnel associé à un éclatement itéré et S_i^K les courbes composant ce diviseur.
- On note \mathcal{C}^* (voir page 2 de [McD96]) la classe des variétés symplectiques (M, ω) qui sont :
 - $\mathbb{C}P^2$, une surface réglée, ou un de leurs éclatements,
 - une variété avec $b_1 = 0$, $b_2^+ = 1$ et
 - une variété avec $b_1 = 2$ et $(H^1(M))^2 \neq 0$.

Dans toute la thèse, on pourra se contenter d'y penser comme $\mathbb{C}P^2$ ou un de ses éclatements.

- Soit $B \subset (M, \omega)$ une boule symplectique, c'est-à-dire un plongement symplectique d'une boule standard $(B(a), \omega_{st})$, pour un certain $a > 0$. On appelle cercle de Hopf de B les caractéristiques de $\omega|_{\partial B}$. On appelle disque de Hopf dans B tout disque symplectique borné par un cercle de Hopf de ∂B .
- Soit Q un sous-ensemble d'une variété M . On note $\mathcal{O}p(Q, M)$ un voisinage non-spécifié de Q dans M . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on omet de préciser la variété dans la notation et on note simplement $\mathcal{O}p(Q)$ ce voisinage.
- Soient deux variétés M et M' munies de structures différentielles Θ , et Θ' , par exemple des structures symplectiques, avec des sous-ensembles N et N' . On dit que $f : (M, \Theta, N) \rightarrow (M', \Theta', N')$ si $f : M \rightarrow M'$ transporte Θ sur Θ' et N sur N' . Autrement dit, on utilisera la notation $f : (M, \cdot) \rightarrow (M', \cdot)$ pour des applications relatives dans le sens le plus large possible.

Table des matières

1	Préliminaires	17
1.1	Généralités en géométrie symplectique	17
1.1.1	Généralités	17
1.1.2	Voisinages des sous-variétés symplectiques, formes de connexion	19
1.2	Formes de Liouville	21
1.2.1	Formes de Liouville singulière	21
1.2.2	Forme de Liouville sur un plombage	23
1.2.3	Bassin de répulsion/attraction	24
1.2.4	Tempérance [Ops14b]	26
1.3	Courbes J -holomorphes	27
1.4	Théorèmes d'inflation	30
1.4.1	Inflation classique	30
1.4.2	Inflation Singulière	32
1.5	Résolution des singularités algébriques	33
1.5.1	Eclatement et contraction complexes	33
1.5.2	Eclatements itérés	35
1.5.3	Résolution de singularité algébrique	37
2	Résolution symplectique des singularités	39
2.1	Eclatement et contraction symplectiques de \mathbb{C}^2	40
2.2	Eclatement symplectique	41
2.3	Démonstration de la proposition 2.0.4	46
2.4	Eclatement symplectique itéré	47

3	Domaine associé à des contractions multiples	51
3.1	Contraction symplectique	51
3.1.1	Contraction Symplectique	51
3.1.2	Contractions itérées	55
3.2	Définition du domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$	56
3.3	Propriétés des domaines	57
3.3.1	Unicité du domaine	57
3.3.2	Conformalité du domaine	58
3.3.3	Structure de Liouville	59
3.3.4	Empilement maximal de boules	64
3.4	Caractérisation par empilement	65
4	Démonstrations des théorèmes	67
4.1	Domaine associé à une singularité	67
4.2	Singularité de Donaldson associée à un domaine	70
4.2.1	Définition de $\mathcal{S}^{\otimes N}$	70
4.2.2	Singularité de Donaldson	71
5	Exemples de correspondances	75
5.1	Correspondances diviseur-domaine	75
5.1.1	Du diviseur au domaine	75
5.1.2	Du domaine au diviseur	79
5.2	Correspondance singularité-domaine	82

Chapitre 1

Préliminaires

Dans cette partie on détaille les notions de géométrie symplectique et algébrique permettant de préciser la problématique et permettant de répondre aux cas simples relevant de la problématique.

1.1 Généralités en géométrie symplectique

1.1.1 Généralités

On rappelle dans cette partie des résultats classiques de géométrie symplectique dont on a besoin dans la suite de cette thèse.

Théorème 1.1.1 (Darboux). *Toute forme symplectique ω sur une variété M de dimension $2n$ est localement difféomorphe à la forme standard ω_{st} sur $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$.*

Théorème 1.1.2 (Voisinage symplectique). *Soient (M_0, ω_0) et (M_1, ω_1) deux variété symplectique, $Q_0 \subset M_0$ et $Q_1 \subset M_1$ deux sous-variétés symplectiques compactes. On suppose qu'on a un isomorphisme $\Phi : \nu_{Q_0} \rightarrow \nu_{Q_1}$ entre les fibrés normaux symplectiques à Q_0 et Q_1 qui revêt un symplectomorphisme $\varphi : (Q_0, \omega_0) \rightarrow (Q_1, \omega_1)$. Alors φ s'étend en un symplectomorphisme $\psi : (\mathcal{O}p(Q_0), \omega_0) \rightarrow (\mathcal{O}p(Q_1), \omega_1)$ tel que $d\psi$ induise l'application Φ sur $\nu_{Q_0} = (TQ_0)^{\omega_0}$.*

Ces deux résultats reposent sur un argument développé par Moser [Mos65] permettant de construire des isotopies symplectiques entre deux formes symplectiques. Précisément, si ω_t est une famille à un paramètre de formes symplectiques vérifiant

$$\frac{d}{dt}\omega_t = d\sigma_t$$

sur M , où σ_t est une 1-forme sur M , alors il existe une famille de difféomorphismes $\psi_t : M \rightarrow M$ telle que $(\psi_t)^*\omega_t = \omega_0$. L'idée est d'exprimer ψ_t comme le flot d'une famille de champ de vecteurs X_t sur M . Ainsi, on suppose que

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t, \quad \psi_0 = Id.$$

En différenciant $(\psi_t)^*\omega_t = \omega_0$ par rapport à t , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((\psi_t)^*\omega_t) &= (\psi_t)^* \left(\frac{d}{dt}\omega_t + \iota_{X_t} d\omega_t + d\iota_{X_t}\omega_t \right) \\ &= (\psi_t)^* (d\sigma_t + d\iota_{X_t}\omega_t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

où $\iota_{X_t}\omega_t = \omega_t(X_t, \cdot)$. Il faut donc que $\iota_{X_t}\omega_t = \sigma_t$.

Puisque ω_t est non-dégénérée pour tout t , il existe une telle famille de champ de vecteurs. On définit alors ψ_t comme étant le flot associé à ce champ de vecteurs et celui-ci satisfait bien $(\psi_t)^*\omega_t = \omega_0$.

Preuve du théorème 1.1.2. Soit \exp_j l'application exponentielle dans la direction normale à Q_j de sorte que l'image d'un voisinage de la section nulle de ν_{Q_j} est un voisinage de Q_j dans M_j . Premièrement, en définissant $\varphi' := \exp_1 \circ \Phi \circ \exp_0^{-1}$ on obtient un difféomorphisme $\varphi' : \mathcal{O}p(Q_0) \rightarrow \mathcal{O}p(Q_1)$ qui étend φ et tel que $d\varphi'|_{\nu_{Q_0}} = \Phi$. Par hypothèse, les formes ω_0 et $\omega'_1 := \varphi'^*\omega_1$ coïncident sur $T_M Q_0$.

On va construire $\psi : \mathcal{O}p(Q_0) \rightarrow \mathcal{O}p(Q_0)$, telle que $\psi|_{Q_0} = Id$, $d\psi|_{Q_0} = Id$, et $\psi^*\omega'_1 = \omega_0$. Selon l'argument de Moser, il suffit de montrer qu'il existe une 1-forme σ sur $\mathcal{O}p(Q_0)$ telle que

$$\sigma|_{T_Q M} = 0, \quad d\sigma = \omega'_1 - \omega_0.$$

En effet, soit la famille de formes fermées $\omega_t = \omega_0 + t(\omega'_1 - \omega_0) = \omega_0 + t d\sigma$ sur $\mathcal{O}p(Q_0)$. Quitte à rétrécir le voisinage $\mathcal{O}p(Q_0)$, on peut supposer que ω_t est non-dégénérée sur $\mathcal{O}p(Q_0)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Via le principe de Moser, l'équation $\sigma_t = \omega_t(X_t, \cdot)$ admet une solution X_t , et le champ X_t s'annule sur Q_0 . Quitte à rétrécir $\mathcal{O}p(Q_0)$ encore une fois, on obtient des solutions à $\psi_t^*\omega_t = \omega_0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Pour trouver la solution σ dont on a besoin, on considère la restriction $\exp : TQ_0^\perp \rightarrow M$ de l'application l'exponentielle au fibré normale TQ^\perp relatif à une métrique Riemannienne sur M . Soit

$$U_\varepsilon = \{(p, v) \in TM \mid p \in Q_0, v \in T_p Q_0^\perp, |v| < \varepsilon\}.$$

La restriction de \exp à U_ε est un difféomorphisme sur $\mathcal{O}p(Q_0) = \exp(U_\varepsilon)$ pour $\varepsilon \ll 1$. On définit $\varphi_t : \mathcal{O}p(Q_0) \rightarrow \mathcal{O}p(Q_0)$ pour $t \in [0, 1]$ par $\varphi_t \circ \exp(p, v) = \exp(p, tv)$. Alors, φ_t est un difféomorphisme pour tout $t > 0$ et on a $\varphi_0(\mathcal{O}p(Q_0)) \subset \mathcal{O}p(Q_0)$, $\varphi_1 = id$, et $\varphi_t|_{Q_0} = id$. Alors

$$\varphi_0^*(\omega'_1 - \omega_0) = 0, \quad \varphi_1^*(\omega'_1 - \omega_0) = \omega'_1 - \omega_0.$$

Comme φ_t est un difféomorphisme pour $t > 0$, on peut définir

$$X_t = \left(\frac{d}{dt}\varphi_t \right) \circ \varphi_t^{-1}$$

pour $t > 0$. Le champ X_t est singulier en $t = 0$, cependant

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*(\omega'_1 - \omega_0) = \varphi_t^* \mathcal{L}_{X_t}(\omega'_1 - \omega_0) = d(\varphi_t^*(\omega'_1 - \omega_0))(X_t, \cdot) = d\sigma_t,$$

où la forme

$$\sigma_{t,p}(p, v) = (\omega'_1 - \omega_0)_{\varphi_t(p)} \left(\frac{d}{dt}\varphi_t(p), d\varphi_t(p)v \right)$$

est lisse en $t = 0$ et s'annule sur Q_0 . D'où

$$(\omega'_1 - \omega_0) = (\varphi_1 - \varphi_0)^*(\omega_1 - \omega_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi_t^*(\omega'_1 - \omega_0) dt = d\sigma, \quad \sigma = \int_0^1 \sigma_t dt.$$

□

1.1.2 Voisinages des sous-variétés symplectiques, formes de connexion

Dans cette partie, on donne des descriptions standard des sous-variétés symplectiques en dimension 4 sous forme de fibrés en disques symplectiques ou de plombages de tels fibrés grâce au théorème de voisinage symplectique de Weinstein 1.1.2.

Fibrés en disques et en droites symplectiques

Soit Σ une courbe symplectique dans une variété symplectique (M, ω) de dimension 4. Soit $pr : \nu_\Sigma \rightarrow \Sigma$ son fibré normal dans M auquel on peut penser comme $T\Sigma^{\perp\omega}$. D'après la théorie de Chern-Weyl, on peut équiper ν_Σ d'une métrique hermitienne qui munit les fibres F de coordonnées radiale et angulaire (r, θ) au-dessus de petits ouverts contractiles de Σ . La coordonnée angulaire n'est pas globale, cependant, la 1-forme $d\theta$ est bien définie partout. Pour toute fonction $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_\Sigma h\omega = -[\Sigma]^2$, il existe une 1-forme de connexion α sur ν_Σ .

Définition 1.1.3. Une 1-forme de connexion α sur ν_Σ associée à une fonction $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ est une 1-forme différentielle définie sur le complémentaire de la section nulle $\nu_{\Sigma,0}$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \alpha|_F &= d\theta, \\ d\alpha &= hpr^*\omega|_\Sigma \end{cases} .$$

Si h est une fonction constante égale à λ , alors $\lambda = -\frac{[\Sigma]^2}{\mathcal{A}_\omega(\Sigma)}$, où $\mathcal{A}_\omega(\Sigma) = \int_\Sigma \omega$ est l'aire de Σ relativement à ω .

Quand λ est positif, la forme $\varpi := pr^*\omega|_\Sigma + d(R\alpha)$ est symplectique sur ν_Σ , et on note $\text{SLB}(\Sigma)$ le fibré normal muni de la forme ϖ (pour *Symplectic Line Bundle*). Quand λ est strictement négatif, ϖ est seulement symplectique sur le sous-fibré $\{R < -\lambda^{-1}\}$, c'est un sous-fibré en disques de ν_Σ que l'on note $\text{SDB}(\Sigma, -\lambda^{-1})$ (pour *Symplectic Disc Bundle*). Dans tout les cas, pour tout a si $\lambda \geq 0$ et pour tout $a \geq -\lambda^{-1}$ si $\lambda < 0$, on note $\text{SDB}(\Sigma, a)$ le fibré en disques $\{R < a\}$ muni de la forme ϖ . Le théorème de voisinage symplectique 1.1.2 fournit un plongement symplectique de $(\text{SDB}(\Sigma, \varepsilon), \varpi) \hookrightarrow (M, \omega)$ qui envoie la section nulle de $\text{SDB}(\Sigma, \varepsilon)$ sur Σ , dès que $\varepsilon \ll 1$.

Remarque 1.1.4. — α n'est pas définie sur la section nulle, mais $d\alpha$ l'est.

- La forme $\alpha - d\theta$ se prolonge en une forme lisse sur ν_Σ .
- La forme $dR \wedge \alpha$ est lisse sur $\text{SDB}(\Sigma, \varepsilon)$.

Plombages symplectiques

Dans cette partie on construit un voisinage *standard* pour un diviseur exceptionnel singulier symplectique en suivant [Ops13]. On le décrit comme un plombage symplectique de fibrés en disques, légèrement modifiés, au-dessus de ses composantes.

Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4. Soit $\Sigma = (\Sigma_i)_{i=1}^n$ une collection de courbes symplectiques dans (M, ω) s'intersectant ω -orthogonalement. En particulier, elles s'intersectent transversalement et positivement et il n'y a pas de point triple. On note $\Sigma = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i$,

$\tau_i = \omega|_{\Sigma_i}$ et $\Gamma_i = \Sigma_i \cap \left(\bigcup_{j \neq i} \Sigma_j \right)$. Pour $p \in \Gamma_i$, on choisit un petit disque $D_i(p) \subset \Sigma_i$ centré en p , de sorte que $\overline{D_i(p)} \cap \overline{D_i(q)} = \emptyset, \forall q \in \Gamma_i \setminus \{p\}$ et des coordonnées polaires $(\mathcal{P}_i^p, \xi_i^p) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ sur $D_i(p)$ telles que $\omega|_{D_i(p)} = d\mathcal{P}_i^p \wedge d\xi_i^p$. On choisit également des fonctions $h_i : \Sigma_i \rightarrow \mathbb{R}$ à supports compacts dans $\Sigma_i \setminus \left(\bigcup_{p \in \Gamma_i} D_i(p) \right)$ telles que

$$\int_{\Sigma_i} h_i \tau_i = -[\Sigma_i] \cdot [\Sigma_i].$$

Sur le fibré normal $pr_i : \nu_{\Sigma_i} \rightarrow \Sigma_i$, on considère une coordonnée radiale R_i et une 1-forme angulaire $d\theta_i$ dans les fibres. D'après le paragraphe précédent, il existe une 1-forme de connexion α_i sur ν_{Σ_i} telle que

$$\begin{cases} \alpha_i|_{F_i} &= d\theta_i \\ d\alpha_i &= h_i pr_i^* \tau_i \end{cases}$$

où F_i désigne une fibre de $pr_i : \nu_{\Sigma_i} \rightarrow \Sigma_i$. Puisque $h_i = 0$ sur $D_i(p)$, la forme $d\theta_i$ est associée sur $\nu_{\Sigma_i|D_i(p)}$ à une coordonnée $\theta_i : \nu_{\Sigma_i|D_i(p)} \rightarrow \mathbb{S}^1$ pour $p \in \Gamma_i$. A ce point de la discussion chaque point $p \in \Gamma_i$ a donc un voisinage dans ν_{Σ_i} muni de coordonnées locales $(\mathcal{P}_i^p, \xi_i^p, R_i, \theta_i)$.

Définissons alors $\omega_i := pr_i^* \tau_i + d(R_i \alpha_i)$ sur ν_{Σ_i} . Notons que ω_i est fermée, non-dégénérée sur $\text{SDB}(\Sigma_i, \varepsilon_i) = \{R_i < \varepsilon_i\}$, si $\varepsilon \ll 1$, et sur $\nu_{\Sigma_i|D_i(p)}$,

$$\omega_i = d\mathcal{P}_i^p \wedge d\xi_i^p + dR_i \wedge d\theta_i \quad (1.1)$$

Définissons le plombage des fibrés $\text{SDB}(\Sigma_i, \varepsilon_i)$ par :

$$\text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon) = \left(\bigsqcup_{i=1}^n \text{SDB}(\Sigma_i, \varepsilon_i) \right) / \sim \quad (1.2)$$

où pour $p \in \Sigma_i \cap \Sigma_j$, on identifie

$$\text{SDB}(\Sigma_i, \varepsilon_i) \ni (\mathcal{P}_i^p, \xi_i^p, R_i, \theta_i) \sim (R_i, \theta_i, \mathcal{P}_i^p, \xi_i^p) = (\mathcal{P}_j^p, \xi_j^p, R_j, \theta_j) \in \text{SDB}(\Sigma_j, \varepsilon_j).$$

La formule 1.1 garantit alors l'existence d'une 2-forme ϖ sur $\text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon)$ tel que $\varpi|_{\text{SDB}(\Sigma_i, \varepsilon_i)} = \omega_i$.

De plus, les formes symplectiques ω et ϖ représentent les mêmes classes de cohomologie sur $\mathcal{O}p(\bigcup \Sigma_i)$ et sont symplectomorphes. Le théorème de voisinage symplectique 1.1.2 donne finalement un plongement symplectique

$$\varphi : (\text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon), \varpi) \hookrightarrow (M, \omega)$$

qui envoie les sections nulles des $\text{SDB}(\Sigma_i, \varepsilon_i)$ sur Σ_i dès que $\varepsilon \ll 1$.

1.2 Formes de Liouville

On rappelle ici les notions qui nous seront utiles concernant les formes de Liouville.

Définition 1.2.1. Soit (M, ω) une variété symplectique. Une forme de Liouville sur (M, ω) associée à ω est une 1-forme sur M telle que $d\lambda = \omega$. Le champ de Liouville X_λ associé à λ est défini par $\omega(X_\lambda, \cdot) = \lambda$. Une variété de Liouville est une variété symplectique pouvant être munie d'une forme de Liouville.

Une telle 1-forme n'est pas unique. En effet, si λ est une forme de Liouville sur (M, ω) associée à la forme symplectique ω , alors pour tout 1-forme fermée η sur M , $\lambda + \eta$ est une autre forme de Liouville associée à ω .

Lemme 1.2.2. Soit $(M, \omega = d\lambda)$ une variété de Liouville. Soit X_λ son champ de Liouville. On note $\varphi_\lambda : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ le flot associé.

Ce flot vérifie $(\varphi_\lambda^t)^* \omega = e^t \omega$.

Démonstration. On dérive selon la coordonnée t l'expression $(\varphi_{X_\lambda}^t)^* \omega$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\varphi_{X_\lambda}^t)^* \omega &= (\varphi_{X_\lambda}^t)^* \mathcal{L}_{X_\lambda} \omega \\ &= (\varphi_{X_\lambda}^t)^* (d\iota_{X_\lambda} \omega + \iota_{X_\lambda} d\omega) \\ &= (\varphi_{X_\lambda}^t)^* d\lambda + 0 \\ &= (\varphi_{X_\lambda}^t)^* \omega, \end{aligned}$$

donc $(\varphi_{X_\lambda}^t)^* \omega = e^t \omega$. □

Définition 1.2.3. Soit (M, ω) une variété symplectique. Un domaine de Liouville de M est un domaine $\mathcal{D} \subset M$ à bord lisse sur un voisinage duquel ω a une forme de Liouville dont le champ de Liouville est transverse à $\partial \mathcal{D}$ et pointe vers l'extérieur de \mathcal{D} .

Remarque 1.2.4. Il existe des variétés symplectiques qui ne possèdent pas de formes de Liouville. Par exemple, une variété symplectique compacte sans bord ne peut-être de Liouville. En effet, si $\omega = d\lambda$ alors, $\omega^{\wedge n} = (d\lambda)^{\wedge n}$ est aussi exacte, dont une primitive est donnée par $\lambda \wedge (d\lambda)^{\wedge n-1}$. D'après le théorème de Stokes

$$0 = \int_{\partial M} \lambda \wedge (d\lambda)^{\wedge n-1} = \int_M \omega^{\wedge n} = \text{Vol}_\omega(M) = n! \text{Vol}(M) \neq 0.$$

Cependant, en dimension 4, une telle structure existe sur le complémentaire d'une certaine multi-courbe symplectique contenue dans M .

1.2.1 Formes de Liouville singulière

Définition 1.2.5. Soit (M, ω) une variété symplectique fermée de dimension 4. Une polarisation symplectique de (M, ω) est une collection de courbes symplectiques pondérées

$$(\Sigma, \boldsymbol{\mu}) := \{(\Sigma_j, \mu_j) \mid j = 1, \dots, N\}$$

satisfaisant :

- $[\omega] = \sum_{j=1}^N \mu_j \text{PD}(\Sigma_j)$.
- Les courbes Σ_j s'intersectent ω -orthogonalement.

On note $\Sigma = \bigcup_{j=1}^N \Sigma_j$, la courbe totale. On note Σ^{reg} l'ensemble des points appartenant à $\bigcup_{i=1}^N \left(\Sigma_i \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} \Sigma_j \right) \right)$.

De telles polarisations existent sur toute variété symplectique fermée [Ops13].

Lemme 1.2.6. Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4 et soit

$$\Sigma := \{(\Sigma_j, \mu_j) \mid j = 1, \dots, N\}$$

une polarisation de (M, ω) . Alors, il existe une forme de Liouville sur $M \setminus \Sigma$.

Démonstration. Par définition de la polarisation Σ , la forme ω est exacte sur $M \setminus \Sigma$, donc admet une primitive. \square

Lemme 1.2.7 ([Ops14b]). Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4, soit $\Sigma = \{(\Sigma_j, \mu_j)\}$ une collection de courbes symplectiques pondérées qui s'intersectent ω -orthogonalement et soit $\Sigma = \bigcup_j \Sigma_j$ la courbe totale associée. Soit λ une forme de Liouville sur $\mathcal{O}p(\Sigma) \setminus \Sigma \cong \text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon) \setminus \Sigma$ (voir 1.2). Soit $p \in \Sigma^{\text{reg}} \cap \Sigma_j$ et soit $(\gamma^{\varepsilon'}(p))$ une collection de lacets contenue dans la fibre au-dessus de p dans $\text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon)$ dépendant continuellement de $0 < \varepsilon' < \varepsilon_i$. On suppose que

$$\gamma^{\varepsilon'}(p) \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} p$$

et que $\gamma^{\varepsilon'}(p)$ est d'enroulement 1 autour de Σ_j dans $\mathcal{O}p(p)$.

Alors :

1. $\lambda(\gamma^{\varepsilon'}(p)) \in \mathbb{R}$ converge quand $\varepsilon' \rightarrow 0$. On note $\alpha(p) = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \lambda(\gamma^{\varepsilon'}(p))$.
2. $\alpha(p)$ ne dépend que de la composante Σ_j sur laquelle se situe le point p .
3. Si (Σ, μ) est une polarisation de (M, ω) et si λ a résidus $-\mu_j$ en Σ_j , alors λ s'étend en une forme de Liouville sur $M \setminus \Sigma$.
4. Si (Σ, μ) est une polarisation de (M, ω) , il existe une forme de Liouville sur $M \setminus \Sigma$ vérifiant $\text{Res}(\lambda, \Sigma_j) = -\mu_j$.

Définition 1.2.8. On appelle résidu de λ en Σ_j la quantité $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \lambda(\gamma^{\varepsilon'}(p))$ et on la note $\text{Res}(\lambda, \Sigma_j)$.

Exemple 1.2.9. Un exemple standard, mais fondamental en ce qui nous concerne, est celui donné par la forme de Liouville λ_{μ_1, μ_2} sur $(\mathbb{C}^2, \omega_{st})$ définie par $\lambda_{\mu_1, \mu_2} = \lambda_{st} + \mu_1 d\theta_1 + \mu_2 d\theta_2$. Cette forme est clairement singulière le long de $\{zw = 0\}$ avec résidu μ_1 le long de $\{z = 0\}$ et μ_2 le long de $\{w = 0\}$. Son champ de Liouville est donné par

$$X_{\lambda_{\mu_1, \mu_2}} := (R_1 + \mu_1) \frac{\partial}{\partial R_1} + (R_2 + \mu_2) \frac{\partial}{\partial R_2}$$

et son flot vérifie

$$(\dot{R}_1(p, t), \dot{\theta}_1(p, t), \dot{R}_2(p, t), \dot{\theta}_2(p, t)) = (R_1(p, t) + \mu_1) \frac{\partial}{\partial R_1} + (R_2(p, t) + \mu_2) \frac{\partial}{\partial R_2}.$$

Les solutions (R_1, R_2) de ce système sont données par

$$\begin{cases} R_1(p, t) &= c_1(p)e^t - \mu_1 \\ R_2(p, t) &= c_2(p)e^t - \mu_2 \end{cases}$$

tandis que (θ_1, θ_2) restent constantes.

1.2.2 Forme de Liouville sur un plombage

Soit $\Sigma = (\Sigma_i)_{i=1}^n$ une multi-courbe symplectique à croisements normaux. On reprend les notations de la partie 1.1.2, c'est-à-dire : $\Gamma_i, \{D_i(p), p \in \Gamma_i\}, \tau_i, \omega_i, R_i, d\theta_i, \alpha_i, \mathcal{P}_i^p, \xi_i^p, \varpi, \varphi$.

Lemme 1.2.10. *Pour tout $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, il existe des fonctions*

$$(\chi_i : \text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon) \rightarrow [0, 1])_{i=1}^n$$

et une forme β bien définies et \mathcal{C}^∞ sur $\text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon)$ (voir 1.2) telles que

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \chi_i(R_i)(-\mu_i + R_i)\alpha_i + \beta$$

est une 1-forme vérifiant $d\lambda = \varpi$ sur $\text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon) \setminus \Sigma$.

Démonstration. Soit $\chi_i : \text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon) \rightarrow [0, 1]$ à supports compacts vérifiant $\chi_i|_{\Sigma_i} \equiv 1$, telles que sur tout disque de l'ensemble $\{D_j(p) \subset \Sigma_j, p \in \Gamma_j\}$, $\chi_i|_{D_j(p)}(0) = 1$ et $\chi_i|_{D_j(p)}(b_j(p)) = 0$, $b_j(p)$ désignant le rayon de $D_j(p)$ pour tout $j \neq i$. Soit $\alpha = \sum_{i=1}^n \chi_i(R_i)(-\mu_i + R_i)\alpha_i$. Alors,

$$d\alpha = \sum_{i=1}^n \chi_i(R_i)(-\mu_i + R_i) d\alpha_i - \sum_{i=1}^n \mu_i d\chi_i(R_i) \wedge \alpha_i + \sum_{i=1}^n d(\chi_i(R_i)R_i) \wedge \alpha_i.$$

On en déduit que $d\alpha$ est bien définie sur tout $\text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon)$ (cf : remarque 1.1.4). De plus,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{d\alpha}(\Sigma_j) &= \int_{\Sigma_j} d\alpha = \sum_{i=1}^n \int_{\Sigma_j} \chi_i(R_i)(-\mu_i + R_i) d\alpha_i - \sum_{i=1}^n \mu_i \int_{\Sigma_j} d\chi_i(R_i) \wedge \alpha_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\Sigma_j} d(\chi_i(R_i)R_i) \wedge \alpha_i. \end{aligned}$$

Comme $\alpha_i|_{F_i} = d\theta_i$, on a $d\alpha_i|_{\Sigma_j} = 0$ pour tout $i \neq j$, et comme en restriction à Σ_j , $R_j = 0$, on a $\chi_j \equiv 1$,

$$\int_{\Sigma_j} d\alpha = \int_{\Sigma_j} -\mu_j h_j \tau_j - \sum_{i \neq j} \mu_i \int_{\Sigma_j} d\chi_i(R_i) \wedge d\theta_i + \sum_{i \neq j} \int_{\Sigma_j} d(\chi_i(R_i)R_i) \wedge d\theta_i.$$

Or,

- $\int_{\Sigma_j} -\mu_j h_j \tau_j = \mu_j [\Sigma_j] \cdot [\Sigma_j]$,
- puisque les fonctions χ_i sont à supports compacts dans $\bigcup_{p \in \Gamma_{i,j}} D_j(p)$,

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \mu_i \int_{\Sigma_j} d\chi_i \wedge d\theta_i &= \sum_{i \neq j} \mu_i \sum_{p \in \Gamma_j} \int_{D_j(p)} d\chi_i \wedge d\theta_i \\ &= \sum_{i \neq j} \mu_i \sum_{p \in \Gamma_j} \chi_i(b_j(p)) - \chi_i(0) \\ &= \sum_{i \neq j} \mu_i \sum_{p \in \Gamma_j} (-1) \\ &= - \sum_{i \neq j} \mu_i [\Sigma_i] \cdot [\Sigma_j]. \end{aligned}$$

— Enfin, puisque $\chi_i(b_j(p)) = 0$ pour tout $i \neq j$ et tout $p \in \Gamma_j$,

$$\sum_{i \neq j} \int_{\Sigma_j} d(\chi_i(R_i)R_i) \wedge d\theta_i = \sum_{i \neq j} \sum_{p \in \Gamma_i} (\chi_i(b_i(p))b_i(p) - \chi_i(0) \times 0) = 0.$$

En sommant, on obtient

$$\int_{\Sigma_j} d\alpha = \mu_j[\Sigma_j]^2 + \sum_{i \neq j} \mu_i[\Sigma_i] \cdot [\Sigma_j] = \int_{\Sigma_j} \varpi.$$

Donc, $\int_{\Sigma_j} (d\alpha - \varpi) = 0$. Ceci est vérifié pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, et donc $d\alpha - \varpi$ est une 2-forme fermée lisse sur $\text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon)$ s'annulant sur Σ qui est un rétract de $\text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon)$. Il existe donc une 1-forme β telle que $\varpi = d\alpha + d\beta = d(\alpha + \beta) = d\lambda$. On note par ailleurs que β ainsi définie est bien définie et lisse sur tout $\text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon)$. On en conclut enfin que la forme $\lambda = \beta + \alpha$ est une forme de Liouville associée à ϖ . □

Corollaire 1.2.11. *Avec les mêmes hypothèses que pour le lemme 1.2.10. Si $D \subset \Sigma_i \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} \Sigma_j \right)$, il existe une forme de Liouville λ sur $\text{PSDB}(\Sigma, \varepsilon)$ dont le flot pointe vers l'extérieur de $\mathcal{O}_p(\Sigma)$ avec résidu μ_i et tel que $\lambda|_{\mathcal{O}_p(D)} = (-\mu_i + R_i) d\theta_i + pr_i^* \lambda_D$ où λ_D est une forme de Liouville sur D .*

Démonstration. On reprend la même forme α que dans la démonstration précédente, en ajoutant la contrainte que la fonction h_i associée à la forme α_i s'annule sur D , ce qui est évidemment possible. Le reste de la preuve reste identique. □

1.2.3 Bassin de répulsion/attraction

Soit \mathbb{C}^2 muni de la forme de Liouville $\lambda_{b_1, b_2} = \lambda_{st} + \mu_1 d\theta_1 + \mu_2 d\theta_2$ (voir exemple 1.2.9). Soit la croix

$$X_{a_1, a_2} := (D(a_1) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times D(a_2)) \subset \mathbb{C}^2.$$

Si μ_1 et μ_2 sont positifs, on définit le bassin de répulsion de X_{a_1, a_2} :

$$\mathcal{B}_+(X_{a_1, a_2}, \lambda_{\mu_1, \mu_2}) = \mathcal{B}_+(a_1, a_2, \mu_1, \mu_2) := \{p \in \mathbb{C}^2 \mid \exists t_0 \geq 0, \varphi_{\lambda_{\mu_1, \mu_2}}^{-t_0}(p) \in X_{a_1, a_2}\}.$$

Si μ_1 et μ_2 sont négatifs, on définit le bassin de répulsion de X_{a_1, a_2} :

$$\mathcal{B}_-(X_{a_1, a_2}, \lambda_{\mu_1, \mu_2}) = \mathcal{B}_-(a_1, a_2, \mu_1, \mu_2) := \{p \in \mathbb{C}^2 \mid \exists t_0 \geq 0, \varphi_{\lambda_{\mu_1, \mu_2}}^{t_0}(p) \in X_{a_1, a_2}\}.$$

On donne à présent des exemples fondamentaux de bassins d'attraction qui interviennent par la suite.

Avant cela, on définit :

Définition 1.2.12. *Un domaine torique \mathcal{D}_Ω est un sous-ensemble de $(\mathbb{C}^2, \omega_{st})$ qui est la pré-image d'une région Ω de $(\mathbb{R}^+)^2$ via l'application*

$$\begin{aligned} \mu : \quad \mathbb{C}^2 &\rightarrow (\mathbb{R}^+)^2 \\ (z, w) &\mapsto (|z|^2, |w|^2). \end{aligned}$$

La région Ω est appelée modèle torique de \mathcal{D}_Ω .

Proposition 1.2.13 (Voir figures 1.1 à 1.4.). *Les bassins définis ci-dessus sont des domaines toriques \mathcal{D}_Ω , où Ω est :*

1. *l'union des segments joignant $-(\mu_1, \mu_2)$ à $\mu(X_{a_1, a_2})$ lorsque μ_1 et μ_2 sont négatifs.*
2. *l'ensemble des intersections des droites passant par $-(\mu_1, \mu_2)$ et $\mu(X_{a_1, a_2})$ avec $(\mathbb{R}^+)^2$ lorsque μ_1 et μ_2 sont positifs, c'est-à-dire l'ensemble*

$$\Omega := \left\{ (R_1, R_2) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid \frac{\mu_2}{a_1 + \mu_1} (R_1 - a_1) \leq R_2 \leq \frac{a_2 + \mu_2}{\mu_1} R_1 + a_2 \right\}.$$

Démonstration. On a vu dans l'exemple 1.2.9 que les trajectoires du flot associé à λ_{μ_1, μ_2} sont données par le système

$$\begin{cases} R_1(p, t) = c_1(p)e^t - \mu_1 \\ R_2(p, t) = c_2(p)e^t - \mu_2 \end{cases}$$

et les coordonnées angulaire (θ_1, θ_2) sont constantes. Les trajectoires de X_{μ_1, μ_2} dans $\mathbb{R}_{R_1}^+ \times \mathbb{R}_{R_2}^+$ sont donc sur les droites

$$(R_1 + \mu_1) = \frac{c_1(p)}{c_2(p)} (R_2 + \mu_2),$$

passant par $-(\mu_1, \mu_2)$ et X_{a_1, a_2} , et sont issues de $-(\mu_1, \mu_2)$. On présente les différents cas dans les figures ci-dessous.

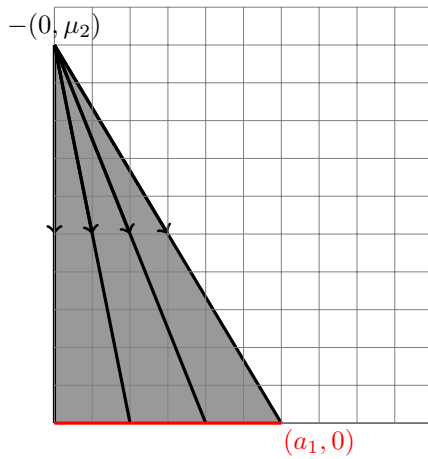


FIGURE 1.1 – Bassin d'attraction d'un disque de taille a_1 avec résidu μ_2 négatif.

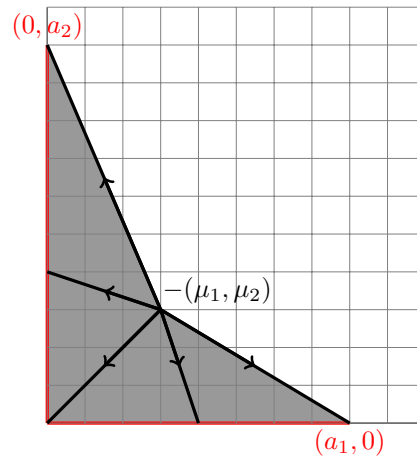


FIGURE 1.2 – Bassin d'attraction de la croix X_{a_1, a_2} pour résidus (μ_1, μ_2) négatifs sous $(a_1 a_2)$.

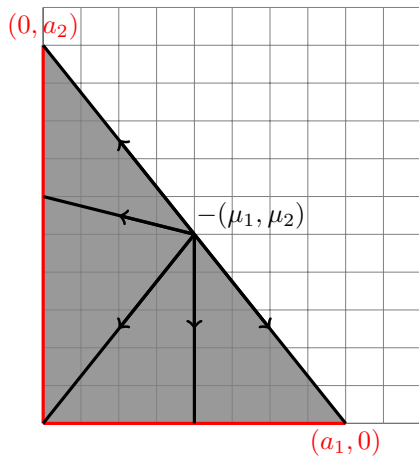
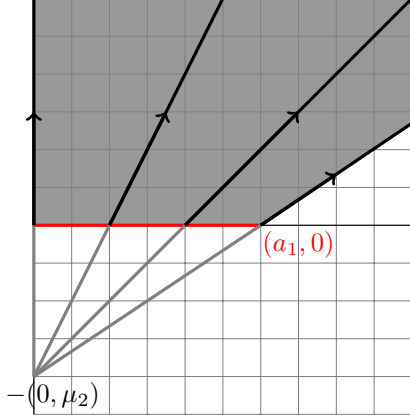
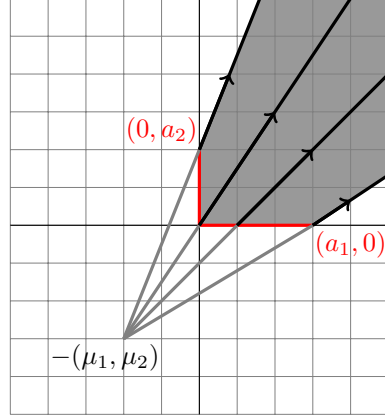


FIGURE 1.2 – Bassin d'attraction de la croix X_{a_1, a_2} pour résidus (μ_1, μ_2) positifs sous $(a_1 a_2)$.

