



Université de Strasbourg



École doctorale : **Mathématiques, Sciences de l'Information et de l'Ingénieur**

Unité de recherche : **ICube – UMR 7357**

THÈSE

Présentée par : **Paul Viville**

Soutenue le : **9 Décembre 2022**

Pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/Spécialité : **Informatique**

Génération de maillages hexaédriques à partir de squelettes

Thèse dirigée par :

Mme. BECHMANN Dominique

Professeure des universités, Université de Strasbourg

Rapporteurs :

Mme. MORIN Géraldine

M. LEDOUX Franck

M. SOKOLOV Dmitry

Professeure des universités, IRIT Toulouse

Directeur de recherches, CEA

Maître de conférences, HDR, LORIA

Examineurs :

M. HOARAU Yannick

M. KRAEMER Pierre

Professeur des universités, Université de Strasbourg

Maître de conférences, Université de Strasbourg

Résumé

Le travail de cette thèse porte sur la génération de maillages hexaédriques à partir de squelettes, dans le but de produire des supports de simulation à partir de données médicales.

Un maillage hexaédrique est un maillage composé exclusivement de cubes plus ou moins déformés. Ce type de maillages est une ressource utile pour la simulation numérique de phénomènes physiques. Ils présentent certains avantages comparés à d'autres types de structures de maillages et ouvrent la porte à de nombreuses optimisations.

De par leur importance pour la simulation, de nombreuses méthodes ont été proposées pour générer des maillages hexaédriques. Le peu de méthodes généralistes automatiques qui existent ne remplissent pas bien les critères nécessaires à la simulation. La plupart des méthodes proposées nécessitent un guidage par l'utilisateur ou ne peuvent pas garantir un résultat purement hexaédrique.

Le type de données qui nous intéresse, tel que des bronches ou des réseaux vasculaires, proscrit un guidage par l'utilisateur de part leur complexité. En revanche ce genre de structure peut être relativement bien représenté par son squelette, une représentation simplifiée de la topologie et de la géométrie de l'objet par un ensemble de courbes ou de surfaces.

Un travail a donc été fait dans un premier temps pour proposer une méthode de génération de maillage hexaédrique à partir d'un squelette courbe. La méthode que nous proposons est basée sur la construction d'un échafaudage quadrilatère servant à gérer la géométrie et la connectivité d'éléments de construction simples. La construction de l'échafaudage dépend d'un algorithme que nous avons développé pour partitionner la surface d'une sphère en quadrilatères. Ce travail a abouti sur un premier algorithme permettant de décomposer automatiquement un domaine géométrique représentable par un squelette courbe en blocs hexaédriques. Ce travail a ensuite été étendu aux domaines représentables par un squelette mixte, composé de courbes et de surfaces, aboutissant sur un deuxième algorithme de génération de maillage hexaédrique.

En plus du développement théorique de nos algorithmes, un travail technique de mise en oeuvre a été fait pour mettre à disposition un pipeline complet de génération de maillage avec des outils de post-traitement pour l'exploitation en simulation.

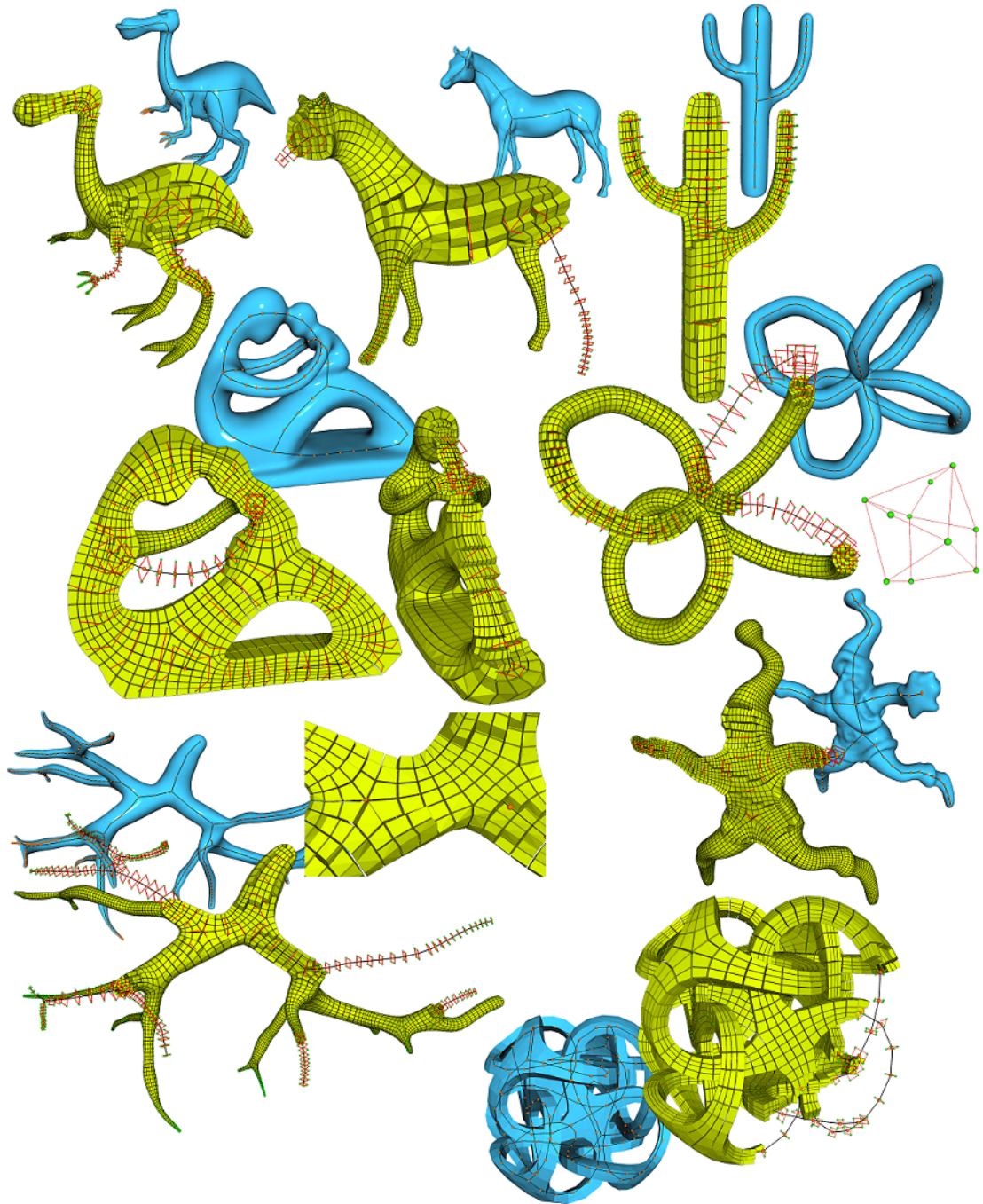


FIGURE 1 – Des exemples de maillages obtenus avec notre méthode de génération à partir d'un squelette courbe.

Table des matières

Résumé	i
Introduction	1
1 Génération de maillages	7
Introduction	7
1.1 Maillages Hexaédriques	7
1.2 Méthodes généralistes	12
1.2.1 Génération basée grille	12
1.2.2 Plâtrage	13
1.2.3 Décomposition en blocs	14
1.2.4 Construction duale	14
1.2.5 Champ de directions	16
1.2.6 Polycubes	17
1.2.7 Observations	18
1.3 Génération basée squelette	18
1.3.1 Squelettes	18
1.3.2 Méthodes de génération de maillage basées squelette	21
1.3.3 Méthodes utilisant l'axe médian	31
1.4 Observations	32
Conclusion	33
2 Algorithmes	35
Introduction	35
2.1 Connectivité des embranchements	36
2.1.1 Analogie 2D	36
2.1.2 Application en 3D	39
2.2 Génération basée squelette 1D	43
2.2.1 Adaptation du squelette	44
2.2.2 Analyse du squelette	45
2.2.3 Construction de l'échafaudage	46
2.2.4 Géométrie	50
2.2.5 Construction des volumes	52
2.2.6 Limites	55
2.3 Génération basée squelette 2D	55
2.3.1 Adaptation du squelette	57
2.3.2 Analyse du squelette	59
2.3.3 Construction de l'échafaudage	60
2.3.4 Géométrie	62
2.3.5 Construction des volumes	63
2.4 Géométrie et optimisations	67
2.4.1 Subdivision et Optimisation	67
2.4.2 Optimisations spécialisées	71
2.5 Propriétés des algorithmes	76
2.6 Partition de Sphère	79
2.6.1 Partition par remaillage	79
2.6.2 Partition par pincement	84
2.6.3 Observations et perspectives	84
Conclusion	86

3 Résultats	87
Introduction	87
3.1 Génération basée squelette courbe	87
3.2 Génération basée squelette mixte	92
3.3 Exploitation médicale	94
3.3.1 Données types	94
3.3.2 Maillages animés	96
Conclusion	100
4 Mise en oeuvre	101
Introduction	101
4.1 Structures de données	101
4.1.1 Carte combinatoire orientée	101
4.1.2 Graphe non orienté	104
4.1.3 Graphe d'incidence	105
4.2 Modules CGoGN	106
4.2.1 CGoGN	107
4.2.2 Implémentation	107
4.3 CMapJS	111
4.3.1 Bibliothèque	111
4.3.2 Applications	112
Conclusion	115
Conclusion	117

Introduction

Contexte

Au fil des dernières années, la simulation numérique est devenue un outil quasi omniprésent dans de nombreux domaines tels que la recherche scientifique fondamentale, l'ingénierie mécanique, et la médecine. La simulation numérique de phénomènes physiques modélise l'évolution de certaines propriétés au sein d'un domaine au fil du temps, par exemple la vitesse d'écoulement d'un fluide dans un tube ou la déformation de matériaux sous l'influence d'une force. Ces simulations sont souvent calculées par des méthodes dites par éléments finis, qui pour approximer l'évolution d'un phénomène complexe sur l'ensemble du domaine résolvent pas à pas des équations mathématiques simples sur une discrétisation du domaine en éléments géométriques simples. Cette discrétisation du domaine est généralement représentée par un maillage volumique. Le maillage volumique sert de support pour les données de la simulation et pour l'application des équations sur ces données. La simulation et son support sont étroitement liés. En conséquence, le type de maillage utilisé, la nature de ses mailles, la finesse de sa discrétisation, sa fidélité de représentation du domaine, sa topologie et sa géométrie ont un impact significatif sur la précision et la vitesse des calculs.

Types de maillages

La génération de maillages volumiques à partir d'une surface délimitant un domaine géométrique quelconque est un sujet très étudié depuis les débuts de l'informatique graphique. Un maillage volumique peut être composé de tétraèdres, hexaèdres, ou polyèdres quelconques. Typiquement pour les applications nécessitant un maillage volumique, selon les tolérances des codes, celui-ci sera composé exclusivement de tétraèdres, exclusivement d'hexaèdres, ou sera mixte avec une composition des deux aussi appelé hex-dominant.

Maillages tétraédriques

Les maillages tétraédriques sont des maillages volumiques exclusivement composés d'éléments tétraédriques : des pyramides à base triangulaire. Ils sont un sujet bien étudié et relativement bien maîtrisé. Des travaux sont encore menés pour optimiser le processus de production, mais de nombreuses solutions de génération de maillages tétraédriques d'un domaine quelconque sont distribuées dans des bibliothèques communément utilisées comme CGAL. Le tétraèdre étant le simplexe euclidien en 3-dimensions, polyèdre convexe régulier le plus simple, il est toujours possible de décomposer un domaine 3D

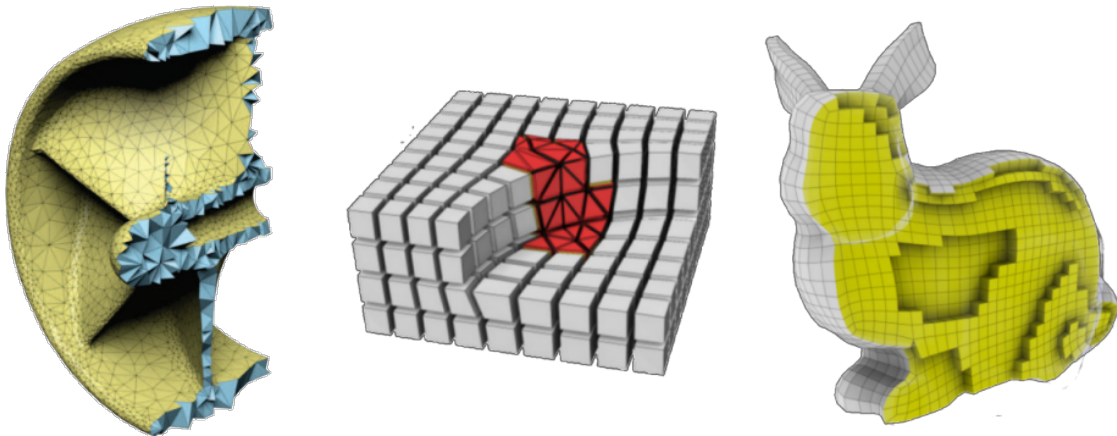


FIGURE 2 – Maillage tétraédrique à gauche [Hu et al., 2020], hex-dominant au centre [Ray et al., 2017], et hexaédrique à droite [Bracci et al., 2019]

en un ensemble de tétraèdres. L’avantage des maillages tétraédriques est qu’ils sont particulièrement adaptés à la représentation de géométries complexes. Cette discrétisation pourra être utilisée pour certaines applications de simulation, mais cette structure ne conviendra pas pour toutes. Dans le cadre de simulations impliquant la déformation du domaine, les maillages tétraédriques peuvent souffrir de *tet-locking*. Ce verrouillage se présente sous la forme d’une rigidité excessive des tétraèdres causée par des contraintes trop fortes sur les degrés de liberté des sommets. Ce verrouillage aura un impact difficilement prévisible a priori. Il est donc préférable de les éviter pour la simulation mécanique impliquant des déformations.

Maillages hexaédriques

Une alternative au maillage tétraédrique, est le maillage hexaédrique, un maillage composé exclusivement d’hexaèdres : des cubes plus ou moins déformés. Ce type de maillage présente un certain nombre de caractéristiques intéressantes pour la simulation. Ils permettent une meilleure efficacité des calculs et une précision numérique plus élevée que les alternatives. Un maillage hexaédrique requiert entre 4 et 10 fois moins d’éléments qu’un maillage tétraédrique pour obtenir une précision de simulation équivalente, résultant en une utilisation de mémoire et une complexité de calcul significativement réduites. Un maillage hexaédrique structuré et correctement orienté, localement homéomorphe à une grille régulière et aligné aux bords, permet des optimisations dans les calculs de simulations tout en préservant la précision numérique. Cependant, à cause de contraintes sur leur structure pour pleinement bénéficier de leurs avantages pour la simulation, il est difficile de produire automatiquement un maillage hexaédrique sur tout type de domaine géométrique. Nous verrons quelles sont ces contraintes dans la section 1.1.

Maillages hex-dominant

A cause des difficultés pour mailler purement en hexaèdres un domaine arbitraire et pour conserver certaines des propriétés désirables des maillages hexaédriques, une représentation communément utilisée est le maillage mixte hex-dominant composé d’hexaèdres

principalement mais qui accepte la présence de tétraèdres et autres primitives géométriques tels que des prismes triangulaires ou des pyramides à base carrée. On y retrouve l'avantage du maillage hexaédrique avec la réduction du nombre de mailles et une grande partie du domaine bénéficiant de la précision numérique supérieure des hexaèdres, avec la possibilité de mailler un domaine géométrique arbitraire. Cette représentation est considérée comme préférable à un maillage tétraédrique si il n'y a pas de solution hexaédrique, mais les transitions entre hexaèdres et autres types de cellules sont coûteuses à gérer dans de nombreux codes de calculs.

Les maillages mixtes présentent un bon compromis entre hexaédrique et tétraédrique lorsque le domaine ne peut pas être maillé purement en hexaèdres. Pour autant, à cause des complexités de calculs sur les éléments de transition, si il existe une méthode pour générer un maillage purement hexaédrique, cette solution sera préférable. Au vu des avantages présentés par les maillages hexaédriques, et notre objectif d'exploitation des résultats pour la simulation, il nous a semblé un choix pertinent de se focaliser sur cette représentation.

Génération de maillages

L'inconvénient principal des maillages hexaédriques est qu'ils sont notoirement difficiles à produire [Armstrong et al., 2015]. Il n'existe pratiquement aucune méthode de génération de maillage pouvant gérer un domaine géométrique arbitraire de façon automatique, et le peu qui existent produisent des résultats parfois insatisfaisants pour la simulation.

La recherche sur la génération de maillage hexaédrique a connu un essor ces dernières années, et un très grand nombre de méthodes de génération de tels maillages ont été proposées. Un aperçu de ces méthodes sera donné dans la section 1.2. La plupart de ces méthodes cherchent à résoudre le problème de la génération de maillage volumique pour des domaines de forme arbitraire. En fonction des objectifs que l'on se fixe pour le maillage généré, les résultats de ces méthodes généralistes ne sont cependant pas toujours satisfaisants. Du point de vue de la forme des mailles, certaines méthodes génèrent des mailles de mauvaise qualité, notamment près des bords du domaine, qui est pourtant souvent une zone d'intérêt particulière pour la simulation. Du point de vue de la nature des mailles, certaines méthodes ne permettent pas toujours de garantir la pureté du résultat et ne peuvent générer que des maillages mixtes, ce qui, selon le contexte, ne remplit pas toujours les conditions exigées [Beaufort et al., 2021]. Ces méthodes vont parfois tenter de pallier ces problèmes en donnant la main à l'utilisateur pour la prise de décisions, tel que demander à l'utilisateur de décomposer manuellement le domaine en éléments plus simples à gérer. Cependant, alors que ce genre d'intervention manuelle est envisageable sur des domaines relativement simples tels que des petites pièces mécaniques conçues par ordinateur, il n'est plus possible pour des domaines extrêmement complexes tels qu'un réseau vasculaire cérébral issu d'images médicales dont la géométrie peut être composée de dizaines de milliers de vaisseaux [Mattingly et al., 2015]. En se restreignant à un type de domaine géométrique partageant des caractéristiques communes, il est possible d'exploiter ces caractéristiques pour proposer une méthode de génération de maillages spécialisée à ces domaines en minimisant le besoin d'intervention manuelle.

Dans le cadre de cette thèse nous nous intéressons donc en particulier aux maillages

hexaédriques. Nous avons décidé de réduire le champ de nos recherches à la construction de maillage pour des domaines pouvant être décrits par leur squelette. Le squelette d'un domaine en est une représentation topologique et géométrique simplifiée qui en préserve les données pertinentes à la reconstruction. Cette représentation simplifiée peut être analysée algorithmiquement et en conséquence nous fournir automatiquement une décomposition d'un domaine en différentes zones d'intérêts. Ce type de données est commun dans le domaine médical avec les réseaux vasculaires, les réseaux neuronaux, ou les bronches [Mattingly et al., 2015, Chen and Zhu, 2022], et des travaux de recherche en simulation de fluides et de gaz sur ces éléments sont en cours [Hoarau et al., 2016, Lu et al., 2019a], créant donc un besoin pour des structures de bonne qualité. Plusieurs méthodes de génération de maillages surfaciques et volumiques à partir de squelettes ont déjà été proposées, celles-ci seront présentées dans la section 1.3. Certaines d'entre elles apportent des contributions intéressantes dont nous nous sommes inspirés dans les travaux de cette thèse.

Contributions

Cette thèse a abouti sur plusieurs méthodes originales de génération de maillages hexaédriques à partir de squelettes qui ont donné lieu au développement de plusieurs outils permettant l'exploitation de nos méthodes.

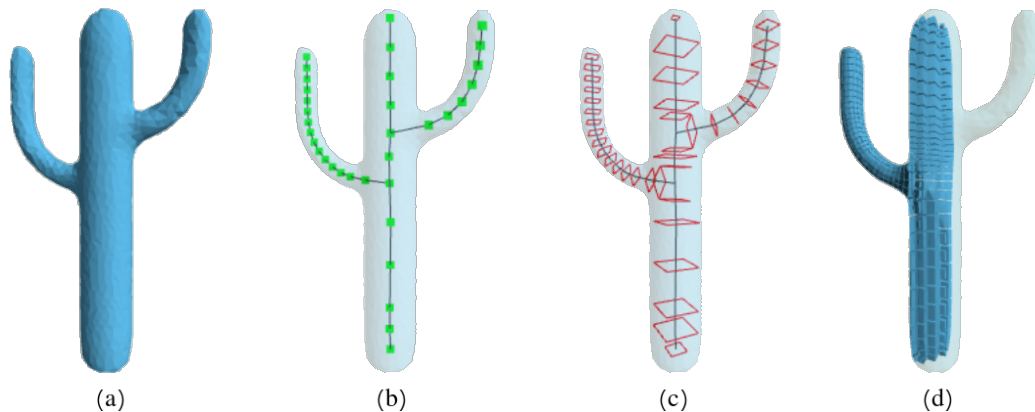


FIGURE 3 – Processus de génération d'un maillage hexaédrique à partir d'un squelette courbe. (a) la surface du domaine à mailler, (b) le squelette adapté du domaine, (c) l'échafaudage décomposant le domaine, (d) le maillage hexaédrique résultant.

Un premier travail a été fait sur l'exploitation des squelettes courbes pour la reconstruction de domaines tubulaires [Viville et al., 2021]. L'élément clef pour générer un maillage à partir d'un squelette courbe est la gestion des embranchements de ce squelette. Ce premier travail a abouti sur la conception d'un algorithme basé sur un principe de construction d'échafaudages reliés au squelette pour une décomposition automatique du domaine en blocs permettant de générer des maillages hexaédriques à partir d'un squelette courbe (Figure 3). L'analyse du squelette permet la décomposition du domaine en segments dans lesquelles insérer des blocs d'éléments hexaédriques. L'échafaudage, construit à partir du squelette, encode les informations géométriques et topologiques

permettant de positionner ces blocs et de les connecter aux blocs voisins. La construction de ces échafaudages a nécessité l'élaboration d'une méthode originale de partition de la surface d'une sphère en quadrilatères.