FIGURE 1.3 – Bassin d’attraction de la croix X_{a_1, a_2} pour résidus (μ_1, μ_2) négatifs sur $(a_1 a_2)$.FIGURE 1.4 – Bassin d’attraction de la croix X_{a_1, a_2} pour résidus (μ_1, μ_2) négatifs au-dessus de $(a_1 a_2)$.FIGURE 1.5 – Bassin de répulsion d’un disque de taille a_1 pour résidus μ_2 positif.FIGURE 1.6 – Bassin de répulsion de la croix X_{a_1, a_2} pour résidus (μ_1, μ_2) positif.

□

Remarque 1.2.14. Si μ_1 et μ_2 sont positifs, alors on peut exprimer le domaine torique \mathcal{D}_Ω comme intersection d’hyperboloïdes. Précisément, si l’un des μ_i est nul, alors on a exactement un hyperboloïde $\mathcal{H}(a_1, \mu_2) := \{\frac{R_1}{a_1} - \frac{R_2}{\mu_2} < 1\}$ (resp. $\mathcal{H}'(\mu_1, a_2) = \{\frac{R_2}{a_2} - \frac{R_1}{\mu_1} < 1\}$) si $\mu_1 = 0$ (resp. $\mu_2 = 0$) (Figure 1.5) et contient la boule $B(c)$, pour tout $c < a_i$. Si μ_1 et μ_2 sont non-nuls, alors le domaine \mathcal{D}_Ω est $\mathcal{H}(a_1, \frac{a_1 \mu_2}{a_1 - \mu_1}) \cap \mathcal{H}'(\frac{a_2 \mu_1}{a_2 - \mu_2}, a_2)$ (Figure 1.6) qui contient la boule $B(c)$, pour tout $c < \min\{a_1, a_2\}$.

1.2.4 Tempérance [Ops14b]

Dans cette partie on définit une régularité pour les formes de Liouville singulière le long d’une polarisation qui nous est nécessaire dans la partie 3.3.3.

Définition 1.2.15 (Forme angulaire). Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4. Soit Σ une courbe symplectique dans M et soit ν_Σ son fibré normal dans TM . On munit ν_Σ d’une structure hermitienne et d’une connexion hermitienne α . Une forme angulaire autour de Σ est le poussé en avant de α par tout plongement localement lisse de $(\nu_\Sigma, 0_{\nu_\Sigma})$ dans (M, Σ) . En d’autres termes, c’est une 1-forme qui est localement le $d\theta$ des coordonnées locales des fibres autour de Σ , modulo une forme lisse (cf : remarque 1.1.4).

Définition 1.2.16 (Forme tempérée). Soit (M, Σ) une variété de dimension 4 contenant une sous-variété Σ avec des singularités isolées. On dit qu'une 1-forme λ est tempérée sur $U \subset \Sigma^{\text{reg}}$ si on peut l'écrire sur $\mathcal{O}_p(U)$ comme

$$\lambda = \kappa\alpha + \beta,$$

où α est une forme angulaire sur U , κ est une fonction lisse et β une 1-forme lisse sur $\mathcal{O}_p(U)$.

Proposition 1.2.17. Soit $\Sigma \subset M$ une multi-courbe et λ_1 et λ_2 deux formes tempérées autour de Σ ayant mêmes résidus. Alors $\lambda_1 - \lambda_2$ est une 1-forme lisse sur M .

Proposition 1.2.18. Soit (Σ, μ) une polarisation de (M, ω) . Si λ est une forme de Liouville sur $M \setminus \Sigma$ tempérée le long de Σ , alors λ a des résidus le long de chaque composante de Σ . Si ces résidus sont positifs, X_λ pointe vers l'extérieur de $\mathcal{O}_p(\Sigma^{\text{reg}})$. A contrario, si les résidus de λ sont négatifs, le champ X_λ pointe vers Σ^{reg} dans $\mathcal{O}_p(\Sigma^{\text{reg}})$.

1.3 Courbes J -holomorphes

Dans cette partie, on énonce les résultats concernant les courbes J -holomorphes qui sont nécessaires pour cette thèse. Ces résultats étant connus depuis les années 90, on ne s'attarde pas sur les démonstrations de ceux-ci. Le lecteur peut toute fois se référer à la partie 2 de l'article [MO13] pour plus de détails.

On définit d'abord :

Définition 1.3.1. Soit M une variété de dimension paire. Une structure presque complexe sur M est un champ d'endomorphismes J sur TM , tel que pour tout $p \in M$, $J_p^2 = -Id_{TM}$. Elle est intégrable si il existe un atlas $\{\varphi_j, U_j\}_j$ sur M tel que la structure presque complexe est représentée par la matrice

$$J_{st} = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$$

dans des coordonnées locales. C'est-à-dire tel que

$$d\varphi_j(p) \circ J_p = J_{st} \circ d\varphi_j(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^{2n},$$

pour $p \in U_j$.

En particulier, les applications de changement de cartes de cet atlas sont holomorphes.

Une structure presque complexe J sur une variété symplectique (M, ω) est ω -compatible lorsque $\omega(\cdot, J\cdot)$ est une forme riemannienne sur M , c'est-à-dire un champ de formes symétriques définies positives. Elle est dite tempérée lorsque $\omega(\cdot, J\cdot) \geq 0$.

Remarque 1.3.2. Les notions de tempérance définie pour les formes de Liouville (cf : définition 1.2.16) et pour les structures presque complexes ne sont pas liées.

Une variété symplectique (M, ω) peut toujours être équipée d'une structure presque complexe J ω -compatible.

Définition 1.3.3. Soit (M, ω) une variété symplectique munie d'une structure presque complexe J (ω -compatible ou tempérée). Soit (X, j) une surface de Riemann connexe. Une courbe J -holomorphe est une application $u : (X, j) \rightarrow (M, J)$ telle que $J \circ du = du \circ j$. Elle est immergée si u est une immersion et plongée si u est un plongement.

Remarque 1.3.4. Soit (M, ω, J) une variété symplectique munie d'une structure presque complexe J . Les courbes J -holomorphes sont symplectiques.

Dans la suite de la thèse, on a besoin de conditions d'existence de courbes J -holomorphes dans une variété symplectique (M, ω) . L'outil principal pour trouver ces courbes est le calcul de Taubes de l'invariant de Gromov-Witten $Gr(A)$. Celui-ci permet de compter le nombre de courbes J -holomorphes représentant une classe $A \in H_2(M)$ [Tau96]. Celui-ci associe un décompte signé des courbes J -holomorphes dans la classe A passant par $k(A)$ point génériques pour J -générique. En dimension 4, cet invariant ne dépend pas de la structure symplectique. Si $Gr(A) \neq 0$, on est alors assuré de l'existence d'une courbe J -holomorphe dans (M, ω) représentant la classe A pour J -générique et ω -compatible. De plus, on a des conditions précises pour que cet invariant soit non-nul dans le cas des variétés symplectiques dites de classe \mathcal{C}^* , c'est-à-dire $\mathbb{C}P^2$, les surfaces réglées et leurs éclatements.

Théorème 1.3.5 ([LL95, LL99]). Soit (M, ω) une variété symplectique dans la classe \mathcal{C}^* et soit $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ telle que $A^2 > 0$ et $[\omega](A) > 0$. Alors il existe $q_0 > 0$, tel que pour tout $q > q_0$, $Gr(qA) \neq 0$. Si de plus $A \cdot E \geq 0, \forall E \in \mathbf{E}$, (\mathbf{E} est l'ensemble des classes représentées par des sphères symplectiques plongées de carré -1), qA est représentée par une courbe J -holomorphe plongée pour J -générique.

Ce théorème ne s'applique cependant qu'aux variétés symplectique \mathcal{C}^* . Dans le cas de variétés (M, ω) quelconques, Donaldson a développé une technique de construction de courbes symplectiques dans une classe d'homologie prescrite.

Théorème 1.3.6 ([Don96]). Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4 telle que $[\omega] \in H_2(M, \mathbb{Z})$. Pour $k \gg 1$, il existe une courbe symplectique lisse fermée $C \subset (M, \omega)$ représentant la classe $PD(k\omega)$.

Le lemme suivant montre les liens étroits qui existent entre le fait pour un espace d'être J -holomorphe et le fait d'être symplectique.

Lemme 1.3.7. Soient f_1, \dots, f_n des nombres complexes non tous nuls. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, des formes linéaires sur \mathbb{C}^n telles que $\|\alpha_i\| < \frac{1}{2n}$ pour tout i . Alors, le sous-espace

$$\text{Ker} \left(\sum_{i=1}^n f_i (dz_i + \alpha_i) \right) \subset \mathbb{C}^n$$

est ω_{st} -symplectique.

Démonstration. Soit $\alpha := \sum_{i=1}^n f_i (dz_i + \alpha_i)$. On rappelle que l'espace des formes complexes linéaires et anti-linéaires sur \mathbb{C}^n sont orthogonaux. Ainsi, l'hypothèse sur les α_i donne

$$\|\alpha_i^{1,0}\| < \frac{1}{2n} \text{ et } \|\alpha_i^{0,1}\| < \frac{1}{2n}.$$

On remarque aussi que

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i dz_i \right\| \geq \max |f_i|.$$

Ainsi,

$$\|\alpha^{1,0}\| = \left\| \sum_{i=1}^n f_i dz_i + \sum_{i=1}^n f_i \alpha_i^{1,0} \right\| > \max |f_i| \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n} \right) > \frac{\max |f_i|}{2}.$$

De manière similaire,

$$\|\alpha^{0,1}\| < \frac{\max |f_i|}{2}.$$

Ainsi, $\|\alpha_i^{1,0}\| > \|\alpha_i^{0,1}\|$ et $\text{Ker}(\alpha)$ est ω_{st} -symplectique. □

Corollaire 1.3.8. *Soit $P : \mathcal{O}p(0, \mathbb{C}^2) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe en deux variables avec $P(0) = 0$ et un point critique isolé en l'origine. Soit $\varphi : \mathcal{O}p(0, \mathbb{C}^2) \rightarrow \mathcal{O}p(0, \mathbb{C}^2)$ un difféomorphisme local tangent à l'identité en l'origine. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, il existe une sous-variété symplectique Σ de $B(2\varepsilon) \setminus B(\varepsilon)$ telle que*

$$\begin{aligned} \Sigma \cap \mathcal{O}p(\mathbb{S}(\varepsilon)) &= \{P(z, w) = 0\} \\ \Sigma \cap \mathcal{O}p(\mathbb{S}(2\varepsilon)) &= \{P \circ \varphi(z, w) = 0\}. \end{aligned}$$

De plus, si $P = QR$, où $R(z, w)$ est soit w , soit zw , Σ peut être $\{R = 0\} \cup \Sigma_Q$.

Démonstration. Soit $\chi_\varepsilon : [\varepsilon^2, 4\varepsilon^2] \rightarrow [0, 1]$ une fonction lisse telle que

$$\begin{cases} \chi_\varepsilon \equiv 0 \text{ sur } \mathcal{O}p(\varepsilon^2) \\ \chi_\varepsilon \equiv 1 \text{ sur } \mathcal{O}p(4\varepsilon^2) \\ |\chi'_\varepsilon| < \frac{1}{\varepsilon^2} \end{cases}$$

Posons $\varphi(z, w) := (z + h_1(z, w), w + h_2(z, w))$, $f(z, w) := P(z + \chi_\varepsilon(|z|^2 + |w|^2)h_1(z, w), w + \chi_\varepsilon(|z|^2 + |w|^2)h_2(z, w))$ et

$$\Sigma := \{f(z, w) = 0\} \cap B(2\varepsilon) \setminus B(\varepsilon).$$

Les conditions d'interpolation sont évidemment satisfaites et il ne reste qu'à montrer que Σ est lisse et ω_{st} -symplectique. Ces propriétés sont assurées si on peut montrer que

$$\|df(z, w)^{1,0}\| > \|df(z, w)^{0,1}\|, \forall (z, w) \in B(2\varepsilon) \setminus B(\varepsilon).$$

Or $df(z, w) = \partial_z P(dZ + \alpha_1) + \partial_w P(dw + \alpha_2)$, où

$$\alpha_i := \chi_\varepsilon(|z|^2 + |w|^2) dh_i(z, w) + \chi'_\varepsilon(|z|^2 + |w|^2) h_i(z, w) d(|z|^2 + |w|^2).$$

Puisque φ est un difféomorphisme local \mathcal{C}^2 -lisse et tangent à l'identité en l'origine, on a pour $(z, w) \in B(2\varepsilon) \setminus B(\varepsilon)$:

$$\|dh_i(z, w)\| \leq 2\|h_i\|_{\mathcal{C}^2\varepsilon}, \|h_i(z, w)\| \leq 4\|h_i\|_{\mathcal{C}^2\varepsilon^2}, \|d(|z|^2 + |w|^2)\| < 10\varepsilon.$$

Ainsi, $\|\alpha_i(z, w)\| \leq 2\|h_i\|_{\mathcal{C}^2\varepsilon} + 4\|h_i\|_{\mathcal{C}^2\varepsilon^2} \frac{1}{\varepsilon^2} 10\varepsilon < C\varepsilon$, où C ne dépend que de φ . Pour $\varepsilon < \varepsilon_1(\varphi)$ suffisamment petit, on a alors $\|\alpha_i(z, w)\| < 1/2$ pour tout $(z, w) \in B(2\varepsilon) \setminus B(\varepsilon)$. Puisque l'origine est une valeur critique isolée de P , pour $\varepsilon < \varepsilon_2(P)$, soit $\partial_z P(z, w)$, soit $\partial_w P(z, w)$ est non-nulle pour tout $(z, w) \in B(2\varepsilon) \setminus B(\varepsilon)$. Ainsi, les hypothèses du lemme 1.3.7 sont satisfaites pour $\varepsilon < \varepsilon_0(P, \varphi) = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Quand $P = QR$, avec $R = w$ ou $R = zw$, on peut vérifier que f s'annule sur $\{R = 0\}$ et donc Σ se décompose bien comme $\{R = 0\} \cup \Sigma_Q$. □

1.4 Théorèmes d'inflation

1.4.1 Inflation classique

Nous décrivons à présent la technique d'inflation classique, centrale dans les problèmes de plongements depuis les travaux de McDuff-Polterovich [MP94]. Etant donné une courbe symplectique fermée lisse C dans une variété symplectique (M^4, ω) , celle-ci fournit une déformation symplectique de ω dans la direction cohomologique $\text{PD}(C)$. Précisément :

Théorème 1.4.1. *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4. Soit $C \subset M$ une courbe symplectique fermée lisse. Il existe une famille à un paramètre de formes symplectiques ω_t dans la classe $[\omega_t] = [\omega] + t \text{PD}([C])$, $t \in [0, \kappa[$, avec*

$$- \kappa = +\infty \text{ si } [C] \cdot [C] \geq 0,$$

$$- \kappa = \frac{\mathcal{A}_\omega(C)}{|[C] \cdot [C]|} \text{ si } [C] \cdot [C] < 0, \text{ où } \mathcal{A}_\omega(C) = \int_C \omega \text{ est l'aire de } C \text{ pour la forme } \omega.$$

Autrement dit, ce théorème nous permet de faire enfler l'aire symplectique d'une courbe symplectique, et ce, tant qu'on a "suffisamment" de place dans notre variété, d'où le terme d'inflation.

Démonstration. Soient ν_C le fibré normal de C dans M , $\tau := \omega|_C$, R une coordonnée radiale, $d\theta$ une forme angulaire sur ν_C , α une forme de connexion vérifiant

$$\begin{cases} \alpha|_{\text{Fibre}} &= d\theta \\ d\alpha &= +\lambda pr^* \tau, \end{cases}$$

et $\omega_0 := pr^* \tau + d(r^2 \alpha)$ tels qu'introduits dans 1.1.2. La forme ω_0 est alors symplectique sur un voisinage de la section nulle $\nu_{C,0}$ et le théorème de voisinage symplectique 1.1.2 donne un plongement symplectique $\varphi : (\text{SDB}(C, \varepsilon), \nu_{C,0}, \omega_0) \rightarrow (\mathcal{O}p(C), C, \omega)$.

On choisit à présent une fonction $f : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante à support compact telle que $f \equiv 1$ sur $\mathcal{O}p(\{0\})$ et on définit $\omega_t := \varphi_*(\omega_0 - t d(f(R)\alpha))$ sur $\text{Im}(\varphi)$ et $\omega_t = \omega$ ailleurs. Cette forme est bien définie puisque $f \equiv 0$ près de ε , évidemment fermée, et $[\omega_t] = [\omega] + t \text{PD}(C)$. De plus, $\varphi^* \omega_t = (1 + \lambda R - t \lambda f(R)) pr^* \tau + (1 + t |f'(R)|) dR \wedge \alpha$ est non-dégénérée sur $\{R < \varepsilon\}$ pour tout t tel que $1 + \lambda R - t \lambda f(R) > 0$. Lorsque $C \cdot C \geq 0$, $\lambda \leq 0$ et cette condition est vérifiée pour tout $t > 0$ sur $\{r^2 < \lambda^{-1}\}$. Lorsque $C \cdot C < 0$, $\lambda > 0$ et celle-ci est vérifiée pour tout $t < \frac{1}{|\lambda|}$ sur $\{R < \lambda^{-1}\}$.

□

Remarque 1.4.2. *Lorsque $C' \subset M$ est une courbe symplectique qui intersecte C positivement et transversalement, on peut perturber C' en une courbe symplectique C'' qui intersecte C selon des fibres de ν_C . La courbe C'' reste alors symplectique le long de l'inflation.*

Le corollaire suivant explique une utilisation typique de la technique d'inflation dans les problèmes de plongements. Bien que nous n'ayons pas présenté à ce stade tous les éléments permettant d'exposer une preuve complète, nous l'énonçons et l'expliquons à ce point afin d'illustrer l'inflation symplectique. Il s'agit d'une version simplifiée du Théorème 12 énoncé dans l'introduction, dont on donne une démonstration.

Corollaire 1.4.3 ([MP94]). *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4 et soit $C \subset (M, \omega)$ une courbe symplectique fermée dans la classe $\text{PD}(d\omega)$ présentant une singularité étoilée à N branches en $p \in M$ dont la transformée stricte \widehat{C} après éclatement de p vérifie $[\widehat{C}]^2 \geq 0$. Alors, il existe un plongement symplectique de la boule $B(a)$ dans M , où $a = N/d$.*

Démonstration. La résolution d'une singularité étoilée à N branches en $p \in M$ consiste en un unique éclatement symplectique le long d'un plongement $\varphi : (B(\varepsilon), \omega_{st}) \hookrightarrow (M, \omega)$, $\varepsilon \ll 1$ centré en p tel que $\varphi^{-1}(C)$ est une union de N disques de Hopf de $B(\varepsilon)$ (c'est le point qui n'a pas encore été expliqué. Ce sera fait dans la partie 2.2). Soit $(\widehat{M}, \widehat{\omega}, E, \pi : \widehat{M} \setminus E \rightarrow M \setminus \varphi(B(\varepsilon)))$ l'éclatement symplectique de M le long de φ . D'après le lemme 2.2.3, la transformée stricte $\widehat{C} \subset \widehat{M}$ de C est une courbe symplectique lisse fermée intersectant le diviseur exceptionnel E $\widehat{\omega}$ -orthogonalement en N points distincts. Cette courbe symplectique est donc un représentant de la classe $[\widehat{C}] = \pi^*[C] - N[E]$.

Le théorème 1.4.1 appliqué à la forme symplectique $\widehat{\omega} \in \pi^*[\omega] - \varepsilon e$ et la courbe \widehat{C} nous fournit une famille de formes symplectiques dans la classe

$$\begin{aligned} [\omega_t] &= [\widehat{\omega}] + t \text{PD}(\widehat{C}) \\ &= (1 + td)\pi^*[\omega] - (\varepsilon + tN)e. \end{aligned}$$

Puisqu'on suppose $[\widehat{C}]^2 \geq 0$, le théorème 1.4.1 assure que cette famille est symplectique pour tout $t \in [0, +\infty[$. En divisant donc ω_t par $(1 + td)$ et en prenant $t = T \gg 1$, on obtient une forme symplectique dans la classe $[\omega'_T] = \pi^*[\omega] - (\frac{N}{d} - \varepsilon)e$, pour tout $\varepsilon \ll 1$. D'après le lemme 3.1.1, un voisinage du diviseur E d'aire $N/d - \varepsilon$ est symplectomorphe à un voisinage de la boule $B(N/d - \varepsilon)$. Donc, celle-ci se plonge dans (M, ω) par un principe de *coupé-collé*. □

On peut d'emblée faire des remarques concernant ce résultat. Premièrement, en considérant une courbe $C \in \text{PD}(d\omega)$ avec k singularités étoilées $(X_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ à N_i branches et dont la transformée stricte \widehat{C} de C est de carré positif, on obtient un empilement symplectique des boules $B(a_i)$, où $a_i = N_i/d$.

Deuxièmement, ici l'hypothèse principale est la positivité de $[\widehat{C}]^2$ qui nous permet de réaliser l'inflation le long de \widehat{C} en tout temps. Cependant, dans le cas où $[\widehat{C}]^2 < 0$, on peut tout de même réaliser cette inflation jusqu'à $t = \kappa = -\frac{A_\omega(C)}{C \cdot C} = \frac{A_\omega(C)}{|C \cdot C|}$. Ainsi, on obtient le plongement de la boule $B(a')$ où

$$a' = \frac{\varepsilon + \kappa N}{1 + \kappa d} < \frac{N}{d}.$$

Troisièmement, pour appliquer l'inflation, il nous faut une courbe symplectique fermée et lisse. On a donc besoin de trouver une courbe symplectique lisse le long de laquelle enfler lorsque celle-ci n'est pas donnée explicitement comme dans le résultat 1.4.3 ci-dessus. C'est l'enjeu de la discussion de la partie 1.4.1 concernant les courbes J -holomorphes et l'invariant de Gromov.

Enfin, le théorème de Donaldson 1.3.6 permet de faire le chemin inverse du corollaire 1.4.3, c'est-à-dire trouver une courbe symplectique fermée dans (M, ω) présentant une singularité étoilée sachant qu'une boule $B(a)$ se plonge symplectiquement dans (M, ω) :

Proposition 1.4.4. *Soient $a \in \mathbb{Q}$ un rationnel positif et (M, ω) une variété symplectique rationnelle de dimension 4 ($[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Q})$) dans laquelle se plonge une boule symplectique $\overline{B(a)}$. Alors il existe $d \in \mathbb{N}$, $d \gg 1$, et une courbe symplectique C dans la classe $\text{PD}(d\omega)$ lisse, sauf en un point où elle présente une singularité étoilée à ad branches.*

Démonstration. Soit J une structure presque complexe ω -compatible sur M qui coïncide avec $\varphi_* J_{st}$ sur $\varphi(\mathcal{O}_p(B(a)))$ (où $\varphi : \mathcal{O}_p(B(a)) \hookrightarrow M$ est notre plongement symplectique). L'éclatement symplectique $(\widehat{M}, \widehat{\omega}, \widehat{J})$ de (M, ω, J) le long de φ vérifie :

- $[\hat{\omega}] = [\pi^*\omega] - ae$,
- \hat{J} est $\hat{\omega}$ -compatible,
- E est \hat{J} -holomorphe.

La technique de construction de Donaldson donne une courbe symplectique \hat{C} dans la classe $\text{PD}(d\hat{\omega})$ pour $d \gg 1$, qu'on peut exiger \hat{J} -holomorphe sur $\mathcal{O}p(E)$ car \hat{J} est intégrable sur $\mathcal{O}p(E)$ (Donaldson, proposition 32). Alors \hat{C} intersecte E transversalement et positivement, est \hat{J} -holomorphe sur $\mathcal{O}p(E)$ et symplectique. On peut alors modifier \hat{J} sur $M \setminus \mathcal{O}p(E)$ pour que \hat{C} soit \hat{J}' -holomorphe. La contraction complexe $(M, J', \pi : \widehat{M} \rightarrow M)$ le long de $\psi : \mathcal{O}p(E, \widehat{M}) \rightarrow \mathcal{O}p(E, \widehat{\mathbb{C}^2})$ produit une courbe $C := \pi_*\hat{C}$ J' -holomorphe, donc ω -symplectique avec une singularité étoilée à ad branches et sans autres singularités. □

1.4.2 Inflation Singulière

Dans cette partie, on explique que sous certaines conditions, la technique d'inflation peut-être réalisée à partir d'une courbe singulière.

Théorème 1.4.5. *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4, $\mathcal{C} := (C_i)_{i \in I}$ une collection de courbes symplectiques fermées lisses s'intersectant ω -orthogonalement deux à deux. Soit $A = \sum \lambda_i [C_i] \in H_2(M, \mathbb{Z})$, $\lambda_i \geq 0$. Il existe une constante $\kappa \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et une famille de formes symplectiques ω_t , $t \in [0, \kappa[$ telles que :*

1. $[\omega_t] = [\omega] + t \text{PD}(A)$,
2. \mathcal{C} est ω_t -symplectique à croisements normaux,
3. si $A \cdot [C_i] \geq 0 \forall i \in I$, $\kappa = +\infty$. Si $\exists i \in I$ tel que $A \cdot [C_i] < 0$, $\kappa = \min \left\{ \frac{\mathcal{A}_\omega(C_i)}{|A \cdot [C_i]|}, \mid A \cdot [C_i] < 0 \right\}$.
4. Si une courbe symplectique T intersecte les C_i ω -orthogonalement, T reste ω_t -symplectique pour tout t .

On donne seulement l'idée de la démonstration. Pour une démonstration détaillée, on peut voir [MO13].

Soit $\text{PSDB}(\mathcal{C}, \varepsilon)$ un plombage des fibrés en disques $\text{SDB}(C_i, \varepsilon_i)$ où $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \in I}$ est suffisamment petit, de sorte qu'il existe $\varphi : (\text{PSDB}(\mathcal{C}, \varepsilon), \bigcup_{i \in I} 0_{\nu_{C_i}}, \varpi) \hookrightarrow (M, \bigcup_{i \in I} C_i, \omega)$. On reprend les notations de la partie 1.1.2 : $\Gamma_i, \{D_i(p), p \in \Gamma_i\}, \tau_i, \omega_i, R_i, d\theta_i, \alpha_i, \mathcal{P}_i^p, \xi_i^p, \varpi, \varphi$.

Sur $\text{PSDB}(\mathcal{C}, \varepsilon)$, il existe des 2-formes ρ_i à support dans $\text{SDB}(C_i, \varepsilon_i)$ telles que $\rho_i \in \text{PD}([C_i])$, ρ_i est compatible avec la structure produit sur un voisinage de Γ_i et \mathcal{C} est symplectique à croisements normaux pour $\varpi + t\rho_i$ pour $t \in [0, \kappa_i)$, $\kappa_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, $\forall i \in I$. Pour montrer l'existence d'une telle famille de formes, on applique le principe d'inflation classique 1.4.1 le long de chaque composante C_i de la courbe totale \mathcal{C} . Le principe d'inflation appliqué à C_i nous fournit en effet un réel $\kappa_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et une forme $\varpi_{i,t} = \varpi + t d(f_i(R_i)\alpha_i)$, pour chaque $i \in I$. Les fonctions $f_i : (0, \varepsilon_i) \rightarrow (0, 1)$ sont à supports compacts telles que $f_i|_{\mathcal{O}p(\{0\})} \equiv 1$ et $f_i|_{\mathcal{O}p(\{\varepsilon_i\})} \equiv 0$. Lorsque $[C_i]^2 \geq 0$, $\kappa_i = +\infty$, mais lorsque $[C_i]^2 < 0$, $\kappa_i = -\frac{\mathcal{A}_\omega(C_i)}{[C_i]^2}$. Ainsi, la forme ω_t égale à $\varphi_*(\varpi + t \sum_{i \in I} \lambda_i d(f_i(R_i)\alpha_i))$ sur $\mathcal{O}p(\mathcal{C})$ et ω hors de $\mathcal{O}p(\mathcal{C})$ représente la classe $[\omega] + t \text{PD}(A)$, est symplectique sur M pour $t < \min \left\{ \frac{\mathcal{A}_\omega(C_i)}{|[C_i]^2|} \mid [C_i]^2 < 0 \right\}$. Il reste à voir que cette borne peut-être améliorée jusqu'à

$$t < \min \left\{ \frac{\mathcal{A}_\omega(C_i)}{|A \cdot [C_i]|}, \mid A \cdot [C_i] < 0 \right\}.$$

Pour cela rappelons que lorsque $[C_i]^2 < 0$, la borne précédente sur κ_i correspond à la valeur de t pour laquelle $(\varpi + t\rho_i)(C_i) = 0$. Mais

$$\begin{aligned} [\omega_t][C_i] &= \left[\varpi + t \sum_{i \in I} \lambda_i d(f_i(R_i)\alpha_i) \right] \cdot [C_i] = \mathcal{A}_\omega(C_i) + tA \cdot [C_i] \\ &= \mathcal{A}_\omega(C_i) + t[C_i]^2 + t(A \cdot [C_i] - [C_i]^2), \end{aligned}$$

donc si $|[C_i]^2| > |A \cdot [C_i]|$, pour $t = \kappa_i - \varepsilon$, $\mathcal{A}_\omega(C_i)$, est bornée par en-dessous par $\kappa_i(A \cdot [C_i] - [C_i]^2) \geq 0$, mais toute l'aire est concentrée sur un voisinage des points d'intersections de C_i avec les autres composantes de \mathcal{C} . On peut alors recommencer une inflation de $\kappa_i - \varepsilon$ en changeant la forme α_i pour que toute sa courbure soit concentrée là où est concentrée l'aire symplectique de C_i . On parvient ainsi à poursuivre cette inflation tant que $\mathcal{A}_{\omega_t}(C_i) \neq 0$, c'est-à-dire pour tout $t < \frac{\mathcal{A}_\omega(C_i)}{|A \cdot [C_i]|}$ si $A \cdot [C_i] < 0$ et pour tout t si $A \cdot [C_i] \geq 0$. Enfin, d'après la remarque suivant le théorème 1.4.1, puisque les composantes de \mathcal{C} sont ϖ -orthogonales, la multi-courbe reste symplectique à croisements normaux relativement à $\varpi + t\rho_i$ pour tout $t \in [0, \kappa_i)$.

1.5 Résolution des singularités algébriques

Dans cette partie, on définit les notions d'éclatement et de contraction algébriques ainsi que ce qu'on entend par résolution algébrique d'une singularité et diviseur exceptionnel symplectique lisse à croisement normaux. On détaille aussi les propriétés de ces derniers. [EB86, Wal04]

1.5.1 Eclatement et contraction complexes

L'éclatement complexe en l'origine de (\mathbb{C}^2, J_{st}) est la sous-variété algébrique de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1$ définie par

$$\widehat{\mathbb{C}^2} := \{(z, w, [\alpha : \beta]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1 \mid z\beta = w\alpha\}.$$

On peut donc munir $\widehat{\mathbb{C}^2}$ d'une structure complexe intégrable via la restriction de la structure complexe produit définie sur $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1$. On note cette structure complexe \widehat{J}_{st} . De plus, cet espace est muni de deux projections : $\pi_{\mathbb{C}} : \widehat{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ et $pr : \widehat{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}P^1$. La première projection est l'application d'éclatement de \mathbb{C}^2 en $(0, 0)$ et la seconde munit $\widehat{\mathbb{C}^2}$ d'une structure de fibré en droite complexes au-dessus de $\mathbb{C}P^1$. Plus précisément, il s'agit du fibré en droite tautologique sur $\mathbb{C}P^1$. L'application $\pi_{\mathbb{C}}$ est quant à elle un biholomorphisme de $\widehat{\mathbb{C}^2} \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(0, 0) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et $E := \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(0, 0) \cong \mathbb{C}P^1$ est appelé diviseur exceptionnel associé à l'éclatement. De plus, il existe deux cartes naturelles de $\widehat{\mathbb{C}^2}$, toutes deux induites par les cartes standards de $\mathbb{C}P^1$, à savoir $\{\alpha \neq 0\}$ et $\{\beta \neq 0\}$. Dans ces cartes l'application de l'éclatement est respectivement :

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\mathbb{C}, z} : \widehat{\mathbb{C}^2} \cap \{\alpha \neq 0\} & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (z, w, [1 : \beta]) & \mapsto & (z, z\beta) \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} \pi_{\mathbb{C}, w} : \widehat{\mathbb{C}^2} \cap \{\beta \neq 0\} & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (z, w, [\alpha : 1]) & \mapsto & (w\alpha, w) \end{array}.$$

Dans ces cartes, le diviseur exceptionnel E coïncide respectivement avec la courbe $\{z = 0\}$ et $\{w = 0\}$.

On considère à présent une variété presque complexe (M, J) de dimension 4 avec une carte $\varphi : (B^4(1), 0) \rightarrow (\mathcal{O}p(p), p)$, et on suppose que $\varphi_* J_{st} = J$. On définit la variété

$$\widehat{M}_\varphi := (M \setminus \{p\}, J) \cup_{(\varphi \circ \pi_{\mathbb{C}})^{-1}} (\widehat{B}, \widehat{J}_{st})$$

où l'on identifie $x \in \mathcal{O}p(p) \setminus \{p\}$ avec $(\varphi \circ \pi_{\mathbb{C}})^{-1}(x) \in \widehat{B}(1) \setminus E$. L'hypothèse $\varphi_* J_{st} = J$ garantit que les structures presque complexes J sur $M \setminus \{p\}$ et \widehat{J}_{st} coïncident bien. La variété \widehat{M}_{φ} contient par définition le diviseur exceptionnel E qui est \widehat{J}_{φ} -holomorphe. De plus

$$\begin{aligned} \pi_{\varphi} : \widehat{M}_{\varphi} &\rightarrow M \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \widehat{M}_{\varphi} \setminus E = M \setminus \{p\}, \\ p & \text{si } x \in E, \end{cases} \end{aligned}$$

est lisse, $(\widehat{J}_{\varphi}, J)$ -holomorphe et un difféomorphisme entre $\widehat{M}_{\varphi} \setminus E$ et $M \setminus \{p\}$.

Définition 1.5.1. *L'éclatement complexe de M en p (le long de φ) est le 4-uplet $(\widehat{M}_{\varphi}, \widehat{J}_{\varphi}, E, \pi_{\varphi} : \widehat{M}_{\varphi} \rightarrow M)$.*

Soit à présent une variété complexe $(\tilde{X}, \tilde{J}, E)$ de dimension 4 contenant un diviseur exceptionnel E , c'est-à-dire une sphère \tilde{J} -holomorphe d'auto-intersection -1 . Il existe un biholomorphisme local $\psi : (\mathcal{O}p(E), E) \subset (\tilde{X}, \tilde{J}) \rightarrow (\mathcal{O}p(E), E) \subset (\widehat{\mathbb{C}^2}, \widehat{J}_{st})$. Quitte à diminuer le voisinage $\mathcal{O}p(E)$ de E , on peut supposer que $\pi_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}p(E)) = B^4(\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$. On définit la variété

$$(X_{\psi}, J_{\psi}) := (\tilde{X} \setminus E, \tilde{J}) \underset{\pi_{\mathbb{C}} \circ \psi}{\cup} (B^4(\varepsilon), J_{st})$$

où l'on identifie $x \in \mathcal{O}p(E) \setminus E$ avec $\pi_{\mathbb{C}} \circ \psi(x) \in B^4(\varepsilon) \setminus \{0\}$. A nouveau, l'hypothèse $\psi_* \tilde{J} = \widehat{J}_{st}$ garantit que les structures complexes \tilde{J} sur $\tilde{X} \setminus E$ et J_{st} se recollent par $\pi_{\mathbb{C}} \circ \psi$. L'application

$$\begin{aligned} \pi_{\psi} : \tilde{X} &\rightarrow X_{\psi} \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \tilde{X} \setminus E = X_{\psi} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{si } x \in E, \end{cases} \end{aligned}$$

est alors lisse, (\tilde{J}, J_{ψ}) -holomorphe, et un difféomorphisme entre $\tilde{X} \setminus E$ et $X_{\psi} \setminus \{0\}$.

Définition 1.5.2. *La contraction complexe de $(\tilde{X}, \tilde{J}, E)$ (le long de ψ) est le triplet $(X_{\psi}, J_{\psi}, \pi_{\psi} : \tilde{X} \rightarrow X_{\psi})$.*

Lemme 1.5.3. *Soit (M, J) une variété presque complexe de dimension 4 munie d'une carte $\varphi : (B^4(1), 0) \rightarrow (\mathcal{O}p(p), p)$ telle que $\varphi_* J_{st} = J$. Soit $(\tilde{X} = \widehat{M}_{\varphi}, \tilde{J} = \widehat{J}_{\varphi}, E, \pi_{\varphi} : \widehat{M}_{\varphi} \rightarrow M)$, l'éclatement de M en p . Soit $\psi : (\mathcal{O}p(E), E) \subset (\widehat{M}_{\varphi}, \widehat{J}_{\varphi}) \rightarrow (\mathcal{O}p(E), E) \subset (\widehat{\mathbb{C}^2}, \widehat{J}_{st})$ défini par $\varphi^{-1} \circ \pi_{\varphi} = \pi_{\mathbb{C}} \circ \psi$.*

Alors $((M_{\varphi})_{\psi}, (J_{\varphi})_{\psi}) = (M, J)$ et $\pi_{\psi} = \pi_{\varphi}$.

Démonstration. On rappelle que

$$(\widehat{M}_{\varphi}, \widehat{J}_{\varphi}) = (M \setminus \{p\}, J) \underset{\varphi \circ \pi_{\mathbb{C}}}{\cup} (\widehat{B}(1), \widehat{J}_{st}), \text{ avec } \begin{cases} \pi_{\varphi}|_{M \setminus \{p\}} = id \\ \pi_{\varphi}(E) = p. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} ((M_{\varphi})_{\psi}, (J_{\varphi})_{\psi}) &= (\widehat{M}_{\varphi} \setminus E, \widehat{J}_{\varphi}) \underset{\pi_{\mathbb{C}} \circ \psi}{\cup} (B(1), J_{st}), & \begin{cases} \pi_{\psi}|_{\widehat{M}_{\varphi} \setminus E} = id \\ \pi_{\psi}(E) = 0. \end{cases} \\ &= (M \setminus \{p\}, J) \underset{\pi_{\mathbb{C}} \circ \psi \circ \pi_{\varphi}^{-1}}{\cup} (B(1), J_{st}), & \begin{cases} \pi_{\psi}|_{M \setminus \{p\}} = id \\ \pi_{\psi}(E) = 0. \end{cases} \\ &= (M \setminus \{p\}, J) \underset{\varphi^{-1}}{\cup} (B(1), J_{st}), & \text{car } \pi_{\mathbb{C}} \circ \psi = \varphi^{-1} \circ \pi_{\varphi} \\ &= (M \setminus \{p\}, J) \underset{id}{\cup} (\varphi(B(1)), J), & \begin{cases} \pi_{\psi}|_{M \setminus \{p\}} = id \\ \varphi \circ \pi_{\psi}(E) = \varphi(0) = p. \end{cases} \\ &= (M, J), & \pi_{\psi} = \pi_{\varphi}. \end{aligned}$$

□

Puisque π définit un difféomorphisme entre $\widehat{M} \setminus E$ et $M \setminus \{p\}$, tout élément de $H_k(M, \mathbb{Z})$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, est représentable par un cycle qui ne rencontre pas $p \in M$ et peut donc être relevé à \widehat{M} via π . On définit ainsi $\pi^* : H_k(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(\widehat{M}, \mathbb{Z})$, en particulier pour $k = 2$. De même, toute classe de cohomologie représentée par une k -forme nulle sur un voisinage de $p \in M$ se relève par π . On obtient donc un morphisme $\pi^* : H_{dR}^k(M) \rightarrow H_{dR}^k(\widehat{M})$ pour tout $k \neq 0$. On vérifie que ces morphismes π^* sont injectifs.

On vérifie également que toute classe d'homologie $\hat{\sigma} \in H_2(\widehat{M}, \mathbb{Z})$ s'écrit alors

$$\hat{\sigma} = \pi^* \sigma + a[E], \text{ avec } \sigma \in H_2(M, \mathbb{Z}) \text{ et } a \in \mathbb{Z}$$

(on note alors que $a = -\hat{\sigma} \cdot [E]$). De même, toute classe $\hat{\theta} \in H_{dR}^2(\widehat{M})$ s'écrit

$$\hat{\theta} = \pi^* \theta + ae, \text{ avec } \theta \in H_{dR}^2(M), a \in \mathbb{R} \text{ et } e = \text{PD}([E]),$$

avec $a = -\hat{\theta}([E])$.

Définition 1.5.4. Soit $\pi : (\widehat{M}, \hat{J}) \rightarrow (M, J)$ un éclatement de (M, J) le long d'une carte

$$\varphi : B(1) \rightarrow M$$

centrée en $p \in M$. Soit $C \subset M$ une courbe J -holomorphe. On appelle transformée stricte de C la courbe $\widehat{C} := \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{p\})}$. Il s'agit d'une courbe \hat{J} -holomorphe. Lorsque C passe par p , la pré-image de C est la courbe réductible $\pi^{-1}(C) = \widehat{C} \cup E$.

Proposition 1.5.5. Si $C \subset M$ est une courbe immergée au voisinage de $p \in M$ avec multiplicité m en p , \widehat{C} est une courbe immergée au voisinage de E et vérifie $[\widehat{C}] = \pi^*[C] - mE$.

Si C est irréductible, \widehat{C} l'est aussi.

1.5.2 Éclatements itérés

Définition 1.5.6. Un éclatement itéré d'une variété presque complexe (M, J) est une suite d'éclatements complexes

$$(M, J, p) \xleftarrow{\pi_{1,0}} (\widehat{M}_1, \hat{J}_1, E_1) \xleftarrow{\pi_{2,1}} \dots \xleftarrow{\pi_{K,K-1}} (\widehat{M}_K, \hat{J}_K, \mathcal{T}^K).$$

Si $i > j$ on note $\pi_{i,j} = \pi_{j+1,j} \circ \dots \circ \pi_{i,i-1} : \widehat{M}_i \rightarrow \widehat{M}_j$ et $\pi = \pi_{K,0}$ l'application d'éclatement totale, $\mathcal{T}^K = \pi^{-1}(p)$ l'union des transformées strictes dans \widehat{M}_K des diviseurs exceptionnels E_i associés à l'éclatement $\pi_{i,i-1} : \widehat{M}_i \rightarrow \widehat{M}_{i-1}$ auxquels on adjoint E_K . On l'appelle diviseur exceptionnel de π .

Proposition 1.5.7. Le diviseur exceptionnel singulier \mathcal{T}^K vérifie :

1. \mathcal{T}^K est un ensemble analytique réductible et a K composantes irréductibles que l'on note $(S_i^K)_{i=1}^K = ((\widehat{E}_i)_{i=1}^{K-1}, E_K)$.
2. Les composantes de \mathcal{T}^K sont des $-\ell$ -sphères plongées, $\ell \geq 1$, c'est-à-dire des sphères plongées d'auto-intersections $-\ell$.
3. Deux composantes sont soit disjointes, soit s'intersectent positivement et transversalement en exactement un point. Leurs intersections homologiques sont donc 0 ou 1.

4. Un point $p \in \widehat{\mathbb{C}}^2_K$ est l'intersection d'au plus deux composantes de \mathcal{T}^K .
5. Une composante exceptionnelle de \mathcal{T}^K (c'est-à-dire une composante irréductible d'auto-intersection -1 , aussi appelée -1 -sphère), intersecte au plus deux autres composantes de \mathcal{T}^K .
6. Les -1 -sphères de \mathcal{T}^K sont disjointes.
7. Si on note N_k le nombre de composantes exceptionnelles de \mathcal{T}^k , $k \in \{0, \dots, K\}$, alors la suite $(N_k)_{0 \leq k \leq K}$ vérifie $N_0 = 0$ et $0 \leq N_{k+1} - N_k \leq 1$, pour tout $k \in \{0, \dots, K\}$.

Démonstration. On démontre ces assertions par récurrence sur le nombre k d'éclatements. Elles sont évidemment toutes vérifiées dans les cas $k = 0$ et $k = 1$. Supposons qu'elles sont vérifiées pour \mathcal{T}^k dans le $k^{\text{ème}}$ éclatement.

Le diviseur exceptionnel singulier \mathcal{T}^{k+1} est $\hat{\mathcal{T}}^k \cup E_{k+1}$, où $\hat{\mathcal{T}}^k$ est la transformée stricte de \mathcal{T}^k . Comme la transformée stricte d'une courbe irréductible est irréductible et que la décomposition en courbe irréductible de \mathcal{T}^k est $\mathcal{T}^k = ((\hat{E}_i)_{i=1}^{k-1}, E_k)$ par hypothèse de récurrence, \mathcal{T}^{k+1} est analytique et sa décomposition en composante irréductible est $\mathcal{T}^{k+1} = ((\hat{E}_i)_{i=1}^k, E_{k+1})$, ce qui prouve 1.

De plus, par hypothèse, chaque composante de \mathcal{T}^k est une sphère plongée et la transformée stricte d'une telle composante est une sphère plongée. Comme les S_i^k sont plongées le lemme 1.5.5 donne que la classe de S_i^{k+1} est $[\pi_{k+1}^* S_i^k] - \alpha[E_{k+1}]$. Puisque S_i^{k+1} et E_{k+1} sont holomorphes, leur intersection est positive, donc $\alpha \in \{0, 1\}$. Alors $[S_i^{k+1}]^2 = [S_i^k]^2 - \alpha \leq [S_i^k]^2$, et $[E_{k+1}]^2 = -1$ car c'est une sphère exceptionnelle qui de plus est plongée. Ceci établit le point (2).

Comme le point éclaté via π_{k+1} est sur au plus deux composantes de \mathcal{T}^k , au plus deux composantes de \mathcal{T}^{k+1} intersectent E_{k+1} . Notons aussi que $[S_i^{k+1}]^2 = [S_i^k]^2 - \alpha$ implique que les diviseurs exceptionnels de \mathcal{T}^{k+1} différents de E_{k+1} sont les transformées strictes de diviseurs exceptionnels de \mathcal{T}^k qui ne passent pas par p_{k+1} . L'application π_{k+1}^{-1} définit un biholomorphisme au voisinage de ces composantes et l'hypothèse de récurrence garantit que celle-ci sont également intersectées par au plus deux autres composantes de \mathcal{T}^{k+1} (point (5)). Cette même remarque garantit également que deux diviseurs exceptionnels de \mathcal{T}^{k+1} ne s'intersectent pas (point (6)). De même un point $p \notin E_{k+1}$ est évidemment à l'intersection d'au plus deux composantes de \mathcal{T}^{k+1} , puisque π_{k+1} est un difféomorphisme au voisinage de p , d'autre part, comme les composantes de \mathcal{T}^k s'intersectent transversalement par hypothèse, les courbes S_i^{k+1} , $1 \leq i \leq k$ ne s'intersectent pas le long de E_{k+1} , ainsi les points de E_{k+1} sont donc également sur au plus deux composantes de \mathcal{T}^{k+1} . Le même argument assure que les intersections des composantes de \mathcal{T}^{k+1} sont transverses et positives puisqu'elles proviennent d'intersections de \mathcal{T}^k différentes de p_{k+1} , au voisinage desquelles π_{k+1} est un difféomorphisme et envoie \mathcal{T}^{k+1} sur \mathcal{T}^k , et d'intersection entre S_i^{k+1} et E_{k+1} , $1 \leq i \leq k$. Ces dernières sont transverses et positives car les S_i^k sont plongées et holomorphes.

Les mêmes remarques montrent le point (7) pour \mathcal{T}^{k+1} .

□

Le diviseur exceptionnel $E_i \subset \widehat{M}_i$, n'existe a priori plus comme courbe holomorphe dans \widehat{M}_K . Cependant, sa classe d'homologie se relève successivement par π_j , $j = i+1, \dots, K$. On note encore $[E_i] = [(\pi_{i+1} \circ \dots \circ \pi_K)^* E_i]$ dans $H_2(\widehat{M}, \mathbb{Z})$ et $e_i = \text{PD}([E_i]) = (\pi_{i+1} \circ \dots \circ \pi_K)^* e_i \in$

$H_{dR}^2(\widehat{M}_K)$. On a alors un isomorphisme entre $H_2(\widehat{M}_K, \mathbb{Z})/\langle [E_1], \dots, [E_K] \rangle$ et $H_2(M, \mathbb{Z})$. Autrement dit, toute classe $\hat{\sigma}_K \in H_2(\widehat{M}_K, \mathbb{Z})$ s'écrit

$$\hat{\sigma}_K = \pi^* \sigma - \sum_{i=1}^K a_i [E_i], \text{ avec } \sigma \in H_2(M, \mathbb{Z}) \text{ et } a_i \in \mathbb{Z}.$$

De même, toute classe $\hat{\theta}_K \in H_{dR}^2(\widehat{M}_K)$ s'écrit

$$\hat{\theta}_K = \pi^* \theta + \sum_{i=1}^K a_i e_i, \text{ avec } \theta \in H_{dR}^2(M) \text{ et } a_i \in \mathbb{R}.$$

Dans la suite de la thèse, on note S_i^k les composantes de \mathcal{T}^k , où k désigne le nombre d'éclatements de sorte que $S_k^k = E_k$ et $S_i^{k+1} = \widehat{S}_i^k$. Ainsi, S_i^k représente la transformée stricte de E_i dans \widehat{M}_k (et n'existe que pour $k \geq i$).

1.5.3 Résolution de singularité algébrique

Définition 1.5.8. Une singularité de courbe plane est une paire (\mathcal{S}, C) , où S est un germe de surface analytique complexe et C est un sous-germe de courbe complexe réduite. Deux singularités (\mathcal{S}_1, C_1) et (\mathcal{S}_2, C_2) sont équisingulières s'il existe un germe d'homéomorphisme

$$\varphi : (\mathcal{S}_1, C_1) \rightarrow (\mathcal{S}_2, C_2)$$

qui préserve à la fois les orientations complexes des surfaces et des courbes.

Soit $(\mathcal{S}, C) = ([\{P(z, w) = 0\}], \{P(z, w) = 0\})$ une singularité algébrique plane complexe en l'origine dans \mathbb{C}^2 . Soient $\pi_{\mathbb{C}} : (\mathbb{C}^2, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, \widehat{C} la transformée stricte de C et $C' = \widehat{C} \cup E$ dans $\widehat{\mathbb{C}^2}$. La courbe \widehat{C} a des singularité le long de E que l'on décrit à présent.

On rappelle que $\widehat{\mathbb{C}^2}$ est couvert par deux cartes $\varphi_z, \varphi_w : \mathbb{C}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}^2}$ dans lesquelles $\pi_{\mathbb{C}}$ s'écrit respectivement $\pi_{\mathbb{C}}(z, w) = (z, zw)$ et $\pi_{\mathbb{C}}(z, w) = (wz, w)$.

- Si $\widehat{C} \cap E \subset \text{Im}(\varphi_w)$, en écrivant $P(wz, w) = w^{d_{\max}} \widehat{P}(z, w)$, C' est représentée par $\{w \widehat{P}(z, w) = 0\}$, \widehat{P} non divisible par w . Cette équation est singulière en chaque $(z_i, 0)$ pour laquelle $\widehat{P}(z_i, 0) = 0$ et on définit alors

$$\mathcal{S}' = (\mathcal{S}'_i)_i, \mathcal{S}'_i := [\{w \widehat{P}(z + z_i, w) = 0\}] \quad (1.3)$$

$$\widehat{\mathcal{S}} = (\widehat{\mathcal{S}}_i)_i, \widehat{\mathcal{S}}_i := [\{\widehat{P}(z + z_i, w) = 0\}]. \quad (1.4)$$

Dans ce cas $E = \{w = 0\}$.

- Sinon, C' a toujours éventuellement des singularités dans $\text{Im}(\varphi_w)$, décrite comme ci-dessus, mais elle a en plus une singularité en $(0, 0)$ dans la carte φ_z , donnée de la même façon par

$$\mathcal{S}'_{\infty} = \{z \widehat{Q}(z, w) = 0\}$$

et

$$\widehat{\mathcal{S}}_{\infty} = \{\widehat{Q}(z, w) = 0\}$$

où $P(z, zw)$ est écrit $z^{d_{\max}} \widehat{Q}(z, w)$. Dans ce cas $E = \{z = 0\}$.

Finalement, $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}'_i)$ ou $(\mathcal{S}'_i)_i \cup \mathcal{S}'_\infty$ et $\widehat{\mathcal{S}} = (\widehat{\mathcal{S}}_i)_i$ ou $(\widehat{\mathcal{S}}_i)_i \cup \widehat{\mathcal{S}}_\infty$.

Théorème 1.5.9. *Soit $C := \{P = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ une courbe algébrique singulière en $0 \in \mathbb{C}^2$. Alors il existe une suite d'éclatements complexes*

$$\mathbb{C}^2 \xleftarrow{\pi_{1,0}} \widehat{\mathbb{C}}^2_1 \xleftarrow{\pi_{2,1}} \dots \xleftarrow{\pi_{K,K-1}} \widehat{\mathbb{C}}^2_K$$

telle que, en notant $\pi_{i,j} = \pi_{j+1,j} \circ \dots \circ \pi_{i,i-1} : \widehat{M}_i \rightarrow \widehat{M}_j$, la courbe $\widehat{C}_K := \overline{\pi_{K,0}^{-1}(C \setminus \{0\})}$ est lisse au voisinage de $\mathcal{T}^K := \pi_{K,0}^{-1}(\{0\})$ et \mathcal{T}^K intersecte \widehat{C}_K transversalement et positivement.

La courbe \widehat{C}_K est appelée désingularisation de C par π et le diviseur \mathcal{T}^K est appelé diviseur exceptionnel à croisement normaux associé à l'éclatement itéré π .

On notera que ce théorème ne traite que de la désingularisation en de la courbe en l'origine. Si C présente d'autres singularités en dehors de $0 \in \mathbb{C}^2$, alors celle-ci sont toujours présentes au terme de la désingularisation du germe de la courbe en $0 \in \mathbb{C}^2$.

Chapitre 2

Résolution symplectique des singularités

Dans cette partie on décrit la construction de l'éclatement et de la contraction symplectique d'une variété symplectique (M, ω) et on construit un analogue symplectique à la résolution algébrique d'une singularité décrite dans la partie 1.5.

Définition 2.0.1. *On dit qu'une courbe symplectique $C \subset (M, \omega)$ réalise la singularité \mathcal{S} s'il existe une carte de Darboux dans laquelle un germe de C définit \mathcal{S} .*

Définition 2.0.2 (Suite \mathcal{T}^K -adaptée). *Soit (M, Ω) une variété symplectique. Soit $(a_1, \dots, a_K) \in (\mathbb{R}^{+*})^K$ une suite de réels strictement positifs. Soit $\mathcal{T}^K = (S_i^K)_{i=1}^K \subset M$ un diviseur exceptionnel singulier. On suppose que*

$$\Omega|_{\mathcal{T}^K} = - \sum_{i=1}^K a_i e_i, \quad e_i = \text{PD}(E_i).$$

La suite (a_1, \dots, a_K) est \mathcal{T}^K -adaptée si $\Omega(S_i^K) > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, K\}$.

Remarque 2.0.3. *Si la suite (a_1, \dots, a_K) est \mathcal{T}^K -adaptée, les suites (a_1, \dots, a_i) sont \mathcal{T}^i -adaptées pour tout $i \leq K$.*

Avec cette définition de réalisabilité symplectique d'une singularité, et la notion de suite \mathcal{T}^K -adaptées, on peut décrire un procédé de résolution symplectique des singularités. Précisément :

Proposition 2.0.4. *Soit \mathcal{S} une singularité algébrique. Soient (M, ω, J) une variété symplectique de dimension 4 munie d'une structure presque complexe ω -compatible et C une courbe symplectique qui réalise \mathcal{S} en $p \in M$. Soit $\pi : (\widehat{M}_K, \widehat{J}_K, \mathcal{T}^K) \rightarrow (M, J, p)$ un éclatement complexe itéré de M qui résout \mathcal{S} .*

Pour toute suite \mathcal{T}^K -adaptée $\varepsilon := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K) \ll 1$, il existe une structure $\widehat{\omega}_{K, \varepsilon}$ sur \widehat{M}_K telle que :

1. $\widehat{\omega}_{K, \varepsilon}$ est \widehat{J}_K -compatible.
2. $[\widehat{\omega}_{K, \varepsilon}] = [\pi^* \omega] - \sum_{i=1}^K \varepsilon_i e_i$, où $e_i = \text{PD}(E_i)$.
3. \mathcal{T}^K est un diviseur exceptionnel symplectique à croisement normaux.

4. Il existe une courbe symplectique lisse \tilde{C} homologue à la résolution \widehat{C}_K de C qui intersecte \mathcal{T}^K $\widehat{\omega}_{K,\varepsilon}$ -orthogonalement.

Le but de ce chapitre est de prouver cette proposition.

2.1 Eclatement et contraction symplectiques de \mathbb{C}^2

Avant de traiter le cas d'une variété symplectique quelconque, on discute des formes symplectiques pouvant être construites sur l'éclatement de \mathbb{C}^2 en 0.

Une première construction possible est la suivante. Soit $(\widehat{\mathbb{C}^2}, \widehat{J}_{st}, E, \pi_{\mathbb{C}} : \widehat{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2)$ l'éclatement algébrique de \mathbb{C}^2 . Soit τ_a la forme d'aire sur E telle que $\tau_a(E) = a$. On note

$$pr : \widehat{\mathbb{C}^2} \rightarrow E = \mathbb{C}P^1$$

la projection de $\widehat{\mathbb{C}^2}$ sur E vue comme le fibré en droite tautologique sur $\mathbb{C}P^1$. Soient R une coordonnée radiale sur les fibres provenant d'une structure hermitienne sur le fibré et α une forme de connexion sur le complémentaire de la section nulle de $pr : \widehat{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ donnée par

$$\begin{cases} \alpha|_{\text{Fibre}} &= d\theta, \\ d\alpha &= a^{-1}pr^*\tau_a, \text{ (on rappelle que } [E]^2 = -1\text{)}. \end{cases}$$

Lemme 2.1.1. *La 2-forme $\varpi_a = pr^*\tau_a + d(R\alpha)$ est une forme symplectique sur $\widehat{\mathbb{C}^2}$ et donne aire $\varpi_a(E) = a$ au diviseur exceptionnel E .*

Démonstration. En développant la forme ϖ_a on obtient

$$\varpi_a = (1 + a^{-1}R)pr^*\tau_a + dR \wedge \alpha.$$

Sa restriction à E est donnée par $\varpi_a|_E = \tau_a$, la forme d'aire que l'on s'était fixée et ainsi $\varpi_a(E) = a$.

Enfin, $(\varpi_a)^\wedge{}^2 = 2(1 + a^{-1}R)(pr^*\tau_a) \wedge R \wedge \alpha$, qui est une forme volume sur $\widehat{\mathbb{C}^2}$, donc ϖ_a est non-dégénérée sur $\widehat{\mathbb{C}^2}$ et $d\varpi_a = pr^*d\tau_a + d(d(R\alpha)) = 0$. On en conclut que ϖ_a est bien une forme symplectique sur $\widehat{\mathbb{C}^2}$ avec les propriétés annoncées. □

Une autre manière de construire une forme symplectique sur l'éclatement de $(\mathbb{C}^2, \omega_{st})$ est de transporter la forme standard ω_{st} sur $\widehat{\mathbb{C}^2}$. Pour cela on définit les applications

$$F_{-a} : \mathbb{C}^2 \setminus B(a) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad F_a : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus B(a)$$

$$z \mapsto \frac{z}{\sqrt{|z|^2 - a^2}} \quad \text{et} \quad z \mapsto \frac{z}{\sqrt{|z|^2 + a^2}}$$

inverses l'une de l'autre.

Proposition 2.1.2. *Soit $\pi_a := F_a \circ \pi_{\mathbb{C}}$. Alors $\pi_a^* \omega_{st} = \widehat{\omega}_{st,a}$.*

On peut se référer à [GS89], théorème 5.1 de la partie 5, pour la démonstration.

Définition 2.1.3. *Un plongement monotone de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ dans \mathbb{C}^n est une application*

$$F : z \mapsto f(|z|)z/|z|,$$

où $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est lisse et strictement croissante.

Lemme 2.1.4. *Pour tout plongement monotone $F : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^n$, la 2-forme $F^* \omega_{st}$ est compatible avec la structure complexe standard J_{st} sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.*

Démonstration. On doit montrer qu'il existe une base $v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n$ de l'espace tangent en z tel que $F^* \omega_{st}$ s'annule sur les couple de vecteurs de la forme (v_j, v_k) et (v_j, iv_k) , $k \neq j$ et $F^* \omega_{st}(v_j, iv_j) > 0$. On note $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^{2n-1}$ les coordonnées sphériques sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Dans ces coordonnées, un plongement monotone $F : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^n$ est de la forme

$$F(z) = F(r, \theta) = (f(r), \theta).$$

De plus, puisque la fonction f est strictement croissante, sa dérivée agit sur les vecteurs radiaux en les multipliant par un nombre réel positif. La forme symplectique standard sur \mathbb{C}^n est donnée par $\omega_{st}(v, w) = \langle v, iw \rangle$, $\forall v, w \in \mathbb{C}^n$, ou de manière équivalente par $\langle v, w \rangle = \omega_{st}(v, iw)$.

On choisit une base de $T_{(r, \theta)}((0, +\infty) \times \mathbb{S}^{2n-1})$ donnée par

$$\mathcal{B} := \left(\frac{\partial}{\partial r}, i \frac{\partial}{\partial r}, \xi_1, i\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, i\xi_{n-1} \right),$$

où $\partial/\partial r$ est le vecteur radial et ξ_j sont des vecteurs unitaires de $T_\theta^{\mathbb{C}} \mathbb{S}^{2n-1}$, caractérisés par $\xi_j \in \langle \frac{\partial}{\partial r}, i \frac{\partial}{\partial r} \rangle^\perp \subset T_{(r, \theta)}((0, +\infty) \times \mathbb{S}^{2n-1})$ et $i\xi_j \in T_\theta \mathbb{S}^{2n-1}$ pour $\theta \in \mathbb{S}^{2n-1}$. Alors,

$$F_* \mathcal{B} = \left(f'(r) \frac{\partial}{\partial r}, f(r) J_{st} \frac{\partial}{\partial r}, f(r) \xi_1, f(r) J_{st} \xi_1, \dots, f(r) \xi_{n-1}, f(r) J_{st} \xi_{n-1} \right),$$

et $F^* \omega_{st}(v_j, Jv_k) = \omega_{st}(F_* v_i, JF_* v_k)$ ce qui donne $F^* \omega_{st}(v_1, iv_1) = F^* \omega_{st}(\partial/\partial r, i\partial/\partial r) = \omega_{st}(f'(r)\partial/\partial r, i\partial/\partial r) = f'(r)f(r)\|\partial/\partial r\|^2 > 0$, $F^* \omega_{st}(\partial/\partial r, i\xi_j) = \omega_{st}(f'(r)\partial/\partial r, if(r)\xi_j) = 0$ et $F^* \omega_{st}(x_j, i\xi_k) = \omega_{st}(f(r)\xi_j, if(r)\xi_k) = 0$, pour $k \neq j$. Et donc, $F^* \omega_{st}$ est J_{st} -compatible. \square

La contraction symplectique de $(\widehat{\mathbb{C}^2}, \widehat{\omega}_{st, a})$ consiste en l'opération inverse de l'éclatement symplectique de $(\mathbb{C}^2, \omega_{st})$ le long de la boule $B(a)$. Précisément, on pousse $\widehat{\omega}_{st, a}$ par l'application $F_a \circ \pi_{\mathbb{C}} : (\widehat{\mathbb{C}^2} \setminus E, \widehat{\omega}_{st, a}) \rightarrow (\mathbb{C}^2 \setminus B(a), \omega_{st})$ définie à la proposition 2.1.2. On prolonge ensuite la forme ω_{st} sur tout \mathbb{C}^2 en la recollant avec $\omega_{st|_{B(a)}}$.

2.2 Eclatement symplectique

Soit (M, ω, J) une variété symplectique de dimension 4 munie d'une structure presque complexe ω -compatible. Cette partie est consacrée à la construction d'une forme symplectique sur l'éclatement complexe de (M, J) compatible avec la structure complexe sur l'éclatement. Pour cette partie, et la suite de ce texte, on fixe une fonction $\rho : (a, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ strictement croissante, lisse sur $(a, +\infty)$, telle que :

1. $\rho(t) = t$ pour $t > a + 2\varepsilon/3$, $\varepsilon > 0$ petit.

2. $\rho(t) = \sqrt{t^2 - a^2}$, pour $t \in (a, a + \varepsilon/3)$.

On définit alors

$$F : \begin{array}{ccc} B(a + \varepsilon) \setminus B(a) & \rightarrow & B(a + \varepsilon) \setminus \{0\} \\ z & \mapsto & \rho(|z|) \frac{z}{|z|}, \end{array}$$

et $G = F \circ F_a$. Ainsi, G , F et F_a (définie page 36) sont des plongements monotones au sens de la définition 2.1.3, et

$$\begin{array}{ccc} F_a : & B(\varepsilon) \setminus \{0\} & \rightarrow B(a + \varepsilon) \setminus B(a) \\ F : & B(a + \varepsilon) \setminus B(a) & \rightarrow B(a + \varepsilon) \setminus \{0\} \\ G : & B(\varepsilon) \setminus \{0\} & \rightarrow B(a + \varepsilon) \setminus \{0\}. \end{array}$$

Lemme 2.2.1. *Soit (M, ω, J) une variété symplectique de dimension 4 munie d'une structure presque complexe ω -compatible. On suppose que pour $a > 0$ et $\varepsilon > 0$ on a un plongement $\varphi : (B(a + \varepsilon), \omega_{st}, J_{st}) \rightarrow (M, \omega, J)$ tel que $\varphi_* J_{st} = J$. Soit $(\widehat{M}_\varphi, \widehat{J}_\varphi, E, \pi : \widehat{M}_\varphi \rightarrow M)$, l'éclatement complexe de M associé à φ .*

Alors il existe une forme symplectique $\widehat{\omega}_\varphi$ sur \widehat{M}_φ telle que :

1. $\widehat{\omega}_\varphi$ est \widehat{J}_φ -compatible.
2. $\widehat{\omega}_\varphi|_{\widehat{B}(a + \varepsilon/3)} = \widehat{\omega}_{st, a}$
3. Il existe un difféomorphisme symplectique $\pi_{\varphi, a} : (\widehat{M}_\varphi \setminus E, \widehat{\omega}_\varphi) \rightarrow (M \setminus \varphi(B(a)), \omega)$.
4. $\widehat{\omega}_\varphi$ représente la classe de cohomologie $[\widehat{\omega}_\varphi] = [\pi_\varphi^* \omega] - a \text{PD}(E)$.

Démonstration. Définissons l'application $\tilde{F} : M \setminus \varphi(B(a)) \rightarrow M \setminus \{p\}$ par

$$\tilde{F} = \begin{cases} id \text{ sur } M \setminus \varphi(B(a + 2\varepsilon/3)), \\ \varphi_* F \text{ sur } \varphi(B(a + \varepsilon)) \setminus \varphi(B(a)). \end{cases}$$

et $\hat{G} : \widehat{B}(\varepsilon) \setminus E \rightarrow \widehat{B}(a + \varepsilon) \setminus E$ définie par $\pi_\mathbb{C} \circ \hat{G} = G \circ \pi_\mathbb{C}$.

On rappelle que

$$\begin{aligned} (\widehat{M}_\varphi, \widehat{J}_\varphi) &= (M \setminus \varphi(0), J) \underset{(\varphi \circ \pi_\mathbb{C})^{-1}}{\cup} (\widehat{B}(a + \varepsilon), \widehat{J}_{st}) \\ &= (M \setminus \varphi(B(a)), \tilde{F}^* J) \underset{(\varphi \circ \pi_\mathbb{C})^{-1} \circ \tilde{F}}{\cup} (\widehat{B}(a + \varepsilon), \widehat{J}_{st}) \\ &= (M \setminus \varphi(B(a)), \tilde{F}^* J) \underset{\pi_\mathbb{C}^{-1} \circ F \circ \varphi^{-1}}{\cup} (\widehat{B}(a + \varepsilon), \widehat{J}_{st}) \\ &= (M \setminus \varphi(B(a)), \tilde{F}^* J) \underset{\pi_\mathbb{C}^{-1} \circ G \circ F_a \circ \varphi^{-1}}{\cup} (\widehat{B}(a + \varepsilon), \widehat{J}_{st}) \\ &= (M \setminus \varphi(B(a)), \tilde{F}^* J) \underset{\hat{G} \circ \pi_\mathbb{C}^{-1} \circ F_a \circ \varphi^{-1}}{\cup} (\widehat{B}(a + \varepsilon), \widehat{J}_{st}) \\ &= (M \setminus \varphi(B(a)), \tilde{F}^* J) \underset{\pi_\mathbb{C}^{-1} \circ F_a \circ \varphi^{-1}}{\cup} (\widehat{B}(\varepsilon), \widehat{G}^* \widehat{J}_{st}) \end{aligned}$$

On pose alors

$$(\widehat{M}_\varphi, \widehat{J}_\varphi, \widehat{\omega}_\varphi) := (M \setminus \varphi(B(a)), \tilde{F}^* J, \omega) \underset{\pi_\mathbb{C}^{-1} \circ F_a \circ \varphi^{-1}}{\cup} (\widehat{B}(\varepsilon), \widehat{G}^* \widehat{J}_{st}, \widehat{\omega}_{st, a}).$$

La 2-forme $\widehat{\omega}_\varphi$ est bien définie car $(\pi_\mathbb{C} \circ F_a \circ \varphi^{-1})^* \widehat{\omega}_{st, a} = \varphi_* \omega_{st} = \omega$, est évidemment symplectique et $\widehat{\omega}_\varphi$ et \widehat{J}_{st} sont compatibles car :

— sur $M \setminus \varphi(B(a + \varepsilon))$, $\tilde{F} = id$ donc $(\widehat{J}_\varphi, \widehat{\omega}_\varphi) = (J, \omega)$,

- sur $\varphi(B(a + \varepsilon) \setminus B(a))$, $(\omega, J) = (\varphi_* \omega_{st}, \varphi_* F^* J_{st})$, et puisque F est monotone, ω_{st} et $F^* J_{st}$ sont compatibles,
- sur $\widehat{B}(\varepsilon)$, G étant monotone, $\widehat{\omega}_{st,a}$ et $\widehat{G}^* \widehat{J}_{st}$ sont compatibles.

On définit finalement $\pi_{\varphi,a} = i_1^{-1} : \widehat{M} \setminus E \rightarrow M \setminus \varphi(B(a))$ où $i_1 : M \setminus \varphi(B(a)) \rightarrow \widehat{M}_\varphi$ est l'injection naturelle dans la présentation ci-dessus.

Enfin, on sait que $[\widehat{\omega}_\varphi] = \pi^*[\omega] + \beta e$, pour $\beta \in \mathbb{R}$ et $e = \text{PD}(E)$. Or, puisque $\widehat{\omega}_\varphi(E) = \widehat{\omega}_{st,a}(E) = a$ et $\widehat{\omega}_\varphi(E) = -\beta$, on conclut que $\beta = -a$, ce qui montre le point 4. \square

Définition 2.2.2. Soit (M, ω, J) une variété symplectique. L'éclatement symplectique de (M, ω) le long d'un plongement $\varphi : (B(a + \varepsilon), \omega_{st}) \rightarrow (M, \omega)$, $a > 0$, $\varepsilon > 0$, est

$$(\widehat{M}_\varphi, \omega_\varphi, \widehat{J}_\varphi, E, \pi_{\varphi,a} : (\widehat{M}_\varphi \setminus E, \omega_\varphi) \rightarrow (M \setminus \varphi(B(a)), \omega)).$$

Corollaire 2.2.3. Si une courbe J -holomorphe $\Sigma \subset (M, \omega)$ intersecte $\varphi(B(a + \varepsilon))$ le long d'un disque de Hopf alors $\widehat{\Sigma}$ intersecte E $\widehat{\omega}_\varphi$ -orthogonalement en un point et $\widehat{\omega}_\varphi(\widehat{\Sigma}) = \omega(\Sigma) - a$.

Démonstration. Quitte à perturber Σ dans $\varphi(B(a + \varepsilon))$, on peut supposer que $\varphi^{-1}(\Sigma)$ coïncide avec une droite vectorielle complexe dans $B(a + \varepsilon/3)$. On rappelle que

$$(\widehat{M}_\varphi, \widehat{\omega}_\varphi) = (M \setminus \varphi(B(a + \varepsilon)), \omega) \bigcup_{\pi_{\mathbb{C}}^{-1} \circ F_{-a} \circ \varphi^{-1}} (\widehat{B}(\varepsilon), \widehat{\omega}_{st,a}).$$

Puisque $F_{-a} : B(a + \varepsilon/3) \setminus B(a) \rightarrow B(\varepsilon/3) \setminus \{0\}$ est une application radiale, l'image de $\varphi^{-1}(\Sigma)$ coïncide avec une droite vectorielle de $B(\varepsilon/3)$ et donc $\pi_{\mathbb{C}}^{-1} \circ F_{-a} \circ \varphi^{-1}(\Sigma)$ coïncide avec une fibre dans $\widehat{B}(\varepsilon/3)$ et donc est $\widehat{\omega}_{st,a}$ -orthogonale à $E \subset \widehat{B}(\varepsilon/3)$. Puisque Σ est J -holomorphe au voisinage de $\varphi(B(a + \varepsilon))$, $\widehat{\Sigma}$ est \widehat{J}_{st} -holomorphe au voisinage de E et donc symplectique dans ce voisinage. Enfin, puisque $\pi_{\varphi,a}$ est un difféomorphisme symplectique entre $\widehat{M}_\varphi \setminus E$ et $M \setminus B(a)$, la courbe $\widehat{\Sigma}$ est symplectique dans tout \widehat{M}_φ .

Enfin, $[\widehat{\Sigma}] = \pi^*[\Sigma] + \beta[E]$, et comme $\widehat{\Sigma}$ intersecte E un seul point,

$$[\widehat{\Sigma}] \cdot [E] = (\pi^*[\Sigma] + \beta[E]) \cdot [E] = -\beta = 1.$$

Donc $[\widehat{\Sigma}] = \pi^*[\Sigma] - [E]$ et

$$\widehat{\omega}_\varphi(\widehat{\Sigma}) = (\pi^*[\omega] - a \text{PD}(E)) \cdot (\pi^*[\Sigma] - [E]) = \pi^*[\omega](\pi^*[\Sigma]) + a \text{PD}(E)[E] = \omega(\Sigma) - a.$$

\square

Corollaire 2.2.4. Soit ω une forme symplectique J_{st} -compatible sur $B(1) \subset \mathbb{C}^2$ telle que $\omega_{(0,0)} = \omega_{st}$. Soit $C \subset B(1)$ une courbe analytique avec équation locale $P(z, w) = 0$ au voisinage de l'origine, où P est une fonction holomorphe ou polynomiale avec un point critique isolé à l'origine définie sur $B(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ petit. Alors, il existe une carte de Darboux $\varphi : (B(3\varepsilon), \omega_{st}) \hookrightarrow (B(1), \omega)$ centrée en l'origine et une courbe ω_{st} -symplectique $\tilde{C} \subset B(3\varepsilon)$ telles que :

$$\begin{aligned} \tilde{C} \cap B(3\varepsilon) \setminus B(2\varepsilon) &= \varphi^* C, \\ \tilde{C} \cap B(\varepsilon) &= \{P \circ A(z, w) = 0\}, \quad A \in GL_2(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

En particulier, \tilde{C} est une courbe symplectique avec la singularité \mathcal{S} en l'origine.

De plus,

1. Si $P = wQ$, on peut imposer que $\tilde{C} = \{w = 0\} \cup \tilde{C}_Q$,
2. Si $P = zwQ$ et si les droites $\{w = 0\}$ et $\{z = 0\}$ sont $\omega_{(0,0)}$ -orthogonales, on peut imposer que $\tilde{C} = \{zw = 0\} \cup \tilde{C}_Q$.