Ce premier algorithme produit des résultats satisfaisants pour des domaines suffisamment bien décrits par un squelette courbe : des formes tubulaires sans angle saillant et sans grande partie plane. Pour pouvoir augmenter l'ensemble des configurations gérées par notre méthode, une extension du premier algorithme a été développée pour pouvoir gérer des squelettes dits mixtes : composés d'éléments courbes et d'éléments surfaciques, appelés feuillettes. En préservant le système d'échafaudages des squelettes courbes et en définissant une gestion des feuillettes interfaçable avec la structure précédente, nous avons produit une deuxième version de l'algorithme permettant de gérer une plus grande variété de domaines géométriques (Figure 4).

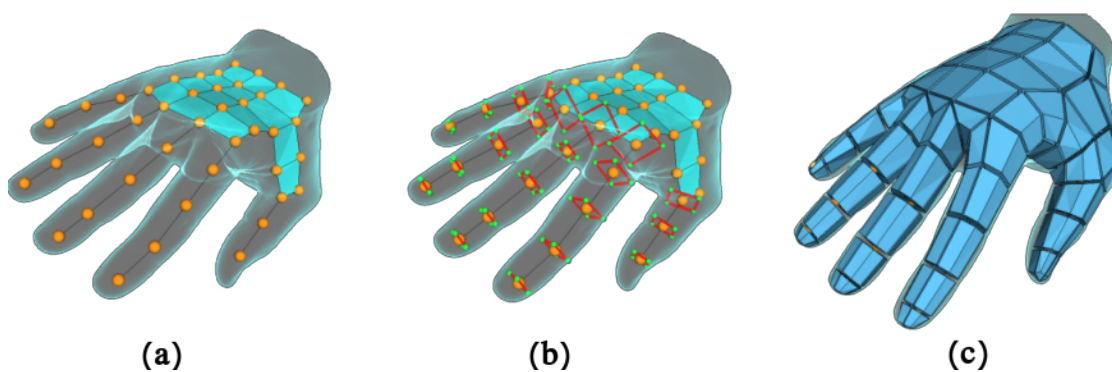


FIGURE 4 – Processus de génération d'un maillage hexaédrique à partir d'un squelette mixte. (a) la surface du domaine à mailler et son squelette, (b) l'échafaudage décomposant le domaine, (c) le maillage hexaédrique résultant.

Un travail technique d'implémentation a été mené. Les deux algorithmes mentionnés précédemment ont été implémentés avec leur pipeline respectif. Ces pipelines permettent l'extraction du squelette courbe, la construction d'un maillage volumique grossier à partir d'une surface et du squelette associé, et ensuite le post traitement du maillage, le raffinement topologique et l'optimisation de la géométrie. Une considération majeure de ce travail technique était l'efficacité de l'implémentation pour disposer d'un outil prêt à l'emploi et produire des maillages exploitables par des applications de simulation d'écoulement de fluide pour valider nos résultats.

Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est composé de deux parties, d'abord le contexte dans lequel s'inscrit notre travail, puis les contributions que nous avons faites dans le cadre de cette thèse.

Le Chapitre 1 couvre les notions fondamentales essentielles pour comprendre les maillages hexaédriques, les contraintes qu'ils présentent, et comment en évaluer la qualité, ainsi que l'état de l'art des grandes familles de méthodes de génération de maillage hexaédrique généralistes et les méthodes spécialisées sur la génération de maillages surfaciques et volumiques à partir de squelettes.

Le Chapitre 2 présente les trois algorithmes principaux qui ont été développés dans le

cadre des travaux de cette thèse. Les algorithmes de génération de maillage hexaédrique à partir d'un squelette courbe et à partir d'un maillage mixte sont présentés dans un premier temps. Ensuite les méthodes de raffinement et d'optimisation à disposition pour rendre les maillages résultants de nos algorithmes exploitables pour la simulation. Pour finir, l'algorithme de partition de sphère conçu pour produire les échafaudages dont dépendent les algorithmes est décrit en détail.

Le Chapitre 3 contient une évaluation de la qualité de nos résultats, comparée à l'état de l'art, ainsi que l'exploitation qui a été faite de nos travaux dans le contexte de la simulation médicale.

Le Chapitre 4 détaille les travaux techniques que nous avons produits au fil de ce travail à travers les outils que nous avons développés. Expliquant d'abord les structures de données que nous avons choisi d'utiliser et leur intérêt, puis l'implémentation efficace des pipelines complets de nos algorithmes dans la bibliothèque CGoGN, avec les optimisations faites. Pour finir, ce chapitre donne un aperçu d'une bibliothèque javascript développée en parallèle de nos travaux, utilisée pour la conception rapide d'outils de prototypage et de tests.

Chapitre 1

Génération de maillages

Introduction

Les maillages hexaédriques sont prisés pour la simulation, mais avec certaines contraintes sur leur structure. La taille des mailles, leur topologie, et leur géométrie ont une influence significative sur la précision du résultat [Shepherd and Johnson, 2008]. Le non respect de ces contraintes résulte en un maillage considéré de mauvaise qualité, qui peut s'avérer complètement inexploitable dans le contexte de la simulation.

De nombreuses méthodes de génération de maillages hexaédriques généralistes, applicables à des domaines de géométries quelconques, ont déjà été proposées. A l'heure actuelle il n'existe pas de méthode généraliste complètement automatisée et robuste pouvant garantir un résultat correct [Beaufort et al., 2021]. Pour le contexte que nous avons choisi d'explorer, les domaines à géométrie très complexe comme les réseaux vasculaires, les méthodes existantes ne sont pas adaptées.

Dans le but de pouvoir traiter ce genre de données, plusieurs méthodes de génération de maillages aussi bien surfaciques que volumiques exploitent des représentations des domaines par leur squelette. Ces méthodes identifient les problèmes pertinents de la génération de maillages à partir d'un squelette et font des propositions intéressantes, source d'inspiration pour nous, mais ne sont pas nécessairement complètes ou conçues dans le même but applicatif que nous et de ce fait ne sont pas adaptées à nos besoins.

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter la structure de maillage hexaédrique avec les caractéristiques souhaitables pour la simulation ainsi que la définition d'un critère de qualité communément utilisé, le Jacobien Normalisé. Dans un second temps nous établissons un état de l'art des principales approches utilisées pour la génération de maillages hexaédriques. Ensuite nous définissons la notion de squelette pour explorer l'état de l'art des approches exploitant la représentation d'un domaine par son squelette pour construire des maillages.

1.1 Maillages Hexaédriques

Un maillage hexaédrique est un maillage volumique composé exclusivement d'hexaédres, des volumes composés de 6 faces quadrilatères et 8 sommets, c'est à dire des cubes topologiques, plongé dans R^3 . Les sommets internes d'un tel maillage seront dit réguliers si ils sont de **degré** 6, autrement dit qu'ils sont incidents à 6 arêtes.

Un maillage ne contenant que des sommets réguliers sera équivalent à une grille orthogonale tronquée, et pourra être qualifié de **structuré**. En pratique, peu de domaines géométriques permettent la construction d'un maillage structuré à causes de contraintes géométriques excessives. Si un maillage peut être décomposé en un ensemble de grilles régulières, il pourra être qualifié de **structuré par bloc**.

Un maillage hexaédrique est dit non conforme si les volumes qui le composent sont géométriquement des hexaèdres, mais pas topologiquement. Autrement dit, si il contient des hexaèdres adjacents à plus d'un autre hexaèdre par une de leurs faces (Figure 1.1). Si tous les hexaèdres sont adjacents à un seul autre par une face, le maillage est dit conforme.

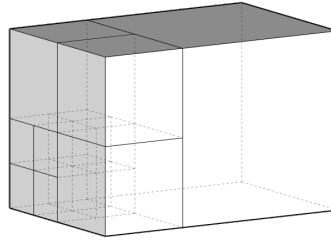


FIGURE 1.1 – Exemple d'hexaèdres non conformes.

Les maillages hexaédriques conformes sont un support de simulation prisé pour les optimisations qu'ils permettent. Un maillage conforme, structuré par bloc, permettra une optimisation et accélération des codes de simulations sur les différents blocs qui le composent.

Qualité d'un maillage hexaédrique

Pour évaluer un maillage généré, l'optimiser, pouvoir s'assurer de son utilisabilité pour la simulation, et comparer les résultats avec d'autres méthodes, il est nécessaire de disposer de métriques pour en mesurer la qualité. Il existe de nombreuses métriques dans la littérature pour évaluer la qualité d'un maillage hexaédrique, cependant toutes ne sont pas utiles pour le contexte de la simulation physique, et beaucoup sont fortement corrélées [Gao et al., 2017]. Une métrique communément utilisée pour l'optimisation de maillages et corrélée à la qualité des résultats de simulation est le Jacobien Normalisé [Knupp, 2000]. En plus de cette métrique, certaines caractéristiques topologiques et géométriques sont souhaitables dans un maillage hexaédrique [Shepherd and Johnson, 2008]. Ces caractéristiques sont tangentielllement liées au Jacobien Normalisé mais valent la peine d'être explicitées.

Jacobien normalisé

La métrique du Jacobien d'un maillage hexaédrique est la comparaison de chacun des éléments du maillage à un cube unitaire [Knupp, 2000]. Cette comparaison est effectuée pour chaque hexaèdre en calculant le déterminant de la matrice Jacobienne de chaque sommet de l'hexaèdre, soit le déterminant du repère direct $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ formé par les arêtes incidentes à chaque sommet (Figure 1.2).

$$J = |\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3| = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$$

Le Jacobien de l'hexaèdre sera égal au déterminant le plus faible de ses huit sommets. Les valeurs de qualité seront dans l'ensemble $[-\infty; \infty]$.

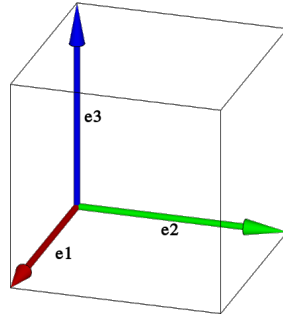


FIGURE 1.2 – Repère direct autour d'un sommet d'un hexaèdre.

Similairement, le Jacobien Normalisé effectue essentiellement une comparaison de l'hexaèdre à un pavé droit, en calculant le déterminant de la matrice jacobienne dont tous les éléments ont été normalisés. La longueur des arêtes de l'hexaèdre n'est plus prise en compte. On s'intéresse seulement à l'orthogonalité des arêtes deux à deux. Les valeurs de qualité du Jacobien Normalisé sont dans l'ensemble $[-1; 1]$. Une valeur de 1 représente un pavé droit (Figure 1.3 (a)), et une valeur négative représente un hexaèdre concave (Figure 1.3 (c)).

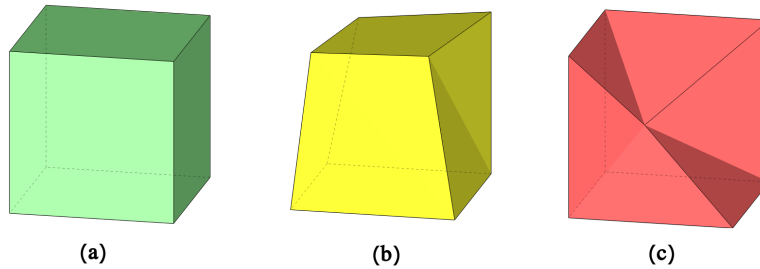


FIGURE 1.3 – Qualité du Jacobien Normalisé sur : (a) un pavé droit, (b) un hexaèdre convexe, (c) un hexaèdre concave.

Selon [Gao et al., 2017], les valeurs importantes pour la simulation seront typiquement la qualité moyenne des éléments du maillage, ainsi que la valeur minimale. Une valeur minimale négative signifiera un maillage inutilisable pour la plupart des codes de simulation, et la précision de la simulation augmentera avec la qualité moyenne. Pour être considéré comme exploitable pour la simulation, un maillage doit généralement avoir des valeurs de Jacobien Normalisé dans l'intervalle $[0.3; 1]$.

Lorsqu'un maillage est généré avec une qualité insuffisante, il existe certaines méthodes d'optimisation telles que [Livesu et al., 2015] qui permettront de modifier la géométrie itérativement pour améliorer la qualité générale du maillage.

Régularité

Le Jacobien Normalisé est une mesure sur la géométrie du maillage, mais cette mesure est aussi influencée par sa topologie. Certaines propriétés topologiques sont nécessaires si l'on souhaite maximiser le Jacobien Normalisé. Le maillage idéal pour la précision de la simulation, avec un Jacobien Normalisé de 1, est une grille orthogonale. Une grille orthogonale n'a que des sommets internes de degré 6, avec 6 sommets voisins, et des sommets en surface de degré 5. Pour des sommets de ces degrés, il existe une solution géométrique telle que tous les angles formés par les arêtes incidentes soient droits. Des sommets avec des degrés différents ne pourront pas être optimisés géométriquement vers une solution ne contenant que des angles droits. Chaque pas d'optimisation visant à améliorer la qualité d'un hexaèdre incident à un de ces sommets aura un impact négatif sur la qualité d'un des voisins (Figure 1.4).

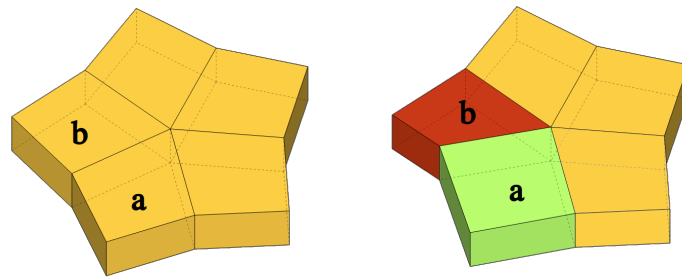


FIGURE 1.4 – A cause de la présence de 5 hexaèdres autour d'une même arête améliorer la qualité de l'élément **a** a un impact négatif sur l'élément **b**.

Il n'est pas possible dans le cas général de simplement plaquer une grille orthogonale sur le domaine étudié sans avoir à faire d'importants compromis sur la qualité des cellules aux bords du domaine, mais on souhaite en préserver les propriétés lorsque c'est possible. On veut donc obtenir un maillage qui minimise le nombre de sommets de degré différent de 6, dits sommets irréguliers, et qui soit localement homotope à une grille régulière.

Alignement

En plus de minimiser le nombre de sommets irréguliers, d'autres propriétés sont utiles pour la simulation et sont moins directement corrélées au Jacobien Normalisé, tel que l'alignement des éléments à la géométrie du bord du domaine [Shepherd and Johnson, 2008]. Dans un maillage hexaédrique, on peut définir des feuillets auxquels appartiennent un hexaèdre. En partant d'un hexaèdre et 4 arêtes "parallèles", un feuillet sera l'ensemble des hexaèdres parcourus si l'on effectue une "inondation" du maillage sur la direction orthogonale à ces arêtes. L'alignement des éléments à la surface est un critère récurrent pour la qualité d'une simulation. Il est préférable que la surface du domaine maillé soit composée d'un feuillet continu unique (Figure 1.5), car cette configuration minimise le nombre de sommets irréguliers en se conformant à la surface.

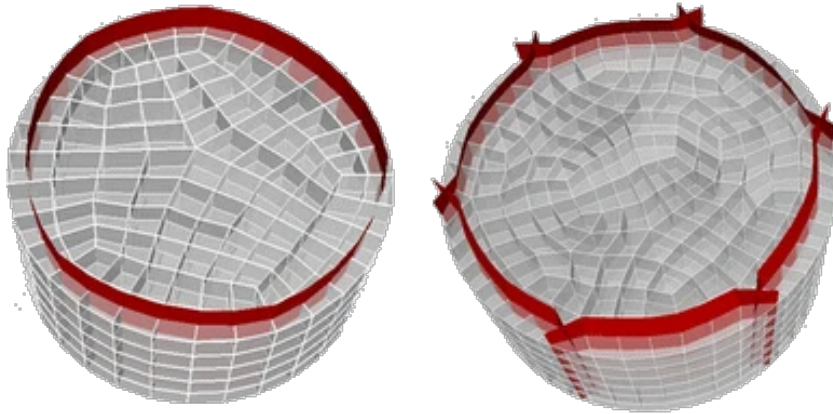


FIGURE 1.5 – A gauche un maillage dont les hexaèdres forment une couche alignée à la surface du cylindre. A droite un maillage dont les hexaèdres ne forment pas un feuillet continu. [Shepherd and Johnson, 2008]

Nombre d'éléments

Une caractéristique ayant un impact important sur les temps de simulation est le nombre de nœuds dans le maillage sur lesquels devront être résolues les équations différentielles [Hu et al., 2018]. L'ajout d'éléments dans le maillage pour affiner la discrétisation du domaine résulte en des temps de simulation et un impact mémoire plus élevés pour gagner en précision de calcul. En fonction des codes et des paramètres de simulation, affiner le domaine au-delà d'un certain seuil ne permettra pas un gain pertinent en précision. Donc ajouter des éléments ne présente plus de bénéfice sur la précision malgré un coût sur la mémoire et le temps de simulation toujours présent.

La subdivision régulière d'un hexaèdre en huit résulte en huit nouveaux hexaèdres avec le même Jacobien Normalisé minimum que leur parent mais une moyenne potentiellement plus élevée sur les huit. Le Jacobien Normalisé d'un hexaèdre issu d'une subdivision régulière est supérieur ou égal au Jacobien Normalisé de son hexaèdre parent (Figure 1.6). Il est aussi possible d'optimiser la géométrie globale d'un maillage finement subdivisé sans réussir à augmenter le Jacobien Normalisé minimum. La subdivision d'un maillage permet donc d'augmenter la moyenne du jacobien normalisé artificiellement sans réel bénéfice. On peut donc en déduire qu'une discrétisation d'un domaine avec moins d'éléments pour une même moyenne du Jacobien Normalisé est préférable, puisque les raffinements supplémentaires qui pourraient s'avérer nécessaires auront un impact positif sur la qualité.

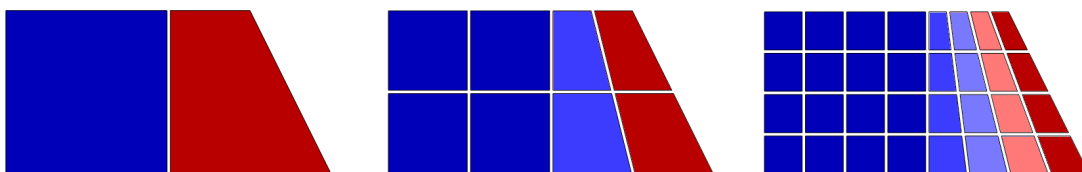


FIGURE 1.6 – Lissage de la qualité moyenne d'un domaine par subdivision. En bleu les éléments de meilleure qualité, en rouge les éléments de pire qualité.

Remarques

Nous avons défini ici une liste de caractéristiques permettant d'évaluer la qualité et l'utilisabilité d'un maillage hexaédrique. Ces critères étant connus a priori, ils peuvent être utilisés pour guider la conception d'une nouvelle méthode de génération de maillage hexaédrique conforme et structuré par blocs, spécifique aux domaines représentables par des squelettes. Nos objectifs sont donc de générer des éléments alignés à la surface du domaine, dans le cas des maillages tubulaires : alignés le long des branches, et dans le cas d'éléments plans : alignés avec le plan, en minimisant le nombre d'hexaèdres, et en maximisant le nombre de sommets réguliers. Si ces critères topologiques sont respectés, le maillage pourra être optimisé géométriquement avec le Jacobien Normalisé en critère d'évaluation pour obtenir un bon support de simulation.

1.2 Méthodes généralistes

De part leur utilité pour la simulation et l'industrie, la génération de maillages hexaédriques est un sujet de recherche particulièrement important. Le nombre de publications sur le sujet des maillages hexaédriques parues chaque année est croissant depuis plus de trente ans [Beaufort et al., 2021]. De ce fait, un grand nombre de méthodes de génération de maillages existent déjà. Nous présentons ici les grandes familles de méthodes de génération de maillages hexaédriques telles qu'elles ont été identifiées dans deux états de l'art récents [Li et al., 2020, Pietroni et al., 2022], et nous ajoutons des observations quant à leur utilisation pour la génération de maillages hexaédriques de données médicales telles qu'un réseau vasculaire.

1.2.1 Génération basée grille

Les méthodes de génération de maillage hexaédrique basées grille sont parmi les plus répandues et les plus anciennes. La surface du domaine étudié est intersectée avec une grille régulière pour obtenir une voxelisation de l'intérieur (Figure 1.7 gauche), la bordure de la voxelisation est ensuite projetée sur la surface (Figure 1.7 droite).

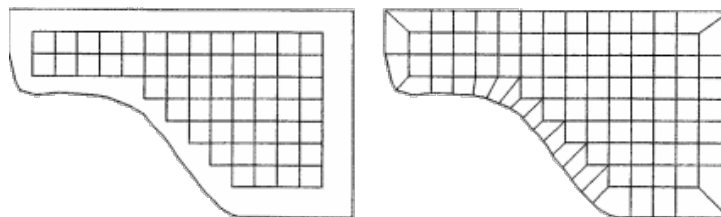


FIGURE 1.7 – A gauche : intersection d'une grille avec une surface. A droite : plaquage du bord de la grille à la surface. [Schneiders, 2005]

Pour pouvoir s'adapter au niveau de détails, certains algorithmes utilisent des grilles adaptatives [Gao et al., 2019, Pitzalis et al., 2021, Livesu et al., 2021, Goff et al., 2019], basées sur des octrees, produisant des voxels adaptés aux dimensions locales du maillage (Figure 1.8 à gauche). Ce genre de grille adaptative crée généralement un maillage hexaédrique non conforme. Pour obtenir un maillage hexaédrique conforme, la grille est utilisée

comme le dual du maillage hexaédrique final. Une correction de la connectivité est effectuée (Figure 1.9) pour n'avoir que des sommets de valence 6, et le dual de la grille est construit (Figure 1.8 au centre).