Démonstration. Dans des cartes holomorphes, C a pour équation $P(z, w) = 0$ qui est une équation définissant \mathcal{S} , et ω reste J_{st} -compatible, on peut donc supposer que $C = \{P(z, w) = 0\}$ au voisinage de l'origine. Comme ω est J_{st} -compatible, il existe une transformation linéaire complexe A qui envoie $(e_1, J_{st}e_1, e_2, J_{st}e_2)$ sur une base symplectique de $\omega_{(0,0)}$, on peut alors supposer sans perte de généralité que $\omega_{(0,0)} = \omega_{st}$ quitte à modifier l'équation $P = 0$ en $P \circ A = 0$, qui est une autre équation algébrique pour \mathcal{S} . Ainsi, il existe un plongement symplectique $\varphi : (B(\delta), \omega_{st}) \hookrightarrow (B(1), \omega)$ avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = Id$. Le corollaire 1.3.8 nous fournit une courbe $\Sigma \subset B(2\varepsilon) \setminus B(\varepsilon)$ telle que Σ coïncide avec φ^*C sur $\mathcal{O}p(\partial B(2\varepsilon))$ et avec $\{P \circ A(z, w) = 0\}$ sur $\mathcal{O}p(\partial B(\varepsilon))$. Alors, la courbe

$$\tilde{C} := (\varphi^*C \setminus B(2\varepsilon)) \cup \Sigma \cup (\{P(z, w) = 0\} \cap B(\varepsilon))$$

satisfait les propriétés annoncées. □

Lemme 2.2.5. *Soit (M, ω, J) une variété symplectique munie d'une structure presque complexe ω -compatible. Soit $C \subset M$ une courbe symplectique qui réalise une singularité algébrique \mathcal{S} en $p \in M$. Soit $\varphi : (B, \omega_{st}) \hookrightarrow (M, \omega)$ telle que $\varphi^*C = \mathcal{S}$. On suppose que $\varphi_*J_{st} = J$ et on considère l'éclatement $(\widehat{M}_\varphi, \widehat{\omega}_\varphi, \widehat{J}_\varphi, E)$. Alors*

- $\widehat{\mathcal{S}}$ est réalisable par une courbe $C' \subset \widehat{M}_\varphi$ $\widehat{\omega}_\varphi$ -symplectique dans la classe de $[\widehat{C}]$.
- De plus, $C' \cup E$ réalise la singularité \mathcal{S}' (voir 1.3).

Démonstration. Soit $(\widehat{M}_\varphi, \widehat{\omega}_\varphi, J_\varphi, E)$ l'éclatement symplectique de (M, ω, J) le long de φ . Soit \widehat{C} la transformée stricte de C . Cette courbe est une courbe \widehat{J}_φ -holomorphe dans $(\widehat{M}_\varphi, \widehat{\omega}_\varphi, \widehat{J}_\varphi)$ présentant des singularités en des points distincts $p_i \in E \subset \widehat{M}_\varphi$, $i = 1, \dots, n$. Nous avons déjà souligné que \widehat{J}_φ est intégrable au voisinage de E . Il existe donc des cartes $\psi_i : (B(\varepsilon_i), J_{st}) \hookrightarrow (\widehat{M}_\varphi, \widehat{J}_\varphi)$, centrées en les p_i . En posant $\omega_i := \psi_i^* \widehat{\omega}_\varphi$, on obtient alors des formes symplectiques J_{st} -compatibles. On note $\widehat{C}_i = \psi_i(B(\varepsilon_i)) \cap \widehat{C}$ et $\Sigma_i = \psi_i(B(\varepsilon_i)) \cap (\widehat{C} \cup E)$. D'après le lemme 2.2.4, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe ε_0 , $\varphi_i : (B(3\varepsilon_0), \omega_{st}) \hookrightarrow (B(\varepsilon_i), \omega_i)$, chacune centrée en l'origine, et des courbes symplectiques $\tilde{\Sigma}_i \subset B(3\varepsilon_0)$ telles que $\tilde{\Sigma}_i \cap B(3\varepsilon_0) \setminus B(2\varepsilon_0) = \varphi_i^* \psi_i^* \Sigma_i$ et $\tilde{\Sigma}_i \cap B(\varepsilon_0)$ réalise la singularité $[\{w \cdot P_i(z, w) = 0\}]$ où P_i représente la i -ème composante de $\widehat{\mathcal{S}}$ et $w = 0$ représente E dans la carte. On note \tilde{C}_i les perturbations des courbes \widehat{C}_i obtenues en coupant \widehat{C}_i dans $Im(\psi_i)$ et en la remplaçant par $\psi_i \circ \varphi_i(\tilde{\Sigma}_i) \setminus E$, puis

$$C' = (C \setminus \bigsqcup_{i=1}^n \psi_i \circ \varphi_i(B(3\varepsilon_0))) \cup \bigsqcup_{\sqcup \partial \psi_i(\tilde{C}_i)} \left(\bigsqcup_{i=1}^n \psi_i(\tilde{C}_i) \right)$$

Cette courbe coïncide avec \widehat{C} sur $(\bigsqcup_{i=1}^n \psi_i \circ \varphi_i(B(3\varepsilon_0)))^c$, réalise la multi-singularité $\widehat{\mathcal{S}}$ (puisque les $\psi_i \circ \varphi_i$ sont symplectiques) et $C' \cup E$ réalise la multi-singularité \mathcal{S}' . □

Remarque 2.2.6. *La carte de Darboux φ construite dans 2.2.5 dans laquelle $C' \cup E$ a une équation qui définit la singularité \mathcal{S}' qui envoie E sur le disque $\{w = 0\}$.*

Définition 2.2.7. Soit M une variété de dimension paire et soient ω et ω' deux formes symplectiques sur M . Les formes ω et ω' sont équivalentes par déformation s'il existe une famille à 1-paramètre de formes symplectiques ω_t , $t \in [0, 1]$, telle que $\omega_0 = \omega$ et $\omega_1 = \omega'$.

Lemme 2.2.8. Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4. Alors toutes les formes symplectiques sur l'éclatement \widehat{M} obtenues par éclatement symplectique de (M, ω) sont équivalentes par déformation.

Démonstration. Soient $\varphi : B(a) \hookrightarrow (M, \omega)$ et $\varphi' : B(a') \hookrightarrow (M, \omega)$ des plongements symplectiques de boules et soient $\widehat{\omega}_a$ et $\widehat{\omega}'_{a'}$ les formes symplectiques sur \widehat{M} obtenues en éclatant M le long de φ et φ' respectivement. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\varphi|_{B(\varepsilon)}$ et $\varphi'|_{B(\varepsilon)}$ sont isotopes symplectiquement. En éclatant M le long de $\varphi_t := \varphi|_{B(t)}$, $t \in [\varepsilon, a]$, on construit une famille lisse de formes symplectiques $\widehat{\omega}_t$ joignant $\widehat{\omega}_\varepsilon$ à $\widehat{\omega}_a$. On fait de même en éclatant le long de $\varphi'_t := \varphi'|_{B(t)}$, $t \in [\varepsilon, a']$ pour obtenir une famille lisse de formes symplectiques $\widehat{\omega}'_t$ joignant $\widehat{\omega}'_\varepsilon$ à $\widehat{\omega}'_{a'}$. Enfin, puisque $\varphi|_{B(\varepsilon)}$ et $\varphi'|_{B(\varepsilon)}$ sont isotopes symplectiquement, il existe une isotopie entre les formes $\widehat{\omega}_\varepsilon$ et $\widehat{\omega}'_\varepsilon$.

On obtient la déformation recherchée en concaténant ces trois chemins de formes symplectiques. □

Lemme 2.2.9. Soit (M, ω) une variété symplectique, ω' une forme symplectique sur M déformation équivalente à ω . Soient $\widehat{\omega}$ et $\widehat{\omega}'$ des formes symplectiques sur \widehat{M} obtenues par éclatement symplectiques. Alors $\widehat{\omega}$ et $\widehat{\omega}'$ sont équivalentes par déformation.

Démonstration. On a vu que les formes symplectiques sur \widehat{M} obtenues par éclatement de (M, ω) (ou de (M, ω')) sont équivalentes par déformation. Il suffit donc de montrer qu'il existe deux formes obtenues par éclatement de (M, ω) et de (M, ω') équivalentes par déformation. Pour cela, fixons un chemin ω_t de formes symplectiques sur M entre ω et ω' (puisque ω et ω' sont supposées déformation équivalentes). Une version paramétrique du lemme de Darboux donne un chemin $\psi_t : (B(\varepsilon), \omega_{st}) \hookrightarrow (M, \omega_t)$. L'éclatement de (M, ω_t) le long de ψ_t donne une famille à 1-paramètre de formes $\widehat{\omega}_t$ qui interpole entre l'éclatement de (M, ω) le long de ψ_0 et de (M, ω') le long de ψ_1 . □

Corollaire 2.2.10. Toutes les formes symplectiques contruites sur un éclatement itéré de (M, ω) sont équivalentes par déformation.

Démonstration. On raisonne sur le nombre k d'éclatements de (M, ω) . Initialisation : Le cas $k = 1$ est une application directe du lemme 2.2.8.

Hérédité : Soit $k \geq 1$. Soit \widehat{M}_k un éclatement itéré de (M, ω) et soient $\widehat{\omega}_k$ et $\widehat{\omega}'_k$ deux formes équivalentes par une déformation $\widehat{\omega}_{k,t}$ sur \widehat{M}_k . Alors, d'après le lemme 2.2.9, il existe une déformation symplectique entre $\widehat{\omega}_k$ et $\widehat{\omega}'_k$. □

2.3 Démonstration de la proposition 2.0.4

On démontre ici la proposition 2.0.4 par récurrence sur le nombre d'éclatements. Pour être le plus précis possible, on rappelle d'abord les notations d'un éclatement itéré. Soit (M, J) une variété presque complexe, soit $(\widehat{M}_K, \widehat{J}_K, \mathcal{T}^K)$ un éclatement itéré de (M, J) . On note $\pi_{i,i-1} : (\widehat{M}_i, \widehat{J}_i, E_i) \rightarrow (\widehat{M}_{i-1}, \widehat{J}_{i-1}, p_i)$ les éclatements intermédiaire et $\pi_{i,j} : (\widehat{M}_i, \widehat{J}_i, \mathcal{T}^i) \rightarrow (\widehat{M}_j, \widehat{J}_j, \mathcal{T}^j)$ la composé $\pi_{i,j} = \pi_{j+1,j} \circ \dots \circ \pi_{i,i-1}$. Enfin, on énonce la propriété de récurrence :

Proposition 2.3.1. *Soit \mathcal{S} une singularité algébrique complexe plane en l'origine $0 \in \mathbb{C}^2$. Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4 et soit $C \in M$ une courbe symplectique réalisant la singularité \mathcal{S} en $p \in M$. Soit $(\pi_{i,i-1} : (\widehat{M}_i, \widehat{J}_{i-1}, E_i) \rightarrow (\widehat{M}_{i-1}, \widehat{J}_{i-1}, p_i))_{1 \leq i \leq K}$ une suite d'éclatements de (M, p) associée à la résolution de \mathcal{S} . Alors, pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, il existe une suite $\underline{\varepsilon}^k = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \ll 1$ et une forme symplectique $\widehat{\omega}_k$ sur \widehat{M}_k telle que :*

1. $[\widehat{\omega}_k] = [\pi_{k,0}^* \omega] - \sum_{i=1}^k \varepsilon_i e_i$, $e_i = \text{PD}(E_i)$.
2. \mathcal{T}^k est un diviseur exceptionnel symplectique lisse à croisements $\widehat{\omega}_k$ -orthogonaux.
3. Il existe une courbe \widetilde{C}_k homologue à la transformée stricte de C via $\pi_{k,0}$, réalisant la multi-singularité $\widehat{\mathcal{S}}_k = \pi_{k,0}^* \mathcal{S}$ et telle que $\widetilde{C}_k \cup \mathcal{T}^k$ réalise la multi-singularité \mathcal{S}'_k qui est une collection de singularités du type $[\{RP = 0\}]$ où $R = w$ ou zw et $\{R = 0\}$ correspond à \mathcal{T}^k et $\{P = 0\}$ à $\widehat{\mathcal{S}}_k$.

Démonstration. Initialisation : On suppose que C réalise \mathcal{S} en $p_1 \in M$. Soit $\varphi_1 : (B(\varepsilon_1), \omega_{st}) \hookrightarrow (M, \omega)$ une carte centrée en p_1 telle que $\varphi_1^* C = \mathcal{S}$. On définit une structure presque complexe ω -compatible J_0 sur (M, ω) en étendant $\varphi_1^* J_{st}$ à M .

Soit $(\widehat{M}_1, \widehat{J}_0, E_1, \pi_{1,0})$ l'éclatement de (M, J_0) le long de φ_1 . Le lemme 2.2.1 nous fournit une forme symplectique $\widehat{\omega}_1$ dans la classe $[\widehat{\omega}_{1,\varepsilon_0}] = [\pi_{1,0}^* \omega] - \varepsilon_1 e_1$ et une courbe symplectique singulière \widehat{C}_1 dont les singularités sont le long de E_1 . D'après le lemme 2.2.5, il existe une courbe symplectique \widetilde{C}_1 dans la classe $[\widetilde{C}_1]$ qui réalise la multi-singularité $\widehat{\mathcal{S}}$ (notée ici $\widehat{\mathcal{S}}_1$), on note chaque composante de cette multi-singularité $\mathcal{S}_{1,i} = [\{Q_i(z, w) = 0\}]$, $i = 1, \dots, n_1$, telle que Q_i ne soit pas divisible par w et telle que $\widetilde{C}_1 \cup E_1$ réalise la multi-singularité $\mathcal{S}'_1 = ([\{wQ_i(z, w) = 0\}]_{i=1}^{n_1})$. On a ainsi initialisé la récurrence.

On décrit encore l'étape 2 de la récurrence. Soit p_2 un point de $E_1 \cap \widetilde{C}_1$ et soit $\varphi_2 : (B(\varepsilon_2), \omega_{st}) \hookrightarrow (\widehat{M}_1, \widehat{\omega}_{1,\varepsilon_1})$ une carte telle que $\varphi_2^*(C_1 \cup E) = \{wP(z, w) = 0\}$ et soit J_1 une structure presque complexe définie comme l'extension de $\varphi_{2*} J_{st}$ à \widehat{M}_1 de sorte qu'elle soit $\widehat{\omega}_1$ -compatible. Soit $(\widehat{M}_2, \widehat{J}_1, E_2, \pi_{2,1})$ l'éclatement de (\widehat{M}_1, J_1) . Le lemme 2.2.1 nous fournit une forme symplectique $\widehat{\omega}_2$ dans la classe

$$[\widehat{\omega}_2] = [\pi_{2,1}^* \widehat{\omega}_1] - \varepsilon_2 e_2 = [\pi_{2,0}^* \omega] - \varepsilon_1 e_1 - \varepsilon_2 e_2$$

et nous fournit une courbe symplectique $(\widetilde{C}_1 \cup E_1) = \widehat{C}_1 \cup \widehat{E}_1$. D'après le corollaire 2.2.3, puisque E_1 correspond à $\{w = 0\}$ dans le modèle local, le diviseur exceptionnel E_1 intersecte la boule $\varphi_2(B(\varepsilon_2))$ le long d'un disque de Hopf, et donc \widehat{E}_1 intersecte le diviseur E_2 $\widehat{\omega}_2$ -orthogonalement. La composante \widehat{C}_1 est une courbe singulière dont les singularités sont le long de $\widehat{E}_1 \cup E_2 = \mathcal{T}^2$. De plus, comme précédemment, d'après le lemme 2.2.5, il existe une courbe \widetilde{C}_2 dans la classe $[\widetilde{C}_2]$, où \widetilde{C}_2 désigne la transformée stricte de C via $\pi_{2,0}$, qui réalise la multi-singularité $\widehat{\mathcal{S}}_2 = [\{Q'_i(z, w) = 0\}]$, et telle que $\widetilde{C}_2 \cup \mathcal{T}^2$ représente la multi-singularité \mathcal{S}'_2 qui est une

collection de singularité de la forme $\{RQ'_i(z, w) = 0\}$ où R ne divise pas Q'_i , est soit de la forme w , soit de la forme zw et correspond à \mathcal{T}^2 dans le modèle local.

Hérédité : Soit $k \in \{1, \dots, K\}$. Soit $(\widehat{M}_k, \widehat{\omega}_k)$ une variété symplectique obtenue après k éclatements de (M, ω, p_1) obtenue en itérant le procédé décrit précédemment. On note \mathcal{T}^k le diviseur exceptionnel singulier symplectique associé. On suppose que $\widehat{\omega}_k$ vérifie les propriétés de 2.3.1. On suppose de plus qu'on a une courbe \widetilde{C}_k dans la classe $[\widehat{C}_k]$ réalisant la singularité $\widehat{S}_k = \pi_{k,0}^* \mathcal{S}$ le long de \mathcal{T}^k et telle que $\widetilde{C}_k \cup \mathcal{T}^k$ représente la multi-singularité S'_k comme décrite dans l'énoncé de 2.3.1. Soit $p_{k+1} \in \widetilde{C}_k \cup \mathcal{T}^k$ en lequel \widetilde{C}_k présente une singularité algébrique. Soit $\varphi_{k+1} : (B(\varepsilon_{k+1}), \omega_{st}) \hookrightarrow (\widehat{M}_k, \widehat{\omega}_k)$, une carte centrée en p_{k+1} de sorte que $\varphi_{k+1}^*(\widetilde{C}_k \cup \mathcal{T}^k) = \{RP(z, w) = 0\}$, où R ne divise pas P et $\{R = 0\}$ correspond à \mathcal{T}^k . D'après l'hypothèse de récurrence, deux cas peuvent se présenter suivant R :

1. soit de la forme $R = w$, dans ce cas l'intersection $\mathcal{T}^k \cap \varphi_{k+1}(B(\varepsilon_{k+1}))$ est un disque de Hopf,
2. soit de la forme $R = zw$, dans ce cas l'intersection $\mathcal{T}^k \cap \varphi_{k+1}(B(\varepsilon_{k+1}))$ est une réunion de deux disques de Hopf.

On définit une structure presque complexe J_k en étendant la structure $\varphi_{k+1*} J_{st}$ de sorte qu'elle soit $\widehat{\omega}_k$ -compatible. Soit $(\widehat{M}_{k+1}, \widehat{J}_k, E_{k+1}, \pi_{k+1,k})$ l'éclatement de (\widehat{M}_k, J_k) le long de φ_{k+1} . La proposition 2.2.1 nous fournit une forme symplectique $\widehat{\omega}_{k+1}$ dans la classe

$$[\widehat{\omega}_{k+1}] = [\pi_{k+1,k}^* \widehat{\omega}_k] - \varepsilon_{k+1} e_{k+1} = [\pi_{k+1,k}^* \pi_{k,0}^* \omega] - \sum_{i=1}^k \varepsilon_i e_i - \varepsilon_{k+1} e_{k+1} = [\pi_{k+1,0}^* \omega] - \sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_i e_i.$$

Cela nous fournit aussi une courbe symplectique singulière $(\widehat{\widetilde{C}_k} \cup \widehat{\mathcal{T}^k}) = \widehat{\widetilde{C}_k} \cup \widehat{\mathcal{T}^k}$. Comme le modèle local au voisinage de p_{k+1} est de la forme $\{RP(z, w) = 0\}$, $R = w$ ou zw , $\mathcal{T}^k \cap \varphi_{k+1}(B(\varepsilon_{k+1}))$ est la réunion d'au plus deux disques de Hopf. Donc, d'après le lemme 2.2.3, $\widehat{\mathcal{T}^k}$ intersecte E_{k+1} $\widehat{\omega}_{k+1}$ -orthogonalement. Enfin, comme \widetilde{C}_k est dans la classe $[\widehat{C}_k]$, la composante $\widehat{\widetilde{C}_k}$ représente la classe $[\widehat{C}_{k+1}]$ qui est la transformée stricte de C via $\pi_{k+1,0}$. De plus, cette courbe est singulière le long de $\widehat{\mathcal{T}^k} \cup E_{k+1} = \mathcal{T}^{k+1}$. D'après le lemme 2.2.5, il existe une courbe symplectique \widetilde{C}_{k+1} homologue à \widehat{C}_{k+1} réalisant la multi-singularité $\widehat{S}_{k+1} = \pi_{k+1,0}^* \mathcal{S}$. Précisément, les singularités de $\widetilde{C}_{k+1} \setminus E_{k+1}$ et de $(\widetilde{C}_{k+1} \cup \widehat{\mathcal{T}^k}) \setminus E_{k+1}$ ont le même modèle que celle de $\widetilde{C}_k \setminus \varphi_{k+1}(B(\varepsilon_{k+1}))$ et celle de $(\widetilde{C}_k \cup \mathcal{T}^k) \setminus \varphi_{k+1}(B(\varepsilon_{k+1}))$. Pour finir, les singularités de \widetilde{C}_{k+1} le long de E_{k+1} sont données dans des modèles locaux par $\{\{Q(z, w) = 0\}\}$, où Q est non divisible par w ou zw et les singularités de $\widetilde{C}_{k+1} \cup \mathcal{T}^{k+1}$ sont données localement par $\{\{RQ(z, w) = 0\}\}$ où $\{R = 0\}$ correspond à \mathcal{T}^{k+1} et $R = w$ ou $R = zw$.

□

Il est clair que cette proposition permet de prouver la proposition 2.0.4 par une récurrence immédiate.

2.4 Eclatement symplectique itéré

Dans cette partie on se concentre sur la définition des éclatements symplectiques itérés indépendamment de l'existence d'une singularité algébrique à résoudre. En oubliant la singularité \mathcal{S} dans l'énoncé précédent, on a démontré l'existence d'une suite de formes symplectiques $\widehat{\omega}_i$ sur

\widehat{M}_i pour laquelle \mathcal{T}^i est un diviseur exceptionnel symplectique à croisements normaux, obtenu par éclatements symplectiques successifs de $(\widehat{M}_{i-1}, \widehat{\omega}_{i-1})$.

Définition 2.4.1. Soit $(\widehat{M}_i, \widehat{J}_i, \mathcal{T}^i)$ un éclatement complexe itéré de (M, J, ω) . Soit ω_i une forme symplectique sur $(\widehat{M}_i, \widehat{J}_i, \mathcal{T}^i)$ telle que \mathcal{T}^i est un diviseur exceptionnel symplectique à croisement normaux. On dit que $(\widehat{M}_i, \widehat{\omega}_i, \mathcal{T}^i)$ est un éclatement symplectique itéré modelé sur l'éclatement complexe $(\widehat{M}_i, \widehat{J}_i, \mathcal{T}^i)$.

Lemme 2.4.2. Soit $ECI := (\pi_{i,i-1} : (\widehat{\mathbb{C}}^2_i, \mathcal{T}^i) \rightarrow (\widehat{\mathbb{C}}^2_{i-1}, \mathcal{T}^{i-1}))_{i=1}^K$ un éclatement complexe itéré. Soit (a_1, \dots, a_K) une suite \mathcal{T}^K -adaptée (voir définition 2.0.2). Il existe un éclatement symplectique itéré de \mathbb{C}^2 modelé sur ECI tel que $\widehat{\omega}_K(E_i) = a_i$.

Démonstration. On construit la forme $\widehat{\omega}_i$ sur \widehat{M}_i par récurrence.

Initialisation : La forme symplectique $\widehat{\omega}_1$ est obtenue en éclatant \mathbb{C}^2 le long de $B(a_1)$.

Hérédité : En supposant que la forme $\widehat{\omega}_i$ est construite dans la classe

$$[\pi_{i,0}^* \omega_{st}] - \sum_{j=1}^i a_j e_j$$

on construit à présent $\widehat{\omega}_{i+1}$ de la façon suivante : $(\widehat{\mathbb{C}}^2_{i+1}, \mathcal{T}^{i+1})$ est obtenue en éclatant $(\widehat{\mathbb{C}}^2_i, \mathcal{T}^i)$ en un point p . Si p n'est pas élément de \mathcal{T}^i , on obtient $\widehat{\omega}_{i+1}$ en éclatant le long d'un plongement $\varphi : (B(a_{i+1}), \omega_{st}) \hookrightarrow (\widehat{\mathbb{C}}^2_i \setminus \mathcal{T}^i, \widehat{\omega}_i)$. Puisqu'en effet $\widehat{\mathbb{C}}^2_i \setminus \mathcal{T}^i$ contient des boules symplectiques de tailles arbitraires. Si p est un point de \mathcal{T}^i , on a alors deux cas possibles :

— Soit $p \in S_k^i \setminus \bigcup_{j \neq k} S_j^i$. On note $A_k = \mathcal{A}_{\widehat{\omega}_i}(S_k^i)$. La remarque 1.2.14 permet d'affirmer que

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \leq A_k - \varepsilon$, il existe un plongement $\varphi_{i+1} : (B(x), \omega_{st}) \hookrightarrow (\widehat{M}_i, \widehat{\omega}_i)$ tel que $\varphi_{i+1}(B(x)) \cap \mathcal{T}^i$ est un disque de Hopf n'intersectant aucun point de $S_k^i \setminus \bigcup_{j \neq k} S_j^i$.

— Soit $p \in S_k^i \cap S_{k'}^i$, et on note $A_k = \mathcal{A}_{\widehat{\omega}_i}(S_k^i)$ et $A_{k'} = \mathcal{A}_{\widehat{\omega}_i}(S_{k'}^i)$. Toujours d'après la remarque 1.2.14, pour tout $\varepsilon > 0$ et $x < \min\{A_k, A_{k'}\} - \varepsilon$, il existe un plongement $\varphi_{i+1} : (B(x), \omega_{st}) \hookrightarrow (\widehat{M}_i, \widehat{\omega}_i)$ tel que $\varphi_{i+1}(B(x)) \cap \mathcal{T}^i$ est la réunion de deux disques de Hopf s'intersectant exactement en p .

Puisque (a_1, \dots, a_{i+1}) est \mathcal{T}^{i+1} -adaptée, on a

$$\left[- \sum_{\ell=1}^{i+1} a_\ell e_\ell \right] [\widehat{S}_j^i] > 0,$$

pour tout $j \in \{1, \dots, i+1\}$. En particulier pour $j = k$, et k' , $\left[- \sum_{\ell=1}^{i+1} a_\ell e_\ell \right] (\widehat{S}_j^i) > 0$, donc

$$\begin{aligned} \left[- \sum_{\ell=1}^{i+1} a_\ell e_\ell \right] [\widehat{S}_j^i] &= \left(- \left[(\pi_{i+1,i})^* \sum_{\ell=1}^i a_\ell e_\ell \right] - a_{i+1} e_{i+1} \right) \left([(\pi_{i+1,i})^* S_j^i] - [E_{i+1}] \right) \\ &= \left[- (\pi_{i+1,i})^* \sum_{\ell=1}^i a_\ell e_\ell \right] [(\pi_{i+1,i})^* S_j^i] + a_{i+1} e_{i+1} [E_{i+1}] \\ &= \left[- \sum_{\ell=1}^i a_\ell e_\ell \right] [S_j^i] - a_{i+1} > 0 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $\hat{\omega}_i|_{\mathcal{O}_p(\mathcal{T}^i)} \in \left[-\sum_{\ell=1}^i a_\ell e_\ell\right]$, on en déduit que pour $j = k$ et k' ,

$$a_{i+1} < \left[-\sum_{\ell=1}^i a_\ell e_\ell\right] [S_j^i] = \hat{\omega}_i(S_j^i) = A_j.$$

Donc, si p n'appartient qu'à S_k^i , $a_i < A_k$ et si $p = S_k^i \cap S_{k'}^i$, $a_i < \min\{A_k, A_{k'}\}$. On peut donc éclater \widehat{M}_i le long de $\varphi_{i+1} : (B(a_{i+1}), \omega_{st}) \hookrightarrow (\widehat{M}_i, \hat{\omega}_i)$ et ainsi construire la forme $\hat{\omega}_{i+1}$ représentant la classe symplectique annoncée.

□

Chapitre 3

Domaine associé à des contractions multiples

Dans ce chapitre on décrit un analogue symplectique à la contraction algébrique pour une variété symplectique. On y décrit aussi les domaines symplectiques obtenus en contractant un diviseur exceptionnel symplectique à croisements normaux et on finit par montrer les propriétés de ces domaines énoncées dans la proposition II.

3.1 Contraction symplectique

3.1.1 Contraction Symplectique

Dans cette partie on se consacre à la construction d'une forme symplectique sur la contraction d'une variété symplectique contenant un diviseur exceptionnel symplectique. On rappelle pour cela les notations utilisées dans la partie 2.2 : soit une fonction $\rho : (a, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ strictement croissante, lisse sur $(a, +\infty)$, telle que :

1. $\rho(t) = t$ pour $t > a + 2\varepsilon/3$.
2. $\rho(t) = \sqrt{t^2 - a^2}$, pour $t \in (a, a + \varepsilon/3)$.

On définit alors

$$F : \begin{array}{ccc} B(a + \varepsilon) \setminus B(a) & \rightarrow & B(a + \varepsilon) \setminus \{0\} \\ z & \mapsto & \rho(|z|) \frac{z}{|z|}, \end{array}$$

et $G = F \circ F_a$. Ainsi, G , F et F_a (définie page 36) sont des plongements monotones au sens de la définition 2.1.3, et

$$\begin{array}{ccc} F_a : & B(\varepsilon) \setminus \{0\} & \rightarrow & B(a + \varepsilon) \setminus B(a) \\ F : & B(a + \varepsilon) \setminus B(a) & \rightarrow & B(a + \varepsilon) \setminus \{0\} \\ G : & B(\varepsilon) \setminus \{0\} & \rightarrow & B(a + \varepsilon) \setminus \{0\}. \end{array}$$

Lemme 3.1.1. *Soit $(\tilde{X}, \tilde{\omega}, \tilde{J}, E)$ une variété symplectique munie d'une structure presque complexe $\tilde{\omega}$ -compatible contenant un diviseur exceptionnel (\tilde{J} -holomorphe) d'aire a . On suppose qu'on a un difféomorphisme local*

$$\psi : (\mathcal{O}_p(E), E) \subset (\tilde{X}, \tilde{\omega}, \tilde{J}) \rightarrow (\widehat{B}(\varepsilon), E) \subset (\widehat{\mathbb{C}^2}, \widehat{\omega}_{st,a}, \widehat{J}_{st})$$

($\widehat{\mathbb{C}^2}$, $\widehat{\omega}_{st,a}$ et \widehat{J}_{st} ont été définis partie 2.1).

Soit $(X_\psi, J_\psi, \pi_\psi : \tilde{X} \rightarrow X_\psi)$ la contraction complexe (voir définition 1.5.2) de \tilde{X} associée à ψ . Alors il existe :

1. une forme symplectique ω_ψ sur X_ψ , J_ψ -compatible,
2. un plongement $\varphi_\psi : (B(a), \omega_{st}) \rightarrow (X_\psi, \omega_\psi)$,
3. et un difféomorphisme $\pi_{\psi,a} : (\tilde{X} \setminus E, \tilde{\omega}) \rightarrow (X_\psi \setminus \varphi_\psi(B(a)), \omega_\psi)$.

De plus, si $(\tilde{X}, \tilde{\omega}, \tilde{J}, E) = (\widehat{M}_\varphi, \widehat{\omega}_\varphi, \widehat{J}_\varphi, E)$ et si $\pi_a \circ \psi = \varphi^{-1} \circ \pi_\varphi$ alors $(X_\psi \setminus \varphi_a(B(a)), \omega_\psi) \cong (M \setminus \varphi(B(a)), \omega)$.

Démonstration. On rappelle que

$$\begin{aligned} (X_\psi, J_\psi) &= (\tilde{X} \setminus E, \tilde{J}) \cup_{\pi_{\mathbb{C} \circ \psi}} (B(\varepsilon), J_{st}) \\ &= (\tilde{X} \setminus E, \tilde{J}) \cup_{G \circ \pi_{\mathbb{C} \circ \psi}} (B(a + \varepsilon), G_* J_{st}) \end{aligned}$$

On définit une nouvelle forme symplectique $\tilde{\omega}'$ sur $\tilde{X} \setminus E$ par $\tilde{\omega}' := \tilde{\omega}$ sur $(\psi^{-1}(\widehat{B}(2\varepsilon/3)))^c$ et $\tilde{\omega}' := (G \circ \pi_{\mathbb{C} \circ \psi})^* \omega_{st|B(a+\varepsilon)}$ sur $\psi^{-1}(\widehat{B}(\varepsilon) \setminus E)$ (ces deux formules coïncident bien sur l'intersection car $G|_{B(2\varepsilon/3)^c} = F_a$). On note que $\tilde{\omega}'$ ainsi définie est \tilde{J} -compatible sur $\tilde{X} \setminus E$. En effet, sur $\tilde{X} \setminus \psi^{-1}(\widehat{B}(2\varepsilon/3))$, $\tilde{\omega}'$ et $\tilde{\omega}$ coïncident. Donc $\tilde{\omega}'$ est \tilde{J} -compatible. D'autre part, sur $\psi^{-1}(\widehat{B}(\varepsilon) \setminus E)$, $\tilde{\omega}' = (G \circ \pi_{\mathbb{C} \circ \psi})^* \omega_{st}$ et d'après le lemme 2.1.4 $G^* \omega_{st}$ est J_{st} -compatible sur $B(\varepsilon)$ et donc $(G \circ \pi_{\mathbb{C} \circ \psi})^* \omega_{st}$ est $(\pi_{\mathbb{C} \circ \psi})^* J_{st} = \tilde{J}$ -compatible sur $\psi^{-1}(\widehat{B}(\varepsilon) \setminus E)$.

En définissant

$$(X_\psi, \omega_\psi, J_\psi) := (\tilde{X} \setminus E, \tilde{\omega}', \tilde{J}) \cup_{G \circ \pi_{\mathbb{C} \circ \psi}} (B(a + \varepsilon), \omega_{st}, G_* J_{st})$$

on a bien une forme symplectique sur X_ψ satisfaisant au point 1.

Cette présentation de (X_ψ, ω_ψ) s'accompagne de deux injections naturelles

$$\pi_\psi := i_1 : \tilde{X} \setminus E \hookrightarrow X_\psi \text{ et } i_2 : (B(a + \varepsilon), \omega_{st}) \hookrightarrow (X_\psi, \omega_\psi).$$

L'injection i_2 fournit le plongement φ_ψ annoncé au point 2. Pour construire l'application $\pi_{\psi,a}$ définissons dans un premier temps l'application $\tilde{F}^{-1} : i_1(\tilde{X} \setminus E) \rightarrow (X_\psi \setminus \varphi_\psi(B(a)))$ par

$$\tilde{F}^{-1} = \begin{cases} \tilde{F}^{-1} = \varphi_{\psi*}(F^{-1}) : \varphi_\psi(B(a + \varepsilon) \setminus \{0\}) \rightarrow \varphi_\psi(B(a + \varepsilon) \setminus B(a)) \text{ sur } \varphi_\psi(B(a + \varepsilon) \setminus \{0\}) \\ \tilde{F}^{-1} = id, \text{ sur } \varphi_\psi(B(a + \varepsilon))^c. \end{cases}$$

Ces deux formules se recollent bien car $F|_{B(a+\varepsilon) \setminus B(a+2\varepsilon/3)} = id$. Définissons alors

$$\pi_{\psi,a} = \tilde{F}^{-1} \circ i_1 : \tilde{X} \setminus E \rightarrow X_\psi \setminus \varphi_\psi(B(a)).$$

Comme énoncé, $\pi_{\psi,a}^* \omega_\psi = \tilde{\omega}$ car :

— Sur $B(a + 2\varepsilon/3)^c$, $\tilde{G} = id$, donc :

$$\begin{aligned} \pi_{\psi,a}^* \omega_\psi|_{B(a+2\varepsilon/3)^c} &= i_1^* \tilde{F}^{-1*} \omega_\psi|_{B(a+2\varepsilon/3)^c} \\ &= i_1^* id^* \omega_\psi|_{B(a+2\varepsilon/3)^c} \\ &= i_1^* \omega_\psi|_{B(a+2\varepsilon/3)^c} \\ &= \tilde{\omega}'|_{\tilde{X} \setminus \psi^{-1}(\widehat{B}(2\varepsilon/3))} = \tilde{\omega}|_{\tilde{X} \setminus \psi^{-1}(\widehat{B}(2\varepsilon/3))} \end{aligned}$$

— Sur $B(a + 2\varepsilon/3) \setminus B(a)$, on a $F^{-1} = F_a \circ G^{-1}$ et $i_1 = G \circ \pi_{\mathbb{C}} \circ \psi$ sur $B(a + \varepsilon) \setminus \{0\}$, donc $\tilde{F}^{-1} \circ i_1 = F_a \circ \pi_{\mathbb{C}} \circ \psi$ et donc

$$\begin{aligned} \pi_{\psi,a}^* \omega_{\psi|B(a+2\varepsilon/3) \setminus B(a)} &= (\tilde{F}^{-1} \circ i_1)^* \omega_{st|B(a+2\varepsilon/3) \setminus B(a)} \\ &= (F_a \circ \pi_{\mathbb{C}} \circ \psi)^* \omega_{st|B(a+2\varepsilon/3) \setminus B(a)} \\ &= \tilde{\omega}. \end{aligned}$$

Ceci établit le point 3.

Enfin, pour le quatrième point, soit $(\widehat{M}_\varphi, \widehat{J}_\varphi, E, \pi_\varphi : \widehat{M}_\varphi \rightarrow M)$ l'éclatement complexe de (M, J) le long de $\varphi : (B(a + \varepsilon), \omega_{st}, J_{st}) \rightarrow (M, \omega, J)$. On a déjà montré que la contraction complexe de $(\widehat{M}_\varphi, \widehat{J}_\varphi, E, \pi_\varphi : \widehat{M}_\varphi \rightarrow M)$ le long de $\psi : (\mathcal{O}p(E), E) \subset (\widehat{M}_\varphi, \widehat{J}_\varphi) \rightarrow (\mathcal{O}p(\mathbb{C}P^1), \mathbb{C}P^1) \subset (\widehat{\mathbb{C}^2}, \widehat{J}_{st})$ est la variété (M, J) dès que $\varphi^{-1} \circ \pi_\varphi = \pi_{\mathbb{C}} \circ \psi$. Il reste donc à montrer que les formes symplectiques ω et $(\widehat{\omega}_\varphi)_\psi$ coïncident sur M . Rappelons que $G|_{B(2\varepsilon/3)^c} = F_a$. Alors,

$$(M, \omega_\psi) = (X \setminus \psi^{-1}(\widehat{B}(2\varepsilon/3)), \tilde{\omega}) \bigcup_{F_a \circ \pi_{\mathbb{C}} \circ \psi} (B(a + \varepsilon), \omega_{st}).$$

Puis

$$F_a : (\widehat{B}(2\varepsilon/3) \setminus E, \widehat{\omega}_{st,a}) \xrightarrow{\sim} (B(a + 2\varepsilon/3) \setminus B(a), \omega_{st})$$

et $\psi^* \widehat{\omega}_{st,a} = \omega$. Donc

$$\begin{aligned} (M, \omega_\psi) &= (X \setminus \psi^{-1}(E), \tilde{\omega}) \bigcup_{F_a \circ \pi_{\mathbb{C}} \circ \psi} (B(a + \varepsilon), \omega_{st}) \\ &= (X \setminus E, \tilde{\omega}) \bigcup_{F_a \circ \pi_{\mathbb{C}} \circ \psi} (B(a + \varepsilon), \omega_{st}) \\ &= (M \setminus \varphi(B(a)), \omega) \bigcup_{F_a \circ \pi_{\mathbb{C}} \circ \psi \circ \pi_\varphi^{-1}} (B(a + \varepsilon), \omega_{st}) \\ &= (M \setminus \varphi(B(a)), \omega) \bigcup_{\varphi^{-1}} (B(a + \varepsilon), \omega_{st}) \\ &= (M, \omega) \text{ car } \varphi \text{ est une carte de Darboux.} \end{aligned}$$

□

Définition 3.1.2. Soit $(\tilde{X}, \tilde{J}, \tilde{\omega}, E)$ une variété symplectique contenant une -1 -sphère plongée symplectique E d'aire $a > 0$. La contraction symplectique de $(\tilde{X}, \tilde{J}, \tilde{\omega}, E)$ le long de

$$\psi : (\mathcal{O}p(E), E) \subset (\tilde{X}, \tilde{\omega}, \tilde{J}) \rightarrow (\widehat{B}(\varepsilon), E) \subset (\tilde{\mathbb{C}^2}, \widehat{\omega}_{st,a}, \widehat{J}_{st})$$

est $(X_\psi, J_\psi, \varphi_\psi : (B(a), \omega_{st}) \rightarrow (X_\psi, \omega_\psi), \pi_\psi : \tilde{X} \setminus E \rightarrow X_\psi \setminus \varphi_\psi(B(a)))$.

Remarque 3.1.3. Soit $(\tilde{X}, \tilde{\omega}, E)$ une variété symplectique munie d'un diviseur exceptionnel symplectique et soit $\psi : (\mathcal{O}p(E, \tilde{X}), \tilde{\omega}) \rightarrow (\mathcal{O}p(E, \widehat{\mathbb{C}^2}), \widehat{\omega}_{st,a})$ une carte locale au voisinage de E . Alors ψ est aussi une carte symplectique entre $(\mathcal{O}p(E), c\omega)$ et $(\mathcal{O}p(E), \widehat{\omega}_{st,ca})$ et $(c\omega)_\psi = c\omega_\psi$.

Dans la partie 4 (4.1 et 4.2), on aura besoin de considérer des versions à paramètres des éclatements et des contraction symplectiques.

Remarque 3.1.4. Soit $\tilde{\omega}_n$ une suite de formes symplectiques sur (\tilde{X}, E) qui converge vers $\tilde{\omega}$ en norme \mathcal{C}^∞ . Alors il existe des suites $(\psi_n : (\mathcal{O}p(E), E) \rightarrow (\widehat{B}_\varepsilon, E))_n$, $(\omega_{\psi_n})_n$, $(\varphi_{\psi_n} : (B(a_n), \omega_{st}) \rightarrow (X_{\psi_n}, \omega_{\psi_n}))_n$ et $(\pi_{\psi_n, a_n} : \tilde{X} \setminus E \rightarrow X_{\psi_n} \setminus \varphi_{\psi_n}(B(a_n)))_n$, qui convergent en norme \mathcal{C}^∞ vers $\psi : (\mathcal{O}p(E), E) \rightarrow (\widehat{B}(\varepsilon), E)$, ω_ψ , $\varphi_\psi : (B(a), \omega_{st}) \rightarrow (X_\psi, \omega_\psi)$ et $\pi_{\psi, a} : \tilde{X} \setminus E \rightarrow X_\psi \setminus \varphi(B(a))$.

Lemme 3.1.5. Soit $(\tilde{X}, \tilde{\omega}, E)$ une variété symplectique avec un diviseur exceptionnel symplectique lisse d'aire a et soit $\tilde{C} \subset \tilde{X}$ une courbe lisse qui intersecte E $\tilde{\omega}$ -orthogonalement. Alors il existe $\psi : (\mathcal{O}p(E) \subset \tilde{X}, \tilde{\omega}) \rightarrow (\mathcal{O}p(E) \subset \widehat{\mathbb{C}^2}, \widehat{\omega_{st, a}})$ telle que dans la contraction $(X_\psi, \omega_\psi, \varphi_\psi : (B(a + \delta), \omega_{st}) \rightarrow (X_\psi, \omega_\psi), \pi_{\psi, a} : \tilde{X} \setminus E \rightarrow X_\psi \setminus \varphi_\psi(B(a)))$, il existe une courbe symplectique $C \subset X_\psi$, dans la classe $[\pi_{\psi*} \tilde{C}]$ qui intersecte $\varphi_\psi(B(a))$ le long de disques de Hopf.

De plus :

- si $[\tilde{C}] \cdot [E] = 1$, alors C est plongée dans X_ψ .
- si $[\tilde{C}] \cdot [E] = 2$, alors ψ peut être choisi de sorte que $C \cap \varphi_\psi(B(a))$ est une réunion de disques de Hopf ω_ψ -orthogonaux

Démonstration. On a déjà vu que le théorème de voisinage symplectique garantit l'existence de $\psi : (\mathcal{O}p(E) \subset \tilde{X}, \tilde{\omega}) \rightarrow (\mathcal{O}p(E) \subset \widehat{\mathbb{C}^2}, \widehat{\omega_{st, a}})$, un modèle local, pourvu que $a = \tilde{\omega}(E)$. On vérifie sans difficulté que l'hypothèse d'orthogonalité entre E et \tilde{C} permet de supposer sans perte de généralité que $\psi(\tilde{C})$ est une union de fibres de $pr : \mathcal{O}p(E) \subset \widehat{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}P^1$, au-dessus de $\psi(\tilde{C} \cap E)$. La contraction de X le long d'un tel ψ est la variété

$$(X_\psi, \omega_\psi) = (\tilde{X} \setminus E, \tilde{\omega}) \bigcup_{F_a \circ \pi_{\mathbb{C}} \circ \psi} (B(a + \delta), \omega_{st}),$$

et $\varphi_\psi : (B(a + \delta), \omega_{st}) \hookrightarrow (X_\psi, \omega_\psi)$ est l'injection naturelle de la boule dans X_ψ .

L'hypothèse que $\psi(\tilde{C})$ est une union de fibres se traduit alors par $\pi_{\mathbb{C}} \circ \psi(\tilde{C})$ est une union de droites complexes linéaires passant par l'origine de $B(\delta)$ dont l'image par F_a est une union de telles droites privées de $B(a)$. L'extension de $F_a \circ \pi_{\mathbb{C}} \circ \psi(\tilde{C})$ par les disques correspondant définit une courbe $C \subset X_\psi$ symplectique lisse immergée, plongée si $[E] \cdot [\tilde{C}] = 1$. Si $[\tilde{C}] \cdot [E] = 2$ l'hypothèse garantit que \tilde{C} intersecte E en exactement deux points. En choisissant ψ de sorte que ces deux points soient envoyés respectivement sur $[0 : 1]$ et $[1 : 0]$, les deux disques de Hopf servant à compléter $\pi_{\psi, a}(\tilde{C})$ sont ω_ψ -orthogonaux (puisqu'ils correspondent aux disques $\{z = 0\}$ et $\{w = 0\}$ dans \mathbb{C}^2).

Pour calculer la classe d'homologie de C , rappelons que d'après la proposition 3.1.1, $(\tilde{X}, \tilde{\omega}, E)$ est l'éclatement symplectique de (X_ψ, ω_ψ) le long de φ_ψ et puisque $C \cap \varphi_\psi(B(a))$ est une union de disque de Hopf, le lemme 2.2.3 donne que $[\widehat{C}] = [\pi_{\psi*} C] - ([E] \cdot [\tilde{C}])[E]$. Il est par ailleurs clair que $\widehat{C} = \tilde{C}$ dans le cas présent et donc la classe $[C] = [\pi_{\psi*} \pi_{\psi*}^* C] = [\pi_{\psi*} \tilde{C}]$. \square

Unicité de la contraction

Lemme 3.1.6. Soient $(\tilde{X}, \tilde{\omega}, E, \psi)$ et $(\tilde{X}', \tilde{\omega}', E', \psi')$ des variétés symplectiques contenant un diviseur exceptionnel symplectique lisse. Soient $(X_\psi, \omega_\psi, \varphi_\psi : B(a) \rightarrow X_\psi)$ et $(X_{\psi'}, \omega_{\psi'}, \varphi_{\psi'} : B(a) \rightarrow X_{\psi'})$ les contractions de \tilde{X} et \tilde{X}' le long de ψ et ψ' . On suppose qu'il existe un difféomorphisme $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{\omega}, E, \psi) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{\omega}', E', \psi')$. Alors il existe un difféomorphisme $f : (X_\psi, \omega_\psi, \varphi_\psi, \pi_{\psi}^\omega) \rightarrow (X_{\psi'}, \omega_{\psi'}, \varphi_{\psi'}, \pi_{\psi'}^\omega)$.

Si de plus \tilde{C} et \tilde{C}' sont des courbes symplectiques dans \tilde{X} et \tilde{X}' qui intersectent E et E' orthogonalement et telles que $\tilde{f}(\tilde{C}) = \tilde{C}'$, les courbes $C \subset X_\psi$ et $C' \subset X_{\psi'}$ construite via

le lemme 3.1.5 vérifient $f(C) = C'$. Enfin, si \mathcal{U} et \mathcal{U}' sont des ouverts de \tilde{X} et \tilde{X}' tels que $\tilde{f}(\tilde{U}) = \tilde{U}'$ les ouverts $U := \pi_\psi^\omega(\tilde{U} \setminus E)$ et $U' = \pi_{\psi'}^\omega(\tilde{U}' \setminus E')$ vérifient $f(U) = U'$.

Démonstration. La preuve est évidente par la naturalité de la construction de la contraction (lemme 3.1.1) et de la construction de la courbe C (lemme 3.1.5).

Enfin, rappelons que

$$(X_\psi, \omega_\psi) = (\tilde{X} \setminus E) \bigcup_{\varphi_\psi \circ F_a \circ \pi_C \circ \psi} (\varphi_\psi(B(a + \varepsilon)), \varphi_{\psi*} \omega_{st})$$

et

$$(X'_{\psi'}, \omega'_{\psi'}) = (\tilde{X}' \setminus E') \bigcup_{\varphi_{\psi'} \circ F_a \circ \pi_C \circ \psi'} (\varphi_{\psi'}(B(a + \varepsilon)), \varphi_{\psi'*} \omega_{st})$$

et donc en définissant le difféomorphisme f comme étant $\tilde{f}|_{\tilde{X} \setminus E}$ sur $\tilde{X} \setminus E$ et $\varphi_{\psi'} \circ \varphi_\psi^{-1}$ sur $\mathcal{O}p(\varphi_\psi(B(a)))$, on montre la propriété de f concernant tout ouvert \tilde{U} et \tilde{U}' dans \tilde{X} et \tilde{X}' vérifiant $f(\tilde{U}) = \tilde{U}'$. □

Remarque 3.1.7. L'hypothèse que $\psi' \circ \tilde{f} = \psi$ n'est pas centrale : dès qu'il existe $\tilde{g} : (\tilde{X}, \tilde{\omega}, E) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{\omega}', E')$, le théorème de voisinage symplectique 1.1.2 garantit l'existence d'un difféomorphisme $f : (\tilde{X}, \tilde{\omega}, E, \psi) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{\omega}', E', \psi')$.

3.1.2 Contractions itérées

Le lemme 3.1.5 permet d'itérer les contractions symplectiques.

Proposition 3.1.8. Soit $(\widehat{M}_K, \mathcal{T}^K, \pi_{K,0} : \widehat{M}_K \rightarrow M)$ un éclatement complexe itéré et soit $\widehat{\omega}_K$ une structure symplectique sur \widehat{M}_K pour laquelle \mathcal{T}^K est un diviseur exceptionnel symplectique à croisement normaux. Alors, il existe une forme symplectique ω sur M dans la classe $[\pi_{K,0*} \widehat{\omega}_K]$.

Démonstration. On note $(\pi_{i,i-1} : \widehat{M}_i \rightarrow \widehat{M}_{i-1})_{i=1}^K$ la suite d'éclatements qui correspond à l'éclatement itéré $\pi_{K,0} : \widehat{M}_K \rightarrow M$, $\pi_{K,0} = \pi_{1,0} \circ \dots \circ \pi_{K,K-1}$. On construit la forme $\widehat{\omega}_i$ sur \widehat{M}_i par récurrence sur i .

Initialisation : On commence par $i = K$. Soit E_K le diviseur exceptionnel associé à l'éclatement $\pi_{K,K-1} : \widehat{M}_K \rightarrow \widehat{M}_{K-1}$. D'après la proposition 1.5.7, E_K est intersecté par au plus deux autres composantes de \mathcal{T}^K , chacune l'intersectant en exactement un point et si E_K est intersecté par deux composantes de \mathcal{T}^K , les points d'intersections correspondants sont distincts. Soit $a_K = \widehat{\omega}_K(E_K)$. D'après le lemme 3.1.5, il existe une forme symplectique $\widehat{\omega}_{K-1}$ sur \widehat{M}_{K-1} dans la classe $[\pi_{K,K-1*} \widehat{\omega}_K]$ et telle que $\pi_{K,K-1}^\omega \mathcal{T}^K$ peut-être complété en un diviseur exceptionnel symplectique à croisements normaux. Enfin, chaque composante de \mathcal{T}^{K-1} est dans la classe $[\pi_{K,K-1*} \mathcal{T}^K]$.

Les étapes suivantes sont exactement identiques. □

Corollaire 3.1.9. Soit (M, ω) une variété symplectique, $(\widehat{M}_K, \widehat{\omega}_K, \mathcal{T}^K)$ un éclatement itéré de M . Soit par ailleurs $\widehat{\omega}_{K,t}$, $t \in [0, 1]$ un chemin lisse de formes symplectiques issues de $\widehat{\omega}_{K,0} = \widehat{\omega}_K$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$ la classe $[\widehat{\omega}_{K,t}] = [\pi_{K,0}^* \omega] - \sum_{i=1}^K a_i(t) e_i$ est représentée symplectiquement et pour laquelle \mathcal{T}^K reste un diviseur exceptionnel symplectique à croisements normaux.

Alors, la contraction itérée de $(\widehat{M}_K, \widehat{\omega}_{K,1}, \mathcal{T}^K)$ définit une forme symplectique ω_1 sur M symplectomorphe à ω .

Démonstration. D'après la proposition précédente, la contraction symplectique itérée de $(\widehat{M}_K, \omega_{K,t}, \mathcal{T}^K)$ fournit une forme symplectique ω_t sur M qui est un chemin lisse de formes symplectiques dans la classe $[\pi_{K,0*}\widehat{\omega}_{K,t}] = [\omega]$. La méthode de Moser fournit alors un difféomorphisme symplectique $f : (M, \omega) \rightarrow (M, \omega_1)$. \square

Proposition 3.1.10 (Naturalité de la contraction symplectique itérée). *Soit $(\widehat{M}_K, \mathcal{T}^K, \pi_{K,0} : \widehat{M}_K \rightarrow M)$ un éclatement complexe itéré et soient $\widehat{\omega}_K$ et $\widehat{\omega}'_K$ deux formes symplectiques pour lesquelles \mathcal{T}^K est un diviseur exceptionnel symplectique à croisements normaux.*

S'il existe un difféomorphisme $\hat{f}_K : (\widehat{M}_K, \widehat{\omega}_K, \mathcal{T}^K) \rightarrow (\widehat{M}_K, \widehat{\omega}'_K, \mathcal{T}^K)$, alors les formes symplectique ω et ω' définies sur M par contractions itérées sont symplectomorphes.

Démonstration. Le lemme 3.1.6 (complété par la remarque 3.1.7) garantit l'existence de $\hat{f}_{K-1} : (\widehat{M}_{K-1}, \widehat{\omega}_{K-1}, \mathcal{T}^{K-1}) \rightarrow (\widehat{M}_{K-1}, \widehat{\omega}'_{K-1}, \mathcal{T}^{K-1})$. On est donc en position d'utiliser le lemme 3.1.6 à nouveau. L'itération de ce procédé nous donne finalement le difféomorphisme symplectique $f : (M, \omega) \rightarrow (M, \omega')$. \square

3.2 Définition du domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$

Définition 3.2.1. *Soit (M^4, ω) une variété symplectique de dimension 4. Un sous-ensemble $\mathcal{D} \subset M$ est un domaine symplectique de M si c'est une sous-variété de dimension 4 compacte à bord d'intérieur non-vide de M , de sorte que la restriction de ω à $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ est symplectique.*

Soit $\widehat{\omega}_K$ une forme symplectique sur un éclatement complexe itéré $(\widehat{M}_K, \mathcal{T}^K)$ de (M, ω) pour laquelle \mathcal{T}^K est un diviseur exceptionnel symplectique à croisements normaux. On rappelle que la suite $\widehat{\omega}_K$ est associée à une suite $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_K)$ (définition 2.0.2) de sorte que

$$[\widehat{\omega}_K] = [\pi^*\omega] - \sum_{i=1}^K a_i e_i.$$

Définissons par récurrence :

- $\mathcal{D}_{K-1} := \varphi_K(B(a_K)) \subset \widehat{M}_{K-1}$, où φ_K est le plongement associé à la contraction symplectique $\pi_{K,K-1}^\omega$ de $(\widehat{M}_K, \widehat{\omega}_K, E_K)$ (voir le lemme 3.1.1). De plus, d'après le lemme 3.1.5 l'ensemble \mathcal{D}_{K-1} , qui est une boule compacte à ce stade, intersecte \mathcal{T}^{K-1} le long d'une réunion d'au plus deux disques.
- $\mathcal{D}_{K-2} := \pi_{K-1,K-2}^\omega(\mathcal{D}_{K-1} \setminus E_{K-1}) \cup \varphi_{K-1}(B(a_{K-1})) \subset \widehat{M}_{K-2}$, où φ_{K-1} est le plongement associé à la contraction symplectique $\pi_{K-1,K-2}^\omega$ de $(\widehat{M}_{K-1}, \widehat{\omega}_{K-1}, E_{K-1})$. Comme précédemment, le diviseur \mathcal{T}^{K-1} intersecte le domaine $\varphi_{K-1}(B(a_{K-1}))$ le long de disques et d'après le point précédent et la définition de $\pi_{K-1,K-2}^\omega$, $\pi_{K-1,K-2}^\omega(\mathcal{D}_{K-1} \setminus E_{K-1}) \cap \mathcal{T}^{K-2}$ est :
 - soit une réunion d'anneaux, si $\mathcal{D}_{K-1} \cap E_{K-1} \neq \emptyset$, qu'on complète par des disques de Hopf de $\varphi_{K-1}(B(a_{K-1}))$,
 - soit une réunion de disques comme précédemment si $\mathcal{D}_{K-1} \cap E_{K-1} = \emptyset$.
Ainsi, \mathcal{D}_{K-2} intersecte \mathcal{T}^{K-2} le long de disques.

- Pour $j \in \{0, \dots, K-1\}$, $\mathcal{D}_j := \pi_{j+1,j}^\omega(\mathcal{D}_{j+1} \setminus E_{j+1}) \cup \varphi_{j+1}(B(a_{j+1})) \subset \widehat{M}_j$, où φ_{j+1} est le plongement associé à la contraction symplectique $\pi_{j+1,j}^\omega$ de $(\widehat{M}_{j+1}, \widehat{\omega}_{j+1}, E_{j+1})$. Par les mêmes arguments que dans les deux cas précédents, \mathcal{D}_j intersecte \mathcal{T}^j le long de disques.
- $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K) := \mathcal{D}_0 \subset M$.

Il peut être important de préciser que cette description de \mathcal{D} est purement ensembliste et qu'aucune propriété topologique ou symplectique n'est évidente à ce stade. Même la dénomination $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K)$ est hâtive puisqu'il n'a pas été démontré que $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K)$ ne dépend pas de (M, ω) . C'est l'objet des prochains chapitres de la thèse de préciser un certain nombre de propriétés de $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K)$.

Remarque 3.2.2. On note $\tau = \widehat{\omega}_K|_{\mathcal{T}^K}$ la forme d'aire sur \mathcal{T}^K induite par $\widehat{\omega}_K$. Sur un voisinage suffisamment petit de \mathcal{T}^K , la classe de τ est donnée par $-\sum_{i=1}^K a_i e_i$ qu'on peut caractériser par la suite \mathcal{T}^K -adaptée $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_K)$. On montre dans la partie 3.3 qui suit que le domaine construit ci-dessus ne dépend ni de la variété ambiante (M, ω) , ni de l'éclatement itéré de celle-ci. Les seules données importantes sont le diviseur exceptionnel symplectique \mathcal{T} à partir duquel il est construit, et la suite \mathbf{a} qui caractérise la forme d'aire τ dont celui-ci est muni.

3.3 Propriétés des domaines

Dans cette partie, on démontre les propriétés des domaines construits dans la partie 3.2 et énoncées dans la proposition II.

3.3.1 Unicité du domaine

Proposition 3.3.1. Soit (M, ω) une variété symplectique et soit $(\widehat{M}_K, \mathcal{T}^K)$ un éclatement complexe itéré. Soit $\widehat{\omega}_K$ une forme symplectique telle que \mathcal{T}^K soit un diviseur exceptionnel symplectique à croisements normaux. Le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K)$, ne dépend que de \mathcal{T}^K , à symplectomorphisme près, et de la suite \mathbf{a} associée à $[\tau]$ (pas de M , ni de \widehat{M}_K).

Démonstration. Soient (X_K, \mathcal{T}^K) et (X'_K, \mathcal{T}'^K) deux éclatements itérés de deux variétés M et M' . On note $\pi_{i,i-1}$ et $\pi'_{i,i-1}$ les applications d'éclatements associées au diviseurs exceptionnels $E_i \subset X_i$ et $E'_i \subset X'_i$. Soient ω_K et ω'_K deux formes symplectiques sur X_K et X'_K respectivement et telles que \mathcal{T}^K et \mathcal{T}'^K sont des diviseurs exceptionnels symplectiques à croisements normaux symplectomorphes. On note $\tau = \omega_K|_{\mathcal{T}^K}$ et $\tau' = \omega'_K|_{\mathcal{T}'^K}$ les formes d'aires sur ces deux diviseurs. D'après le théorème de Weinstein 1.1.2, il existe des voisinages $V_K \subset X_K$ et $V'_K \subset X'_K$ symplectomorphes de \mathcal{T}^K et \mathcal{T}'^K respectivement (car tous deux sont symplectomorphes à un même plombage symplectique). Notons

$$f_K : (V_K, \omega_K, \mathcal{T}^K) \rightarrow (V'_K, \omega'_K, \mathcal{T}'^K)$$

le difféomorphisme entre ces voisinages. En particulier, $f_K(E_K) = E'_K$ et on peut considérer f_{K-1} comme un difféomorphisme relatif

$$f_K : (V_K, \omega_K, E_K) \rightarrow (V'_K, \omega'_K, E'_K).$$

D'après la proposition 3.1.6, il existe un difféomorphisme

$$f_{K-1} : (V_{K-1}, \omega_{K-1}, \mathcal{T}^{K-1}, \varphi_K) \rightarrow (V'_{K-1}, \omega'_{K-1}, \mathcal{T}^{K-1}, \varphi'_K)$$

qui envoie \mathcal{T}^{K-1} sur \mathcal{T}'^{K-1} , construites via le lemme 3.1.5, et tel que $f_{K-1} \circ \varphi_K = \varphi'_K$. En d'autres termes, $f_{K-1}(\varphi_K(B(a_K))) = \varphi'_K(B(a_K))$, c'est-à-dire $f_{K-1}(\mathcal{D}_{K-1}) = \mathcal{D}'_{K-1}$. On peut aussi considérer $f_{K-1} : (V_{K-1}, \omega_{K-1}, E_{K-1}) \rightarrow (V'_{K-1}, \omega'_{K-1}, E'_{K-1})$ envoyant \mathcal{T}^{K-1} sur \mathcal{T}'^{K-1} . On est alors en position d'appliquer à nouveau le lemme 3.1.6.

En l'appliquant à nouveau, on obtient un difféomorphisme

$$f_{K-2} : (V_{K-2}, \omega_{K-2}, \mathcal{T}^{K-2}, \varphi_{K-1}) \rightarrow (V'_{K-2}, \omega'_{K-2}, \mathcal{T}'^{K-2}, \varphi'_{K-2}).$$

Ce difféomorphisme envoie $\pi_{K-1, K-2}^\omega(\mathcal{D}_{K-1} \setminus E_{K-1})$ sur $\pi_{K-1, K-2}^{\omega'}(\mathcal{D}'_{K-1} \setminus E'_{K-1})$ et $\varphi_{K-1}(B(a_{K-1}))$ sur $\varphi'_{K-1}(B(a_{K-1}))$. Donc,

$$\begin{aligned} f_{K-2}(\mathcal{D}_{K-2}) &= f_{K-2}(\pi_{K-1, K-2}^\omega(\mathcal{D}_{K-1} \setminus E_{K-1}) \cup \varphi_{K-1}(B(a_{K-1}))) \\ &= \pi_{K-1, K-2}^{\omega'}(\mathcal{D}'_{K-1} \setminus E'_{K-1}) \cup \varphi'_{K-1}(B(a_{K-1})) \\ &= \mathcal{D}'_{K-2}. \end{aligned}$$

En considérant

$$f_{K-2} : (V_{K-2}, \omega_{K-2}, E_{K-2}) \rightarrow (V'_{K-2}, \omega'_{K-2}, \mathcal{E}'_{K-2})$$

on est à nouveau en mesure d'appliquer le lemme 3.1.6.

En l'appliquant ainsi à chaque étape, on construit un difféomorphisme

$$f : (M, \omega \in [\pi_{K,0*}\omega_K]) \rightarrow (M', \omega' \in [\pi'_{K,0*}\omega'_K])$$

tel que $f(\mathcal{D}_M(\mathcal{T}^K, \tau)) = \mathcal{D}_{M'}(\mathcal{T}'^K, \tau')$. □

Remarque 3.3.2. *En particulier, on a un difféomorphisme symplectique entre $(\text{PSBD}(\mathcal{T}^K, \varepsilon) \setminus \mathcal{T}^K, \varpi)$ et $\mathcal{O}_p(\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}), \mathbb{C}^2) \setminus \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}), \omega_{st}$.*

Une conséquence directe de la proposition 3.3.1 est le résultat suivant.

Corollaire 3.3.3. *Le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ se plonge symplectiquement dans \mathbb{C}^2 .*

Démonstration. Soit $(\widehat{\mathbb{C}}^2_K, \mathcal{T}^K)$ un éclatement complexe itéré de \mathbb{C}^2 pour lequel \mathcal{T}^K est le diviseur exceptionnel. D'après le lemme 2.4.2, il existe une forme symplectique $\hat{\omega}_K$ sur $\widehat{\mathbb{C}}^2_K$ pour laquelle \mathcal{T}^K est un diviseur exceptionnel symplectique à croisements normaux, dans la classe $-\sum_{i=1}^K a_i e_i$. D'après la propriété d'unicité 3.3.1,

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}) = \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, [\hat{\omega}_K|_{\mathcal{T}^K}]) \subset \mathbb{C}^2.$$

□

3.3.2 Conformalité du domaine

Dans cette partie on s'intéresse à une autre forme d'*unicité* des domaines construits en partie 3.2, à savoir la conformalité de ceux-ci. Précisément, on cherche à comparer deux domaines $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ et $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}')$ associés à un même diviseur exceptionnel \mathcal{T}^K mais dont les composantes ont des aires symplectiques qui diffèrent d'un même facteur $c \in \mathbb{R}^{*+}$, c'est-à-dire tels que $\mathbf{a}' = c\mathbf{a}$.

On définit d'abord :

Définition 3.3.4. Soit (M, ω) une variété symplectique. Un difféomorphisme conformément symplectique est un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$ vérifiant $\varphi^*\omega = c\omega$, pour un certain $c \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour garder une trace de la constante de conformalité $c \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit que φ est un difféomorphisme symplectique c -conforme.

On note cM la variété symplectique $(M, c\omega)$ pour simplifier les notations dans le reste de la thèse.

Proposition 3.3.5. Soit $c \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, ca)$ est symplectomorphe à $c\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, a)$.

Démonstration. C'est évident via la remarque 3.1.3. On pose $\mathbf{a}' = ca$ et donc si τ et τ' sont des formes d'aires caractérisées par \mathbf{a} et \mathbf{a}' , alors elles vérifient $\tau' = c\tau$. Soient $(\widehat{U}_K, \widehat{\omega}_K)$ et $(\widehat{U}'_K, \widehat{\omega}'_K)$ deux voisinages des plombages de \mathcal{T}^K pour \mathbf{a} et \mathbf{a}' respectivement. Quitte à rétrécir ces plombages, on a un difféomorphisme f_K entre \widehat{U}_K et \widehat{U}'_K qui vérifie $f_{K|_{\mathcal{T}^K}} = Id$ et qui envoie donc $\mathcal{T}^K \subset \widehat{U}_K$ sur $\mathcal{T}^K \subset \widehat{U}'_K$. Le difféomorphisme f_K est alors un difféomorphisme c -conforme entre les diviseurs exceptionnels symplectiques. Quitte à rétrécir \widehat{U}_K et \widehat{U}'_K et à appliquer un processus de Moser, on peut supposer que f_K est un difféomorphisme symplectique c -conforme entre $(\widehat{U}_K, \widehat{\omega}_K, \mathcal{T}^K) \rightarrow (\widehat{U}'_K, \widehat{\omega}'_K, \mathcal{T}^K)$.

Maintenant, en adaptant directement la démonstration de la proposition 3.1.6 et 3.3.1, il est clair que $\pi(\widehat{U}_K)$ et $\pi'(\widehat{U}'_K)$, où π et π' désignent les applications d'éclatement totales pour les formes $\widehat{\omega}_K$ et $\widehat{\omega}'_K$ respectivement, sont symplectiques c -conforme via f qui est l'extension de $\pi' \circ f_K$ à toute la variété $U := \pi(\widehat{U}_K) \cup \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \tau)$ et qui vérifie $f(\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \tau)) = \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \tau')$ et ainsi, $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^K, \tau) = c\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \tau')$. \square

3.3.3 Structure de Liouville

Dans cette partie, on montre que le domaine associé à un diviseur exceptionnel symplectique est un domaine de Liouville.

Proposition 3.3.6. Soit $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}) \subset \mathbb{C}^2$ le domaine associé à \mathcal{T}^K où \mathbf{a} caractérise une forme d'aire τ sur \mathcal{T}^K dans la classe $\sum_{i=1}^K a_i e_i$ telle que \mathcal{T}^K est un diviseur exceptionnel symplectique à croisement normaux.

Alors, le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ est un domaine de Liouville de \mathbb{C}^2 .

Lemme 3.3.7. Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4 munie d'une polarisation $\Sigma = \{(\Sigma_j, \mu_j) \mid j = 1, \dots, N\}$ (voir définition 1.2.5) Soient $\varphi : (B(a), \omega_{st}) \hookrightarrow (M, \omega)$ et $(\widehat{M}, \widehat{\omega}, E, \pi : \widehat{M} \setminus E \rightarrow M \setminus \varphi(B(a)))$ l'éclatement symplectique le long de φ .

1. Si $\varphi(B(a)) \cap \Sigma = \emptyset$, on définit

$$\widehat{\Sigma} := \pi^*\Sigma := \{(\widehat{\Sigma}_j, \mu_j) \mid j = 1, \dots, N\} \cup (E, -a).$$

2. Si $\varphi(B(a)) \cap \Sigma$ est un disque de Hopf dans Σ_{j_0} , on définit :

$$\widehat{\Sigma} := \pi^*\Sigma := \{(\widehat{\Sigma}_j, \mu_j) \mid j = 1, \dots, N\} \cup (E, \mu_{j_0} - a).$$

3. Si $\varphi(B(a)) \cap \Sigma$ est la réunion de deux disques de Hopf dans $\Sigma_{j_0} \cup \Sigma_{j_1}$, on définit :

$$\widehat{\Sigma} := \pi^*\Sigma := \{(\widehat{\Sigma}_j, \mu_j) \mid j = 1, \dots, N\} \cup (E, \mu_{j_0} + \mu_{j_1} - a).$$

Alors, $\widehat{\Sigma}$ est une polarisation de $(\widehat{M}, \widehat{\omega})$.

Démonstration. Par définition, on a

$$[\omega] = \sum_{j=1}^N \mu_j \text{PD}(\Sigma_j).$$

1. On suppose que $\varphi(B(a)) \cap \Sigma = \emptyset$. On rappelle que $[\widehat{\omega}] = [\pi^*\omega] - ae$ où $e = \text{PD}(E)$. Donc,

$$\begin{aligned} [\widehat{\omega}] = \pi^*[\omega] - a \text{PD}(E) &= \pi^* \sum_{j=1}^N \mu_j \text{PD}(\Sigma_j) - ae \\ &= \sum_{j=1}^N \mu_j \text{PD}(\pi^*\Sigma_j) - ae \\ &= \sum_{j=1}^N \mu_j \text{PD}(\widehat{\Sigma}_j) - ae. \end{aligned}$$

La dernière égalité provenant du fait que $\varphi(B(a)) \cap \Sigma = \emptyset$ et que donc le diviseur exceptionnel E n'intersecte aucune composante de $\pi^*\Sigma \setminus E$.

2. Maintenant, on suppose que $\varphi(B(a)) \cap \Sigma$ est un disque de Hopf dans Σ_{j_0} pour un $j_0 \in \{1, \dots, N\}$. Alors, d'après le même argument que précédemment, $[\widehat{\omega}] = \sum_j \mu_j \text{PD}(\pi^*\Sigma_j) - ae$, mais à présent $[\pi^*\Sigma_{j_0}] = [\widehat{\Sigma}_{j_0}] + [E]$ (voir la proposition 1.5.5). Donc,

$$[\widehat{\omega}] = \sum_{j=1}^N \mu_j \text{PD}(\widehat{\Sigma}_{j_0}) + (\mu_{j_0} - a)e.$$

3. Finalement, on suppose que l'intersection $\varphi(B(a)) \cap \Sigma$ est la réunion de deux disques de Hopf distincts dans $\Sigma_{j_0} \cup \Sigma_{j_1}$. A nouveau,

$$\begin{aligned} [\widehat{\omega}] &= \sum_j \mu_j \text{PD}(\pi^*\Sigma_j) - ae \\ &= \sum_{j=1}^N \mu_j \text{PD}(\widehat{\Sigma}_j) + (\mu_{j_0} + \mu_{j_1} - a)e. \end{aligned}$$

On en conclut que $\widehat{\Sigma}$ est bien une polarisation de $(\widehat{M}, \widehat{\omega}, E, \pi)$. □

Lemme 3.3.8. Soit $(\widehat{B(a+\varepsilon)}, \widehat{\omega}_{st,a}, E, \pi : (\widehat{B(a+\varepsilon)} \setminus E, \widehat{\omega}_{st,a}) \rightarrow (B(a+\varepsilon) \setminus B(a), \omega_{st}))$ l'éclatement symplectique de $B(a+\varepsilon)$ le long de $B(a)$. Alors

1. $\pi^*\lambda_{st}$ est une forme de Liouville sur $\widehat{B(a+\varepsilon)}$ tempérée le long de E avec résidu a .
2. $\pi^*(\lambda_{st} + b d\theta_1)$ est une forme de Liouville sur $\widehat{B(a+\varepsilon)}$ tempérée le long de $E \cup \widehat{\{z=0\}}$ avec résidu $a+b$ le long de E et b le long de $\widehat{\{z=0\}}$.
3. $\pi^*(\lambda_{st} + b d\theta_1 + c d\theta_2)$ est une forme de Liouville sur $\widehat{B(a+\varepsilon)}$ tempérée le long de $E \cup \widehat{\{z=0\}} \cup \widehat{\{w=0\}}$ avec résidu $a+b+c$ le long de E , b le long de $\widehat{\{z=0\}}$ et c le long de $\widehat{\{w=0\}}$.

Démonstration. On rappelle que l'application d'éclatement symplectique est donnée par la composée $\pi = F_a \circ \pi_{\mathbb{C}}$, avec

$$\begin{aligned} F_a : B(a + \varepsilon) \setminus B(a) &\rightarrow B(\varepsilon) \setminus \{0\} \\ (R_1, \theta_1, R_2, \theta_2) &\mapsto \left(\frac{R_1 + R_2 + a}{R_1 + R_2} R_1, \theta_1, \frac{R_1 + R_2 + a}{R_1 + R_2} R_2, \theta_2 \right) \end{aligned}$$

On peut aller plus loin dans la description de π en fixant des coordonnées. En effet, si l'on considère la carte dans laquelle le diviseur exceptionnel coïncide avec $\{w = 0\} = \{R_2 = 0\}$ et $\widehat{\{z = 0\}} = \{z = 0\}$, l'éclatement complexe est donné par :

$$\pi_{\mathbb{C}, w} : (R_1, \theta_1, R_2, \theta_2) \mapsto (R_1 R_2, \theta_1 + \theta_2, R_2, \theta_2)$$

et donc l'éclatement symplectique est donné dans cette carte par

$$\begin{aligned} \pi_w : (R_1, \theta_1, R_2, \theta_2) &\mapsto \left(\frac{R_1 R_2 + R_2 + a}{R_1 R_2 + R_2} R_1 R_2, \theta_1 + \theta_2, \frac{R_1 R_2 + R_2 + a}{R_1 R_2 + R_2} R_2, \theta_2 \right) \\ &= \left(R_1 \left(R_2 + \frac{a}{1 + R_1} \right), \theta_1 + \theta_2, R_2 + \frac{a}{1 + R_1}, \theta_2 \right). \end{aligned}$$

Avec, les mêmes calcul, et en inversant les rôles joués par R_1 et R_2 , et θ_1 et θ_2 , on montre que

$$\pi_z : (R_1, \theta_1, R_2, \theta_2) \mapsto \left(R_1 + \frac{a}{1 + R_2}, \theta_1, R_2 \left(R_1 + \frac{a}{1 + R_2} \right), \theta_1 + \theta_2 \right)$$

lorsqu'on considère la carte dans laquelle le diviseur exceptionnel coïncide avec $\{z = 0\} = \{R_1 = 0\}$ et $\widehat{\{w = 0\}} = \{w = 0\}$.