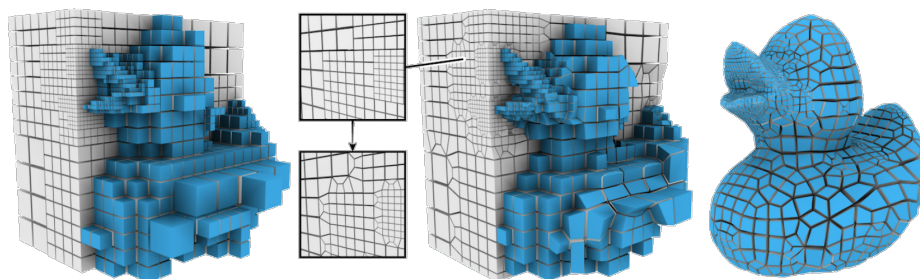


FIGURE 1.8 – Construction d'un octree pour voxeliser le domaine, et construction du dual de l'octree. [Livesu et al., 2021]

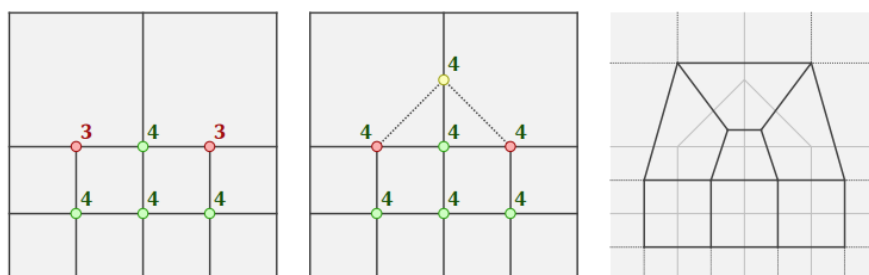


FIGURE 1.9 – Modification de la connectivité avant de construire le dual. [Pitzalis et al., 2021]

Des méthodes de ce type ont l'intérêt de pouvoir générer automatiquement des maillages hexaédriques à partir de tout type de géométrie. Malgré cette propriété intéressante, les méthodes basées grilles souffrent de plusieurs défauts majeurs pour l'exploitation des maillages produits pour la simulation. L'orientation du domaine en relation avec la grille a une forte influence dure à prédire sur le maillage résultant. Les maillages produits ne sont pas structurés, pas alignés à la surface, et les sommets proches de la surface sont souvent très irréguliers. Ces défauts rendent ces méthodes moins attractives pour la simulation.

1.2.2 Plâtrage

Les méthodes par plâtrage, aussi appelées "fronts avançant", sont parmi les premières méthodes de génération de maillages hexaédriques [Blacker and Meyers, 1993, Staten et al., 2005]. A partir d'une surface, des épaisseurs d'hexaèdres sont extrudées itérativement vers l'intérieur. Ces épaisseurs d'hexaèdres forment le front avançant remplissant progressivement le domaine. L'itération s'arrête lorsque les fronts se rencontrent (Figure 1.10 (a - d)). La collision entre les fronts avançant cause l'apparition de cavités (Figure 1.10 (d)), qui doivent être hexaédrisées (Figure 1.10 (e)).

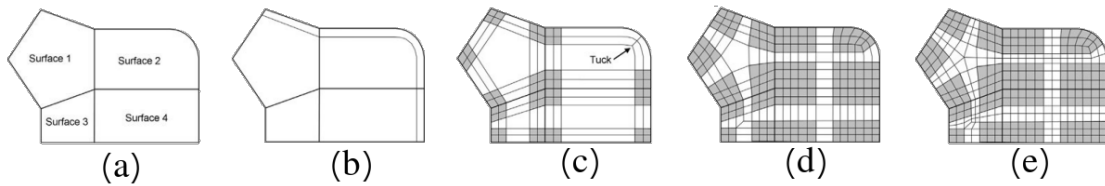


FIGURE 1.10 – Processus de plâtrage d’une surface vue en 2D [Staten et al., 2005].

Si le processus réussit, le résultat est par construction aligné à la surface du domaine. L’étape de fermeture des cavités et la connexion entre les différents fronts peut échouer en fonction des configurations. De plus, la qualité du maillage est très variable en fonction de la surface donnée en entrée, le processus ne donnant aucun contrôle sur la structure du maillage. Cette méthode est essentiellement limitée aux domaines dont la géométrie est relativement simple.

L’absence de garantie de résultat hexaédrique, l’absence de contrôle sur la structure, et la difficulté à gérer des géométries complexes ne permettent pas d’envisager l’utilisation de ce type de méthodes pour la génération de maillages tubulaires complexes.

1.2.3 Décomposition en blocs

Les méthodes de décomposition en blocs cherchent à subdiviser le volume du domaine traité en un ensemble de sous volumes plus aisés à hexaédriciser séparés par des interfaces mutuellement compatibles (Figure 1.11). Cette décomposition peut selon les cas être automatique [Livesu et al., 2020, Brückler et al., 2022] ou guidée par l’utilisateur. [Lu et al., 2017]. Lorsqu’une décomposition correcte est trouvée, l’hexaédricisation des sous volumes produit généralement de bons résultats.

Ces méthodes ont fait leurs preuves pour la génération de maillages hexaédriques à partir de pièces mécaniques issus de logiciels de CAO. Les méthodes automatiques s’attaquant au cas général ne peuvent pas toujours garantir une décomposition compatible avec la construction d’un maillage purement hexaédrique et les méthodes guidées par l’utilisateur ne sont pas exploitables dans le contexte qui nous intéresse à cause de la complexité des domaines visés.

Plusieurs méthodes spécialisées pour la construction de maillages hexaédriques exploitent la représentation squelettique d’un domaine pour tenter de le décomposer avec des résultats prometteurs. Nous détaillons ces méthodes dans la section suivante.

1.2.4 Construction duale

Une approche alternative proposée pour la construction de maillage hexaédriques est l’approche duale. Construire un maillage hexaédrique comporte de nombreuses contraintes topologiques et géométriques. Construire le dual d’un maillage hexaédrique relaxe ces contraintes et simplifie la construction [Murdoch et al., 1997, Takayama, 2019, Livesu et al., 2020].

Pour un maillage de dimension k , donc composé de cellules de dimensions 0 à k , qui sera dit le **primal**, son **dual** est un maillage construit en substituant les cellules de dimension i par des cellules de dimension $k - i$ en préservant les relations d’incidence. Pour un maillage volumique, cela signifie intervertir les volumes et les sommets d’une

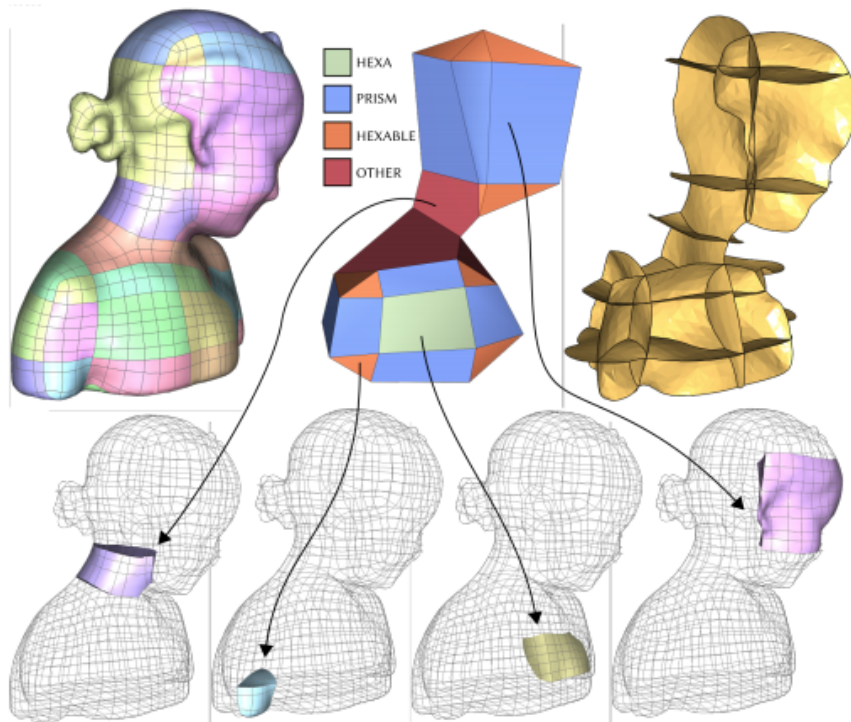


FIGURE 1.11 – Décomposition d'un domaine géométrique en blocs simples. [Livesu et al., 2020]

part, et les arêtes et les faces d'autre part. Par exemple, deux volumes connectés par une face deviennent deux sommets connectés par une arête. Ou encore, une face à quatre côtés devient une arête incidente à quatre volumes.

Un hexaèdre est 1 volume composé de 6 faces à 4 arêtes, son dual est donc 1 sommet incident à 6 arêtes chacune entourée par 4 faces (Figure 1.12), ce qui est équivalent à l'intersection de 3 feuilles en 1 point.

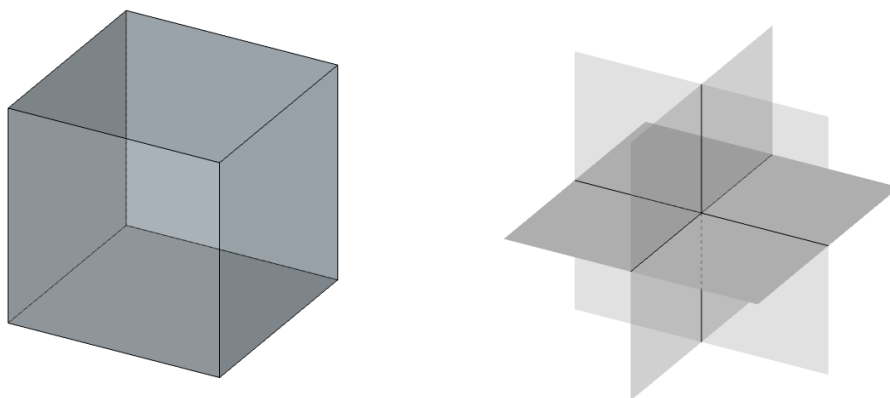


FIGURE 1.12 – A gauche : un hexaèdre, à droite : le dual d'un hexaèdre, l'intersection de 3 feuilles

Les méthodes duales consistent à insérer des feuilles dans un domaine. Les feuilles sont intersectées avec la bordure du domaine et entres elles. Une attention particulière est prêtée à n'avoir qu'au plus 3 feuilles qui se rencontrent en un point (Figure 1.13).

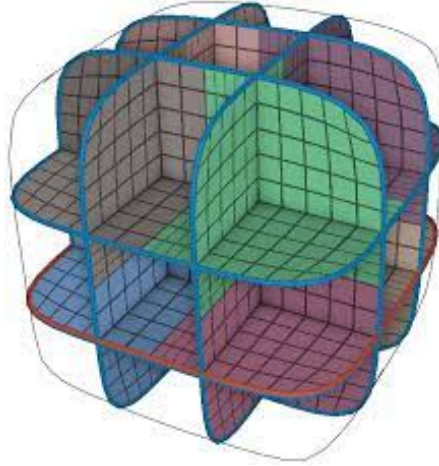


FIGURE 1.13 – Feuilles duales décomposant un domaine [Takayama, 2019]

Si le domaine peut être décomposé de cette façon par des feuilles en ayant au plus des intersections de 3 feuilles en 1 point, le dual de cette structure sera un maillage hexaédrique.

Plusieurs méthodes sont proposées pour obtenir ces feuilles. Des méthodes interactives où la construction des feuilles est guidée par l'utilisateur [Takayama, 2019], et des méthodes automatiques où la construction est guidée par la géométrie de la surface du domaine [Livesu et al., 2020, Calderan et al., 2019].

Ces méthodes peuvent s'avérer coûteuses en calculs ou en temps utilisateur. Pour autant, il n'est pas garantie d'obtenir en résultat un maillage hexaédrique.

1.2.5 Champ de directions

Les méthodes de génération par champ de directions sont relativement récentes mais semblent donner des résultats prometteurs [Calderan et al., 2019, Liu et al., 2018].

Pour construire un maillage hexaédrique, ces méthodes ont recours à un champ de directions sur le domaine étudié. Une direction est une matrice $F = (u, v, w)$ avec u, v, w des vecteurs formant une base orthonormée.

Ce champ est construit par optimisation à partir de la géométrie de la surface du domaine (Figure 1.14 octahedral field). L'objectif est que les directions soient alignées aux bords, et que le champ soit continu et intégrable. En pratique, le champ n'est généralement pas continu, il contient des singularités formant un graphe (Figure 1.14 singularity graph). Selon les configurations de ces singularités, le champ peut être évalué comme "maillable" ou non.

Si le champ est considéré maillable, il peut être intégré sur des lignes de niveau pour construire une grille cartésienne adaptée à la surface du domaine. La gestion des singularités lors de l'intégration n'est pas triviale, et un travail doit être fait pour aligner la grille avec la surface.

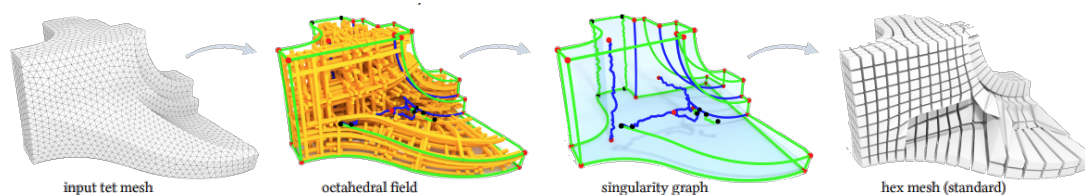


FIGURE 1.14 – Exemple de construction de maillage par champ de directions [Liu et al., 2018]

En pratique, les approches par champ de direction sont difficiles à exploiter. La représentation du champ de direction peut se faire par des matrices, des quaternions ou des angles d'Euler. Il ne semble pas y avoir de consensus sur comment les représenter efficacement [Pietroni et al., 2022]. Le champ de direction n'est pas garanti d'être maillable. Même lorsqu'il est maillable, les résultats peuvent être dégénérés.

1.2.6 Polycubes

Les polycubes sont une direction de recherche populaire, avec une multiplication des travaux récents [Livesu et al., 2013, Dumery et al., 2022, Protais et al., 2022, Gregson et al., 2011]. Cette méthode produit de bons résultats sous certaines conditions.

A partir d'un maillage tétraédrique en entrée (Figure 1.15 (a)), le processus se déroule en trois étapes : - Calcul d'une transformation pour aligner les surfaces du domaine avec les axes x , y , z . On obtient un maillage aligné avec une grille orthogonale (Figure 1.15 (b)). - La grille est échantillonnée à l'intérieur du maillage orthogonal. On obtient un maillage hexaédrique aligné aux axes (Figure 1.15 (c)). - La transformation inverse de la première étape est appliquée au maillage hexaédrique pour le ramener dans le domaine initial (Figure 1.15 (d)).

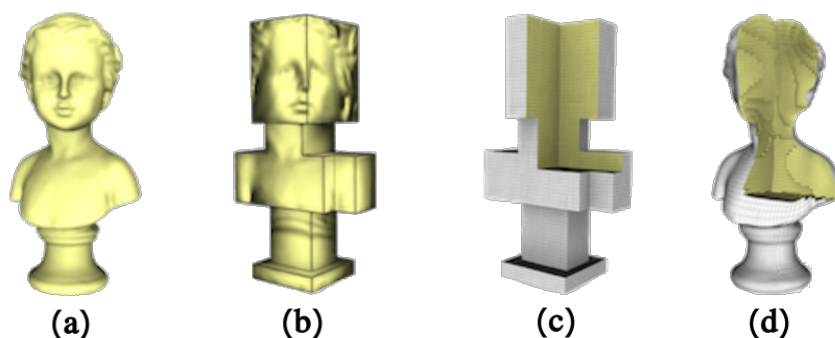


FIGURE 1.15 – (a) Maillage en entrée, (b) maillage orthogonal, (c) maillage hexaédrique aligné aux axes, (d) maillage hexaédrique final [Pietroni et al., 2022].

Cette méthode produit de bons résultats sur un grand nombre de maillages de l'état de l'art, mais est contrainte à des limites sur les topologies traitables. Dans certains cas, le polycube peut échouer ou créer des maillages dégénérés avec des hexaèdres inversés ou des auto-intersections. De plus, il n'est pas clair que le type de domaine complexe qui nous intéresse soit toujours compatible avec la transformation de la première étape.

1.2.7 Observations

Ces familles de méthodes ont fait leurs preuves pour générer des maillages hexaédriques de qualité, mais le fort besoin d'interaction utilisateur, le temps de calcul, le manque de garantie sur la pureté du maillage, et diverses limitations présentées par ces méthodes nous montrent qu'il existe un besoin pour des méthodes spécialisées à certains types de géométries, tels que les objets tubulaires, qui soient efficaces et automatiques avec une garantie de résultat.

1.3 Génération basée squelette

Lors des différents processus de génération de maillages volumiques, tétraédriques, hexaédriques, ou autres, l'une des difficultés récurrentes est la capture efficace des caractéristiques topologiques du domaine à mailler. De nombreuses méthodes de reconstruction de maillages volumiques récentes, telles que la décomposition en blocs, ou les polycubes sont dites sensibles aux caractéristiques, et vont exploiter une représentation simplifiée des caractéristiques topologiques du domaine comme aide ou support du processus de maillage. Pour les cas qui nous intéressent, les maillages tubulaires, contenant possiblement des éléments plans, le domaine peut être représenté sous la forme d'un squelette courbe, avec des éléments surfaciques. Nous verrons dans un premier temps comment un domaine géométrique peut être représenté par un squelette, ensuite les méthodes qui ont déjà été proposées pour générer des maillages, surfaciques et volumiques, à partir d'un tel squelette.

1.3.1 Squelettes

Le squelette d'un domaine est un descripteur de la géométrie et de la topologie qui en capture les propriétés essentielles [Siddiqi et al., 2002, Tagliasacchi et al., 2016]. Le squelette est une représentation compacte du domaine : le genre topologique et les composantes connexes sont les mêmes, avec une représentation à une dimension inférieure. C'est une approximation simplifiée de l'axe médian d'un domaine fermé.

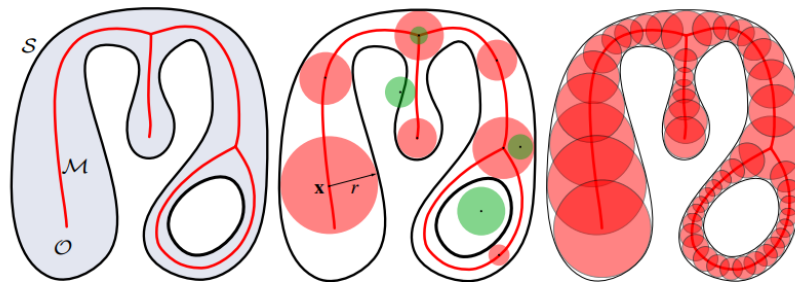


FIGURE 1.16 – Sphères maximales inscrites dans un domaine 2D et son axe médian [Tagliasacchi et al., 2016].

L'axe médian d'un domaine est l'ensemble des centres des sphères maximales inscrites dans ce domaine (Figure 1.16). La complexité de l'axe médian est très liée à la complexité de la surface du domaine. Un domaine dont la surface est relativement lisse a un axe médian simple, mais un domaine avec des aspérités a un axe médian nettement plus

complexe (Figure 1.17). L'axe médian représente bien la connectivité du domaine mais est extrêmement sensible au bruit. A cause de ce problème de sensibilité au bruit, nous nous intéressons à une représentation plus lisse et plus abstraite de nos objets, contenant moins d'informations superflues, le squelette.

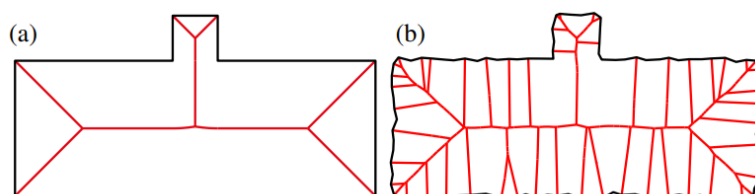


FIGURE 1.17 – Axes médians de domaines 2D : (a) Surface lisse, (b) Surface bruitée.[Tagliasacchi et al., 2016]

Le squelette d'un domaine 3D peut donc être composé d'un ensemble d'éléments courbes ou branches, et d'éléments surfaciques ou feuillets, joints entre eux par des sommets ou embranchements (Figure 1.18). Pour pouvoir bénéficier de cette représentation simplifiée du domaine dans la reconstruction volumique d'un domaine, il est nécessaire de pouvoir l'extraire à partir des informations géométriques dont on dispose, et ensuite d'adapter à nos besoins le résultat de cette extraction. Il n'y a pas de définition unique du squelette d'un domaine, le mot peut signifier plusieurs représentations différentes. On appellera ici squelette courbe un squelette ne contenant que des branches et des embranchements, et on appellera squelette mixte un squelette contenant un ensemble de branches, feuillets, et embranchements.