1. Alors

$$\begin{aligned} \pi_w^* \lambda_{st} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 + a}{R_1 R_2 + R_2} R_1 R_2 d\theta_1 + (R_1 R_2 + R_2 + a) d\theta_2 \\ &= \frac{R_1 R_2 + R_2 + a}{R_1 R_2 + R_2} R_1 R_2 d\theta_1 + (R_1 R_2 + R_2) d\theta_2 + a d\theta_2 \\ &= \left(R_2 + \frac{a}{R_1 + 1} \right) R_1 d\theta_1 + (R_1 + 1) R_2 d\theta_2 + a d\theta_2 \\ &=: \beta_w + a d\theta_2 \end{aligned}$$

où β_w est une 1-forme lisse car $R_1 d\theta_1$ et $R_2 d\theta_2$ sont lisses. Le même calcul montre que $\pi_z^* \lambda_{st} = \beta_z + a d\theta_1$, où β_z est une 1-forme lisse. Ainsi, $\pi^* \lambda_{st}$ est en effet tempérée le long de E avec résidu a . Les deux formes β_w et β_z coïncident bien entendu par changement de carte.

2. Quand $\lambda = \lambda_{st} + b d\theta_1$, on considère la carte dans laquelle E coïncide avec $\{w = 0\}$. Alors, $\pi_w^{-1}(\{z = 0\}) = \{z = 0\}$ et

$$\begin{aligned} \pi_w^* \lambda &= \pi_w^* \lambda_{st} + \pi_w^*(b d\theta_1) = \pi_w^* \lambda_{st} + b(d\theta_1 + d\theta_2) \\ &= \beta_w + b d\theta_1 + (a + b) d\theta_2 \end{aligned}$$

Encore une fois, les mêmes calculs montrent que $\pi_z^*(\lambda_{st} + b d\theta_1) = \beta_z + (a + b) d\theta_1$. Les 1-formes β_z et β_w étant toutes deux lisses. Donc $\hat{\lambda}$ est tempérée le long de $\widehat{\{z = 0\}} \cup E$ dans $B(a + \varepsilon)$ avec résidu b le long de $\widehat{\{z = 0\}}$ et résidu $a + b$ le long de E .

3. Finalement, lorsque $\lambda = \lambda_{st} + b d\theta_1 + c d\theta_2$, on considère les deux cartes de l'éclatement. Si on considère la carte dans laquelle E coïncide avec $\{w = 0\}$, alors $\pi_w^{-1}(\{z = 0\}) = \{z = 0\}$ et

$$\begin{aligned}\pi_w^* \lambda &= \pi_w^* \lambda_{st} + \pi_w^* (b d\theta_1 + c d\theta_2) = \pi_w^* \lambda_{st} + b(d\theta_1 + d\theta_2) + c d\theta_2 \\ &= \beta_w + b d\theta_1 + (a + b + c) d\theta_2\end{aligned}$$

Donc $\hat{\lambda}$ est tempérée le long de $\widehat{\{z = 0\}} \cup \widehat{\{w = 0\}} \cup E$ dans $\widehat{B(a + \varepsilon)}$ avec résidu b le long de $\widehat{\{z = 0\}}$ et avec résidu $a + b + c$ le long de E . Via les mêmes calculs, dans la carte où E coïncide avec $\{z = 0\}$, on a $\pi_z^{-1}(\{w = 0\}) = \{w = 0\}$, et

$$\pi_z^* \lambda = \beta_z + c d\theta_2 + (a + b + c) d\theta_1$$

et on en conclut que $\hat{\lambda}$ est tempérée le long de $\widehat{\{z = 0\}} \cup \widehat{\{w = 0\}} \cup E$ dans $\widehat{B(a + \varepsilon)}$ avec résidu c le long de $\widehat{\{w = 0\}}$ et avec résidu $a + b + c$ le long de E . □

Lemme 3.3.9. *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4. Soit $\varphi : (B(a), \omega_{st}) \hookrightarrow (M, \omega)$ et $(\widehat{M}, \hat{\omega}, E, \pi : \widehat{M} \setminus E \rightarrow M \setminus \varphi(B(a)))$ l'éclatement symplectique de (M, ω) le long de φ . Soit η une 1-forme lisse sur \widehat{M} . Alors, la forme $\eta' := \pi_* \eta$, définie sur $M \setminus \varphi(B(a))$ s'étend en une forme différentielle $\tilde{\eta}$ lisse sur M .*

De plus, si η est une forme fermée, alors η' peut être étendue en une forme fermée sur M .

Démonstration. Soit $\eta \in \Omega^1(\widehat{M})$ une 1-forme lisse. Le poussé en avant $\eta' = \pi_* \eta$ est une 1-forme lisse sur $\varphi(B(a))^c$ dans M . Puisque $\pi^{-1} : M \setminus B(a) \rightarrow \widehat{M} \setminus E$ s'étend de manière lisse à $\partial B(a)$, on peut écrire

$$\pi_* \eta = \sum_i f_i dx^i$$

sur $\mathcal{O}_p(\partial\varphi(B(a))) \subset \overline{\varphi(B(a))^c}$, où les f_i sont des fonctions lisses sur $\overline{\varphi(B(a))^c}$ pour tout i . Alors, par extension de f_i à la boule $\varphi(B(a))$, on étend la forme η' en une forme $\tilde{\eta}$ définie sur toute la variété M .

De plus, si η est fermée, alors η' l'est aussi sur $\mathcal{O}_p(\partial\varphi(B(a)), \overline{\varphi(B(a))^c})$ et donc exacte car $\partial\varphi(B(a))$ est difféomorphe à \mathbb{S}^3 et que $\pi_1(\mathbb{S}^3) = 0$. Ainsi, $\eta' = df$, où f est une fonction lisse sur $\mathcal{O}_p(\partial\varphi(B(a)), \overline{\varphi(B(a))^c})$. En étendant f à la boule, on conclut. □

Corollaire 3.3.10 (des lemmes 3.3.8 et 3.3.9). *Soit (M, ω, Σ) une variété symplectique polarisée. Soit $p \in M$ un point qui est l'intersection d'au plus deux composantes de Σ . Soit $\varphi : (B(a), \omega_{st}) \hookrightarrow (M, \omega)$ centré en p tel que $\varphi^{-1}(\Sigma)$ est soit vide, soit $\{z = 0\}$, soit $\{zw = 0\}$ et soit $(\widehat{M}, \hat{\omega}, E, \pi : \widehat{M} \setminus E \rightarrow M \setminus \varphi(B(a)))$ l'éclatement symplectique de (M, ω) le long de φ . Soit $\hat{\lambda}$ une forme de Liouville sur $\widehat{M} \setminus (\widehat{\Sigma} \cup E)$ tempérée le long de $\widehat{\Sigma} \cup E$.*

Alors $\pi_ \hat{\lambda}$ définie sur $M \setminus \varphi(B(a))$ se prolonge en une forme de Liouville sur $M \setminus \Sigma$.*

Démonstration. Soit $\Sigma := \{(\Sigma_j, \mu_j) \mid j = 1, \dots, N\}$ une polarisation de M . Le lemme 3.3.7 nous assure que $\widehat{\Sigma} \cup (E, \mu)$ est une polarisation de $(\widehat{M}, \hat{\omega})$, où μ est l'un des trois réels donné dans 3.3.7.

Premièrement, on suppose que E n'intersecte pas $\widehat{\Sigma}$. Alors, d'après le cas 1 du lemme 3.3.8, la forme $\pi_* \lambda_{st}$ définie sur $\widehat{B(a + \varepsilon)}$ est poussé en une forme de Liouville sur $\widehat{M} \setminus \Sigma$ par l'injection

$B(a + \varepsilon) \hookrightarrow \widehat{M}$. On note encore cette forme $\pi^* \lambda_{st}$. Celle-ci a résidu $-a$ le long de E . Soit $\hat{\lambda}$ une forme de Liouville tempérée sur $\widehat{M} \setminus (\widehat{\Sigma} \cup E)$. D'après le lemme 3.3.7, la forme $\hat{\lambda}$ a aussi résidu $-a$ le long de E . Donc, d'après la proposition 1.2.17, il existe une 1-forme β , fermée et lisse, sur un voisinage de E telle que $\hat{\lambda} = \pi^* \lambda_{st} + \beta$. La forme β est en particulier lisse le long de E . Alors,

$$\begin{aligned} \pi_* \hat{\lambda} &= \pi_* \pi^* \lambda_{st} + \pi_* \beta \\ &= \lambda_{st} + \pi_* \beta. \end{aligned}$$

De plus, $d\beta = 0$ puisque sur $\mathcal{O}_p(E)$, $\hat{\lambda}$ et $\pi^* \lambda_{st}$ sont des formes de Liouville pour la même forme symplectique $\hat{\omega}$, donc $d(\pi_* \beta) = 0$. D'après le lemme 3.3.9, $\pi_* \beta$ s'étend en une 1-forme lisse fermée sur $\mathcal{O}_p(B(a))$, et peut s'étendre sur tout M . De plus, puisque π est un difféomorphisme symplectique entre $\widehat{M} \setminus E$ et $M \setminus B(a)$, $(\pi|_{\widehat{M} \setminus E})_* \hat{\lambda}$ est une forme de Liouville sur $M \setminus B(a)$, tempérée le long de $\Sigma = \pi|_{\widehat{M} \setminus E}(\widehat{\Sigma})$ avec résidu μ_j le long de $\Sigma_j = (\pi|_{\widehat{M} \setminus E})(\Sigma_j)$.

Deuxièmement, on suppose que E intersecte une autre composante de $\widehat{\Sigma}$ $\hat{\omega}$ -orthogonalement en unique point $p \in \widehat{\Sigma}_{j_0}$, pour $j_0 \in \{1, \dots, N\}$. Ainsi, le résidu le long de E est $\mu = \mu_{j_0} - a$. On considère des coordonnées au voisinages de p données par $\pi_w^{-1}(\mathcal{O}_p(B(a)))$ et la 1-forme $\pi_w^*(\lambda_{st} - \mu_{j_0} d\theta_1)$. Dans ces coordonnées, $E = \{w = 0\}$ et $\widehat{\Sigma}_{j_0} = \{z = 0\}$. Alors, d'après le lemme 3.3.8, la forme $\hat{\lambda}|_{\pi_w^{-1}(\mathcal{O}_p(B(a)))}$ et $\pi_w^*(\lambda_{st} - \mu_{j_0} d\theta_1)$ sont tempérées et ont même résidus le long de E et de $\widehat{\Sigma}_{j_0}$, et à nouveau, on peut écrire

$$\begin{aligned} \pi_{w*} \hat{\lambda} &= \pi_{w*} \pi_w^*(\lambda_{st} - \mu_{j_0} d\theta_1) + \pi_{w*} \beta \\ &= \lambda_{st} - \mu_{j_0} d\theta_1 + \pi_{w*} \beta. \end{aligned}$$

D'après les mêmes argument que dans le premier cas, on conclut que $(\pi_{w|_{\widehat{M} \setminus E}})_* \hat{\lambda}$ est une forme de Liouville tempérée sur $M \setminus \varphi(B(a))$ qui s'étend en une forme de Liouville tempérée coïncidant avec $\lambda_{st} - \mu_{j_0} d\theta_1$ dans $\varphi(B(a))$ et donc en une forme de Liouville tempérée sur tout M avec pour résidus μ_{j_0} le long de $\Sigma_{j_0} = \pi_w(\widehat{\Sigma}_{j_0}) \cup D$, où D est le disque de Hopf tel que $\varphi^{-1}(D) = \{z = 0\}$.

Finalement, supposons que E intersecte deux autres composantes $\widehat{\Sigma}_{j_0}$ et $\widehat{\Sigma}_{j_1}$ de $\widehat{\Sigma}$, chacune en un unique point. Ainsi, le résidu le long de E est $\mu = \mu_{j_0} + \mu_{j_1} - a$. Alors, on a deux systèmes de coordonnées à considérer donnés par $\pi_w^{-1}(\mathcal{O}_p(B(a)))$ et $\pi_z^{-1}(\mathcal{O}_p(B(a)))$. Dans les coordonnées $\pi_w^{-1}(\mathcal{O}_p(B(a)))$ on considère la forme $\pi_w^*(\lambda_{st} - \mu_{j_0} d\theta_1 - \mu_{j_1} d\theta_2)$. Dans cette carte, $E = \{w = 0\}$ et $\widehat{\Sigma}_{j_0} = \{z = 0\}$ tandis que $\widehat{\Sigma}_{j_1}$ est envoyé à l'infini. D'après les lemmes 3.3.7 3.3.8, les formes $\hat{\lambda}$ et $\pi_w^*(\lambda_{st} - \mu_{j_0} d\theta_1 - \mu_{j_1} d\theta_2)$ sont tempérées avec les mêmes résidus le long de E et $\widehat{\Sigma}_{j_0}$, et $\pi_{w*} \hat{\lambda} = \lambda_{st} - \mu_{j_0} d\theta_1 - \mu_{j_1} d\theta_2 + \pi_{w*} \beta$. Dans le système de coordonnées donné par $\pi_z^{-1}(\mathcal{O}_p(B(a)))$ on considère $\pi_z^*(\lambda_{st} - \mu_{j_0} d\theta_1 - \mu_{j_1} d\theta_2)$ et on a $E = \{z = 0\}$ et $\widehat{\Sigma}_{j_1} = \{w = 0\}$ tandis que cette fois $\widehat{\Sigma}_{j_0}$ est envoyée à l'infini. Les même calculs que dans l'autre carte montrent que $\pi_{z*} \hat{\lambda} = \lambda_{st} - \mu_{j_0} d\theta_1 - \mu_{j_1} d\theta_2 + \pi_{z*} \beta$. A nouveau, en utilisant le lemme 3.3.9, on peut étendre $\pi_{w*} \beta$ et $\pi_{z*} \beta$ en une 1-forme lisse fermée lisse sur tout M et on conclut via les mêmes arguments que dans le cas précédent. \square

Démonstration de la proposition 3.3.6. Soit $(\widehat{\mathbb{C}}^2_K, \hat{\omega}_K, \mathcal{T}^K = (S_i^K))$ un éclatement itéré de $(\mathbb{C}^2, \omega_{st})$ tel que $[\hat{\omega}] = -\sum_{i=1}^K a_i e_i$. On note $\tau := \hat{\omega}_K|_{\mathcal{T}^K}$. Comme la classe d'homologie de

S_i^K s'écrit

$$[S_i^K] = [E_i] - \sum_{j \neq i} ([E_j] \cdot [S_i^K])[E_j],$$

où $[E_j] \cdot [S_i^K] \in \{0, 1\}$ (proposition 1.5.7), on peut réécrire

$$[\hat{\omega}_K] = - \sum_{i=1}^K \mu_i \text{PD}(S_i^K), \mu_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, K\}.$$

Ainsi, $\{(S_i^K, -\mu_i), i = 1, \dots, K\}$ est clairement une polarisation symplectique de $(\widehat{\mathbb{C}}^2_K, \hat{\omega}_K)$. Il existe donc une forme de Liouville $\hat{\lambda}_K$ sur $\widehat{\mathbb{C}}^2_K \setminus \mathcal{T}^K$, tempérée le long de \mathcal{T}^K , avec résidu $-\mu_i$ le long de S_i^K .

En appliquant le corollaire 3.3.10 à chaque contraction de \mathcal{T}^K , on montre que la forme $\pi_* \hat{\lambda}_K$ définie sur $M \setminus \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \tau)$ s'étend en une forme de Liouville λ sur \mathbb{C}^2 . De plus, comme $X_{\hat{\lambda}_K}$ pointe vers l'extérieur de \mathcal{T}^K dans $\widehat{\mathbb{C}}^2_K$, le champ de vecteur X_λ pointe vers l'extérieur de $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \tau)$. \square

3.3.4 Empilement maximal de boules

Lemme 3.3.11. *Soit $(B(a), \omega_{st})$ une boule symplectique et soient $D_1 = \{z = 0\}$ et $D_2 = \{w = 0\}$ deux disques de $B(a)$. Alors il existe un plongement symplectique de $(B(a), \omega_{st})$ dans le complément de $D_1 \cup D_2$.*

Démonstration. C'est un corollaire de la proposition 1.2.13 via un argument expliqué dans [Ops14b], proposition 4.2, auquel nous renvoyons. \square

Proposition 3.3.12. *Soit \mathcal{T}^K un diviseur exceptionnel symplectique à croisement normaux et soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_K)$ une suite \mathcal{T}^K -adaptée caractérisant une forme d'aire τ sur \mathcal{T}^K (voir remarque 3.2.2 caractérisant les domaines $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$). Soit $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ le domaine associé à \mathcal{T}^K et \mathbf{a} . Alors, le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ contient la réunion disjointe des boules $B(a_i)$, $i \in \{1, \dots, K\}$.*

Démonstration. Soit (X_K, \mathcal{T}^K) un éclatement itéré de \mathbb{C}^2 et soit ω_K une forme symplectique sur X_K telle que \mathcal{T}^K est un diviseur exceptionnel symplectique à croisements normaux telle que $\omega_K|_{\mathcal{T}^K} = \tau$. On raisonne par récurrence sur la construction des ensembles successifs \mathcal{D}_{K-i} impliquée dans celle de $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$.

Initialisation : La première étape de la construction de $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ est l'ensemble $\mathcal{D}_{K-1} = \varphi_K(B(a_K))$, où $\varphi_K : (B(a_K), \omega_{st}) \hookrightarrow (X_{K-1}, \omega_{K-1})$ est le plongement symplectique associé à la contraction symplectique de (X_K, ω_K, E_K) . Il est donc évident que \mathcal{D}_{K-1} contient $B(a_K)$. De plus, \mathcal{T}^{K-1} intersecte \mathcal{D}_{K-1} selon un ou deux disques de Hopf orthogonaux, donc le lemme 3.3.11, fournit un plongement de $B(a_K)$ dans $\mathcal{D}_{K-1} \setminus \mathcal{T}^{K-1}$.

Hérédité : Soit $i \in \{1, \dots, K\}$. On suppose que $\mathcal{D}_{K-j} \setminus \mathcal{T}^{K-j}$, (qui correspond à la j -ème étape de la construction de $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$), contient l'union disjointe des boules symplectiques $B(a_K), \dots, B(a_{K-j+1})$. La $j+1$ -ème étape de la construction de $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ donne

$$\mathcal{D}_{K-j-1} = \pi_{K-j, K-j-1}^\omega(\mathcal{D}_{K-j} \setminus E_{K-j}) \cup \varphi_{K-j}(B(a_{K-j})).$$

Puisque $\pi_{K-j, K-j-1}^\omega$ est un symplectomorphisme de E_{K-j}^c sur $\varphi_{K-j}(B(a_{K-j}))^c$, l'ensemble $\pi_{K-j, K-j-1}^\omega(\mathcal{D}_{K-j} \setminus E_{K-j}) \setminus \mathcal{T}^{K-j-1}$ contient $\bigsqcup_{i=0}^{j-1} \varphi_{K-i}(B(a_{K-i}))$. Donc, par définition de \mathcal{D}_{K-j-1} , il contient cette réunion disjointe à laquelle on adjoint $\varphi_{K-j}(B(a_{K-j}))$. Enfin, en appliquant le lemme 3.3.11, on conclut comme dans l'étape d'initialisation que $\mathcal{D}_{K-j-1} \setminus \mathcal{T}^{K-j-1}$ contient $\bigsqcup_{i=0}^j \varphi_{K-i}(B(a_{K-i}))$. \square

3.4 Caractérisation par empilement

Dans cette partie on montre que dans le cas des variétés $M \in \mathcal{C}^*$, le plongement d'un domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ est équivalent au plongement d'une certaine union disjointe de boules symplectiques.

Proposition 3.4.1. *Soit $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}) \subset (\mathbb{C}^2, \omega_{st})$ le domaine associé à un diviseur exceptionnel symplectique muni d'une forme d'aire τ . Soient $B(a_1), \dots, B(a_K)$, les boules symplectique donnée par la proposition 3.3.12. Soit (M, ω) une variété symplectique de la classe \mathcal{C}^* .*

Si $(\bigsqcup_{i=1}^K B(a_i), \omega_{st}) \hookrightarrow (M, \omega)$, alors $(\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}), \omega_{st}) \hookrightarrow (M, \omega)$.

Démonstration. Soit (M, ω) une variété de la classe \mathcal{C}^* qui contient un empilement de K boules de tailles (a_i) . Soit $\delta \ll 1$. Il existe un plongement $\varphi : \delta \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}) \hookrightarrow (M, \omega)$ puisque $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ est un domaine borné de \mathbb{C}^2 . On a un difféomorphisme symplectique entre

$$(\delta \text{PSDB}(\mathcal{T}^K, \varepsilon) \setminus \mathcal{T}^K) \subset (\widehat{\mathbb{C}^2}, \widehat{\omega}_{st, K}) \text{ et } (\mathcal{O}p(\delta \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}), \mathbb{C}^2) \setminus \delta \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}), \omega_{st})$$

(remarque 3.3.2). On définit alors

$$(M_\varphi, \omega_\varphi) := (M \setminus \delta \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}), \omega) \bigcup_{\varphi \circ \pi} (\text{PSDB}(\mathcal{T}^K, \varepsilon), \delta \omega_{st}).$$

La variété ainsi construite est difféomorphe à $(\widehat{M}_K, \mathcal{T}^K)$. On note encore π la projection de M_φ sur M .

Soit la classe d'homologie $A := \text{PD}([\pi^* \omega]) - \sum_{i=1}^K a_i [E_i]$. Par hypothèse, on a un empilement de (M, ω) par les boules disjointes $B(a_i)$, $i \in \{1, \dots, K\}$. Donc A satisfait $A^2 > 0$, puisque

$$A^2 = \text{Vol}_\omega(M) - \sum_{i=1}^K a_i^2 = \text{Vol}(M \setminus \bigsqcup_{i=1}^K B(a_i)) > 0.$$

De plus,

$$[\omega_\varphi](A) = ([\pi^* \omega] - \sum_{i=1}^K \delta a_i e_i)(A) = \text{Vol}_\omega(M) - \delta \sum_{i=1}^K a_i^2 > 0.$$

Donc, d'après Li-Liu [LL95], il existe $q_0 > 0$, tel que pour tout $q > q_0$, la classe qA vérifie $Gr(qA) \neq 0$. De plus, la classe satisfait $A \cdot E \geq 0$, pour toute sphère exceptionnelle E plongée symplectiquement. En effet, si Ω est une forme symplectique sur \widehat{M}_K , notons $\mathbf{E}(\Omega)$ l'ensemble des classes de $H_2(\widehat{M}_K)$ représentée par une sphère exceptionnelle Ω -symplectique plongée. La théorie des courbes pseudo-holomorphes en dimension 4 garantit que $\mathbf{E}(\Omega)$ est invariant par déformation symplectique de Ω . D'après le corollaire 2.2.10, on obtient donc $\mathbf{E}(\omega_\varphi) = \mathbf{E}(\widehat{\omega}_{K, a})$. Or, pour tout $E \in \mathbf{E}(\widehat{\omega}_{K, a})$, on a $0 < \widehat{\omega}_{K, a}(E) = \text{PD}(A)[E] = A \cdot [E]$. Donc $A \cdot E > 0$ pour tout

$E \in \mathbf{E}(\omega_\varphi)$. Finalement, puisque chaque composante de \mathcal{T}^K représente une classe d'homologie de la forme

$$[S_i^K] = [E_i] - \sum_{j \neq i} ([S_i^K] \cdot [E_j])[E_j]$$

on a

$$\begin{aligned} A \cdot [S_i^K] &= (\text{PD}([\pi^*\omega]) - \sum_{i=1}^K a_i [E_i]) \cdot [S_i^K] \\ &= 0 + (a_i - \sum_{j \neq i} ([S_i^K] \cdot [E_j]) a_j) \\ &= \frac{1}{\delta} (0 + (\delta a_i - \sum_{j \neq i} ([S_i^K] \cdot [E_j]) \delta a_j) \\ &= \frac{1}{\delta} \omega_\varphi(S_i^K). \end{aligned}$$

Cette quantité est bien strictement positive puisque, S_i^K est une courbe symplectique dans $(M_\varphi, \omega_\varphi)$, par définition de \mathcal{T}^K . Ainsi, toujours d'après [LL95], la classe qA est représentée par une courbe J -holomorphe dans M_φ pour toute structure presque complexe ω_φ -compatible générique. D'après les résultats de compacités des courbes holomorphes [Gro85], cette classe est aussi J_φ -représentée par une courbe éventuellement nodale, dont la décomposition en composante irréductible s'écrit

$$C \cup \left(\bigcup_{i \in I} S_i^K \right)$$

où I est une partie de $\{1, \dots, K\}$, et C est une courbe plongée qui intersecte \mathcal{T}^K positivement et transversalement (et donc, une petite perturbation de C intersecte \mathcal{T}^K ω_φ -orthogonalement). Le procédé d'inflation singulière le long de la classe qA (théorème 1.4.5) donne alors une famille de formes symplectiques $\omega_{\varphi,t}$ dans la classe $\omega_\varphi + t \text{PD}(qA)$ pour laquelle \mathcal{T}^K reste $\omega_{\varphi,t}$ -symplectique à croisements normaux. En effet, $C \cup (\bigcup_{i \in I} S_i^K)$ reste symplectique le long de l'inflation (théorème 1.4.5, point 2) et puisque C et les $S_i^K, i \in I$ intersectent les $S_j^K, j \in I^c$ ω_φ -orthogonalement, les S_j^K restent symplectiques pour $j \in I^c$ le long de l'inflation (théorème 1.4.5, point 4) et donc $\mathcal{T}^K = (S_i^K)_{i \in I \cup I^c}$ reste symplectique à croisements normaux le long de l'inflation. Cette inflation est réalisable pour $t \in [0, \kappa]$ et puisque $A \cdot [S_i^K] > 0$, pour tout $i \in \{1, \dots, K\}$, $\kappa = +\infty$. En divisant la famille de formes par $(1 + tq)$ comme dans la démonstration de 1.4.3, on obtient une famille de formes symplectiques dans la classe

$$[\pi^*\omega] - \frac{\delta + tq\alpha}{1 + tq} \sum_{i=1}^K a_i e_i$$

et pour $t \gg 1$, on a un plongement du domaine $(1 - \eta) \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ dans (M, ω) pour $\eta \ll 1$. □

Chapitre 4

Démonstrations des théorèmes

Dans ce chapitre, on démontre le théorème I. Pour cela on le scinde en deux parties. Dans la première partie on montre comment associer un domaine symplectique à une singularité algébrique tandis que dans la deuxième partie on montre le chemin inverse.

Dans toute cette partie on note $\mathbf{a}(\mathcal{S}) = (a_1, \dots, a_K)$, la suite associée à une singularité algébrique plane \mathcal{S} telle que $[\widehat{\mathcal{S}}] = -\sum_{i=1}^K a_i [E_i]$. Si $\mathcal{T}^K = (S_i^K)_{i=1}^K$ désigne un diviseur exceptionnel dans $\widehat{\mathbb{C}}^2_K$, on note $\mathbf{b}(\mathbf{a}) = (b_1(\mathbf{a}), \dots, b_K(\mathbf{a}))$ la suite des aires des composantes de \mathcal{T}^K relativement à $-\sum_{i=1}^K a_i e_i$. On rappelle que dans ce cas

$$b_i(\mathbf{a}) = [\widehat{\mathcal{S}}] \cdot [S_i^K] = \left(-\sum_{j=1}^K a_j e_j \right) \cdot [S_i^K] = a_i - \sum_{j \neq i} ([E_j] \cdot [S_i^K]) a_j$$

Remarque 4.0.1. La formule ci-dessus montre que la suite des aires $\mathbf{b}(\mathbf{a})$ est une fonction linéaire de \mathbf{a} .

4.1 Domaine associé à une singularité

Lemme 4.1.1. Soit \mathcal{S} une singularité algébrique plane isolée et $\widehat{\mathcal{S}}$ sa résolution minimale dans $(\widehat{\mathbb{C}}^2_K, \mathcal{T}^K = (S_i^K)_{i=1}^K)$. On note $[\widehat{\mathcal{S}}] = -\sum_{i=1}^K a_i [E_i] \in H_2(\widehat{\mathbb{C}}^2_K, \mathbb{Z})$. On note $\widehat{\omega}_{stK}$ la forme obtenue par éclatement sur $\widehat{\mathbb{C}}^2$ dans la classe $-\sum_{i=1}^K a_i e_i$. La suite \mathbf{a} n'est pas nécessairement \mathcal{T}^K -adaptée mais il existe des $\varepsilon_i \in \mathbb{Q}^+$ arbitrairement petits, tels que $(a_1 + \varepsilon_1, \dots, a_K + \varepsilon_K)$ est \mathcal{T}^K -adaptée. En fait, n'importe quelle suite ε_n de suite \mathcal{T}^K -adaptée tendant vers 0 convient.

Démonstration. On rappelle qu'on note S_i^K les composantes de \mathcal{T}^K qui sont les transformées strictes du i -ème diviseur exceptionnel et qu'une suite $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_K)$ est \mathcal{T}^K -adaptée si et seulement si $0 < b_i(\mathbf{a})$ pour tout $i \in \{1, \dots, K\}$. Puisque $\widehat{\mathcal{S}}$ et S_i^K sont holomorphes, on a $b_i(\mathbf{a}) \geq 0$ mais il se peut que certains $b_i(\mathbf{a})$ soient nuls, de sorte que \mathbf{a} n'est pas \mathcal{T}^K -adaptée. Or, on a vu dans la preuve de la proposition 3.4.1 que

$$b_i(\mathbf{a}) = a_i - \sum_{j \neq i} ([E_j] \cdot [S_i^K]) a_j.$$

Ainsi, la suite $\mathbf{b}(\mathbf{a} = (b_1(\mathbf{a}), \dots, b_K(\mathbf{a})))$ s'écrit $M\mathbf{a}$ où M est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et des termes négatifs au-dessus. Notons que \mathbf{a}' est \mathcal{T}^K -adaptée si et seulement si $M\mathbf{a}'$ est une suite strictement positive. Maintenant, si ε est \mathcal{T}^K -adaptée, $M\mathbf{a}$ est positive et $M\varepsilon$ est strictement positive, donc $M(\mathbf{a} + \varepsilon)$ est strictement positive et donc $\mathbf{a} + \varepsilon$ est \mathcal{T}^K -adaptée.

Il reste à démontrer, pour compléter la preuve, l'existence d'une suite $\varepsilon > 0$ \mathcal{T}^K -adaptée. Puisque M est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et ses autres coefficients négatifs, son inverse M^{-1} est une matrice positive. Si δ est une suite strictement positive, $M^{-1}\delta$ est donc strictement positive et \mathcal{T}^K -adaptée. \square

Définition 4.1.2. Soient \mathcal{S} une singularité algébrique plane isolée, $\widehat{\mathcal{S}}$ sa résolution dans $(\widehat{\mathbb{C}}^2_K, \mathcal{T}^K)$. On pose

$$[\widehat{\mathcal{S}}] = - \sum_{i=1}^K a_i [E_i] \in H_2(\widehat{\mathbb{C}}^2_K, \mathbb{Z}).$$

Si $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_K)$ est \mathcal{T}^K -adaptée, on pose

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{S}) := \mathcal{D}(\mathcal{S}) := \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}).$$

(On rappelle que $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ a été défini dans la partie 3.2). Sinon, soit $\varepsilon_n \in \mathbb{Q}^K$ \mathcal{T}^K -adaptée avec $\varepsilon_n \rightarrow (0, \dots, 0)$ telle que $\mathbf{a} + \varepsilon_n$ est \mathcal{T}^K -adaptée et

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{S}) := \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a} + \varepsilon_n).$$

On énonce la première implication du I comme suit :

Proposition 4.1.3. Soient \mathcal{S} une singularité en $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ et $d \in \mathbb{N}_{>0}$. Soit (M, ω) une variété symplectique entière ($[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$) et soit $C \subset (M, \omega)$ une courbe symplectique Poincaré duale à $d[\omega]$, réalisant \mathcal{S} en $p \in M$. Soit $(\widehat{M}_K, \mathcal{T}^K, \pi)$ l'éclatement complexe itéré de (M, ω) résolvant C et soit $\widehat{C}_K \in [\pi^*C] - \sum_{i=1}^K a_i [E_i]$ la résolution de C . Alors, pour $N \gg 1$, $\alpha \mathcal{D}_N(\mathcal{S})$ se plonge symplectiquement dans M pour tout :

1. $\alpha < 1/d$ si $[\widehat{C}]^2 \geq 0$.
2. $\alpha < \frac{A_\omega(C)}{[\widehat{C}]^2 + dA_\omega(C)}$, si $[\widehat{C}]^2 < 0$.

Démonstration. On suppose dans un premier temps que \mathbf{a} est \mathcal{T}^K -adaptée.

Soit $\pi : (\widehat{M}_K, \widehat{J}_K, \mathcal{T}^K) \rightarrow (M, J, p)$, un éclatement complexe itéré de M , qui résout \mathcal{S} . D'après la proposition 2.0.4, pour toute suite \mathcal{T}^K -adaptée $\delta := (\delta_1, \dots, \delta_K) \ll 1$, il existe une forme symplectique $\widehat{\omega}_{K, \delta}$ dans la classe $[\pi^*\omega] - \sum_{i=1}^K \delta_i e_i$ telle que \mathcal{T}^K est un diviseur exceptionnel symplectique à croisements normaux et il existe une courbe symplectique lisse \tilde{C} homologue à la résolution \widehat{C}_K de C dont les intersections avec \mathcal{T}^K sont $\widehat{\omega}_{K, \delta}$ -orthogonales. On rappelle que

$$[\widehat{C}_K] = [\pi^*C] - \sum_{i=1}^K a_i [E_i].$$

Puisque \tilde{C} est une courbe symplectique lisse dans $(\widehat{M}_K, \widehat{\omega}_{K, \delta})$, le procédé d'inflation classique de Lalonde-McDuff 1.4.1 fournit une famille à 1-paramètre de formes symplectique $\widehat{\omega}_{K, t}$ dans la classe

$$[\widehat{\omega}_{K, \delta}] + t \text{PD}([\tilde{C}]), \quad t \in [0, \kappa].$$

Puisque $C \in \text{PD}([d\omega])$:

$$[\hat{\omega}_{K,t}] = (1+td)[\pi^*\omega] - \sum_{i=1}^K (\delta_i + ta_i)e_i.$$

De plus, puisque \mathcal{T}^K intersecte \tilde{C} $\hat{\omega}_{K,\delta}$ -orthogonalement, la remarque 1.4.2 assure que \mathcal{T}^K reste un diviseur exceptionnel symplectiques à croisements normaux au cours de l'inflation. En divisant $\hat{\omega}_{K,t}$ par $(1+td)$, on obtient une forme symplectique $\hat{\omega}'_{K,t}$ dans la classe

$$[\hat{\omega}'_{K,t}] = [\pi^*\omega] - \sum_{i=1}^K \frac{\delta_i + ta_i}{1+td} e_i$$

pour laquelle \mathcal{T}^K reste symplectique à croisements normaux pour tout $t \in [0, \kappa[$. La proposition 3.1.8 fournit donc une structure symplectique ω_t sur M dans la classe $\pi_*[\hat{\omega}_{K,t}] = [\omega]$ pour tout $t \in [0, \kappa[$. D'après le théorème de stabilité de Moser, toutes ces formes sont donc symplectomorphes.

D'après 1.4.1, il y a deux cas à étudier :

1. Si $[\hat{C}_K]^2 \geq 0$, alors on peut enfler le long de \tilde{C} pour tout $t > 0$ ($\kappa = +\infty$). Dans ce cas, pour $T \gg 1$,

$$\frac{\delta_i + Ta_i}{1+Td} = \frac{\delta_i/T + a_i}{1/T + d} \left(\sim \frac{a_i}{d} \right).$$

On obtient donc une forme symplectique $\hat{\omega}_{K,T}$ pour laquelle le domaine $(1/T+d)^{-1} \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}_T)$ se plonge symplectiquement dans $(M, \omega_T) \approx (M, \omega)$, où $\mathbf{a}_T = (\delta_1/T + a_1, \dots, \delta_K/T + a_K)$. Puisque la suite \mathbf{a} est \mathcal{T}^K -adaptée, il en est de même pour la suite $\delta_i = \varepsilon a_i$. En prenant cette suite pour $\varepsilon \ll 1$, $\mathbf{a}_T = \mathbf{a}(1 + \varepsilon/T)$. D'après la proposition 3.3.5, $\frac{\varepsilon+T}{1+dT} \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ se plonge dans (M, ω) . Si $\alpha < 1/d$, $\frac{\varepsilon+T}{1+dT} > \alpha$ pour $T \gg 1$, donc $\alpha \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ se plonge dans (M, ω) .

2. Si $[\hat{C}_K]^2 < 0$, on peut alors enfler le long de \tilde{C} pour tout $t < \kappa = \mathcal{A}_{\hat{\omega}_{K,\delta}}(\tilde{C})/|[\tilde{C}]^2|$. Ici, $\mathcal{A}_{\hat{\omega}_{K,\delta}}(\tilde{C}) = \mathcal{A}_\omega(C) - \sum_{i=1}^K \delta_i^2$ et $[\tilde{C}]^2 = [\hat{C}_K]^2$. Donc

$$\kappa = \frac{\mathcal{A}_\omega(C) - \sum_{i=1}^K \delta_i^2}{|[\hat{C}_K]^2|}.$$

Alors,

$$[\hat{\omega}'_{K,\kappa}] = [\pi^*\omega] - \sum_{i=1}^K \frac{\delta_i + \kappa a_i}{1 + \kappa d} e_i.$$

Donc, il existe un plongement du domaine $\alpha_\kappa \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}_\kappa)$ dans $(M, \omega_\kappa) \approx (M, \omega)$ où $\alpha_\kappa = (1 + \kappa d)^{-1}$ et $\mathbf{a}_\kappa = (\delta_1 + \kappa a_1, \dots, \delta_K + \kappa a_K)$. En prenant $\delta_i = \varepsilon a_i$ pour $\varepsilon \ll 1$, $\mathbf{a}_\kappa = (\varepsilon + \kappa)\mathbf{a}$. D'après la proposition 3.3.5, $\frac{\varepsilon+\kappa}{1+\kappa d} \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ se plonge dans (M, ω) . Or

$$\frac{\varepsilon + \kappa}{1 + \kappa d} = \frac{\mathcal{A}_{\hat{\omega}_{K,\delta}}(\tilde{C}) + |[\hat{C}_K]^2| \varepsilon}{|[\hat{C}_K]^2| + \mathcal{A}_{\hat{\omega}_{K,\delta}}(\tilde{C})d},$$

et $\mathcal{A}_{\hat{\omega}_{K,\delta}}(\tilde{C}) = \mathcal{A}_\omega(C) - \varepsilon^2 \sum_{i=1}^K a_i^2$. Si $\alpha < \frac{\mathcal{A}_\omega(C)}{|[\hat{C}_K]^2| + d\mathcal{A}_\omega(C)}$, pour ε suffisamment petit, on a alors $\alpha < \frac{\varepsilon+\kappa}{1+\kappa d}$ et donc $\alpha \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ se plonge dans (M, ω) .