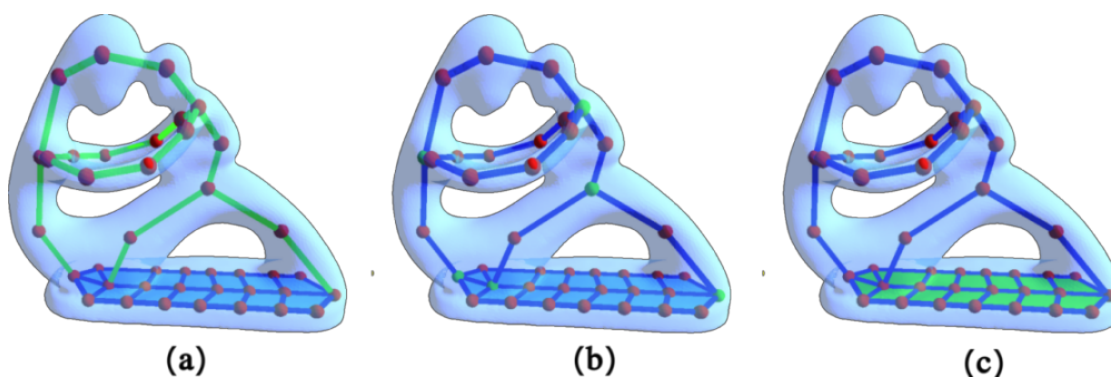


FIGURE 1.18 – Exemple de squelette. En vert : (a) les branches, (b) les embranchements, (c) le feuillet.

Extraction

Il existe de nombreuses méthodes d'extraction de squelette, cependant d'après l'état de l'art proposé par [Tagliasacchi et al., 2012, Tagliasacchi et al., 2016] les méthodes les plus efficaces sont basées sur la contraction géométrique du domaine. Dans le cadre de notre travail nous avons donc repris la méthode qu'ils proposent : Mean Curvature Skeleton.

Cette méthode utilise le flot de courbure moyenne (Mean Curvature Flow ou MCF) induit par l'opérateur laplacien discret défini sur les positions des sommets du maillage surfacique. Ce dernier est souvent utilisé pour obtenir des surfaces lisses. Appliqué à l'extrême, le MCF contracterait une surface fermée en un unique point. Afin d'obtenir un squelette, la force de contraction du lissage laplacien est ici contrebalancée par d'autres forces, notamment une attraction à l'axe médian. La connectivité du maillage est également simplifiée au fil de la déformation et les sommets dits "contractés" – ceux dont le voisinage ne permet plus de simplification – sont fixés afin de ne plus subir de déplacement.

Afin de pouvoir intégrer facilement d'autres forces à chaque itération, on utilise une formulation implicite du MCF, en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} L \\ W_s \end{bmatrix} V^{t+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ W_s V^t \end{bmatrix}$$

où V^t sont les positions des sommets au temps t , V^{t+1} les positions des sommets que l'on cherche à calculer, L est l'opérateur laplacien (que l'on cherche à annuler pour obtenir une surface lisse) et W_s est une matrice diagonale de poids qui permet de régulariser le processus. Une résolution au sens des moindres carrés permet alors de maintenir chaque sommet près de sa position actuelle, ralentissant ainsi le mouvement et évitant la solution triviale $V^{t+1} = 0$.

Afin de guider les sommets en direction de l'axe médian, on calcule au préalable pour chaque sommet son point associé sur l'axe médian (en cherchant par exemple le centre de la plus grande sphère inscrite tangente en ce sommet). On ajoute alors un dernier terme au système précédent :

$$\begin{bmatrix} W_l L \\ W_s \\ W_m \end{bmatrix} V^{t+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ W_s V^t \\ W_m M^t \end{bmatrix}$$

où M^t sont les points de l'axe médian associés à chaque sommet, W_m est une matrice diagonale de poids qui permet de fixer l'importance de l'attraction vers l'axe médian dans la résolution du système. Les sommets "contractés" se voient fixer un poids w_s suffisamment grand de sorte qu'ils ne se déplacent plus. On a ajouté au passage une matrice diagonale W_l qui permet également de fixer une importance relative au terme correspondant au lissage dans la résolution.

L'application itérative de la solution à ce système converge vers une surface dégénérée approximant l'axe médian. Une dernière étape de simplification de la connectivité de ce maillage surfacique dégénéré permet d'en extraire un graphe courbe (Figure 1.19). Pour les domaines de forme tubulaire, cette méthode nous permet d'obtenir des squelettes courbe haute résolution décrivant efficacement la géométrie et la topologie du domaine. Pour les besoins de nos algorithmes de génération de maillage, ces squelettes seront rééchantillonnés en fonction du rayon local, tel que détaillé dans le chapitre suivant.

Comme nous allons le détailler par la suite, l'un de nos algorithmes tire parti de squelettes mixtes, composés à la fois de branches courbes et de feuilletts surfaciques. Cela nous permet de pouvoir traiter des domaines plus variés dont la forme n'est pas tubulaire partout, mais comprend également des zones plates. L'algorithme que l'on vient de décrire passe par un état intermédiaire pour ce type de géométries, dans lequel la surface dégénérée contient des zones surfaciques. Celles-ci pourraient être détectées, fixées

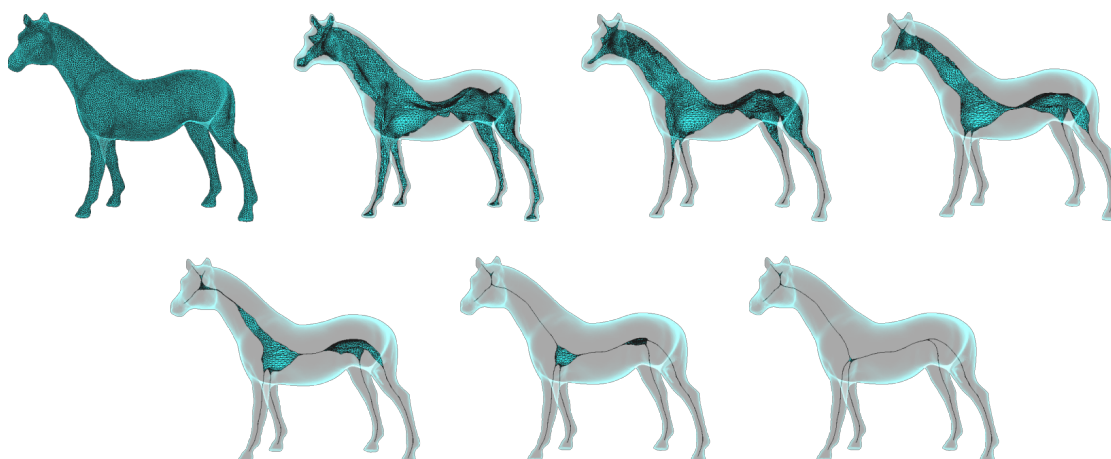


FIGURE 1.19 – Démonstration du processus d'extraction du squelette.

pour qu'elles ne se contractent plus et utilisées dans la dernière phase de simplification de la connectivité afin d'obtenir des squelettes mixtes plutôt qu'uniquement courbes.

Une autre approche récente [Dou et al., 2022] propose d'extraire des squelettes mixtes en échantillonnant le domaine avec des points, puis en conservant le plus petit sous-ensemble de ces points qui maximise la "couverture" de la surface, et enfin en maillant les points sélectionnés.

Dans les deux cas, les parties surfaciques de nos squelettes mixtes doivent être composés de quads. Un algorithme de conversion de maillage triangulaire vers quad tel que [Remacle et al., 2012] ou [Bommes et al., 2013] permet de générer un tel maillage quad en conservant la densité locale du maillage triangulaire initial qui peut dépendre localement du rayon du domaine, dans le même esprit que l'adaptation effectuée dans le cas des squelettes courbes.

Le travail d'extraction de squelette mixte n'a cependant pas été réalisé pour le moment dans le cadre de cette thèse. Pour les tests de nos algorithmes, nous avons utilisé des outils de génération interactifs, décrits dans le dernier chapitre.

1.3.2 Méthodes de génération de maillage basées squelette

Diverses méthodes de génération de maillage à partir de squelette ont été proposées. La majorité traite les domaines représentés par un squelette courbe pour produire des maillages surfaciques quad-dominants, ou des maillages volumiques. Elles se distinguent en plusieurs familles de méthodes que nous présentons ici. En plus de ces méthodes, il existe des approches pour générer un maillage hex-dominant à partir de l'axe médian surfacique d'un domaine qui seront détaillées en dernier.

Méthode par reconstruction de noyau

La première famille de méthodes d'intérêt est utilisée pour la construction de maillage surfaciques quadrilatères à partir d'un squelette. Les méthodes proposées par [Hijazi et al., 2010] et [Mattingly et al., 2015] ont toutes deux recours à la construction d'un polyèdre sur les embranchements sur lequel les tubes pré-construits des branches incidentes viennent se connecter.

La méthode, proposée initialement par [Hijazi et al., 2010], construit un tube surfacique sur chaque branche du squelette par l'extrusion d'un polygone le long des branches (Figure 1.20 (a)). Ces branches sont tronquées au niveau des embranchement pour assurer qu'elles ne s'intersectent pas mutuellement. Sur chaque embranchement du squelette, le bout des n tubes incidents est projeté sur une sphère centrée sur l'embranchement (Figure 1.20 (b)), produisant une sphère avec n polygones sur sa surface. Pour terminer, l'enveloppe convexe de ces polygones sur la sphère est calculée (Figure 1.20 (c)), et les tubes sont connectés à leur polygone respectif.

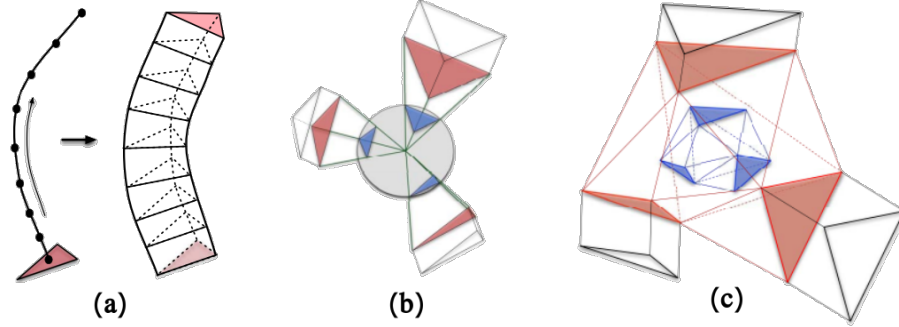


FIGURE 1.20 – Méthode de génération de maillage à partir d'un squelette de [Hijazi et al., 2010]. (a) Extrusion d'une branche, (b) projection du bout des branches sur la sphère centrée sur l'embranchement, (c) construction de l'enveloppe convexe des points sur la sphère.

Le maillage obtenu à ce stade est quad-dominant, les tubes le long des branches sont composés de quadrilatères, mais l'enveloppe convexe sur les embranchements est composée de triangles. Pour obtenir un maillage exclusivement quadrilatère, une subdivision de Catmull-Clark est appliquée au maillage, celle-ci subdivise tout polygone en un ensemble de quadrilatères (Figure 1.21).

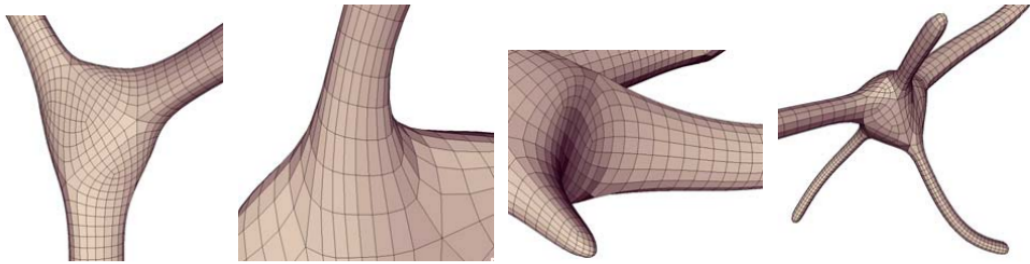


FIGURE 1.21 – Résultats de [Hijazi et al., 2010] après subdivision du maillage.

Cette première méthode avait pour limitation de ne savoir gérer que la projection de triangles sur la sphère pour la construction de l'enveloppe convexe. Les tubes des branches avec une section polygonale quelconque doivent donc être encapsulés entre deux triangles.

Une extension de cette méthode a été proposée par [Mattingly et al., 2015] pour combler cette limitation. Dans leur méthode, les branches sont extrudées de la même façon à partir d'un polygone quelconque. Au niveau des embranchements, des plans sont ajoutés entre les paires de branches (Figure 1.22). Ces plans servent de séparations entre

les branches. Tant que le tube d'une branche ne dépasse pas ces séparations, il n'intersecte pas les tubes des branches voisines.

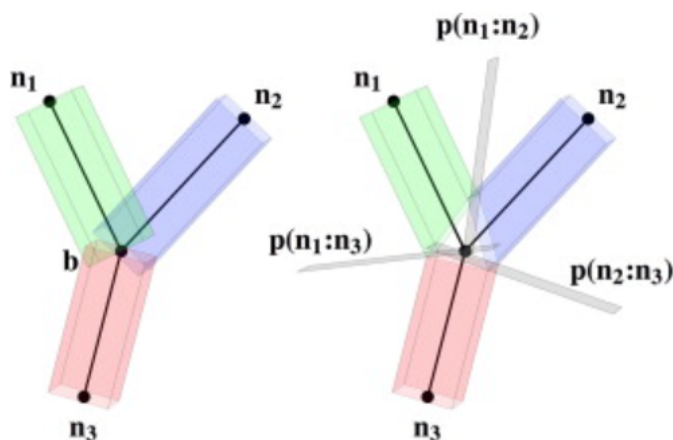


FIGURE 1.22 – Construction des plans bissecteurs séparant les branches [Mattingly et al., 2015].

De la même façon que [Hijazi et al., 2010], une sphère est placée au centre de l'embranchement et les polygones aux bouts des branches incidentes sont projetés sur la sphère pour construire l'enveloppe convexe de ces polygones.

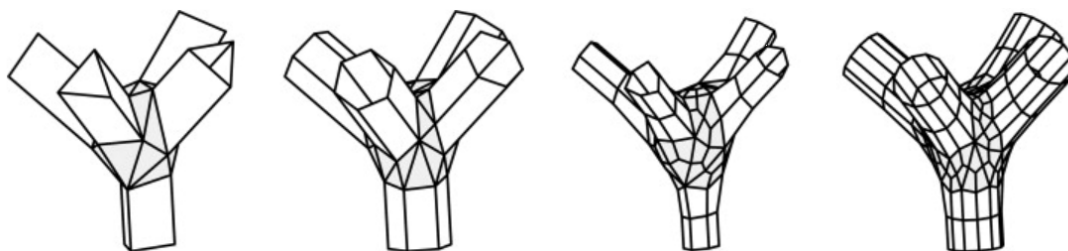


FIGURE 1.23 – Exemples d'embranchement avec des sections polygonales quelconques [Mattingly et al., 2015].

De cette façon, [Mattingly et al., 2015] parvient à construire les embranchements pour des tubes de section quelconque (Figure 1.23).

Ces méthodes ont l'avantage d'une grande simplicité, avec une efficacité prouvée pour la construction de maillages surfaciques quadrilatères. En revanche, l'extension de ces méthodes pour la production de maillages volumiques n'est pas évident. L'utilisation de l'extrusion d'un polygone pour construire les branches est possible, mais transformer les polyèdres quelconques construits sur les embranchements par enveloppe convexe en un ensemble d'hexaèdres ne sera pas nécessairement possible avec les critères de structure que nous avons établis.

Méthodes par insertion d'hexaèdres d'embranchements

Une méthode a été proposée pour la construction d'un maillage quad à partir d'un squelette par [Usai et al., 2015], ensuite étendue pour la construction d'un maillage hexa-

édrique par [Livesu et al., 2016]. Le principe fondamental de ces méthodes est l'insertion d'un hexaèdre sur les embranchements du squelette ensuite extrudé le long des branches.

Maillages surfaciques Initialement proposée pour la construction de maillages quad à partir d'un squelette [Usai et al., 2015], cette méthode consiste à insérer des hexaèdres sur les embranchements du squelette, en les orientant en fonction des directions de sortie des branches, et les utiliser comme support d'extrusion pour construire un cylindre autour des branches (Figure 1.24). L'extrusion de faces quad le long des branches permet de garantir la construction d'un maillage exclusivement quad englobant le squelette.

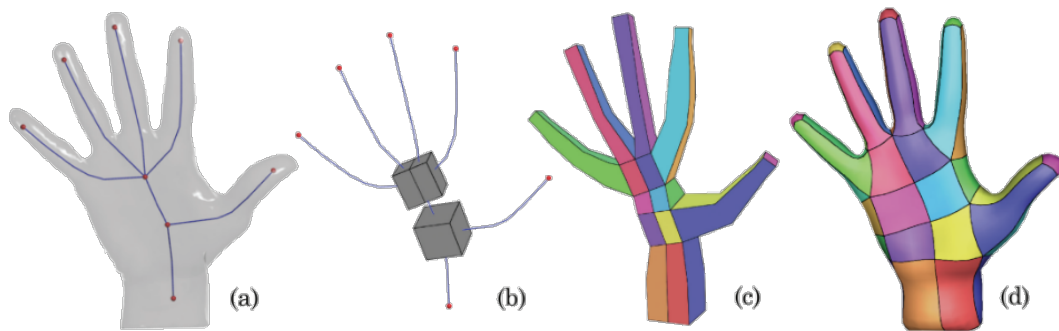


FIGURE 1.24 – (a) Domaine et squelette traités, (b) hexaèdres insérés et subdivisés, (c) extrusion des hexaèdres, (d) plaquage du maillage quad à la surface du domaine. [Usai et al., 2015]

Les hexaèdres placés sur les embranchements sont orientés de façon à être alignés au mieux avec les branches incidentes, et essayer de n'avoir qu'une branche par face au plus. Il n'est pas toujours possible de n'avoir qu'une branche par face (Figure 1.24 (b)). Si plus d'une branche passe par une même face, il est nécessaire de découper cette face en autant de quads que de branches, pour conserver un quad à extruder par branche (Figure 1.25 (a)).

Pour que le maillage final soit conforme, lorsqu'une face est coupée, la découpe doit être propagée aux faces adjacentes. Cela permet d'assurer que les branches extrudées soient compatibles avec leurs voisines (Figure 1.25 (b)). La propagation de cette découpe se répercute tout au long de la branche et donc sur les hexaèdres d'embranchements voisins si il y en a (Figure 1.24 (c)). Puisque les découpes des hexaèdres d'embranchements ont un effet de bord sur les hexaèdres voisins, un système linéaire est résolu pour propager ces découpes sur l'intégralité des embranchements du maillage.

La principale limite de cette méthode est rencontrée avec la propagation des découpes. Il n'existe pas forcément de solution pour les propager, par exemple dans le cas des cycles dans le squelette (Figure 1.26). La propagation de la découpe dans un cycle ne peut pas terminer, la méthode propose donc de résoudre ce problème par une fermeture partielle du cycle sur l'hexaèdre d'embranchement.

Maillages hexaédriques La méthode précédente a été étendue pour produire des maillages hexaédriques [Livesu et al., 2016]. L'extrusion d'une face quadrilatère produit un hexaèdre, l'extrusion des faces des hexaèdres d'embranchements peut donc être faite

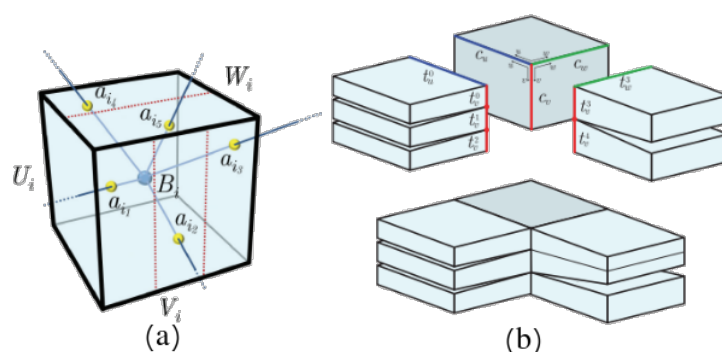


FIGURE 1.25 – (a) Subdivision de l’hexaèdre d’embranchement en fonction des branches, (b) propagation par effet de bord des subdivisions sur les branches incidentes. [Usai et al., 2015]

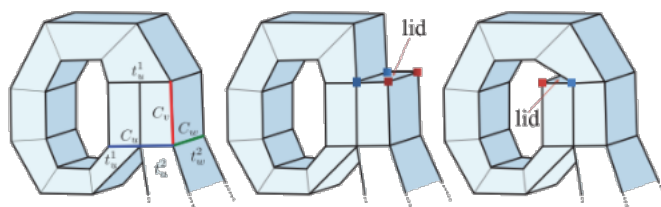


FIGURE 1.26 – Choix de fermeture d’un cycle. [Usai et al., 2015]

pour construire une succession d’hexaèdres le long des branches plutôt que simplement une surface.

De la même façon que précédemment, le maillage hexaédrique est produit à partir d’un domaine et son squelette (Figure 1.27 (a)). Des hexaèdres sont placés sur les embranchements et adaptés aux branches incidentes. Une extrusion des faces de ces hexaèdres est ensuite effectuée le long des branches résultant en un maillage hexaédrique grossier (Figure 1.27 (b)). Ce maillage grossier est essentiellement une décomposition en blocs du domaine. Cette décomposition peut ensuite être raffinée pour obtenir un maillage hexaédrique fin (Figure 1.27 (c)).

Cette méthode permet d’obtenir des maillages garantis hexaédriques de domaines tubulaires à partir d’un squelette, mais le besoin de résolution d’un système rend cette méthode coûteuse en calcul. Les auteurs indiquent avoir besoin d’un temps de l’ordre de la minute pour produire le maillage grossier de domaines avec des squelettes relativement simples, ne contenant que peu d’embranchements. Il n’est donc pas clair que cette méthode serait utilisable en des temps raisonnables sur des domaines plus complexes comme les éléments biologiques qui nous intéressent pouvant avoir des centaines ou des milliers d’embranchements. De plus, le problème de gestion des cycles (Figure 1.26) reste présent dans la version volumique de l’algorithme. Malgré les bons résultats produits par cette méthode, ces éléments nous semblent importants à corriger.

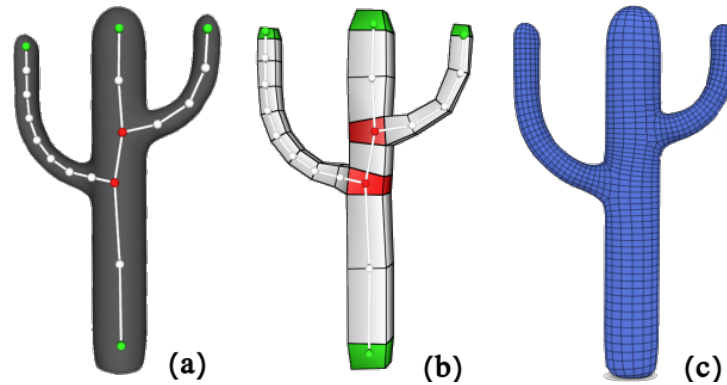


FIGURE 1.27 – (a) Domaine et son squelette, (b) hexaèdres d’embranchement en rouge et maillage hexaédrique grossier extrudé, (c) maillage hexaédrique raffiné. [Livesu et al., 2016]

Méthodes par partition de sphère

La dernière catégorie de méthodes pour générer un maillage à partir d’un squelette courbe que nous avons identifiée est basée sur un principe de partition de sphère pour produire un support géométrique et topologique au maillage. Dans ces méthodes, la construction est faite par le placement de sphères sur les embranchements pour générer la connectivité en en partitionnant la surface en utilisant les intersections avec les branches comme graines, pour ensuite venir connecter des cylindres placés autour des branches.

Partition de sphère par Voronoï La méthode proposée par [Fuentes Suárez and Hubert, 2018] utilise un squelette pour générer un maillage quad. Pour ce faire, cette méthode propose la construction d’un support autour des sommets pour permettre de déterminer la géométrie et topologie du maillage autour de l’embranchement. Ce support est construit par partition de la surface d’une sphère par un diagramme de Voronoï. Une sphère est placée sur chaque embranchement du squelette. En utilisant les points d’intersection des branches avec la sphère comme graines, un diagramme de Voronoï est tracé sur la sphère pour construire un polyèdre noyau (Figure 1.28).

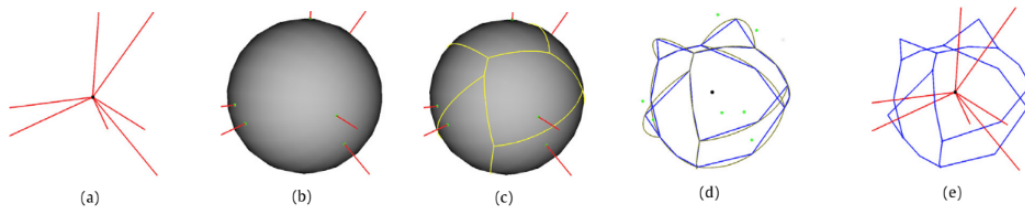


FIGURE 1.28 – Partition de la surface d’une sphère par un diagramme de Voronoï. [Fuentes Suárez and Hubert, 2018]

Un diagramme de Voronoï est une décomposition d’une surface à partir de points graines, qui associe une face à chaque graine. Une face d’un diagramme de Voronoï est l’ensemble des points de la surface plus proche de sa graine respective. Un diagramme

de Voronoï a pour propriété de n'être composé que de faces convexes, et chaque face contient son point graine.

Sur chaque branche du squelette, un cylindre à tranche polygonale est extrudé depuis les faces des polyèdres noyaux des embranchements incidents (Figure 1.29). Le degré de la tranche du cylindre est égal au degré de la face du polyèdre dont il est extrudé. Si une branche relie deux embranchements, elle est connectée à deux polyèdres par une de leurs faces. Pour être connectées par un cylindre, ces faces doivent avoir le même degré, ce qui n'est pas garanti par la construction d'un diagramme de Voronoï.

Pour s'assurer que les polyèdres noyaux présentent des faces compatibles deux à deux à chaque branche, un remaillage est nécessaire. Ce remaillage a un effet de bord, un système doit donc être résolu pour remailler l'ensemble des polyèdres et les rendre mutuellement compatibles.

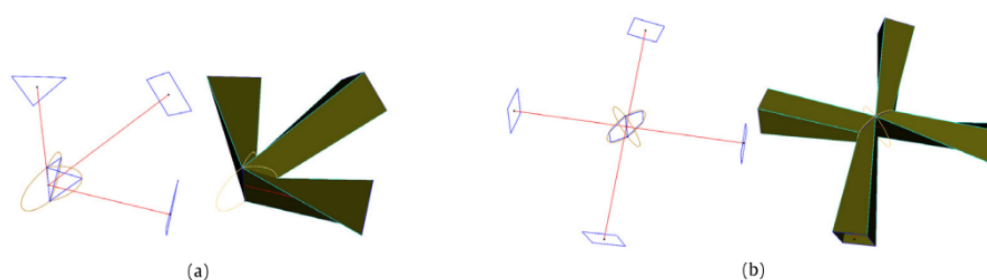


FIGURE 1.29 – Exemples d'applications de la méthode sur des cas simples. [Fuentes Suárez and Hubert, 2018]

Scaffolding a Skeleton De la même façon que la méthode de [Fuentes Suárez and Hubert, 2018], [Panotopoulou et al., 2018] propose de générer un maillage quad à partir d'un squelette via l'utilisation de polyèdres noyaux pour déterminer la connectivité du maillage autour des embranchements. Cependant, [Panotopoulou et al., 2018] impose comme contrainte que la tranche des branches soit un quadrilatère. De ce fait, les polyèdres noyaux sur les embranchements ne doivent être composés que de quads pour y connecter les branches. [Panotopoulou et al., 2018] construit ces polyèdres à faces quad à l'aide d'un algorithme de partition de sphère en quad (Figure 1.30).

Puisque toutes les faces des polyèdres noyaux sont des quads, aucun remaillage n'est nécessaire car ils sont mutuellement compatibles par construction.

Cette méthode permet donc de générer un maillage surfacique quad sans recourir à la résolution d'un système.

Maillages volumiques Dans des travaux réalisés en parallèle des nôtres, [Peltier et al., 2021] propose une méthode de génération de maillage volumique basé sur la méthode de [Panotopoulou et al., 2018]. L'objectif de cette méthode est de produire un épaississement du squelette pour obtenir un maillage volumique paramétrique. Un maillage composé de patchs de Béziens volumique.

Pour construire ce maillage paramétrique, la méthode repose elle aussi sur la partition de sphères en quads aux embranchements pour construire un polyèdre noyau comme support géométrique et topologique (Figure 1.31 (b)).

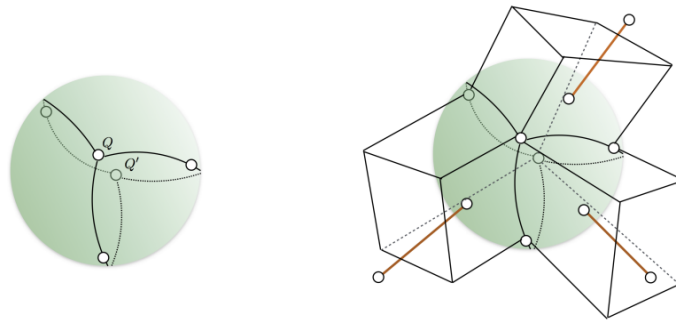


FIGURE 1.30 – Sphère partitionnée en 3 quads, connectée à 3 branches à tranche quad. [Panotopoulou et al., 2018]

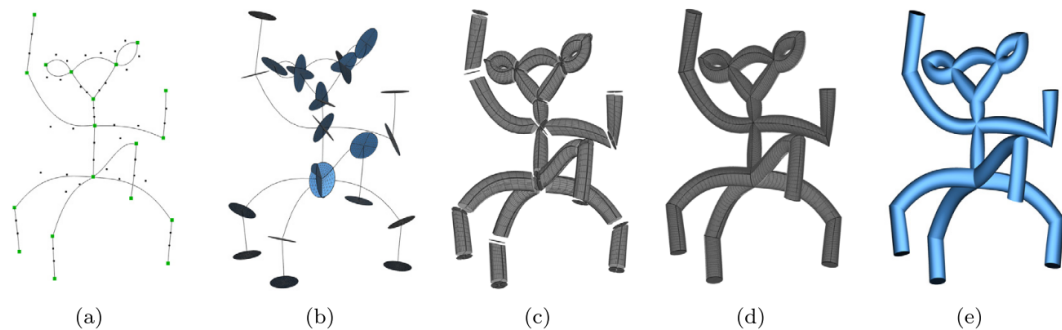


FIGURE 1.31 – Construction du maillage volumique paramétrique [Peltier et al., 2021].

Le maillage paramétrique est obtenu par l'assemblage de branches composées de 4 prismes ou 4 hexaèdres (Figure 1.32). Les branches sont connectées sur les quads des polyèdres noyaux (Figure 1.31 (c)), et les sommets internes (Figure 1.32 sommets verts) sont fusionnés sur l'embranchement.

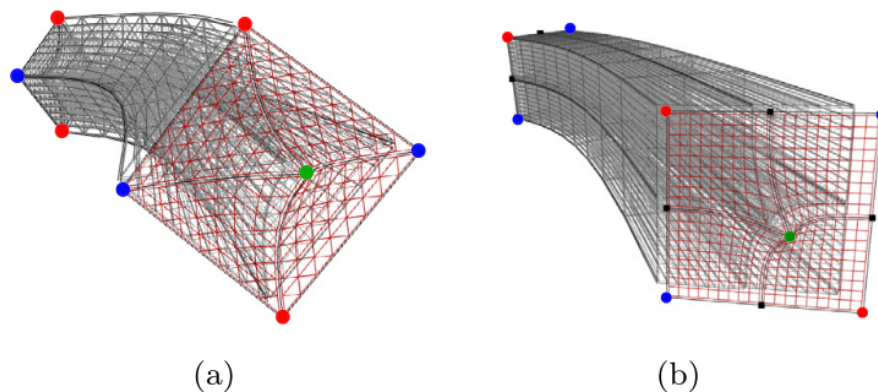


FIGURE 1.32 – Construction du maillage volumique paramétrique [Peltier et al., 2021].

Dans le cadre de leurs travaux, les auteurs ont proposé un nouvel algorithme de partition de sphère en quads que nous détaillerons dans la section 2.6.

Hexahedral meshing of arterial networks from centerlines Dans des travaux publiés suite aux nôtres, [Decroocq et al., 2022] proposent une solution pour générer des maillages hexaédriques de vaisseaux sanguins à partir de données voxels. Une *centerline*, essentiellement un squelette courbe, est extrait des données voxels avec une information de rayon, et sert ensuite de support pour la génération d'un maillage hexaédrique.

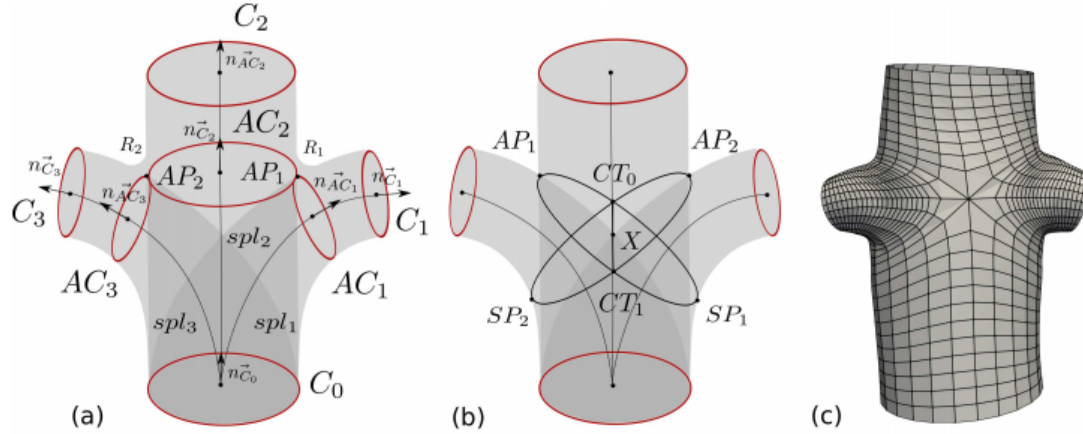


FIGURE 1.33 – Construction du maillage à partir d'une *centerline* [Decroocq et al., 2022].

La *centerline* est échantillonnée en un ensemble de points avec un rayon associé. Sur chacun de ces points, un disque du rayon du point est placé (Figure 1.33 (a)). Ces disques servent de support pour la construction du maillage hexaédrique. Aux embranchements, les disques des points incidents sont utilisés pour produire une interface séparant l'embranchement en n plans, n étant le nombre de branches incidentes à l'embranchement (Figure 1.33 (b)).

Sur les disques supports, une structure "O-Grid" composée de quads est dessinée (Figure 1.34 à gauche). Cette "O-Grid" est une tranche plane du maillage hexaédrique à construire. Les adaptations souhaitées pour la taille des hexaèdres en fonction de leur distance à la surface sont directement appliquées dans cette structure. Pour finir la construction du maillage hexaédrique, les "O-Grids" sont connectées aux "O-Grids" voisines (Figure 1.34 à droite).

Cette méthode produit des maillages de vaisseaux sanguins de bonne qualité, alignés à la surface, et adaptés aux applications de simulation. En revanche, cette méthode n'est pour l'instant capable de gérer que des embranchements dont toutes les branches sont sur le même plan, limitant la complexité des domaines traitables.

Méthode paramétrique

[Xiong et al., 2013] proposent un algorithme exploitant la représentation squelettique et une paramétrisation du domaine pour produire un maillage quadrilatère ensuite transformé en maillage hexaédrique.

A partir d'une surface triangulée (Figure 1.35 (1)), un squelette est extrait (Figure 1.35 (2)). Ce squelette permet une analyse de la topologie de la surface. Grâce au squelette, la surface est décomposée en un ensemble de branches cylindriques (Figure 1.35 (3)). Une paramétrisation de chaque cylindre est calculée, avec une composante longi-

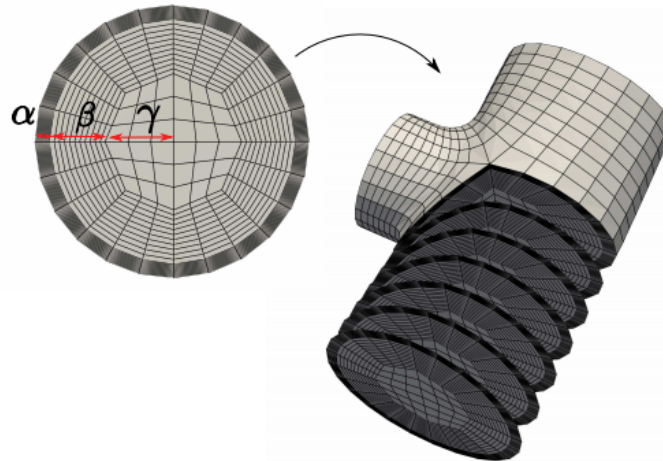


FIGURE 1.34 – A gauche, la structure “O-Grid” dessinée sur les disques supports. A droite, un maillage hexaédrique formé par connection des “O-Grid” [Decroocq et al., 2022].

tudinale u et une composante radiale v (Figure 1.35 (4)). Cette paramétrisation permet l’extraction d’isolignes radiales et longitudinales sur les cylindres, découpant la surface des cylindres en quads (Figure 1.35 (5)). Pour que le maillage surfacique soit purement quad, les isolignes longitudinales des cylindres doivent se rejoindre sur les embranchements. Le nombre d’isolignes longitudinales construites sur un cylindre dépendra des embranchements entourant la branche. Le problème est similaire à celui présenté par la méthode utilisant Voronoï pour partitionner une sphère. Un système doit être résolu pour assurer la compatibilité des isolignes longitudinales des cylindres entre elles.

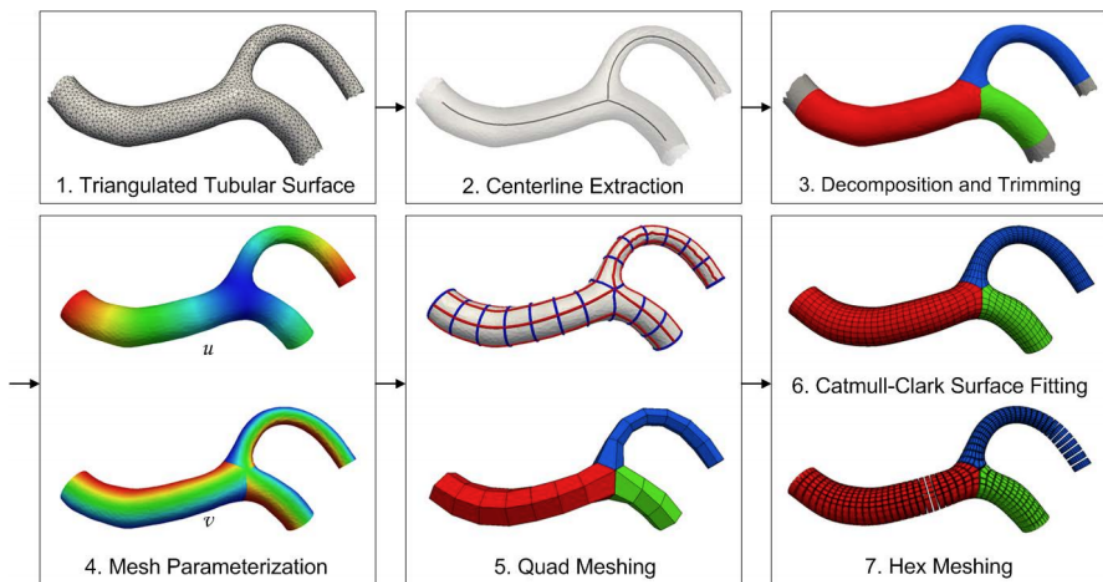


FIGURE 1.35 – Processus de génération d’un maillage hexaédrique avec la méthode de [Xiong et al., 2013].

Un maillage volumique composé de prismes à base triangulaire est construit en reliant les sommets de la surface au squelette (Figure 1.36 (a)). Une subdivision de type catmull clark volumique est ensuite appliquée pour subdiviser ces prismes en hexaèdres et adapter le maillage volumique à la surface (Figure 1.36 (b)).

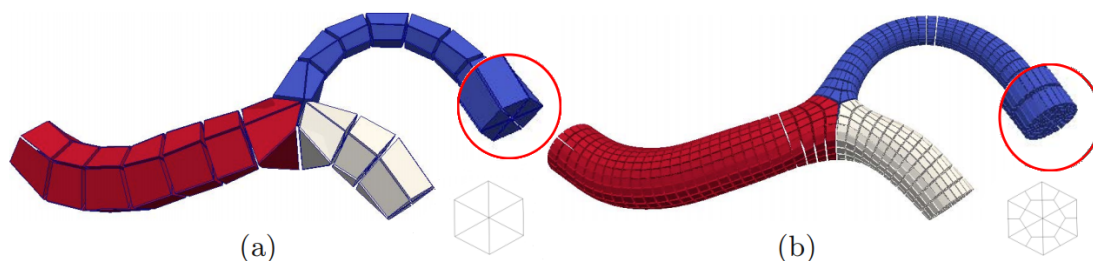


FIGURE 1.36 – (a) Maillage composé de prismes triangulaires. (b) Maillage subdivisé par Catmull-Clark en hexaèdres. [Xiong et al., 2013].

Cette méthode permet la construction de maillages hexaédriques alignés à la surface du domaine. En revanche, pour rendre les embranchements compatibles entre eux un nombre variable de prismes va être créé le long du cylindre. Chaque sommet du squelette pourra être entouré par un grand nombre de prismes (Figure 1.36 (a) cercle rouge : 6 prismes), résultant en des sommets très irréguliers après subdivision, et chaque prisme subdivisé ajoutera des sommets irréguliers supplémentaires.

1.3.3 Méthodes utilisant l'axe médian

En plus de ces méthodes utilisant un squelette simplifié d'un domaine, plusieurs méthodes exploitent directement l'axe médian, ou la surface médiane, du domaine pour tenter de générer des maillages hexaédriques. [Quadros, 2016] et [Papadimitrakis et al., 2020] sont deux de ces méthodes.

[Quadros, 2016] utilise la surface médiane (Figure 1.37 (b)) pour décomposer le domaine en "couloirs" (Figure 1.37 (c)). Ces couloirs forment une décomposition du domaine en blocs simples à mailler. La surface médiane est remaillée en surface quad (Figure 1.37 (d)). Ensuite, une méthode de génération par plâtrage est appliquée à chacun des couloirs depuis la surface médiane (Figure 1.37 (b)).

[Papadimitrakis et al., 2020] utilise la surface médiane comme support pour la construction de champs de directions (Figure 1.38 (3)). Par l'analyse du champ de direction et de la surface médiane, des axes singuliers de la surface médiane peuvent être déterminés (Figure 1.38 (4)). Le champ de direction et les axes singuliers sont utilisés pour construire un graphe de lignes sur la surface du domaine (Figure 1.38 (5)). Ensuite, ce graphe de lignes permet la construction de surfaces de partitions (Figure 1.38 (6)), décomposant le domaine en blocs simples. Ces blocs sont ensuite hexaédrisés par une méthode de plâtrage.

Ces deux méthodes ne permettent pas de garantir un résultat hexaédrique. De plus, elles se retrouvent confrontées à la sensibilité de l'axe médian au bruit. Elles produisent des résultats prometteurs pour des pièces mécaniques issues de CAO, mais ne sont pas appropriées pour des domaines tubulaires comme ceux qui nous intéressent particulièrement.