Si \mathbf{a} n'est pas \mathcal{T}^K -adaptée.

Choisissons une suite \mathcal{T}^K -adaptée ε . On pose $\mathbf{a}'_n := \mathbf{a} + \varepsilon/n$, de sorte que \mathbf{a}'_n est \mathcal{T}^K -adaptée. On souhaite montrer que $\alpha \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}'_n)$ se plonge dans (M, ω) . Pour $\alpha < 1/d$ ou $\mathcal{A}_\omega(C)/(d\mathcal{A}_\omega(C) + |\widehat{C}_K|^2)$, on a vu ci-dessus qu'il existe $t_0 < \kappa$ ($\kappa = +\infty$ ou $\kappa = \mathcal{A}_{\omega_{\kappa, \delta}}(\widehat{C})/|\widehat{C}_K|^2$, respectivement) tel que $\frac{t_0}{1+t_0d} > \alpha$. La remarque cruciale est que κ ne dépend pas du choix de δ suffisamment petit. On peut donc prendre $\delta = t_0\varepsilon/n$. L'inflation jusqu'à t_0 donne alors une forme sur l'éclatement dans la classe

$$[\pi^*\omega] - \frac{t_0}{1+t_0d} \sum_{i=1}^K a'_{i,n} e_i.$$

On conclut comme ci-dessus. □

4.2 Singularité de Donaldson associée à un domaine

Dans cette partie, après avoir expliqué ce qu'est la singularité $\mathcal{S}^{\otimes k}$, on démontre la seconde implication du théorème I.

4.2.1 Définition de $\mathcal{S}^{\otimes N}$

Soit $\mathcal{S} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ et soit $\mathcal{T}^K \subset (\widehat{\mathbb{C}}^2_K, \mathcal{T}^K) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$. Soient $\widehat{\mathcal{S}}$ le germe de la résolution algébrique de \mathcal{S} qui intersecte \mathcal{T}^K transversalement et \widehat{C} une réalisation de $\widehat{\mathcal{S}}$.

Notons $\{p_1, \dots, p_k\} = \widehat{C} \cap \mathcal{T}^K$ et soient

$$f_{i,j} : (\mathcal{O}_p(p_i), \mathcal{T}_{p_i}^K) \rightarrow (\mathcal{O}_p(p_i), \mathcal{T}_{p_i}^K), (i, j) \in \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, N\},$$

des biholomorphismes locaux tels que $f_{i,j}(p_i) \neq p_i$. Quitte à rétrécir les voisinages $\mathcal{O}_p(p_i)$, on peut supposer que $\mathcal{O}_p(p_i) \cap \mathcal{O}_p(p_{i'}) = \emptyset$, dès que $i \neq i'$. On définit $\widehat{C}^{\otimes N} = \bigsqcup_{i,j} f_{i,j}(\widehat{C})$ et $\mathcal{S}^{\otimes N}$ est alors la singularité $\left[\pi \left(\widehat{C}^{\otimes N} \right) \right]$.

Remarque 4.2.1. La singularité $\mathcal{S}^{\otimes N}$ dépend des $f_{i,j}$ choisis dans la catégorie algébrique. Deux courbes du type $C^{\otimes N}(f_{i,j})$ ne représentent pas nécessairement la même singularité.

Par exemple, si \mathcal{S} est une singularité dont la résolution est donnée par un seul éclatement dont la transformée stricte est $\widehat{\mathcal{S}} = \{w = 0\}$ et soit $\widehat{\mathcal{S}}^{\otimes 4}$ obtenue par le procédé décrit précédemment. Alors il n'existe pas forcément de biholomorphisme entre 2 telles singularités.

En effet, dans cet exemple $\mathcal{S}^{\otimes 4}$ est une singularité étoilée à 4 branches. Notons $C^{\otimes 4}(f_{i,j})$ et $C^{\otimes 4}(f'_{i,j})$ deux réalisations de $\mathcal{S}^{\otimes 4}$. Supposons que trois branches sont les mêmes sur ces deux réalisations et que la quatrième est différente (voir figure 4.1). Alors, il n'existe pas de biholomorphisme $\varphi : (\mathcal{O}_p(0, \mathbb{C}^2), 0) \rightarrow (\mathcal{O}_p(0, \mathbb{C}^2), 0)$, envoyant $C^{\otimes 4}(f_{i,j})$ sur $C^{\otimes 4}(f'_{i,j})$. Si un tel biholomorphisme existait, alors il remonterait en un biholomorphisme de $\tilde{\varphi} : (\mathcal{O}_p(E, \widehat{\mathbb{C}}^2), E) \rightarrow (\mathcal{O}_p(E, \widehat{\mathbb{C}}^2), E)$ fixant trois points de $E \cong \mathbb{C}P^1$. Or un tel biholomorphisme se restreint en un biholomorphisme de $\mathbb{C}P^1$ fixant trois points et donc est l'identité sur $\mathbb{C}P^1$. Cependant, la réalisabilité symplectique de toutes ces singularités $C^{\otimes N}(f_{i,j})$ sont équivalentes.

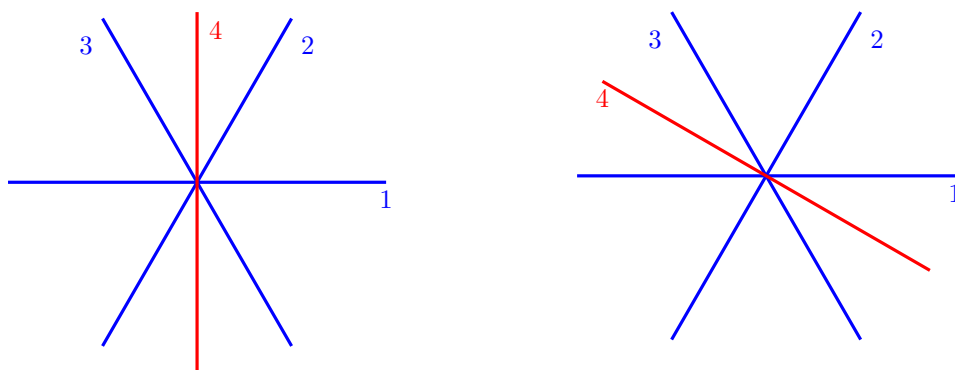


FIGURE 4.1 – Deux singularités étoilées holomorphiquement différentes.

Tout ce travail porte sur la réalisabilité des singularités algébriques et on aurait pu dès le début considérer l'espace quotient des singularités suivant :

$$\{\mathcal{S} \text{ des singularités algébriques planes isolées}\} / \sim$$

où $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ si et seulement si pour toute variété (M, ω) , pour tout $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$, \mathcal{S} est réalisable symplectiquement dans la classe A si et seulement si \mathcal{S}' l'est aussi. Dans ce cadre, la réalisabilité symplectique de $\mathcal{S}^{\otimes N}$ ne dépend pas des f_{ij} choisis.

4.2.2 Singularité de Donaldson

Définition 4.2.2. Soit \mathcal{T}^K un diviseur symplectique à croisements normaux dans $(\widehat{M}_K, \widehat{\omega}_K)$ avec $\widehat{\omega}_K$ entière. Une singularité de Donaldson est une singularité obtenue en contractant algébriquement une courbe symplectique $C \subset \widehat{M}_K$ construite par la méthode de Donaldson 1.3.6.

On énonce la seconde implication du théorème I comme suit :

Proposition 4.2.3. Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4 dans laquelle se plonge $\alpha \mathcal{D}_N(\mathcal{S})$, $\alpha \in \mathbb{Q}^{+*}$, $N \gg 1$. Alors, pour tout $q \gg 1$, $q \in \alpha \mathbb{N} \cap \mathbb{N}$, il existe une courbe symplectique $C \subset (M, \omega)$ Poincaré duale à $q\omega$ qui réalise $\mathcal{S}^{\otimes q\alpha}$.

Démonstration. On a vu lors de la démonstration de la proposition 4.1.3 que deux types de domaines peuvent apparaître. Si $\mathbf{a}(\mathcal{S})$ est \mathcal{T}^K adaptée, alors $\mathcal{D}_N(\mathcal{S}) = \mathcal{D}(\mathcal{S}) = \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$. Si $\mathbf{a}(\mathcal{S})$ n'est pas \mathcal{T}^K -adaptée, alors $\mathcal{D}_N(\mathcal{S}) = \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a} + \varepsilon_N)$ où $\varepsilon_n \in (\mathbb{Q}^+)^n$ est \mathcal{T}^K -adaptée pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_n \rightarrow \mathbf{0}$.

Soit $\mathcal{T}^K = (S_i^K)_{i=1}^K$ le diviseur exceptionnel singulier associé à la résolution de \mathcal{S} et soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_K)$ la suite \mathcal{T}^K -adaptée associée au plongement de \mathcal{D} (de type $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ ou $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a}_n)$ suivant le cas que l'on détaille plus tard). D'après la remarque 3.3.2, on a un symplectomorphisme

$$\varphi : (\mathcal{O}p(\alpha \mathcal{D}) \setminus \alpha \mathcal{D}, \omega) \rightarrow (\mathcal{O}p(\mathcal{T}^K) \setminus \mathcal{T}^K, \alpha(\mathbf{a} + \varepsilon_N)).$$

On définit alors

$$(M_\varphi, \omega_\varphi) := (M \setminus \alpha \mathcal{D}, \omega) \bigcup (\mathcal{O}p(\mathcal{T}^K), \alpha(\mathbf{a} + \varepsilon_N)).$$

La variété M_φ est diffeomorphe à \widehat{M}_K et est munie d'une forme symplectique $\widehat{\omega}_{\alpha(\mathbf{a}+\varepsilon_N)}$ dans la classe

$$[\pi^*\omega] - \alpha \sum_{i=1}^K (a_i + \varepsilon_{i,N}) e_i \in H_2(M_\varphi, \mathbb{Q}).$$

La construction de Donaldson 1.3.6 nous fournit une courbe symplectique \widehat{C}_N dans la classe $q_N \text{PD}(\widehat{\omega}_{\alpha(\mathbf{a}+\varepsilon_N)})$, pour tout $q_N \gg 1$, $q_N \in (\alpha^{-1}\mathbb{N}) \cap \mathbb{N}$. Cette courbe est donc dans la classe

$$[\widehat{C}] = q_N \text{PD}(\pi^*\omega) - q_N \alpha \sum_{i=1}^K (a_i + \varepsilon_{i,N}) [E_i]$$

et intersecte la composante S_i^K en $[\widehat{C}] \cdot [S_i^K] = q_N \widehat{\omega}_{\alpha(\mathbf{a}+\varepsilon_N)}(S_i^K)$ points distincts pour tout $i \in \{1, \dots, K\}$. Or, chaque $[S_i^K]$ s'écrit

$$[S_i^K] = [E_i] - \sum_{j \neq i} ([E_j] \cdot [S_i^K]) [E_j],$$

et le nombre d'intersections se réécrit donc

$$q_N [\widehat{\omega}_{\alpha(\mathbf{a}+\varepsilon_N)}](S_i^K) = q_N \alpha (a_i + \varepsilon_{i,N} - \sum_{j \neq i} ([E_j] \cdot [S_i^K]) (a_j + \varepsilon_{j,N})) =: q_N \alpha (b_i(\mathbf{a}) + b_i(\varepsilon_N)).$$

Puisque $q_N \in (\alpha^{-1}\mathbb{N}) \cap \mathbb{N}$, ces nombres sont bien des nombres entiers positifs, et puisque $\mathbf{a} + \varepsilon_N$ est \mathcal{T}^K -adaptée, il sont non-nuls. On a deux cas à étudier.

Premièrement, \mathbf{a} est \mathcal{T}^K -adaptée.

Dans ce cas, on a $\varepsilon_n = \mathbf{0}$, $q_N = q$ et $\widehat{C}_N = \widehat{C}$. Au voisinage de chaque point d'intersection de \widehat{C} avec \mathcal{T}^K , la courbe \widehat{C} réalise $[\{z=0\}]$. Donc en adoptant les notations établies au début de la partie 4.2.1, \widehat{C} est de la forme $\widehat{C}^{\otimes \alpha q}(f_{i,j})$. Ainsi, en contractant $(\widehat{M}_K, \widehat{\omega}_{\alpha\mathbf{a}})$, on obtient une courbe J -holomorphe dans la classe

$$\pi_*(q \text{PD}(\pi^*\omega) - q\alpha \sum_{i=1}^K a_i [E_i]) = q \text{PD}(\omega)$$

qui réalise la singularité $\mathcal{S}^{\otimes q\alpha}$ en $p \in (M, \omega)$.

Deuxièmement, \mathbf{a} n'est pas \mathcal{T}^K -adaptée.

Dans ce cas, la contraction de \widehat{C}_N nous fournit une courbe C_N dans la classe $q_N \text{PD}(\omega)$ réalisant la singularité \mathcal{S}' . Celle-ci s'écrit $\mathcal{S}' = \mathcal{S}^{\otimes q_N \alpha} \cup \mathcal{R}_N$. La singularité $\mathcal{S} := \mathcal{S}^{\otimes q_N \alpha}$ vérifie

$$\widehat{\mathcal{S}} \cdot [E_i] = q\alpha a_i \text{ et } \widehat{\mathcal{S}} \cdot [S_i^K] = q_N \alpha b_i(\mathbf{a})$$

tandis que la singularité \mathcal{R}_N vérifie $[\widehat{\mathcal{R}}_N] \cdot [S_i^K] = q_N \alpha b_i(\varepsilon_N)$ points distincts.

Soit $\varphi : (B(\delta), \omega_{st}) \rightarrow (M, \omega)$ une boule de taille $\delta > 0$ centrée en 0. On note

$$C_{\mathcal{S}} \cup C_{\mathcal{R}_N} := \varphi^* C_N$$

où $C_{\mathcal{S}}$ est la composante de la courbe $\varphi^* C_N$ réalisant la singularité \mathcal{S} en 0 et $C_{\mathcal{R}_N}$ la composante de $\varphi^* C_N$ réalisant \mathcal{R}_N en 0. On suppose de plus que dans la boule $B(\delta)$ on a distance $d(C_{\mathcal{S}}, C_{\mathcal{R}_N}) > \zeta_0$.

Fait 4.2.4. *Il existe $V \in T_0 \mathbb{C}^2$ tel que pour presque tout $\zeta > 0$, la translation $\vec{T}_{\zeta V}(C_{\mathcal{R}_N}) \not\equiv \{0\}$ et intersecte $C_{\mathcal{S}}$ transversalement.*

Soit $\chi : [0, \delta^2] \rightarrow ([0, 1])$ une fonction telle que $\chi = 1$ sur $[0, \delta^2/4]$ et $\chi = 0$ sur $\mathcal{O}_p(\{\delta^2\})$. On pose $H = \chi \langle JV, \cdot \rangle$ et $C' = \varphi_H^\eta(C_{\mathcal{R}_N}) \cup C_{\mathcal{S}}$, pour $\zeta \ll \zeta_0$. Alors,

$$C' \cap \mathcal{O}_p(\{0\}) = C_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{O}_p(\{0\}), \varphi_H^\zeta(C_{\mathcal{R}_N}) \cap C_{\mathcal{S}} \cap B(\delta/2) = \emptyset \text{ et } \varphi_H^\zeta(C_{\mathcal{R}_N}) \cap C_{\mathcal{S}} \subset B(\delta).$$

Si on a des intersections dans $B(\delta/2)$, puisque $\varphi_H^\zeta(C_{\mathcal{R}_N}) = C_{\mathcal{R}_N} + \zeta V$, ce sont des intersections transverses, et puisque $\varphi_H^\zeta(C_{\mathcal{R}_N})$ et $C_{\mathcal{S}}$ sont holomorphes, ces intersections sont positives. On peut donc résoudre symplectiquement ces intersections tandis que dans $B(\delta) \setminus B(\delta/2)$, puisqu'on a choisit δ de sorte que $d(C_{\mathcal{S}}, C_{\mathcal{R}_N}) > \zeta_0$, les courbes $C_{\mathcal{S}}$ et $\varphi_H^\zeta(C_{\mathcal{R}_N})$ ne s'intersectent pas. On note encore C' la courbe dont on a résolu les intersections dans $B(\delta/2)$.

Enfin, on obtient une courbe $\tilde{C}' = (C_N \setminus B) \cup (\varphi_* C') \subset (M, \omega)$ qui réalise la singularité \mathcal{S} en $p \in (M, \omega)$ et qui représente la classe $\frac{q\alpha}{\alpha} \text{PD}(\omega) = q \text{PD}(\omega)$ comme annoncé.

□

Chapitre 5

Exemples de correspondances

Dans cette partie, on donne quelques exemples de correspondances diviseur exceptionnel symplectique-domaine et singularité-domaine.

5.1 Correspondances diviseur-domaine

Dans cette partie on se concentre sur les correspondances entre arbres symplectiques et domaines symplectiques. D'après le théorème 3.3.1, il suffit d'étudier ces correspondances pour un arbre symplectique \mathcal{T}^K contenu dans un éclatement symplectique itéré $\widehat{\mathbb{C}}^2_K$ de \mathbb{C}^2 et le domaine dans \mathbb{C}^2 obtenu par contraction de celui-ci.

Avant de donner des exemples concrets, on explique ce qu'il advient d'un ellipsoïde intersecté le long d'un axe par un diviseur exceptionnel lorsque qu'on contracte symplectiquement ce dernier.

5.1.1 Du diviseur au domaine

Lemme 5.1.1 ([Ops14a]). *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension 4 contenant une boule symplectique $B(a)$, et soit $\pi : (\widehat{M} \setminus E, \widehat{\omega} \in [\pi^*\omega] - a \text{PD}(E)) \rightarrow (M \setminus B(a), \omega)$ son éclatement le long de $B(a)$. On suppose que \widehat{M} contient un ellipsoïde $\mathcal{E}(b, c)$ qui intersecte E le long de l'axe d'aire b (donc $b < a$).*

Alors il existe un plongement symplectique du domaine $B(a) \cup \mathcal{E}(b, c+a) \subset \mathbb{C}^2$ dans M . On insiste bien sur le fait qu'il s'agit de la réunion de la boule et de l'ellipsoïde centrés en $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. L'union n'est donc pas disjointe.

Démonstration. On renvoie à [Ops14a] lemme A.4 pour la démonstration de ce résultat. \square

Le premier exemple est une application au problème de plongement d'un ellipsoïde dans une variété symplectique.

Exemple 5.1.2. *Soit $K = 3$ et soit $(\widehat{\mathbb{C}}^2_3, \mathcal{T}^3)$ un éclatement itéré de \mathbb{C}^2 associé à l'arbre $\mathcal{T}^K = (S_1^3, S_2^3, S_3^3)$ dont les composantes sont dans les classes*

$$[S_1^3] = [E_1] - [E_2] - [E_3], [S_2^3] = [E_2] - [E_3] \text{ et } [S_3^3] = [E_3].$$

Soit $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ une suite \mathcal{T}^3 -adaptée. Alors, le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^3, \mathbf{a})$ associé est

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}^3, \mathbf{a}) = B(a_1) \cup \mathcal{E}(a_1 + a_2, a_2) \cup \mathcal{E}(a_1 + a_3, a_2 + a_3).$$

On montre plus tard (exemple 5.2.3) que ce diviseur exceptionnel singulier est associé à un (2,3)-cusp ou un multi-(2,3)-cusps.

Démonstration. On rappelle que les différentes étapes de la construction de $\mathcal{D}(\mathcal{T}^3, \mathbf{a})$ sont

- $\mathcal{D}_2 = B(a_3) \subset \widehat{\mathbb{C}^2}$,
- $\mathcal{D}_1 = B(a_2) \cup \pi_{2,1}^\omega(B(a_3) \setminus E_2)$,
- $\mathcal{D}(\mathcal{T}^3, \mathbf{a}) = \mathcal{D}_0 = B(a_1) \cup \pi_{1,0}^\omega(\mathcal{D}_2 \setminus E_2)$

La première étape de construction du domaine est évidente par définition de la contraction symplectique. On rappelle aussi que le diviseur \mathcal{T}^2 intersecte \mathcal{D}_2 le long d'une union de disque de Hopf de $B(a_3)$. Or, puisque $[S_1^3] \cdot [S_3^3] = [S_2^3] \cdot [S_3^3] = 1$, d'après le lemme 3.1.5, \mathcal{T}^2 intersecte $B(a_3)$ le long de deux disque de Hopf qu'on peut choisir orthogonaux. Enfin, les composantes de \mathcal{T}^2 représentent les classes

$$[S_1^2] = \pi_{3,2*}[S_1^3] = [E_1] - [E_2] \text{ et } [S_2^2] = \pi_{3,2*}[S_2^3] = [E_2].$$

De plus, la forme symplectique $\hat{\omega}_{(a_1, a_2)}$ représente la classe

$$[\hat{\omega}_{(a_1, a_2)}] = [\pi_{2,0}^* \omega] - a_1 e_1 - a_2 e_2$$

et $\hat{\omega}_{(a_1, a_2)}(E_2) = a_2$.

La seconde étape de construction du domaine est la contraction symplectique le long de E_2 . D'après la première étape, cette sphère intersecte la boule $B(a_3) = \mathcal{E}(a_3, a_3)$ le long d'un disque de Hopf, disons $\{w = 0\}$. D'après le lemme 5.1.1, le domaine obtenu après contraction est

$$\mathcal{D}_1 = B(a_2) \cup \mathcal{E}(a_3, a_2 + a_3).$$

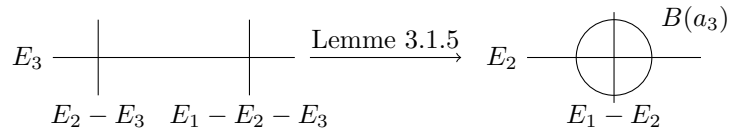
D'après le lemme 3.1.5, l'image par $\pi_{2,1}^\omega$ de S_1^2 est une courbe symplectique intersectant $B(a_2)$ le long d'un disque de Hopf et représentant la classe

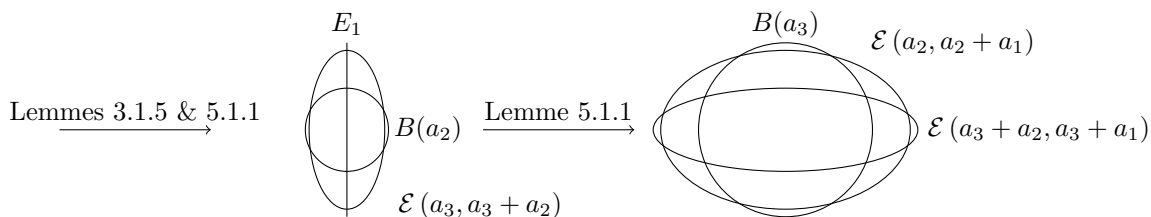
$$[S_1^1] = \pi_{2,1*}[S_1^2] = \pi_{2,1*}([E_1] - [E_2]) = [E_1].$$

De plus, puisque S_1^2 intersecte $B(a_3)$ le long d'un disque de Hopf orthogonal à E_2 , l'image de celui-ci par $\pi_{2,1}$ est un anneau $D(a_3) \setminus D(a_2)$ contenu dans l'axe d'aire $a_2 + a_3$ de $\mathcal{E}(a_3, a_2 + a_3)$. Ainsi, le diviseur exceptionnel E_1 intersecte \mathcal{D}_1 le long de l'axe d'aire $a_2 + a_3$ de $\mathcal{E}(a_3, a_2 + a_3)$. Enfin, la classe de $\pi_{2,1*}\hat{\omega}_{(a_1, a_2)} = \hat{\omega}_{a_1}$ est donnée par $[\pi_{1,0}^* \omega] - a_1 e_1$ et donc $\hat{\omega}_{a_1}(E_1) = a_1$.

La dernière étape de construction du domaine est la contraction symplectique le long de E_1 . Or, on a vu que cette sphère intersecte $B(a_2) \cup \mathcal{E}(a_3, a_2 + a_3)$ le long de l'axe vertical du $\mathcal{E}(a_3, a_2 + a_3)$. Le lemme 5.1.1 nous fournit alors le domaine

$$\mathcal{D}_0 = B(a_1) \cup \mathcal{E}(a_1 + a_2, a_2) \cup \mathcal{E}(a_1 + a_3, a_2 + a_3).$$





□

Si la suite \mathcal{T}^3 -adaptée \mathbf{a} est choisie telle que $\mathbf{a} = (2a + \varepsilon_1, a + \varepsilon_2, a + \varepsilon)$, alors le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^3, \mathbf{a})$ est simplement un voisinage de l'ellipsoïde $a\mathcal{E}(3, 2)$. Ainsi, une variété symplectique dont l'éclatement peut-être muni d'un arbre symplectique \mathcal{T}^3 avec une telle suite \mathbf{a} \mathcal{T}^3 -adaptée admet un plongement de l'ellipsoïde $a\mathcal{E}(3, 2)$.

L'exemple suivant montre qu'on peut associer un domaine torique concave à toute chaîne de sphères symplectiques.

Définition 5.1.3. On dit qu'un diviseur exceptionnel symplectique est une chaîne de sphères si chacune de ses composantes intersecte au plus deux autres composantes de celui-ci et exactement deux de ses composantes n'en intersectent qu'une seule autre chacune.

Il est clair que :

Lemme 5.1.4. Si \mathcal{T}^K est une chaîne de sphères, alors pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, l'image de \mathcal{T}^K par k contractions successives est encore une chaîne de sphère.

Définition 5.1.5. Un domaine torique concave est un domaine torique \mathcal{D}_Ω où Ω est une région fermée du premier quadrant bornée par les axes et le graphe d'une fonction convexe $f : (0, a) \rightarrow (0, b)$, pour a et b des réels positifs et tels que $f(0) = b$ et $f(a) = 0$.

Un domaine torique concave rationnel est un domaine torique concave pour lequel la fonction f est convexe linéaire par morceaux et dont les pentes sont rationnelles.

Exemple 5.1.6 (Contraction de chaîne). Soit \mathcal{T}^K une chaîne de sphère symplectiques et soit $\mathbf{a} = (a_1 \dots, a_K)$ une suite \mathcal{T}^K -adaptée. Alors le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ associé est un domaine torique concave.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre n de contractions de \mathcal{T}^K et on montre que pour tout $n \in \{1, \dots, K\}$, les ensembles \mathcal{D}_{K-n} sont des unions d'ellipsoïdes, disjointes ou non disjointes, intersectant \mathcal{T}^{K-n} le long de leurs axes. Dans le cas non-disjoint, les axes de ces ellipsoïdes coïncident sur des disques.

Initialisation : On note N le nombre de composantes exceptionnelles de \mathcal{T}^K . On commence par contracter \mathcal{T}^K le long de toutes ces composantes. Ceci nous fournit une union disjointe de boules $B(a_{K-i})$, $i = 0, \dots, N-1$, chacune intersectant \mathcal{T}^{K-N} le long d'au plus deux disques de Hopf. Via le lemme 5.1.6, on sait que \mathcal{T}^{K-N} est encore une chaîne de sphères. La proposition est initialisée.

Remarque 5.1.7. On note aussi que tout diviseur exceptionnel de \mathcal{T}^{K-N} intersecte une composante de \mathcal{D}_{K-N} .

Hérédité : Soit $n \geq N$. On suppose que \mathcal{D}_{K-n} est une union d'ellipsoïdes intersectant \mathcal{T}^{K-n} le long d'un ou des deux axes de ces ellipsoïdes. Soit E_{K-n} une composante exceptionnelle de \mathcal{T}^{K-n} . D'après la remarque ci-dessus, $E_{K-n} \cap \mathcal{D}_{K-n}$ est non-vide et est soit une union (non-disjointe) d'ellipsoïdes, soit une union disjointe de deux unions (non-disjointe) d'ellipsoïdes.

Dans le premier cas, notons $\mathcal{E}(a, b) \cup \mathcal{E}(c, d)$ la partie de \mathcal{D}_{K-n} intersectant E_{K-n} . On suppose que cette intersection a lieu le long de l'axe d'aire $\max\{a, c\}$. Le lemme 5.1.1 assure que le domaine obtenu en contractant E_{K-n} est

$$B(a_{K-n}) \cup \mathcal{E}(a, b + a_{K-n}) \cup \mathcal{E}(c, d + a_{K-n}).$$

Dans le deuxième cas, notons $\mathcal{E}(a_1, b_1) \cup \mathcal{E}(c_1, d_1)$ et $\mathcal{E}(a_2, b_2) \cup \mathcal{E}(c_2, d_2)$ les deux composantes disjointes de \mathcal{D}_{K-n} intersectant E_{K-n} . On suppose que cette intersection se fait le long des disques disjoints d'aires $\max\{a_1, c_1\}$ et $\max\{a_2, c_2\}$. D'après le lemme 5.1.1, les domaines obtenus en contractant le long de E_{K-n} sont

$$\mathcal{D} := B(a_{K-n}) \cup \mathcal{E}(a_1, b_1 + a_{K-n}) \cup \mathcal{E}(c_1, d_1 + a_{K-n})$$

et

$$\mathcal{D}' := B(a_{K-n}) \cup \mathcal{E}(a_2, b_2 + a_{K-n}) \cup \mathcal{E}(c_2, d_2 + a_{K-n})$$

et ceux-ci s'intersectent exactement en $B(a_{K-n})$. Comme \mathcal{T}^K intersecte \mathcal{D}_{K-n} le long d'un ou des deux axes des ellipsoïdes le composant, et puisque \mathcal{T}^{K-n-1} est aussi un diviseur exceptionnel symplectique à croisement normaux, les axes de \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont aussi orthogonaux et le domaine obtenu est alors $\mathcal{D} \cup \Phi(\mathcal{D}')$, où $\Phi : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (w, z) \in \mathbb{C}^2$. Ainsi, on a précisément

$$\mathcal{D} \cup \Phi(\mathcal{D}') = B(a_{K-n}) \cup \mathcal{E}(a_1, b_1 + a_{K-n}) \cup \mathcal{E}(c_1, d_1 + a_{K-n}) \cup \mathcal{E}(b_2 + a_{K-n}, a_2) \cup \mathcal{E}(d_2 + a_{K-n}, c_2).$$

Ainsi, dans les deux cas, l'ensemble \mathcal{D}_{K-n-1} est bien tel qu'annoncé et on a montré l'hérédité.

Donc, par récurrence, la dernière étape de construction du domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ est bien une union d'ellipsoïdes dont les axes coïncident sur des disques et on sait que de tels ensembles sont des domaines toriques concaves. \square

L'exemple suivant est un exemple de domaine qui n'est potentiellement pas un domaine torique concave. L'étudier plus en détail permettrait de s'assurer que les domaines du type $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a})$ balayent un plus large ensemble de domaines que les domaines toriques concaves.

Exemple 5.1.8 (Collier de diviseurs exceptionnels). Soit $K = N + 1$, N un entier strictement positif, et soit $\widehat{\mathbb{C}}_{N+1}^2$ un éclatement itéré $N + 1$ fois de \mathbb{C}^2 muni du diviseur $\mathcal{T}^{N+1} := (S_0^{N+1}, S_1^{N+1}, \dots, S_N^{N+1})$ tel que $[S_0^{N+1}] = E_0 - \sum_{i=1}^N E_i$ et $[S_i^{N+1}] = E_i$, pour $i \in \{1, \dots, N\}$. Soit une suite \mathcal{T}^{N+1} -adaptée $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_N)$. Alors le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^{N+1}, \mathbf{a})$ associé est

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}^{N+1}, \mathbf{a}) = B(a_0) \cup \left(\bigsqcup_{i=1}^N \Phi_i(\mathcal{E}(a_i, a_0 + a_i)) \right).$$

Les Φ_i sont des transformations symplectique de \mathbb{C}^2 telles que

$$(\Phi_i(\mathcal{E}(a_i, a_0 + a_i)) \setminus B(a_0)) \cap (\Phi_j(\mathcal{E}(a_j, a_0 + a_j)) \setminus B(a_0)) = \emptyset$$

dès que $i \neq j$.

Démonstration. Puisqu'on a N diviseurs exceptionnels dans \mathcal{T}^{N+1} , on commence par réaliser les contractions symplectiques de chacun d'entre eux. Ceci nous fournit d'après les lemmes 3.1.1 et 3.1.5 N boules $B(a_i)$, $i = 1, \dots, N$ disjointes et intersectant l'image par ces N contractions de S_0^{N+1} le long de N disques de Hopf disjointes de tailles a_i . De plus, l'image de S_0^{N+1} par ces contractions est une sphère exceptionnelle E_0 d'aire a_0 dans $\widehat{\mathbb{C}^2}$.

Enfin, la dernière étape de construction du domaine consiste en la contraction du diviseur E_0 intersectant chaque boule $B(a_i) = \mathcal{E}(a_i, a_i)$ le long d'un axe d'aire a_i . Le lemme 5.1.1 nous assure alors que l'image par cette contraction de chacune de ces boules est le domaine $B(a_0) \cup \mathcal{E}(a_i, a_0 + a_i)$ et leur intersection est exactement $B(a_0)$. Le domaine obtenu est alors

$$\mathcal{D} = B(a_0) \cup \left(\bigsqcup_{i=1}^N \Phi_i(\mathcal{E}(a_i, a_0 + a_i)) \right)$$

et puisque les boules $B(a_i)$ sont disjointes dans $\widehat{\mathbb{C}^2}$ et que $\pi_{1,0} : \widehat{\mathbb{C}^2} \setminus E_0 \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus B(a_0)$ est un difféomorphisme symplectique, il est clair que

$$(\Phi_i(\mathcal{E}(a_i, a_0 + a_i)) \setminus B(a_0)) \cap (\Phi_j(\mathcal{E}(a_j, a_0 + a_j)) \setminus B(a_0)) = \emptyset$$

dès que $i \neq j$.

□

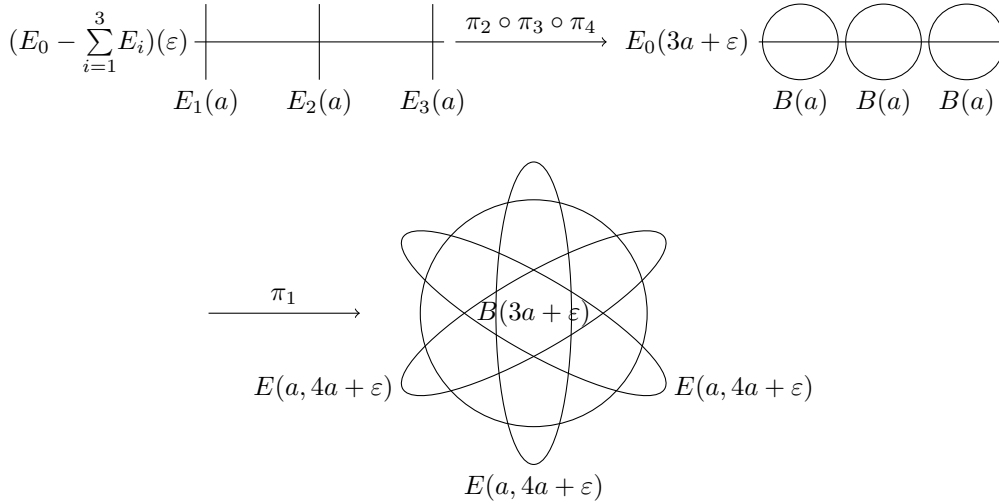


FIGURE 5.1 – Contraction d'un collier de diviseur exceptionnels d'aires a et le domaine associé.

5.1.2 Du domaine au diviseur

On explique cette correspondance dans le cadre des domaines toriques concaves de \mathbb{C}^2 .

Proposition 5.1.9. *Soit \mathcal{D}_Ω un domaine torique concave rationnel. Alors, il existe un éclatement itéré $(\widehat{\mathbb{C}^2}_K, \mathcal{T}^K)$ de \mathbb{C}^2 , et une suite de réels $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_K)$ positifs tels que \mathcal{T}^K est une chaîne de sphères, \mathbf{a} est une suite \mathcal{T}^K adaptée et telle que pour toute suite $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_K)$, le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}^K, \mathbf{a} + \boldsymbol{\delta})$ est un $\boldsymbol{\delta}$ -voisinage de \mathcal{D}_Ω .*

Etant donné $a > 0$, on note T_a le triangle $\text{Conv}\{(0,0), (0, a), (a, 0)\} \subset (\mathbb{R}^+)^2$, dont le domaine torique associé est la boule standard $B^4(a) \subset (\mathbb{C}^2, \omega_{st})$.

On fixe un domaine torique concave rationnel \mathcal{D}_Ω . On décrit la première étape de l'éclatement de \mathbb{C}^2 le long de \mathcal{D}_Ω . Soit $a_1 > 0$, le plus grand réel tel que $T_{a_1} \subset \Omega$, et soit $\delta_1 > 0$ un réel arbitrairement petit. Par convexité du bord supérieur de Ω , le sous-ensemble $\Omega \cap (T_{a_1+\delta_1})^c$ a au plus deux composantes connexes Ω_1 et Ω_2 , où Ω_1 contient l'axe $\{x = 0\}$ et Ω_2 l'axe $\{y = 0\}$, l'un des deux pouvant être vide.

On note $\pi : \widehat{\mathbb{C}^2} \setminus E_1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{D}_{T_{a_1+\delta_1}}$ l'application d'éclatement où E_1 désigne le diviseur exceptionnel associé.