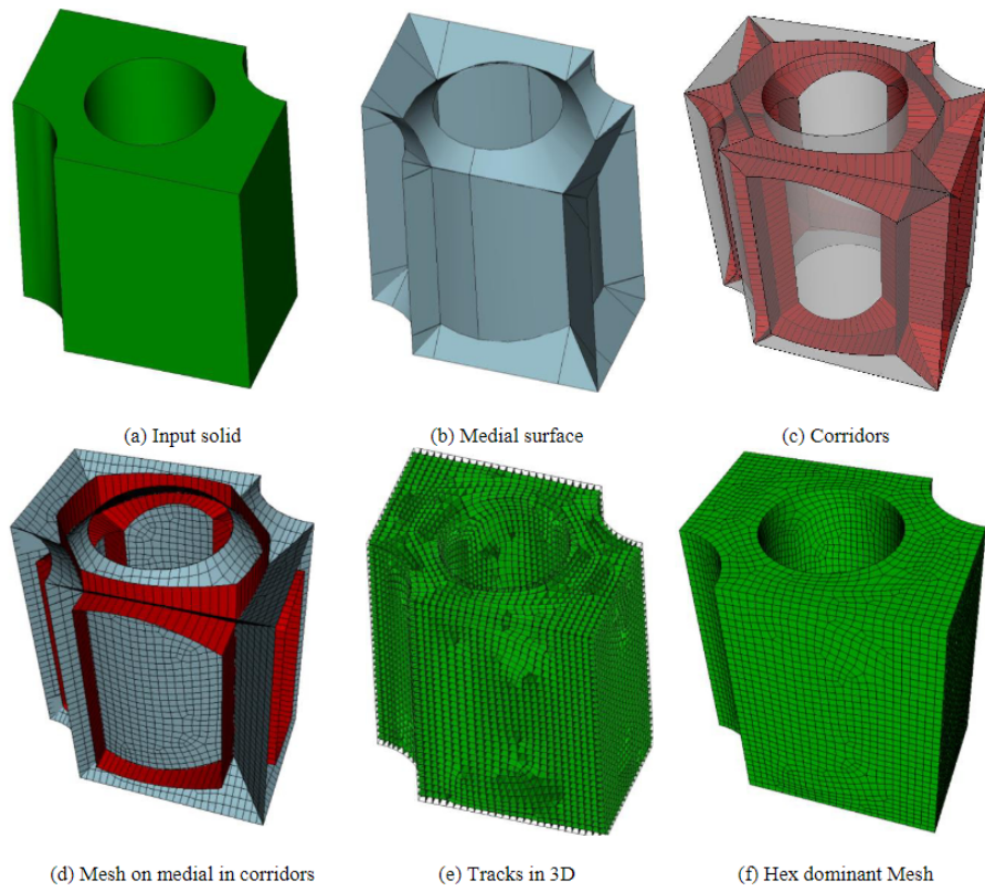


FIGURE 1.37 – Processus de génération de maillage hexaédrique de [Quadros, 2016]

1.4 Observations

Les techniques présentées précédemment se focalisent sur la gestion des embranchements du squelette, car la génération du maillage le long des branches est triviale, consistant simplement en l'extrusion de l'interface présentée au niveau des embranchements. La majorité cherche à construire explicitement un noyau ou un polyèdre sur l'embranchement, hormis les méthodes par partition de sphère qui ne construisent qu'un support sur lequel connecter les branches.

Les méthodes par partition de sphère en quadrilatères présentent un intérêt car elles suggèrent une gestion locale de la topologie du maillage final sans effets de bord. Au contraire, les méthodes par insertion d'hexaèdres semblent avoir des temps d'exécution relativement longs pour des maillages simples avec un nombre raisonnable d'embranchements, et les effets de bords entre les embranchements pourraient la rendre inutilisable sur des domaines types réseaux vasculaires contenant un très grand nombre d'embranchements. Une méthode basée sur les partitions de sphères permettrait une exécution et des décisions locales dans le domaine permettant une implémentation efficace. Tout de même, les optimisations de maillages proposées dans les méthodes par insertion d'hexaèdres sont pertinentes.

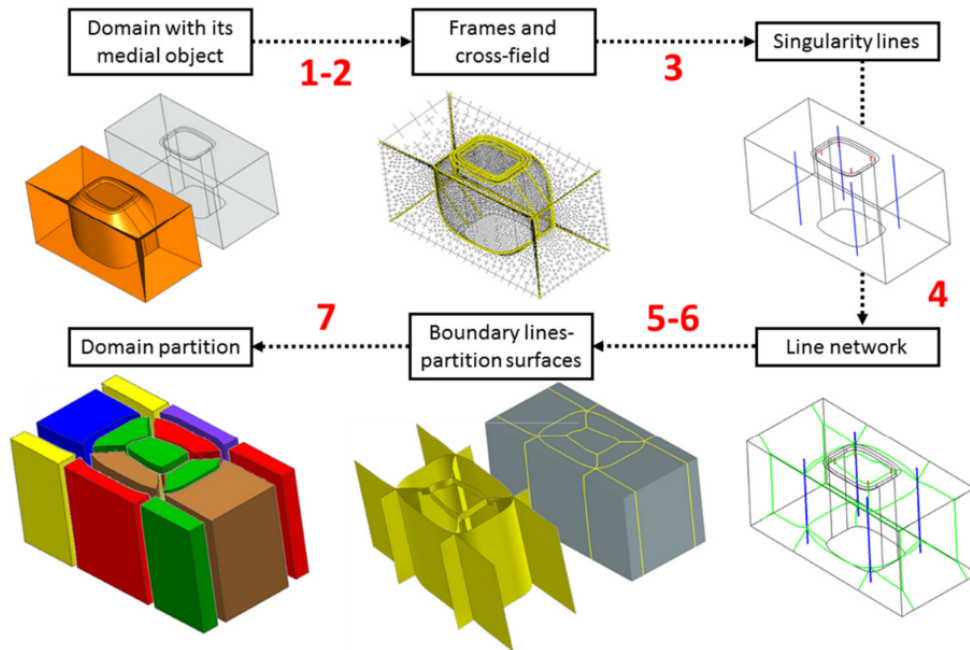


FIGURE 1.38 – Processus de génération de maillage hexaédrique de [Papadimitrakis et al., 2020]

Conclusion

De part leur besoin d'interaction avec l'utilisateur ou leur absence de garantie de résultats purement hexaédriques, les méthodes généralistes ne sont pas pertinentes pour le contexte de la génération de maillage hexaédriques de structures comme un réseau vasculaire. En revanche, les méthodes spécialisées pour les maillages représentables par un squelette sont pertinentes. La spécialisation à un type de données aussi spécifique ouvre la voie à une automatisation plus simple du processus. Toutes les méthodes présentées ici identifient la gestion des embranchements comme le problème clef pour la génération de maillages à partir d'un squelette. Elles proposent chacune une méthode pour gérer ces embranchements, et nous discutons dans la section 2.1 comment elles peuvent être adaptées pour la construction de maillages hexaédriques et le choix que nous avons fait pour notre méthode.

Chapitre 2

Algorithmes

Introduction

L'élément verrou pour la génération de maillages hexaédriques à partir d'un squelette est la gestion des embranchements, les sommets de degrés supérieurs à 2. Comme montré par les différents travaux de l'état de l'art sur la génération de maillage à partir d'un squelette, la gestion des branches est relativement triviale en comparaison. Topologiquement, il s'agit essentiellement d'hexaédriciser un cylindre. La structure des branches est donc décidée par les choix faits pour les embranchements. En reprenant le concept de partition de sphère en quadrilatères, nous avons élaboré un pipeline complet allant d'une surface donnée jusqu'à un maillage hexaédrique basse résolution. Ce pipeline exploite la représentation squelettique du domaine pour effectuer une décomposition automatique en zones d'intérêt. La connectivité entre les différentes sections du domaine est gérée par des échafaudages construits sur le squelette.

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps un algorithme robuste de génération de maillage hexaédrique à partir d'un squelette courbe (1D), en expliquant comment celui-ci permet une analyse et essentiellement une décomposition en blocs de notre domaine. Cette première méthode proposée est adaptée pour les domaines tubulaires dont le squelette courbe est une représentation convenable de la forme, tel qu'un réseau vasculaire, mais ne fonctionne pas aussi bien pour des domaines relativement proches avec des aplatissements d'un tube ou des extrusions. Nous pouvons prendre la main comme exemple, où le squelette courbe représente convenablement les doigts et le poignet, mais pas la paume. De notre travail initial sur la génération de maillages à partir de squelettes courbes a donc découlé un travail pour intégrer les domaines représentables par des squelettes mixtes. Dans un second temps nous présentons donc une extension de l'algorithme à des squelettes contenant des éléments surfaciques, permettant ainsi la gestion d'une plus grande diversité de domaines géométriques. Ensuite, nous détaillerons les propriétés pertinentes présentées par l'algorithme. Pour finir, nous expliquons l'algorithme de partition de sphère en quadrilatères que nous avons développé pour la construction de l'échafaudage, et les optimisations géométriques pouvant être appliquées au maillage brut issu de l'algorithme.

2.1 Connectivité des embranchements

Nous allons voir dans cette section les possibilités que nous avons explorées pour la gestion des embranchements en commençant par une analogie 2D permettant une meilleure intuition du sujet, pour ensuite extrapoler vers l'application en 3D.

2.1.1 Analogie 2D

Commencer par une analogie en 2D du problème, la génération d'un maillage quadrilatère à partir d'un squelette, permet une meilleure compréhension des choix à faire. Malgré la dimension inférieure, il existe des problématiques communes entre une version quadrilatère 2D et une version hexaédrique 3D.

Le graphe du squelette courbe est composé d'un ensemble de sommets et d'arêtes (Figure 2.1). Un sommet de degré supérieur à 2, avec plus de 2 arêtes incidentes, est un **embranchement**. Un sommet de degré 2 est une **articulation**. Un sommet de degré 1 est une **extrémité**. Un ensemble d'arêtes connectées entre deux sommets extrémités ou embranchements forme une **branche** (Figure 2.2).

Les critères de qualité pour un maillage quadrilatère sont proches de ceux des maillages hexaédriques. Nous cherchons à minimiser le nombre d'éléments, ici des quadrilatères, minimiser le nombre de sommets irréguliers, donc de degré différent de 4 à l'intérieur et 3 sur les bords, tout en préservant l'orthogonalité des angles au maximum.

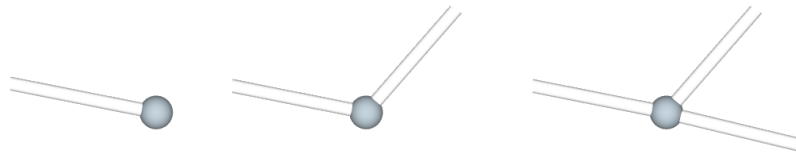


FIGURE 2.1 – Gauche : extrémité, centre : articulation, droite : embranchement

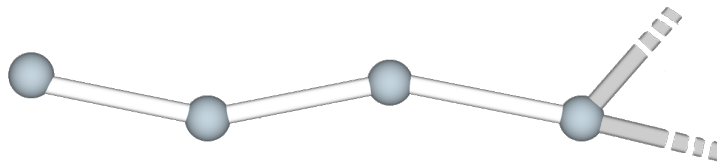


FIGURE 2.2 – Exemple de branche

En 2D, la configuration idéale pour minimiser le nombre d'éléments dans le maillage est de n'avoir qu'un seul quadrilatère par arête du squelette. Cela correspond à un épaissement du squelette. Cependant cet épaissement nécessite une attention particulière au niveau des embranchements afin de pouvoir produire un maillage globalement quadrilatère (Figure 2.3 (b)).

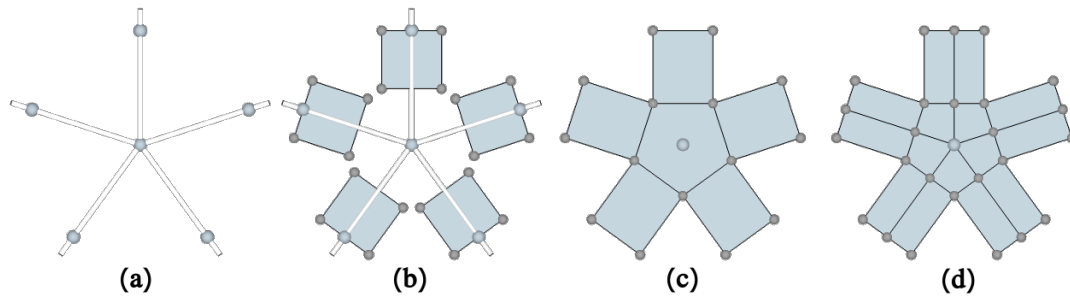


FIGURE 2.3 – Insertion d'un polygone sur un embranchement

En suivant l'exemple des méthodes de [Livesu et al., 2016] et [Panotopoulou et al., 2018], il est possible de commencer par insérer un **polygone noyau** au niveau de chaque embranchement. Avec un polygone de même degré que l'embranchement, on pourra simplement connecter l'arête exposée par chaque branche incidente à l'arête du polygone noyau correspondant à cette branche (Figure 2.3 (c)). De cette façon, nous obtenons un maillage composé de quadrilatères le long des branches (avec un seul quadrilatère par arête du squelette) et de polygones (un par embranchement). Afin d'obtenir un maillage purement quadrilatère, deux approches peuvent être envisagées : (A) une décomposition en quadrilatères des polygones noyaux tout en préservant les arêtes exposées aux branches, (B) une subdivision de ces polygones de type Catmull-Clark (Figure 2.3 (d)) avec l'incidence que cela peut avoir sur le reste du maillage.

(A) Avec la décomposition des polygones noyaux en quadrilatères il n'y a pas d'effets de bord en dehors de l'embranchement. Les modifications de la topologie sont localisées dans le polygone et donc le nombre d'éléments le long des branches reste minimal. Cependant, cette décomposition n'est possible que dans le cas des polygones de degré pair (Figure 2.4 (b)). Dans le cas d'un polygone de degré impair, un triangle devra nécessairement être inséré, brisant ainsi l'objectif de maillage purement quadrilatère (Figure 2.4 (a) et (c)).

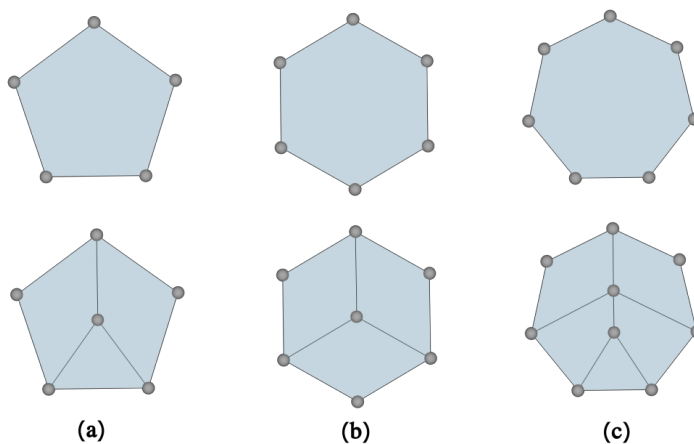


FIGURE 2.4 – Décomposition de polygones de degrés 5, 6, et 7

(B) Avec une subdivision type Catmull-Clark (Figure 2.3 (d)), on crée un sommet irrégulier unique au centre de chaque embranchement, dont le degré est égal à celui de l'embranchement. Les nouveaux sommets créés au milieu de chaque arête du polygone nécessitent de propager une découpe le long des branches. Au lieu d'une branche composée d'un quadrilatère par arête, chaque arête du squelette est maintenant entourée de deux quadrilatères (Figure 2.3 (d)). On obtient cependant le maillage purement quadrilatère souhaité.

Une fois que chaque arête du squelette est composée de 2 quadrilatères (Figure 2.5 (a)), on remarque qu'il est possible de mettre en oeuvre une troisième possibilité : (C) retirer le noyau polygonal de l'embranchement (Figure 2.5 (b)) et coudre directement les faces exposées par les branches entre elles. Cela revient à fusionner les nouveaux sommets qui avaient été ajoutés par la subdivision du polygone noyau sur le sommet de l'embranchement (Figure 2.5 (c)).

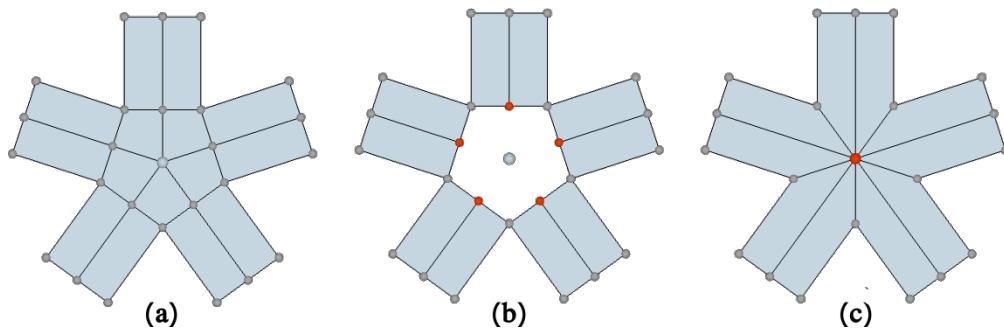


FIGURE 2.5 – Suppression du noyau polygonal et fusion des nouveaux sommets sur le centre de l'embranchement.

Plutôt que de construire le noyau explicitement dans le maillage pour ensuite le subdiviser et le supprimer, nous avons décidé de créer ce polygone dans une structure annexe qui servira de support ou d'**échafaudage**. Ce dernier va encoder les informations géométriques et de voisinage de l'embranchement dont on se servira ensuite pour coudre correctement les interfaces exposées par les branches. L'algorithme général consiste alors à effectuer les opérations suivantes (Figure 2.6) : pour chaque embranchement, on crée un polygone de degré égal à celui de l'embranchement comme support ; pour chaque arête du squelette, on crée une paire de quadrilatères cousus entre eux ; les arêtes exposées par les branches au niveau des embranchements sont appariées aux sommets des polygones de connexion ; les embranchements sont cousus.

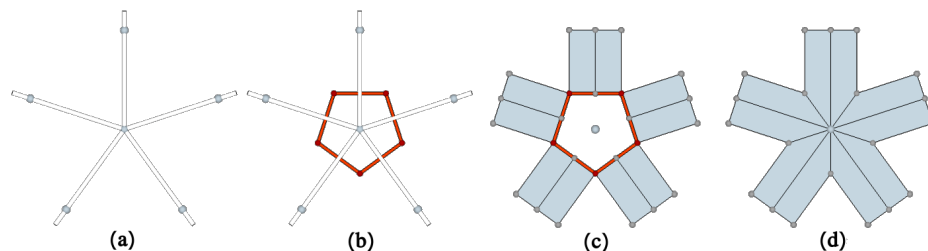


FIGURE 2.6 – (a) Embranchement, (b) construction de l'échafaudage (en rouge), (c) connexion des branches, (d) fusion des sommets.

Même si cela paraît trivial dans le cas 2D, afin de faciliter les explications lors du passage au cas 3D, analysons les choses de la manière suivante :

- le polygone de connexion est composé d'une arête pour chaque branche incidente à l'embranchement
- chaque sommet de ce polygone de connexion a deux arêtes incidentes, qui correspondent à deux branches voisines
- si chaque branche expose une interface composée de deux arêtes (deux demi-branches), alors :
 - chaque sommet du polygone de connexion peut être associé aux deux demi-branches exposées par chacune des deux branches correspondant à ses deux arêtes incidentes
 - il ne reste plus qu'à coudre les paires d'arêtes ainsi associées à chaque sommet du polygone de connexion.

Afin de garantir la cohérence de l'association des demi-branches aux sommets du polygone de connexion, cette association se fait en tenant compte de la géométrie : chaque branche "enregistre" ses deux demi-branches auprès des 2 sommets incidents à l'arête du polygone de connexion qui lui correspond selon l'angle d'arrivée (Figure 2.7).

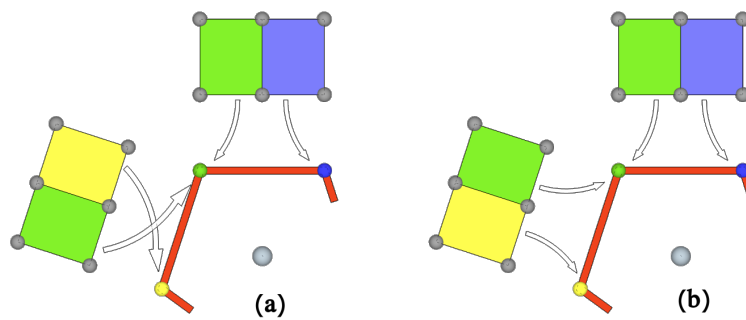


FIGURE 2.7 – (a) quads mal appariés à l'échafaudage. (b) quads correctement appariés à l'échafaudage.

2.1.2 Application en 3D

En 3D, avec la dimension supplémentaire, de nouvelles problématiques apparaissent pour la génération du maillage hexaédrique. Les noyaux ajoutés aux embranchements ne sont plus de simples polygones, mais des polyèdres complexes. La nature de la section des branches épaissies dépendra de la nature des faces de ces polyèdres. Nous avons besoin en premier lieu d'une méthode pour générer ces **polyèdres noyaux**, puis d'analyser comment ces polyèdres pourront ensuite être utilisés dans la construction du maillage volumique et l'impact qu'ils auront sur la construction des branches.

Partition de sphère

Pour construire le polyèdre noyau, deux méthodes vues dans la section 1.3.2, [Fuentes Suárez and Hubert, 2018] et [Panotopoulou et al., 2018] mettent en avant des options intéressantes à explorer. Ces deux méthodes utilisent une sphère placée sur le centre de l'embranchement et les points d'intersection des branches avec cette sphère pour construire

des polyèdres en partitionnant la surface de la sphère. La partition de la sphère pour un embranchement de degré n produit un polyèdre à n faces, chacune associée à une branche du squelette.

La méthode de [Fuentes Suárez and Hubert, 2018] a l'avantage de la simplicité d'exécution, la construction du diagramme de Voronoï d'un ensemble de points étant très simple sur une sphère. En revanche, les faces du diagramme de Voronoï sont des polygones de degré variable. Chaque branche sera alors associée, à ses deux extrémités, à deux faces de polyèdres noyaux ayant potentiellement des degrés différents. C'est le problème que [Fuentes Suárez and Hubert, 2018] propose de résoudre en rendant compatibles les faces situées de part et d'autre de chaque branche du squelette. Après ce remaillage, les faces des polyèdres noyau restent cependant toujours de degré variable. Les sections des branches qui les relient le sont donc aussi. Hexaédriser un cylindre discret à section polygonale quelconque est toujours possible, mais dans l'objectif de générer un maillage présentant un maximum de sommets réguliers, la configuration idéale serait d'avoir partout des branches à section carrée (Figure 2.8). En effet dans ce cas, que l'on ne conserve qu'un seul hexaèdre par arête du squelette ou que l'on subdivise ces hexaèdres de manière régulière, on obtiendrait un maillage dont les sommets sont tous réguliers.

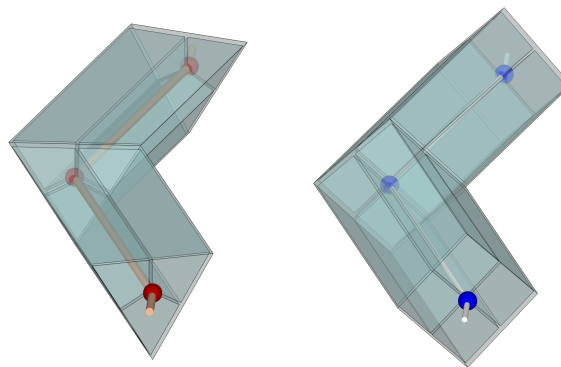


FIGURE 2.8 – Sections de branches. Sommets réguliers en bleu, sommets irréguliers en rouge. (a) une branche à section triangulaire, (b) une branche à section quadrangulaire.

La solution de [Livesu et al., 2016], qui consiste à positionner un hexaèdre sur chaque embranchement permet, après propagation éventuelle d'une ou plusieurs coupes, d'exposer une face quadrilatère pour chaque branche. Comme dit précédemment, cette configuration est idéale pour la réduction du nombre d'éléments et la régularité du maillage. Cependant, cette méthode n'est pas exempte de défauts. La résolution nécessaire d'un système de contraintes global est coûteuse, impose la propagation de coupes le long des branches, et la présence de cycles peut faire échouer ce processus.

[Panotopoulou et al., 2018] montrent de leur côté qu'une partition de la surface d'une sphère en un nombre arbitraire de quadrilatères est toujours possible. Il est donc possible de construire des polyèdres noyaux à faces quadrilatères quel que soit le degré d'un embranchement. Dans ce cas, les faces situées de part et d'autre des branches seront toujours mutuellement compatibles car toutes quadrilatères. Cette approche nous a donc semblé préférable pour la construction des embranchements. Elle permet une gestion des embranchements sans effets de bords (chacun peut être traité de manière indépendante),

tout en ayant l'avantage de permettre aux branches d'avoir une section carrée, permettant de mailler ces dernières de manière aussi régulière que possible.

Nous détaillons dans une section ultérieure un nouvel algorithme de partition de sphère en quadrilatères que nous avons proposé.

Gestion des polyèdres

Nous traitons donc les embranchements de degré n par la création d'un polyèdre noyau à n faces quadrangulaires. Chacune de ses faces est associée à une branche incidente à l'embranchement. En reprenant la progression de l'analogie 2D, nous allons maintenant explorer comment ces polyèdres peuvent être utilisés pour générer le maillage volumique hexaédrique : (A) en les décomposant en hexaèdres tout en préservant les faces exposées aux branches (Figure 2.9 (A)), (B) en effectuant une subdivision du noyau polyédrique et des branches (Figure 2.9 (B)), ou (C) en utilisant le polyèdre uniquement comme un échafaudage support pour venir connecter directement les extrémités des branches subdivisées (Figure 2.9 (C)).

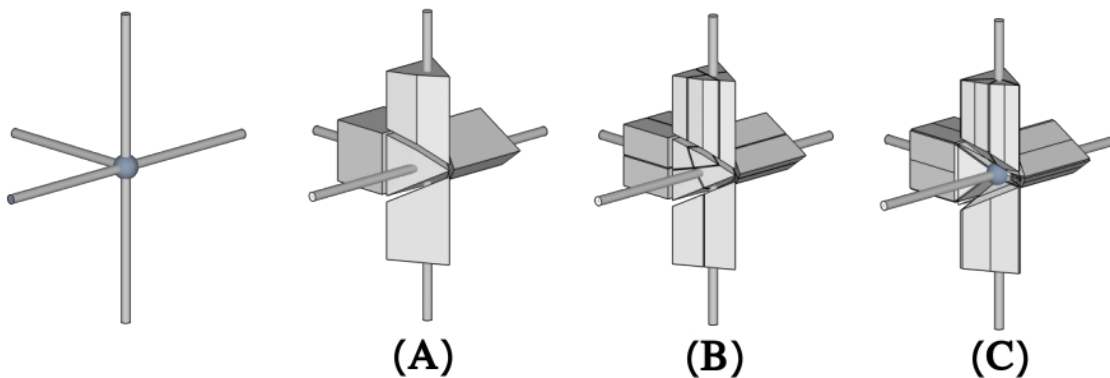


FIGURE 2.9 – Gestion d'un embranchement : à gauche l'embranchement, (A) polyèdre décomposé, (B) polyèdre subdivisé, (C) fusion des sommets

(A) Décomposition La solution de la décomposition du polyèdre en hexaèdres paraît idéale au premier abord puisqu'elle permettrait de construire une version grossière du maillage volumique avec uniquement un hexaèdre par arête du squelette.

[Verhetsel et al., 2019] propose une méthode pour effectuer la décomposition en hexaèdres d'une sphère partitionnée en quadrilatères. Cette décomposition est effectuée en construisant dans un premier temps une couche d'hexaèdres sur la surface de la sphère qui sont ensuite connectés avec leur voisinage de façon à produire une interface compatible pour l'insertion d'un noyau précalculé composés d'hexaèdres au centre de la sphère.

Cette technique souffre de deux défauts majeurs dans notre contexte. Le problème combinatoire pour trouver l'hexaédrisation de la couche en surface est relativement long à résoudre, de l'ordre de quelques dixièmes de secondes à plus d'une heure selon les configurations de l'enveloppe de la sphère, ce qui rendrait le traitement de squelettes complexes potentiellement très long. De plus, un grand nombre de configurations de surfaces requièrent quelques dizaines d'hexaèdres pour être remplies, causant l'apparition

d'un grand nombre de sommets irréguliers et ayant donc un impact négatif sur le Jacobien Normalisé des hexaèdres situés au sein de l'embranchement.

(B) Subdivision Effectuer une subdivision du polyèdre avec un algorithme similaire à celui de Catmull-Clark utilisé en 2D ne produit pas un résultat régulier en 3D. En utilisant un tel processus de subdivision, les cellules volumiques générées au niveau d'un sommet de degré n sont composées de $2n$ faces quadrilatères (Figure 2.10, le sommet de la pyramide de degré 4 donne une cellule volumique à 8 faces). Ainsi, seuls les sommets de degré 3 donnent naissance à des hexaèdres. Or les polyèdres noyaux ne sont pas composés exclusivement de sommets de degré 3.

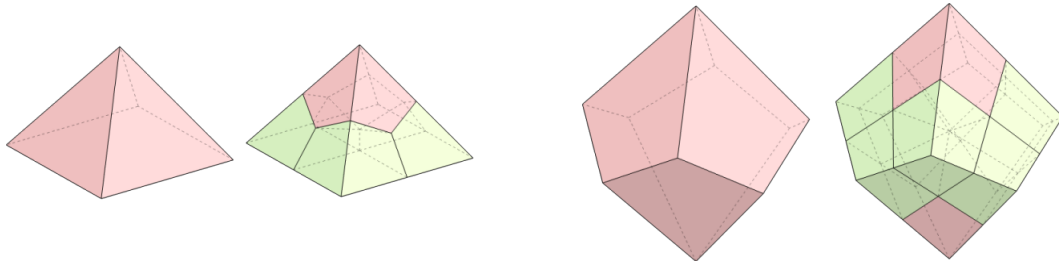


FIGURE 2.10 – Subdivision de polyèdres. En rouge les polyèdres quelconques, en verts les hexaèdres

(C) Fusion des sommets En 2D, les informations de voisinage nécessaires pour connecter les branches voisines pouvaient être simplement déterminées par un ordre sur les angles entre les arêtes incidentes à l'embranchement. En 3D, cet ordre naturel n'existe pas. L'échafaudage que nous créons est donc utile pour encoder une information de voisinage entre les branches, pour déterminer quelles branches sont côte à côte dans l'embranchement.

En reprenant l'analyse que nous avons exposée dans le cas 2D, on peut monter d'une dimension de la façon suivante :

- le polyèdre de connexion est composé d'une face à quatre côtés pour chaque branche incidente à l'embranchement
- chaque arête de ce polyèdre de connexion a naturellement deux faces incidentes, qui correspondent à deux branches voisines
- si chaque branche expose une interface composée de quatre faces (quatre quarts de branche), alors :
 - chaque arête du polyèdre de connexion peut être associée aux deux quarts de branches exposés par chacune des deux branches correspondant à ses deux faces incidentes
 - il ne reste plus qu'à coudre les paires de faces ainsi associées à chaque arête du polyèdre de connexion.

Là aussi, pour garantir la cohérence globale de l'association des quarts de branches aux arêtes du polyèdre de connexion, il faut tenir compte de la géométrie : chaque branche "enregistre" ses quatre quarts de branches auprès des quatre arêtes incidentes à la face du polyèdre de connexion qui lui correspond de manière à minimiser la "torsion" d'arrivée. Une explication plus détaillée sera donnée dans la section 2.2.4.

C'est donc un tronçon composé de quatre hexaèdres cousus entre eux (Figure 2.11) qui sera créé pour chaque arête du squelette. Des subdivisions successives ultérieures généreront le long des branches un maillage qui sera équivalent à des grilles hexaédriques régulières alignées avec la géométrie des branches.

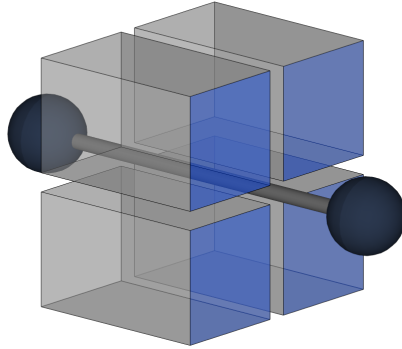


FIGURE 2.11 – Tronçon de 4 hexaèdres exposant une interface à 4 quadrilatères en bleu

La Figure 2.12 illustre la construction d'un polyèdre de connexion sur un embranchement de degré 3. Les tronçons des branches incidentes sont créés et associés aux arêtes de l'échafaudage. Enfin, les faces appariées à une même arête sont cousues afin de créer un maillage volumique correct. Ce processus peut être généralisé à des embranchements de degré n , du moment que l'on a bien un polyèdre de connexion composé d'un quadrilatère par branche incidente.

En utilisant cette approche, on ne crée qu'un sommet irrégulier par embranchement complexe. Comme nous le verrons par la suite, des spécialisations adaptées à certaines configurations locales permettront dans certains cas de ne pas générer du tout de sommet irrégulier tout en restant compatible avec le processus générique. Le long de chaque branche le maillage a une structure homotope à une grille hexaédrique régulière. En plus de remplir ces critères de qualité, cette méthode a l'avantage de ne nécessiter que des décisions locales aux embranchements et aux branches. La présence de cycles dans le squelette ou les configurations des embranchements voisins n'ont donc aucun impact sur la complexité de la construction.

2.2 Génération basée squelette 1D

Avec les objectifs définis précédemment pour notre structure : la construction des branches par un ensemble de tronçons connectés par fusion sur les embranchements, il est possible de développer un algorithme robuste et efficace pour générer des maillages hexaédriques à partir d'un squelette et de la surface à laquelle il correspond. A partir du squelette, dont on extrait les informations topologiques et géométriques essentielles, on souhaite construire un échafaudage, un support pour la topologie et la géométrie du maillage volumique final. L'échafaudage devra permettre de construire géométriquement les tronçons de quatre hexaèdres constituant une branche et ensuite les connecter entre eux topologiquement deux à deux.

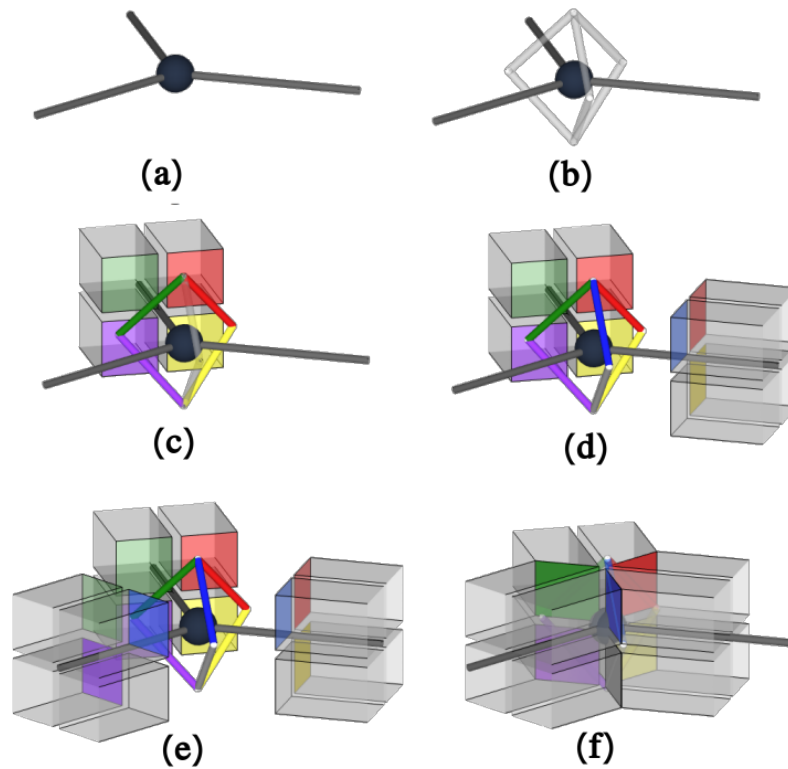


FIGURE 2.12 – Connexion topologique de tronçons d'hexaèdres autour d'un embranchement à l'aide d'un échafaudage quadrilatère. (a) Sommet incident à 3 branches (b) Surface de connexion composée de 3 quadrilatères (c, d, e) appairage des tronçons incidents avec les arêtes de leur quadrilatère respectif (f) connexion des paires d'hexaèdres.

Algorithme 2.1 – Pipeline complet

```

generation1D(surface, squel):
    adaptationSquelette(surface, squel)
    branches = analyseSquelette(squel)
    echafaudage = constructionEchafaudage(squel)
    propagerGeometrie(squel, echafaudage, branches)
    hexMesh = insertionTroncons(squel, echafaudage)
    coutureTroncons(hexMesh, echafaudage)
    transfertGeometrie(echafaudage, hexMesh)

    return hexMesh

```

2.2.1 Adaptation du squelette

Le squelette initialement extrait de la surface du domaine est généralement d'une résolution supérieure à nos besoins. La finesse de la subdivision du squelette est liée à la finesse et au niveau de détails de la surface représentant le domaine, et non aux dimensions des éléments du domaine tel que le rayon des branches tubulaires. Puisqu'on souhaite que les dimensions des éléments hexaédrique du maillage produit soient corrélées

aux dimensions des branches, et que leur nombre soit minimal, nous allons retraiter le squelette pour en retirer les informations excédentaires.

[Livesu et al., 2016] propose une méthode d'adaptation du squelette adaptée à ce que nous voulons faire. A partir d'une branche du squelette finement échantillonné (Figure 2.13 (a)) nous allons reconstruire une branche simplifiée.

Dans un premier temps une paramétrisation $[0,1]$ de la longueur d'arc de la branche est calculée, produisant une courbe paramétrique. La branche est décimée pour ne conserver que ses extrémités de coordonnées paramétriques 0 et 1 (Figure 2.13 (b)). La paramétrisation est ensuite utilisée pour une subdivision par dichotomie. Récursivement, un sommet sera inséré sur un segment de la branche au milieu des coordonnées paramétriques (Figure 2.13 (c-e)) et se verra attribuer la position correspondante de la courbe paramétrique. Pour déterminer la condition d'arrêt, une sphère du rayon local de la branche est ajoutée sur les sommets. Si les sphères des sommets incidents à une arête s'intersectent, alors l'arête n'est plus subdivisée.

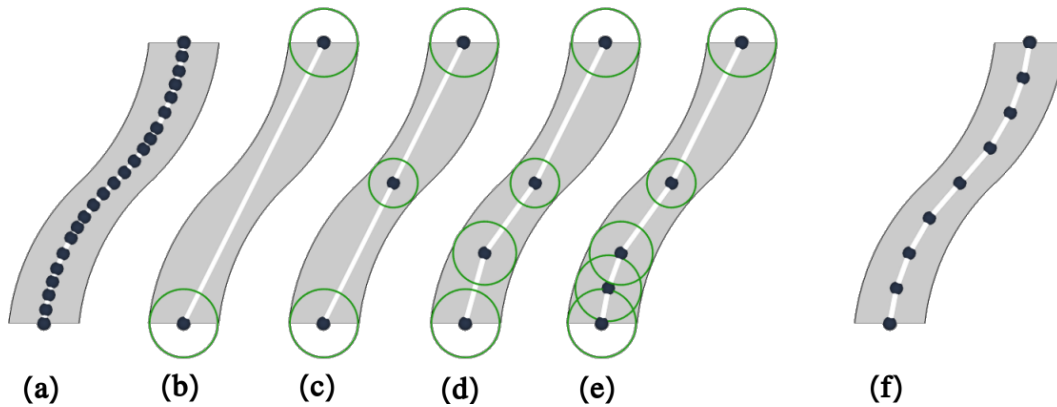


FIGURE 2.13 – Adaptation d'un squelette en fonction du rayon local. (a) Squelette fin, (b) initialisation de l'itération, (c - e) itérations successives, (f) squelette adapté final.

De cette façon, le squelette adapté aura un nombre d'éléments moins élevé et des arêtes de longueurs corrélées au rayon local du domaine étudié, permettant une construction plus optimale des éléments du maillage hexaédrique. Des variations de rayon le long d'un tube résultent en des variations de longueur d'arête le long de la branche, adaptant donc la densité du squelette à l'épaisseur de la branche (Figure 2.14).

En adaptant le squelette de cette manière, la longueur d'arête et le rayon de la branche sont directement liés. La longueur d'une arête est approximativement égale au rayon local de la branche. La construction de nos tronçons sur cette base permet donc d'avoir des hexaèdres dont les dimensions sont proches du rayon. De plus, le genre topologique du squelette est inchangé, conservant ainsi les informations de connectivité en adaptant les informations géométriques à nos besoins.

2.2.2 Analyse du squelette

Disposant d'un graphe du squelette, on a besoin d'en extraire deux informations. On a besoin de connaître le degré des sommets du graphe. Ils seront séparés en trois types, on appellera **extrémités** les sommets de degré 1, **articulations** les sommets de degré 2, et **embranchements** les sommets de degré supérieur ou égal à 3. A partir de

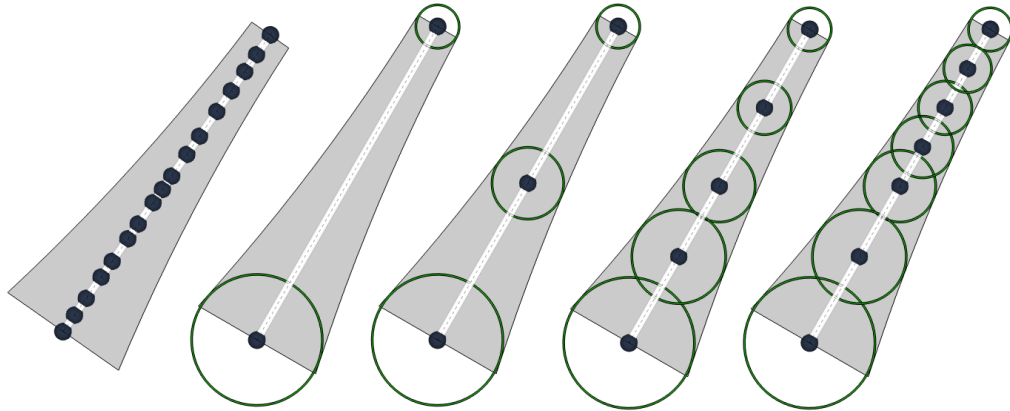


FIGURE 2.14 – Exemple de l’adaptation du squelette pour un tube dont le rayon n’est pas homogène. Là où le rayon réduit, la densité des sommets du squelette est plus importante.

cette première information on peut déterminer l’ensemble des branches du graphe, ou arêtes successives entre deux sommets de degré différent de 2. L’information du degré nous permet de déterminer comment seront traités les sommets lors de la construction de l’échafaudage, pour déterminer la topologie du maillage produit, et les contraintes géométriques présentes. L’ensemble des branches nous permet de propager les informations géométriques le long des branches une fois que celles-ci seront déterminées pour fixer la géométrie du maillage.

A la fin de cette étape d’analyse, le nombre de blocs, et donc par extension d’hexaèdres, qui composent le maillage final, ainsi que les contraintes géométriques imposées par les échafaudages, sont connus. Ces informations vont donc pouvoir être utilisées pour la construction de l’échafaudage servant à connecter les tronçons entre eux.

Algorithme 2.2 – Analyse du squelette

```

analyseSquelette(squel):
    branches = listeBranches()
    foreach arete ar of squel:
        if !marquee(ar):
            branche = trouverBranche(ar)
            marquerBranche(branche)
            branches.ajouter(branche)
    return branches

```

2.2.3 Construction de l’échafaudage

La gestion de la connectivité finale du maillage requiert d’avoir un échafaudage construit sur tous les sommets du squelette. Sur chaque sommet, nous construisons un polyèdre composé de quads en fonction de la configuration locale. Selon si le sommet du squelette est une extrémité, une articulation, ou un embranchement, différentes méthodes sont utilisées.