Lemme 5.1.10. *Si \mathcal{D}_{Ω_1} est non-vide, $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_1} := \overline{\pi_1^{-1}(\mathcal{D}_{\Omega_1} \setminus \partial B(a_1 + \delta_1))}$ est symplectomorphe à un domaine torique concave $\mathcal{D}_{\widehat{\Omega}_1}$. Son intersection avec E_1 est un disque dont l'image dans $\widehat{\Omega}_1$ est l'axe $\{y = 0\}$. Si de plus, une courbe $S \subset \mathbb{C}^2$ intersecte \mathcal{D}_{Ω_1} le long de l'axe $\{x = 0\}$ dans le modèle torique, la transformée stricte \widehat{S} de S intersecte $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_1}$ le long d'un disque dont l'image est $\{x = 0\}$ dans le modèle torique. (Voir figure 5.2)*

On a le même résultat pour \mathcal{D}_{Ω_2} en inversant les rôles des axes $\{y = 0\}$ et $\{x = 0\}$. Les mêmes arguments valent pour Ω_2 .

Démonstration. On rappelle que $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_1} = \pi_{\mathbb{C}}^{-1} \circ F_{-(a_1+\delta_1)}(\mathcal{D}_{\Omega_1} \setminus \partial B(a_1+\delta_1))$. Les deux applications $F_{-(a_1+\delta_1)}$ et $\pi_{\mathbb{C}}$ ont une forme très simple dans le modèle torique Ω_1 . Un calcul direct montre en effet qu'elles consistent en une translation verticale de $-(a_1 + \delta_1)$ et l'application $T \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ donnée par $T := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, respectivement. En conséquence, $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_1} = \mathcal{D}_{\widehat{\Omega}_1}$, où $\widehat{\Omega}_1$ est $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -affine équivalent à Ω_1 (voir figure 5.2). Par conséquent, $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_1}$ est un domaine torique concave rationnel.

Il est de plus facile de garder une trace de la courbe S et de E_1 dans ce modèle et de vérifier qu'elles sont envoyées sur $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ respectivement. \square

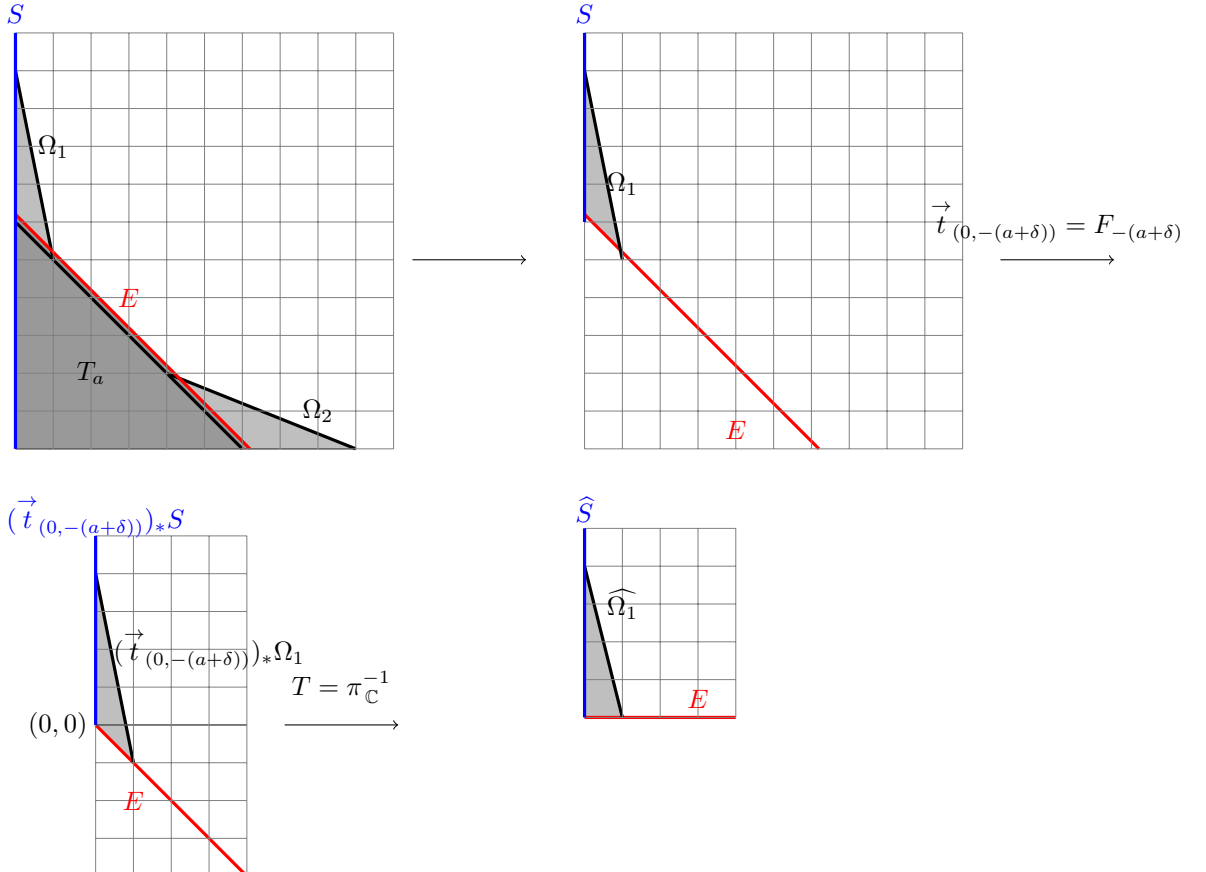


FIGURE 5.2 – Illustration du lemme 5.1.10

D'après le lemme 5.1.10, on peut itérer ce processus jusqu'à ce $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_K} \subset \widehat{M}_K$ soit vide. On construit ainsi un éclatement itéré $(\widehat{\mathbb{C}}^2_K, \widehat{\omega}_{stK}, \mathcal{T}^K)$ de \mathbb{C}^2 pour lequel

$$\pi_K : \widehat{\mathbb{C}}^2_K \setminus \mathcal{T}^K \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{O}_p(\mathcal{D}_\Omega)$$

est un difféomorphisme symplectique.

Grâce au lemme 5.1.10, montrer la proposition 5.1.9 est équivalent à :

Lemme 5.1.11. *Soit \mathcal{D}_Ω un domaine torique concave de \mathbb{C}^2 . Soit $1 \leq k \leq K$ un entier et soit $(\widehat{\mathbb{C}}^2_k, \widehat{\omega}_{stk}, \mathcal{T}^k)$ le $k^{\text{ème}}$ éclatement itéré de \mathbb{C}^2 le long de \mathcal{D}_Ω . Soit $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_k}$ la pré-image de \mathcal{D}_Ω par le $k^{\text{ème}}$ éclatement.*

Alors, pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$,

- $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_k}$ est une union disjointe de domaines toriques concaves \mathcal{D}_{Ω_i} dans $\widehat{\mathbb{C}}^2_k$,
- l'arbre singulier symplectique \mathcal{T}^k intersecte chaque \mathcal{D}_{Ω_i} le long au moins un disque, et au plus deux, qui coïncident avec l'axe $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ dans le modèle torique Ω_i .

Démonstration. La première étape de l'éclatement de \mathbb{C}^2 le long de \mathcal{D}_Ω consiste en $\widehat{\mathbb{C}}^2_1$ avec $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_1} = \mathcal{D}_{\Omega_1} \sqcup \mathcal{D}_{\Omega_2}$, \mathcal{D}_{Ω_i} étant un domaine torique concave possiblement vide pour $i \in \{1, 2\}$ et un diviseur exceptionnel E_1 dont l'intersection avec $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega}$ sont des disques, exactement une intersection pour chaque composante de $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega}$. Plus précisément, d'après le lemme 5.1.10, $\mathcal{D}_{\Omega_1} \cap E_1$ est l'axe $\{y = 0\}$ dans le modèle de Ω_1 et $\mathcal{D}_{\Omega_2} \cap E_1$ est l'axe $\{x = 0\}$ dans le modèle de Ω_2 .

Si $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega}$ est vide à cette étape, alors on a fini et E_1 est l'arbre symplectique associé. Sinon, supposons que \mathcal{D}_{Ω_1} est non-vide et soit $a_2 > 0$ le plus grand réel positif tel que $T_{a_2} \subset \Omega_1$. On éclate $\widehat{\mathbb{C}}^2_1$ le long de $\mathcal{D}_{T_{a_2+\delta_2}}$ pour $\delta_2 > 0$ arbitrairement petit. On note $\pi_2 : \widehat{\mathbb{C}}^2_2 \setminus E_2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}^2_1 \setminus \mathcal{D}_{T_{a_2+\delta_2}}$ l'application du deuxième éclatement, E_2 étant le diviseur exceptionnel associé. Alors, $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_1}$ consiste en au plus deux domaines toriques concaves, notés $\mathcal{D}_{\Omega_{1,1}}$ et $\mathcal{D}_{\Omega_{1,2}}$, tels que les modèles toriques de $\pi_2(\mathcal{D}_{\Omega_{1,1}})$ et $\pi_2(\mathcal{D}_{\Omega_{1,2}})$ contiennent respectivement l'axe $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$. D'après le lemme 5.1.10, la transformée stricte \widehat{E}_1 de E_1 intersecte $\mathcal{D}_{\Omega_{1,2}}$ le long d'un disque dans $\{y = 0\}$ dans le modèle $\Omega_{1,2}$ et E_2 l'intersecte le long d'un disque dans $\{x = 0\}$ dans celui-ci, tandis que E_2 intersecte $\mathcal{D}_{\Omega_{1,1}}$ le long d'un disque dans $\{y = 0\}$ dans le modèle $\Omega_{1,1}$.

Soit maintenant $k \geq 1$ et supposons que $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_k}$ satisfait les hypothèse du lemme 5.1.11. On se concentre sur une des composantes de $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_k}$, on la note $\mathcal{D}_{\Omega_{i_0}}$, et on note $S_{i_0,1}^k$ et $S_{i_0,2}^k$ les composantes de \mathcal{T}^k qui l'intersecte, l'une d'elle possiblement vide. On suppose de plus que $S_{i_0,1}^k$ coïncide avec l'axe $\{x = 0\}$ et $S_{i_0,2}^k$ avec l'axe $\{y = 0\}$ dans le modèle Ω_{i_0} . Soit a_{k+1} le plus grand réel positif tel que $T_{a_{k+1}} \subset \Omega_{i_0}$. On note $\pi_{k+1} : \widehat{\mathbb{C}}^2_{k+1} \setminus E_{k+1} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}^2_k \setminus \mathcal{D}_{T_{a_{k+1}+\delta_{k+1}}}$ l'application de l'éclatement de $\widehat{\mathbb{C}}^2_k$ le long de $\mathcal{D}_{T_{a_{k+1}+\delta_{k+1}}}$, $\delta_{k+1} > 0$ arbitrairement petit, et on note E_{k+1} le diviseur exceptionnel associé. On obtient alors dans $\widehat{\mathbb{C}}^2_{k+1}$ un ensemble $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_{k+1}} := \pi_{k+1}^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_k} \setminus \mathcal{D}_{\Omega_{i_0}}) \sqcup \mathcal{D}_{\Omega_{i_0,1}} \sqcup \mathcal{D}_{\Omega_{i_0,2}}$, avec $\mathcal{D}_{\Omega_{i_0,1}}$, $\mathcal{D}_{\Omega_{i_0,2}}$ ou les deux possiblement vides. On suppose $\mathcal{D}_{\Omega_{i_0,1}} \neq \emptyset$ et que $\pi_{k+1}(\mathcal{D}_{\Omega_{i_0,1}})$ contient l'axe $\{x = 0\}$ dans le modèle torique et $\pi_{k+1}(\mathcal{D}_{\Omega_{i_0,2}})$, si non vide, contient l'axe $\{y = 0\}$. D'après le lemme 5.1.10, l'intersection

$\mathcal{D}_{\Omega_{i_0,1}} \cap E_{k+1}$ est $\{y = 0\}$ dans le modèle $\Omega_{i_0,1}$ et $\mathcal{D}_{\Omega_{i_0,2}} \cap E_{k+1}$ est $\{x = 0\}$ dans le modèle $\Omega_{i_0,2}$. De plus, toujours d'après le lemme 5.1.10, la transformée stricte $\widehat{S}_{i_0,1}^k$ (resp. $\widehat{S}_{i_0,2}^k$) de $S_{i_0,1}^k$ (resp. $S_{i_0,2}^k$) est une courbe symplectique dont l'image intersecte $\Omega_{i_0,1}$ (resp. $\Omega_{i_0,2}$) le long de l'axe $\{x = 0\}$ (resp. $\{y = 0\}$) dans le modèle torique $\Omega_{i_0,1}$ (resp. $\Omega_{i_0,2}$).

Pour conclure, le $k + 1^{\text{ème}}$ éclatement $\widehat{\mathbb{C}}^2_{k+1}$ de \mathbb{C}^2 le long de \mathcal{D}_{Ω} contient $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_{k+1}}$ qui est réunion disjointe de domaines toriques concaves puisque $\pi_{k+1}^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_k} \setminus \mathcal{D}_{\Omega_{i_0}}) \subset \widehat{\mathbb{C}}^2_{k+1} \setminus E_{k+1}$ est une union disjointe de domaine torique concave et $\mathcal{D}_{\Omega_{i_0,1}}$ et $\mathcal{D}_{\Omega_{i_0,2}}$ qui le sont aussi d'après le lemme 5.1.10. Finalement, puisque $\mathcal{T}^{k+1} = \widehat{\mathcal{T}}^k \cup E_{k+1}$, \mathcal{T}^{k+1} intersecte chaque composante de $\widehat{\mathcal{D}}_{\Omega_{k+1}}$ le long d'au plus deux disques et au moins un.

□

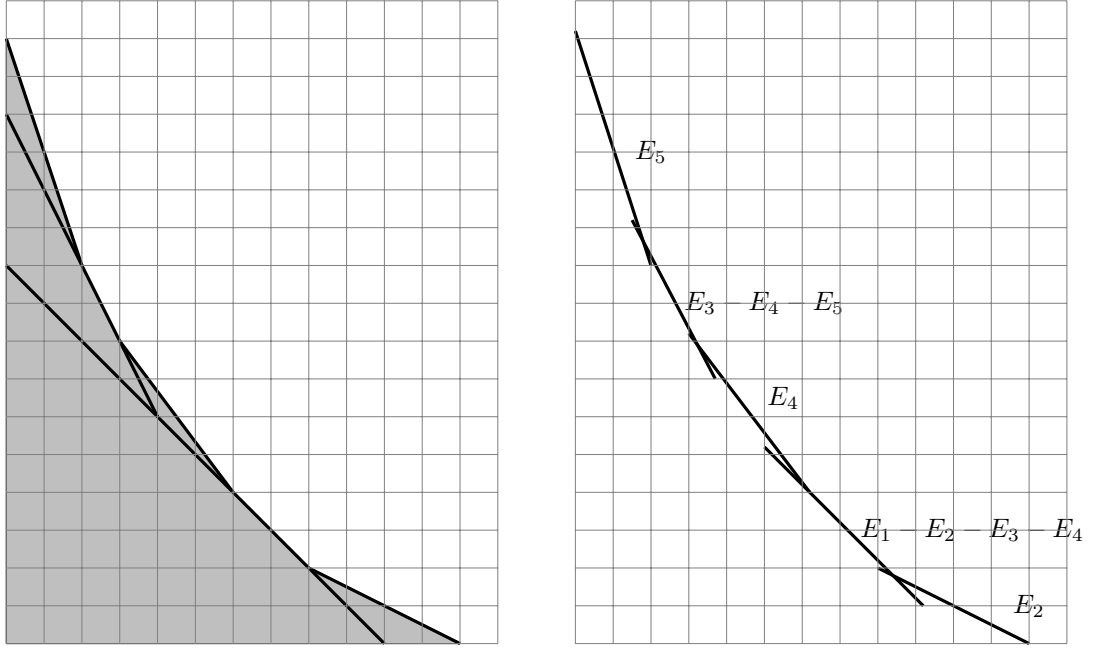


FIGURE 5.3 – Un domaine torique concave (figure de gauche) et l'arbre singulier associé (figure de droite).

5.2 Correspondance singularité-domaine

Dans cette partie, on illustre comment associer à une singularité \mathcal{S} réalisée par une courbe symplectique un domaine symplectique.

Dans tout ce qui suit $(M, \omega) = (\mathbb{C}P^2, \omega_{FS})$. On considère aussi une courbe symplectique $C \subset (M, \omega)$ d'aire $d \in \mathbb{N}^*$ réalisant une singularité \mathcal{S} en un point $p \in M$.

Définition 5.2.1. Soit $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ polynomiale telle que $P(0, 0) = 0$. La multiplicité $m_{(0,0)}(P)$ de P en l'origine est le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que t^k divise $P(tz, tw)$ pour $t \in \mathbb{C}$, et $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ constant.

Si $C \subset M$ est une courbe donnée localement par $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0\}$ dans une carte centré en $p \in M$, la multiplicité $m_p(C)$ de C en p est la multiplicité de P en l'origine.

Lemme 5.2.2. Soit $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ polynomiale. Alors $m_{(0,0)}(P) = 1$ si et seulement si $(0, 0)$ est un point régulier de P .

Démonstration. Si t divise $P(tz, tw)$ mais pas t^2 , on peut écrire $P(tz, tw) = tQ(tz, tw)$ tel que t ne divise pas $Q(tz, tw)$. Alors, en dérivant selon t et en prenant $t = 0$, on a

$$\frac{d}{dt}P(tz, tw)|_{t=0} = Q(0, 0) \neq 0.$$

On en conclut que l'origine est un point régulier de P .

Réciproquement, si l'origine est un point régulier de P , alors

$$\frac{d}{dt}P(tz, tw)|_{t=0} \neq 0$$

et donc $P(tz, tw)$ est de la forme $Q(tz, tw) + atz + btw + c$, $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et Q est un polynôme complexe dont tout les monômes sont de degrés strictement supérieurs à 1. Enfin, comme $P(0, 0) = 0$, on a $c = 0$ et on en conclut que $m_{(0,0)}(P) = 1$. \square

Exemple 5.2.3. On suppose que \mathcal{S} est une singularité $(2, 3)$ -cusp à deux branches, c'est-à-dire, telle qu'il existe une carte symplectique dans laquelle C coïncide avec

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = (z^2 - aw^3)(z^2 - bw^3) = 0, a \neq b, a, b \in \mathbb{C}^*\}.$$

Alors, si $[\widehat{C}]^2 \geq 0$ il existe un plongement symplectique de l'ellipsoïde

$$\alpha \mathcal{D}(\mathcal{S}) = \alpha \mathcal{E}(4, 6) = 2\alpha \mathcal{E}(2, 3)$$

dans $(\mathbb{C}P^2, \omega_{FS})$, $\forall \alpha < d^{-1}$.

On rappelle pour cela que $\mathcal{D}(\mathcal{S}) = \mathcal{D}(\mathcal{T}, \mathbf{a})$, où \mathcal{T} est l'arbre de résolution de \mathcal{S} et \mathbf{a} est une suite de réels (a_i) où chacun satisfait $a_i = \widehat{S} \cdot E_i$.

On commence par calculer l'arbre de résolution de \mathcal{S} . Pour cela, on effectue une suite d'éclatement d'algébrique jusqu'à obtenir une courbe \widehat{C} lisse intersectant \mathcal{T} transversalement. L'éclatement algébrique étant local, on considère la résolution de $\mathcal{S} \in \mathcal{O}_p(\{0\})$ dans \mathbb{C}^2 . En d'autres termes, en vue du lemme 5.2.2, on cherche à obtenir une courbe \widehat{C}_3 dont la multiplicité en chaque points du diviseur est égale à 1. On rappelle que l'éclatement de \mathbb{C}^2 en l'origine est donné par

$$\widehat{\mathbb{C}^2} := \{(z, w, [\alpha, \beta]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1 \mid z\beta = w\alpha\}$$

et que celui-ci est recouvert par les ouverts $U_1 = \{\alpha = 1\}$ et $U_2 = \{\beta = 1\}$. La transformée stricte \widehat{C}_1 de C dans $\widehat{\mathbb{C}^2}_1$ est donc donnée par $\{(z^2 - aw^3)(z^2 - bw^3) = 0 \text{ et } z\beta = w\alpha\}$ dans l'éclatement d'un voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Dans la carte U_2 , la transformée \widehat{C}_1 est donnée par

$$\{((w\alpha) - aw^3)((w\alpha)^2 - bw^3) = 0\} = \{\alpha^2 - aw\}(\alpha^2 - bw) = 0\}$$

et ainsi, dans cette carte, le degré du polynôme est de $4 < 6$ et la multiplicité de la singularité de \widehat{C}_1 est égale à $2 > 0$. De plus, la composante exceptionnelle est donnée par $E_1 = \{w = 0\}$ et

intersecte la courbe \widehat{C}_1 en un unique point, sa singularité. En particulier, la classe d'homologie de la courbe \widehat{C}_1 est $[\pi_1^*C] - 4E_1$.

On pose $\alpha = z$ dans U_2 pour la suite. On éclate en $(0, 0)$ dans la carte U_2 . Cette fois, puisque le monôme de degré 4 ne dépend que de z , on considère la carte $U_1 = \{\alpha = 1\}$. Dans cette carte, la transformée stricte \widehat{C}_2 de \widehat{C}_1 est donnée par

$$\{(z^2 - a(z\beta))(z^2 - b(z\beta)) = 0\} = \{(z - a\beta)(z - b\beta) = 0\}$$

et le diviseur exceptionnel est donné par $E_2 = \{z = 0\}$. Enfin, la transformée stricte $S_1^2 := \widehat{E}_1$ est donnée par $\{\beta = 0\}$ et sa classe est $[E_1] - [E_2]$. Les courbes \widehat{C}_2 , S_1^2 et $S_2^2 = E_2$ s'intersectent toutes trois en $(0, 0)$. En particulier, la classe d'homologie de \widehat{C}_2 est donnée par $[(\pi_1 \circ \pi_2)^*C] - 4E_1 - 2E_2$. La multiplicité de la singularité de \widehat{C}_2 est à présent de $2 > 0$, il s'agit d'une singularité étoilée à deux branches, tandis que la courbe $\Sigma := \widehat{C}_2 \cup S_1^2 \cup S_2^2$ présente une singularité étoilée à 4 branches.

La dernière étape de la résolution de C consiste donc en l'éclatement \widehat{C}_3 de \widehat{C}_2 dans lequel, \widehat{C}_3 est une courbe lisse. De plus, comme Σ présentait une singularité étoilée à 4 branches, sa transformée stricte $\widehat{\Sigma}_1 \subset \widehat{C}_3$ intersecte E_3 en 4 points distincts. Un point correspondant à l'intersection de $S_1^3 := \widehat{S}_1^2$ avec E_3 , un point correspondant à l'intersection de $S_2^3 := \widehat{E}_2$ avec E_3 et deux points correspondants à l'intersection de \widehat{C}_3 avec E_3 . De plus, \widehat{C}_3 est de multiplicité 1 en chaque point d'intersection avec E_3 et n'intersecte pas les deux autres composantes de \mathcal{T}^3 . En particulier, on a

$$[\widehat{C}_3] = [(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3)^*C] - 4[E_1] - 2[E_2] - 2[E_3], [\widehat{E}_{21}] = E_2 - E_3, \text{ et } [\widehat{E}_{12}] = E_1 - E_2 - E_3,$$

où les π_i sont les applications d'éclatements successives.

Du cotés symplectique, la proposition 2.0.4 nous fournit une forme symplectique $\widehat{\omega}_\varepsilon$ sur $\widehat{\mathbb{C}P^2}_3$ pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \ll 1$ de sorte que $\mathcal{T} = (S_1^3, S_2^3, S_3^3)$ est un diviseur exceptionnel symplectique à croisements normaux, ainsi qu'une courbe symplectique $\widehat{C} \subset \widehat{\mathbb{C}P^2}_3$ homologue à \widehat{C}_3 , donc dans la classe $[\pi^*C] - 4[E_1] - 2[E_2] - 2[E_3] = d\pi^*PD(\omega_{FS}) - 4[E_1] - 2[E_2] - 2[E_3]$.

Par hypothèses, $[\widehat{C}_3]^2 \geq 0$. Donc d'après le théorème I et l'exemple 5.1.2, il existe un plongement de l'ellipsoïde $\alpha \mathcal{E}(4, 6) = 2\alpha \mathcal{E}(2, 3) = 2(d-1 - \delta) \mathcal{E}(2, 3)$, pour $\delta \ll 1$.

Exemple 5.2.4. *On suppose que C présente N singularité disjointe de type $(2, 3)$ -cusps (voir exemple 5.2.3) en N points différents $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{C}P^2$.*

Alors, si la transformée stricte \widehat{C} de C vérifie $[\widehat{C}]^2 < 0$, chacune de ces singularités induit un plongement d'un ellipsoïde $d/(6N) \mathcal{E}(2, 3)$. On a donc un empilement de $(\mathbb{C}P^2, \omega_{FS})$ par N ellipsoïdes $d/(6N) \mathcal{E}(2, 3)$.

Comme expliqué dans l'exemple 5.2.3, la résolution de chaque singularité de C produit un arbre de résolution dont les composantes sont des courbes dans les classe $[E_{1,i}] - [E_{2,i}] - [E_{3,i}]$, $[E_{2,i}] - [E_{3,i}]$ et $[E_{3,i}]$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$. On obtient donc une forêt \mathcal{T}^{3N} de N tels diviseurs dans $\widehat{\mathbb{C}P^2}_{3N}$ et une courbe lisse \widehat{C}_{3N} représentant la classe $[\widehat{C}_{3N}] = [\pi_C^*C] - \sum_{i=1}^N (2[E_{1,i}] + [E_{2,i}] + [E_{3,i}])$. La condition $[\widehat{C}_{3N}]^2 < 0$ est satisfaite lorsque $d^2 < 6N$.

D'après la proposition 2.0.4, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_{1,1}, \varepsilon_{2,1}, \varepsilon_{3,1}, \dots, \varepsilon_{1,N}, \varepsilon_{2,N}, \varepsilon_{3,N}) \ll 1$, il existe une forme symplectique $\widehat{\omega}_\varepsilon$ sur $\widehat{\mathbb{C}P^2}_{3N}$ de sorte que \mathcal{T}^{3N} est un diviseur exceptionnel symplectique à croisement normaux, et il existe une courbe $\widehat{\omega}_\varepsilon$ -symplectique $\widehat{C} \subset \widehat{\mathbb{C}P^2}_{3N}$ homologue à \widehat{C}_{3N} et intersectant \mathcal{T}^{3N} orthogonalement.

Par hypothèse, $[\widehat{C}_{3N}]^2 < 0$. Le théorème I et l'exemple 5.1.2, pour chaque diviseur composant \mathcal{T}^{3N} il existe un plongement du domaine $\alpha \mathcal{E}(2, 3)$, pour tout

$$\alpha < \frac{\mathcal{A}_\omega(C)}{|\widehat{C}_{3N}]^2 + d\mathcal{A}_\omega(C)}.$$

Ici,

$$\mathcal{A}_\omega(C) = d \text{ et } |\widehat{C}_{3N}]^2 = 6N - d^2,$$

et donc,

$$\alpha < \frac{\mathcal{A}_\omega(C)}{|\widehat{C}_{3N}]^2 + d\mathcal{A}_\omega(C)} = \frac{d}{6N - d^2 + d^2} = \frac{d}{6N}.$$

Enfin, comme les singularités de C sont en N points distincts de $\widehat{\mathbb{C}P^2}$, les diviseurs associés à chacune d'entre elles sont disjoints et il en est donc de même pour les ellipsoïdes obtenus. Ainsi, l'ensemble associé à ces singularités est

$$\mathcal{D} = \bigsqcup_{i=1}^N \frac{d}{6N} \mathcal{E}_i(2, 3),$$

où $\frac{d}{6N} \mathcal{E}_i(2, 3)$ est l'ellipsoïde associé au i -ème diviseur composant \mathcal{T}^{3N} . Le volume total de cet ensemble est

$$\text{Vol}(\mathcal{D}) = N \text{Vol} \left(\frac{d}{6N} \mathcal{E}(2, 3) \right) = N \left(\frac{d}{6N} \right)^2 2 \times 3.$$

Or, il faut que $\text{Vol}(\mathcal{D}) < \text{Vol}(\mathbb{C}P^2) = 1$ et donc $d^2 < 6N$, ce qui est l'inégalité donnée par la condition $[\widehat{C}_{3N}]^2 < 0$. On n'obtient donc pas de condition plus fine sur l'entier d pour qu'une telle courbe présente N singularités $(2, 3)$ -cusps.

Exemple 5.2.5. *On suppose que C présente une seule singularité de type $(2, 3)$ -multi-cusps à N branches en un point $p \in \mathbb{C}P^2$, c'est-à-dire une singularité \mathcal{S} donnée en coordonnées locales par $\mathcal{S} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \prod_{i=1}^N (z^2 - \alpha_i w^3) = 0, \alpha_i \in \mathbb{C}^*\}$.*

Alors, si la transformée stricte \widehat{C} de C vérifie $[\widehat{C}]^2 < 0$, on peut plonger symplectiquement le domaine $\mathcal{D} = \frac{d}{6N^2} \mathcal{E}(2N, 3N) = \frac{d}{6N} \mathcal{E}(2, 3)$.

Comme expliqué à l'exemple 5.2.3, la résolution de la singularité de C produit un diviseur lisse \mathcal{T}^3 dont les composantes sont dans les classes $[E_1] - [E_2] - [E_3]$, $[E_2] - [E_3]$ et $[E_3]$, ainsi qu'une courbe lisse \widehat{C}_3 dans la classe $[\widehat{C}_3] = [\pi_{\mathbb{C}}^* C] - 2NE_1 - NE_2 - NE_3$. La condition pour que $[\widehat{C}_3]$ soit de carré négatif est donnée par $d^2 < 6N^2$.

D'après la proposition 2.0.4, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \ll 1$, il existe une forme symplectique $\widehat{\omega}_\varepsilon$ sur $\widehat{\mathbb{C}P^2}_3$ telle que \mathcal{T}^3 est un diviseur exceptionnel symplectique à croisements normaux et une courbe $\widehat{\omega}_\varepsilon$ -symplectique \widetilde{C} homologue à \widehat{C}_3 et intersectant \mathcal{T}^3 orthogonalement.

Puisque $[\widehat{C}_3]^2 < 0$, le théorème I et l'exemple 5.1.2 nous fournissent le plongement du domaine $\alpha N \mathcal{E}(2, 3)$ pour tout

$$\alpha < \frac{\mathcal{A}_\omega(C)}{|\widehat{C}_3]^2 + d\mathcal{A}_\omega(C)}.$$

Ici,

$$\mathcal{A}_\omega(C) = d \text{ et } |[\widehat{C}_3]^2| = 6N^2 - d^2,$$

et donc

$$\alpha < \frac{\mathcal{A}_\omega(C)}{|[\widehat{C}_3]^2| + d\mathcal{A}_\omega(C)} = \frac{d}{6N^2 - d^2 + d^2} = \frac{d}{6N^2}.$$

Donc, le domaine associé est

$$\mathcal{D} = \frac{d}{6N^2} N \mathcal{E}(2, 3) = \frac{d}{6N} \mathcal{E}(2, 3),$$

dont le volume est $\text{Vol}(\mathcal{D}) = \left(\frac{d}{6N^2}\right)^2 2 \times 3N^2 = \frac{d^2}{6N^2}$.

L'inégalité volumique donne alors $d^2 < 6N^2$, qui n'est autre que l'inégalité donnée par $[\widehat{C}_3]^2 < 0$. L'inégalité volumique ne nous donne donc pas de condition plus fine sur d .

Cependant, ici on plonge un seul ellipsoïde $\frac{d}{6N} \mathcal{E}(2, 3)$. Or, suivant [MS10], on sait qu'un ellipsoïde de la forme $a \mathcal{E}(2, 3)$ pouvant être plongé dans $\mathbb{C}P^2$ doit vérifier $a \leq 1/3$. Ainsi, on a le plongement de \mathcal{D} seulement si $\frac{d}{6N} \leq \frac{1}{3}$, c'est à dire si $d \leq 2N < \sqrt{6N}$. On affine ainsi l'ensemble des valeurs pouvant être prises par d dans le cas des courbes dont la résolution est de carré négatif.

Ainsi, les exemples 5.2.4 et 5.2.5 expliquent que :

Corollaire 5.2.6. *Une courbe de degré d réalise N $(2, 3)$ -cusps disjoints si $d < \sqrt{6N}$ tandis qu'une courbe de degré d réalise un multi-cusp de type $(2, 3)$ à N branches si $d < 2N$.*

Bibliographie

- [Bir97] Paul Biran. Symplectic packing in dimension 4. *Geometry and Functional Analysis*, pages 420–437, 1997. 6
- [Bir01] Paul Biran. From symplectic packing to algebraic geometry and back. 2001. 5, 6, 7
- [CG19] Dan Cristofaro-Gardiner. Symplectic embeddings from concave toric domains into convex ones. *Journal of Differential Geometry*, 112(2) :199 – 232, 2019. 6
- [Don96] Simon K. Donaldson. Symplectic submanifold and almost-complex geometry. *Journal of Differential Geometry*, pages 666–705, 1996. 9, 28
- [EB86] Horst Knörrer Egbert Brieskorn. *Plane Algebraic Curve*. Birkhäuser Basel, 1986. 33
- [Gro85] M. Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones mathematicae*, pages 307–347, 1985. 5, 6, 66
- [GS89] V. Guillemin and S. Sternberg. Birational equivalence in the symplectic category. *Invent. Math.*, 1989. 40
- [HR14] Keon Choi ; Daniel Cristofaro-Gardiner ; David Frenkel ; Michael Hutchings and Vini-
cius G. B. Ramos. Symplectic embeddings into four-dimensional concave toric domains.
Arxiv e-print, arXiv :1310.6647v2, 2014. 6, 11
- [Hut14] Michael Hutchings. Lecture notes on embedded contact homology, arxiv :1303.5789v2.
Arxiv e-print, 2014. 6, 8, 11
- [LL95] T. J. Li and A. Liu. General wall crossing formula. *Math. Res. Lett.*, pages 797–810,
1995. 28, 65, 66
- [LL99] T. J. Li and A. Liu. The equivalence between sw and gr in the case where $b^+ = 1$.
Internat. Math. Res. Notices, pages 335–345, 1999. 28
- [McD96] Dusa McDuff. From symplectic deformation to isotopy. May 1996. 9, 13
- [McD09] Dusa McDuff. Symplectic embeddings of 4-dimensional ellipsoids. *Journal of Topology*,
2009. 6
- [McD11] Dusa McDuff. The hofer conjecture on embedding symplectic ellipsoids. *Journal of
Differential Geometry*, pages 519–532, 2011. 6
- [MO13] Dusa McDuff and Emmanuel Opshtein. Nongeneric j -holomorphic curves and singular
inflation. *Arxiv e-print*, September 2013. 27, 32
- [Mos65] Jürgen Moser. On the volume elements on a manifold. *Transactions of the American
Mathematical Society*, 120(2) :286–294, 1965. 17
- [MP94] Dusa McDuff and Leonid Polterovich. Symplectic packings and algebraic geometry.
(with an appendix by y. karshon). *Inventiones mathematicae*, 115(3) :405–430, 1994.
5, 6, 7, 30

- [MS10] Dusa McDuff and Felix Schlenk. The embedding capacity of 4-dimensional symplectic ellipsoids. 2010. 10, 86
- [Ops13] Emmanuel Opshtein. Singular polarizations and ellipsoid packings. *Int. Math. Res. Not.*, pages 2568–2600, 2013. 19, 22
- [Ops14a] Emmanuel Opshtein. *Problèmes de plongements en géométrie symplectique*. Université de Strasbourg, 2014. 75
- [Ops14b] Emmanuel Opshtein. Symplectic packings in dimension 4 and singular curves. *Journal of Symplectic Geometry*, 2014. 5, 8, 15, 22, 26, 64
- [Tau96] C. H. Taubes. The seiberg-witten and gromov invariants. *Math Research Letters*, pages 818–893, 1996. 28
- [Wal04] C. T. C. Wall. *Singular Points of Plane Curves*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2004. 33

Thibault LORSCHIEDER

Singularités algébriques et domaines symplectiques

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'approfondir les liens mis en lumière par McDuff-Polterovic, Biran et Opshtein entre l'existence de plongements de domaines symplectiques dans une variété symplectique et l'existence de courbes symplectiques réalisant des singularités algébriques planes isolées dans ces variétés. Pour ce faire, on rappelle dans un premier temps des notions essentielles de géométrie symplectique : courbes J-holomorphes, inflations, et des techniques algébriques : résolution de singularité algébrique. Dans un second temps on explique comment construire un analogue symplectique de la résolution algébrique permettant de construire une forme symplectique sur un éclatement algébrique et comment itérer ce procédé afin de résoudre une singularité algébrique réalisée par une courbe symplectique de sorte que le diviseur exceptionnel soit symplectique à croisements normaux et tel que la courbe résolue soit symplectique. Dans une troisième partie on explique comment construire un domaine symplectique associé à un diviseur exceptionnel à l'aide d'un analogue symplectique de la contraction algébrique et on donne leurs propriétés. Dans une quatrième partie on démontre les résultats principaux de la thèse. Enfin, on donne quelques exemples de correspondances domaines-singularités et on montre notamment que tout domaine torique concave peut-être associé à une singularité plane et on exhibe un domaine qui semble ne pas en être un.

Mots clefs : Géométrie différentielle, géométrie symplectique, géométrie algébrique, topologie symplectique.

Résumé en anglais

The aim of this thesis is to deepen the links highlighted by McDuff-Polterovic, Biran and Opshtein between the existence of the symplectic embedding of a domain into a symplectic manifold and the existence of symplectic curves realizing isolated planar algebraic singularity in such a manifold. For this, we first recall some essentials notions of symplectic geometry, such as J -holomorphic curves and inflation technics, and the technic of algebraic resolution of singularities. Secondly, we explain how to build symplectic analogue of algebraic resolution that allows us to endow a complexe blow-up with a symplectic form such that the exceptional divisor is symplectic with normal crossings and such that the resolved curve is also symplectic. In a third part, we explain how the symplectic analogue of the algebraic blow-down allows us to build a symplectic domain associated to the exceptional divisor and we give its properties.

In the fourth part, we prove the main theorems of the thesis. Finally, we give some example of correspondence between singularities and domains and we show in particular that any concave toric domain can be associated with a planar algebraic singularity and we exhibit a domain that may not be a concave toric domain.

Key words : Differential geometry, symplectic geometry, algebraic geometry, symplectic topology.