Extrémités et Articulations

Dans le cas des sommets de degré 1 et 2, les extrémités et les articulations, il est souhaitable de disposer aussi d'un support géométrique et topologique pour le maillage volumique. Construire nos polyèdres à faces quadrilatères pour ces sommets revient simplement à insérer un quadrilatère sur une extrémité (Figure 2.15 (a)), et un quadrilatère double face, un volume homotope à une sphère, sur une articulation (Figure 2.15 (b)).

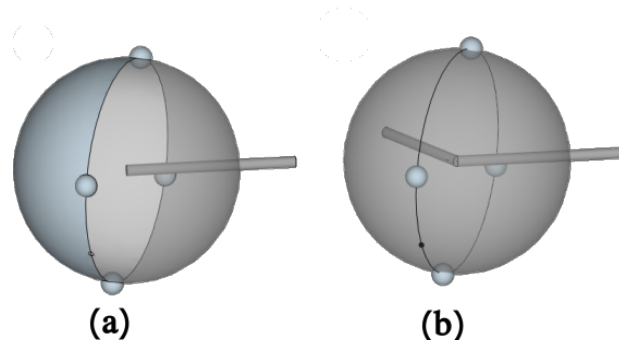


FIGURE 2.15 – (a) quadrilatère d'extrémité, (b) quadrilatère double face.

A cette étape, ces éléments d'échafaudage n'ont pas de géométrie définie, seulement une topologie adaptée à la connexion des tronçons incidents. La géométrie sera définie plus tard à partir par propagation des contraintes géométriques présentées par les embranchements.

Embranchements

La gestion de la connectivité des tronçons dans les embranchements du squelette, contrairement aux branches, n'est pas triviale, et la façon dont ceux ci seront gérés aura un impact sur la qualité du maillage volumique résultant du pipeline, ainsi que la géométrie propagée dans les branches incidentes. Pour créer des surfaces de connexion pour notre échafaudage, plusieurs cas vont se présenter : un cas générique et deux cas particuliers.

Cas générique

Un embranchement qui ne présente pas certaines caractéristiques claires comme une configuration planaire des branches ou un quasi alignement avec 3 axes orthogonaux sera dit **générique**. Nous avons donc choisi d'utiliser une **partition de sphère en quadrilatères** pour la construction des embranchements. Une telle partition permet une gestion des embranchements en fonction des conditions locales, et donc sans effets de bords sur le reste du squelette, tout en bénéficiant de l'avantage d'exposer des quadrilatères aux branches incidentes, permettant ainsi d'extruder des branches avec un nombre minimal d'hexaèdre. Le détail de l'algorithme développé et utilisé pour cette partition sera détaillé dans la section 2.6. Nous avons utilisé notre propre algorithme, mais il peut se substituer par d'autres méthodes produisant un polyèdre fermé de genre 0.

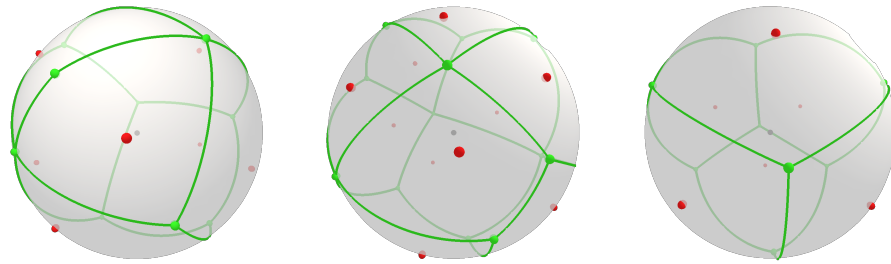


FIGURE 2.16 – Trois exemples de partitions génériques de sphères en quadrilatères pour construire des échafaudages. En rouge les points d’intersection des branches avec la sphère, en vert la partition.

Cas particuliers

En plus de l’algorithme générique, certaines configurations d’embranchements pourront être traitées de façon spécialisée tout en restant compatibles avec le reste de l’échafaudage. Quand certaines caractéristiques sont rencontrées sur un embranchement, les spécialisations sont appliquées prioritairement pour permettre une meilleure qualité du maillage résultant. Pour le moment, on distingue deux cas particuliers : le cas **plat**, et le cas **orthogonal**.

Embranchement plat Un **embranchement plat** est une configuration où l’ensemble des points d’entrées sur la sphère sont sur ou proche d’un plan médian. Une structure en “quartiers d’orange” est alors générée. Ce cas est inspiré par l’étape initiale de la partition de sphère proposée par [Panotopoulou et al., 2018]. Pour ces embranchements de degré n , on crée une surface quad composée de 2 sommets de degré n , les pôles, et n sommets de degré 2 au milieu des méridiens (Figure 2.17).

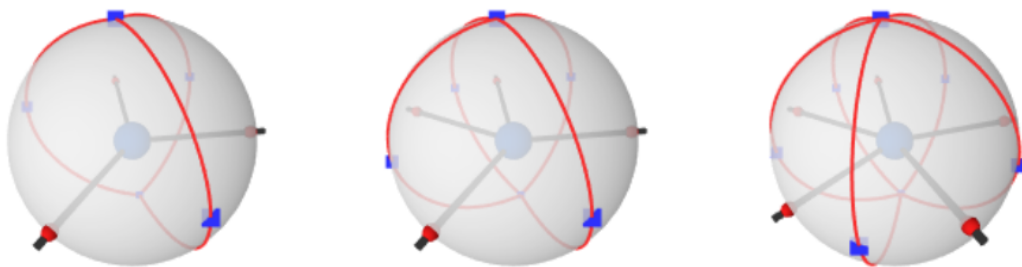


FIGURE 2.17 – Trois exemples de partitions de sphères en quadrilatères dans des cas plats

Embranchement orthogonal Pour les embranchements de degré entre 3 et 6, si les directions des branches incidentes sont mutuellement orthogonales par paires, avec un seuil de tolérance pour l’angle, il s’agit d’un embranchement dit **orthogonal**. Un cube

subdivisé en huit est inséré sur l'embranchement en gardant les branches incidentes le plus orthogonales possible aux faces. Ce cube présente des interfaces compatibles avec nos tronçons pour toutes les branches incidentes. Pour chaque interface associée à une branche, un quad est ajouté à l'échafaudage. Ce quad est appairé à l'interface du cube d'un coté pour permettre la connexion du cube avec le tronçon qui sera ensuite ajouté à la branche.

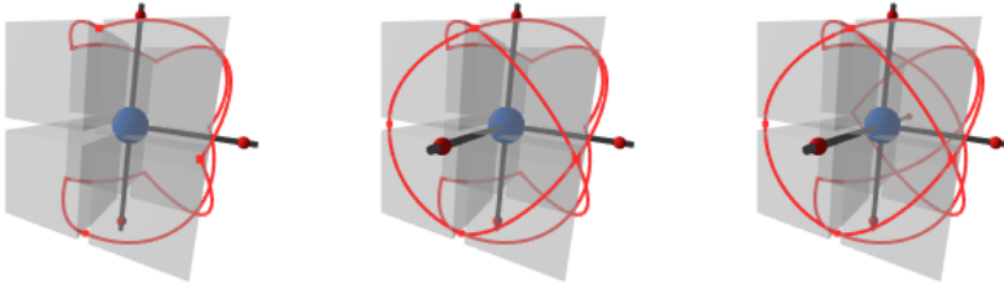


FIGURE 2.18 – Trois exemples d'insertion d'un cube subdivisé avec la surface de connexion associée en quadrilatère pour des cas orthogonaux

Pouvoir choisir parmi ces cas particuliers comme alternatives du traitement générique permet de sélectionner la meilleure configuration locale en fonction des caractéristiques géométriques de l'embranchement pour améliorer la qualité des mailles qui seront générées (Figure 2.19).

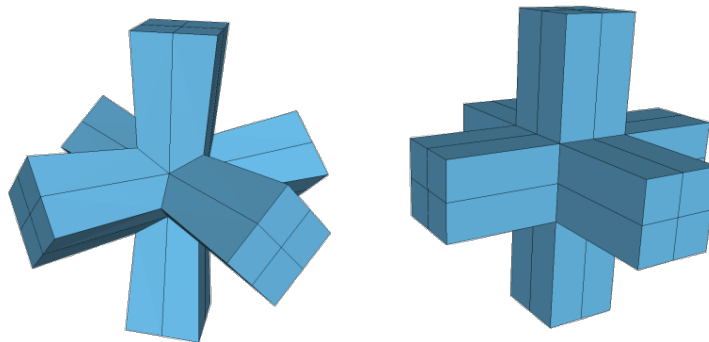


FIGURE 2.19 – Partition générique à gauche, utilisation du cas orthogonal à droite

Construire un échafaudage quadrilatère autour de chaque sommet du squelette (les extrémités, articulations, et embranchements), permet de traiter tous les sommets et toutes les arêtes du squelette de façon similaire. Les opérations de construction du maillage volumique n'affectent que le voisinage immédiat sans effets de bords, ouvrant la possibilité à du parallélisme efficace.

 Algorithme 2.3 – Construction de l'échafaudage

```

constructionEchafaudage(squel):
  echafaudage = nouvelEchafaudage()
  /* parallele */
  foreach sommet s of squel:
    switch(degre(s)):
      case 1 :
        ajouterQuad(echafaudage, s)
        break
      case 2:
        ajouterDoubleQuad(echafaudage, s)
        break
      default:
        if orthogonal(s):
          ajouterEchafOrtho(echafaudage, s)
        else if planaire(s):
          ajouterEchafPlan(echafaudage, s)
        else
          ajouterPartitionSphere(echafaudage, s)
  return echafaudage
  
```

2.2.4 Géométrie

Initialement, les seules informations géométriques utilisées sont le rayon du squelette, ou la distance d'un sommet à la surface, et la direction des branches pour la construction des échafaudages sur les embranchements. Sur les extrémités et articulations du squelette, il n'y a pas de directions privilégiées a priori. Sans information géométrique supplémentaire, il n'est pas possible de correctement reconstruire un maillage hexaédrique géométriquement satisfaisant.

Contraintes L'échafaudage n'est pas contraint géométriquement le long des branches aux articulations ou aux extrémités, ses sommets n'ont pas encore de position. En revanche, les échafaudages des embranchements sont construits avec une considération géométrique pour être correctement associés au squelette. Ils sont donc contraints et la position des sommets est fixée. Nous pouvons exploiter cette contrainte pour imposer une géométrie sur le reste de l'échafaudage. Que l'embranchement soit générique, plat, ou orthogonal, nous disposons d'un échafaudage quadrangulaire exposant une face par branche sortante. Les diagonales des quadrilatères associées à la direction de la branche nous permettent de construire un repère orthonormé, et ce repère peut être propagé le long de la branche pour obtenir une contrainte géométrique en tout sommet du squelette. Une fois les contraintes propagées sur l'ensemble du squelette en associant un repère local à chaque sommet, ces repères sont utilisés pour fixer les quadrilatères libres.

Propagation des contraintes Pour cette propagation de contrainte géométrique il est possible d'utiliser un outil mathématique communément utilisé pour l'extrusion de surface le long d'une courbe continue : les repères minimisant la rotation, ou Rotation Minimizing Frames (abrégé en RMF) [Wang et al., 2008]. Les RMF permettent la construction à partir d'un repère et d'une courbe (Figure 2.20), de repères alignés avec la tangente et le plan orthogonal en tout point de cette courbe, en minimisant la rotation

entre deux repères successifs. Ces repères permettent l'extrusion d'une surface lisse le long d'une courbe (Figure 2.21). Notre échafaudage sert de support géométrique pour la construction des tronçons. Disposer d'un échafaudage basé sur les RMF permettra de minimiser la torsion au sein des tronçons lors de leur construction. Nous voulons donc essentiellement utiliser les RMF pour transporter une orientation des tronçons le long des branches.

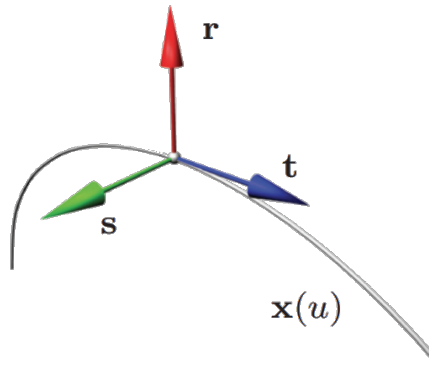


FIGURE 2.20 – Initialisation des Rotation Minimizing Frames. [Wang et al., 2008]



FIGURE 2.21 – Extrusion d'une surface le long d'une courbe. [Wang et al., 2008]

Pour propager les contraintes depuis les embranchements, pour chaque face quadrangulaire de l'échafaudage à l'embranchement, un repère est calculé à l'aide la tangente et des diagonales du quadrangle. Ces repères sont ensuite transportés le long de leur branches respectives. A chaque articulation rencontrée, le repère transporté fixe la position des sommets de l'échafaudage. Si l'autre bout de la branche traitée est une extrémité le processus s'arrête. En revanche, si l'autre bout de la branche est un embranchement, l'écart entre l'orientation transportée et celle de la face de cet embranchement est mesuré. Cet écart est compris dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ car notre structure de tronçons est invariable par rotation de $\pi/2$. Un défaut de rotation inférieur à $-\frac{\pi}{4}$ ou supérieur à $\frac{\pi}{4}$ pourra être ramené dans l'intervalle par un modulo $\pi/2$. Afin de satisfaire les orientations imposées par les faces respectives des embranchements situés de part et d'autre de la branche, ce défaut de torsion est alors réparti le long de la branche sur toutes les articulations en suivant une paramétrisation par longueur d'arc (Figure 2.22).

Si une branche n'a pas d'embranchement pour contraindre la géométrie, un repère arbitraire aligné à tangente peut être construit sur une des extrémités et ensuite propagé comme dans le cas général.

La bonne construction et propagation de ces repères est une des étapes cruciales de ce pipeline. Les défauts de formes des mailles peuvent être corrigés par des optimisations

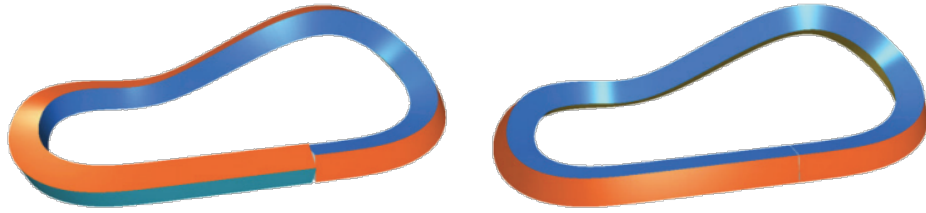


FIGURE 2.22 – Rotation Minimizing Frame avec une double contrainte d’orientation. [Wang et al., 2008]

géométriques. Les défauts de torsion dans une branche quant à eux ne peuvent pas être facilement corrigés car ils nécessiteraient des modifications topologiques. Modifier la connectivité du maillage a posteriori est nettement plus difficile que les méthodes pour minimiser la torsion sur les interfaces de connexion.

Algorithme 2.4 – Propagation de la géométrie

```

propagerGeometrie(echafaudage, branches):
    /* parallele */
    foreach branche br of branches:
        /* brancheRMF(br) */
        s0 = premierSommet(br)
        sEnd = dernierSommet(br)
        s1 = prochainSommet(br, s0)
        r0 = creerRepere(s0, echafaudage)
        while s1 != sEnd:
            r1 = RMF(s0, s1, r0)
            fixerGeometrieQuad(s1, echafaudage, r1)
            s0 = s1
            r0 = r1
        if estEmbranchement(sEnd):
            rEnd = creerRepere(sEnd, echafaudage)
            ecart = differenceOrientation(rEnd, r0)
            niemeEcart = ecart / nbSommet(br)
            s0 = premierSommet(br)
            s1 = prochainSommet(br, s0)
            angle = niemeEcart
            while s1 != sEnd:
                pivoterQuad(s1, echafaudage, angle)
                angle += niemeEcart
                s1 = prochainSommet(br, s1)

```

2.2.5 Construction des volumes

Avec les échafaudages associés à chaque sommet, la gestion de la topologie du maillage final est grandement simplifiée. Pour chaque arête du graphe squelette on génère un ensemble de 4 hexaèdres, un **tronçon**, que l’on enregistre auprès des échafaudages des sommets incidents de son arête. Une fois tous les tronçons construits et associés à l’échafaudage, ils pourront être cousus entre eux pour obtenir la topologie finale du maillage.

Tronçons

Le tronçon (Figure 2.11) est la primitive topologique de construction que nous utilisons pour le maillage initial.

Pour toutes les arêtes du squelette (Figure 2.23 (a)), un tronçon est inséré (Figure 2.23 (b)). Les interfaces de part et d'autre du tronçon sont appairées à l'échafaudage sur les sommets du squelette incidents à l'arête (Figure 2.23 (c)).

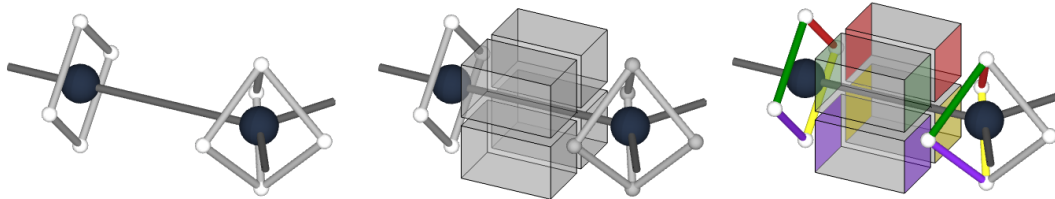


FIGURE 2.23 – (a) Une arête du squelette et l'échafaudage, (b) insertion d'un tronçon sur l'arête, (c) appairage du tronçon à l'échafaudage.

Construire le maillage initial en tronçons de cette manière permet de connaître une partie de la connectivité du maillage hexaédrique et donc d'optimiser la construction de ces premiers éléments avant l'assemblage global.

Algorithme 2.5 – Insertion des tronçons hexaédrique

```

insertionTroncons(squel, echafaudage):
    hexMesh = maillageVolumique()
    /* parallele */
    foreach arete ar of squel:
        troncon = ajouterTroncon(hexMesh)
        quads = trouverQuadsEchafaudage(echafaudage, ar)
        associerTronconEchafaudage(troncon, quads)

    return hexMesh
  
```

Coutures

Chaque arête du squelette est incidente à deux sommets, et donc à deux quadrilatères des échafaudages de connexion. Chacune des quatre faces d'interface du tronçon est appairée avec une des quatre arêtes du quad de l'échafaudage. A la fin de la génération des tronçons, chaque arête de l'échafaudage autour d'un sommet est associée à exactement deux hexaèdres et ce quel que soit le degré de l'embranchement. Pour compléter la connectivité du maillage hexaédrique, ces paires d'hexaèdres sont connectées ensemble par la face quadrilatère associée à la surface de connexion. Ce processus, illustré sur un sommet de degré 2 (Figure 2.24) et sur un sommet de degré 3 (Figure 2.12), peut être généralisé à n'importe quel degré tant qu'une surface de connexion quadrilatère a été construite.

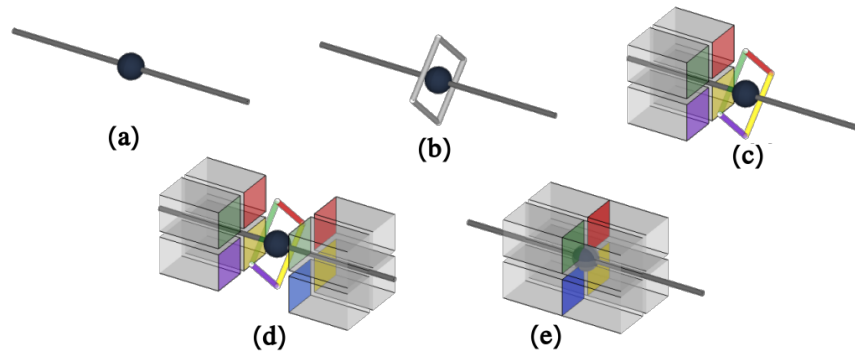


FIGURE 2.24 – Connexion topologique de tronçons d’hexaèdres autour d’une articulation à l’aide d’un échafaudage quadrilatère. (a) Sommet incident à 2 branches (b) échafaudage composée d’un quad double face, (c, d) appairage des tronçons incidents avec les arêtes de leur face respective du quad, (e) couture des paires d’hexaèdres.

Algorithme 2.6 – Couture des tronçons

```

coutureTroncons(hexMesh, echafaudage):
    /* parallele */
    foreach arete ar of echafaudage:
        hexas = trouverHexasAssocies(ar)
        coudre(hexas)

```

Une fois les tronçons connectés entre eux via les échafaudages, les informations géométriques portées par l’échafaudage sont transférées aux sommets du maillage volumique pour finaliser la construction. Le centre du tronçon est placé sur le sommet du squelette. Les sommets incidents au centre sont placés sur les sommets du quadrilatère de l’échafaudage, et les coins extérieurs des hexaèdres sont placés sur le milieu de leur arête respective.

Maillage brut

L’ensemble des étapes décrites précédemment produit un **maillage brut** topologiquement homotope au domaine traité (Figure 2.25). Cette structure représente bien la topologie mais est trop grossière pour l’application de codes de simulations : elle n’est qu’une esquisse basse résolution de la géométrie du domaine. Les différents tronçons connectés entre eux forment des grilles régulières par morceaux qui peuvent être raffinées et optimisées pour une meilleure correspondance à la géométrie du domaine. En fonction de la manière dont les embranchements complexes ont été construits par l’algorithme de partition de sphère, il est possible à ce stade d’avoir des hexaèdres de mauvaise qualité, mais la plupart de ces défauts seront corrigés par le raffinement et les optimisations géométriques. Les résultats sont montrés en détails dans la section 3.1.

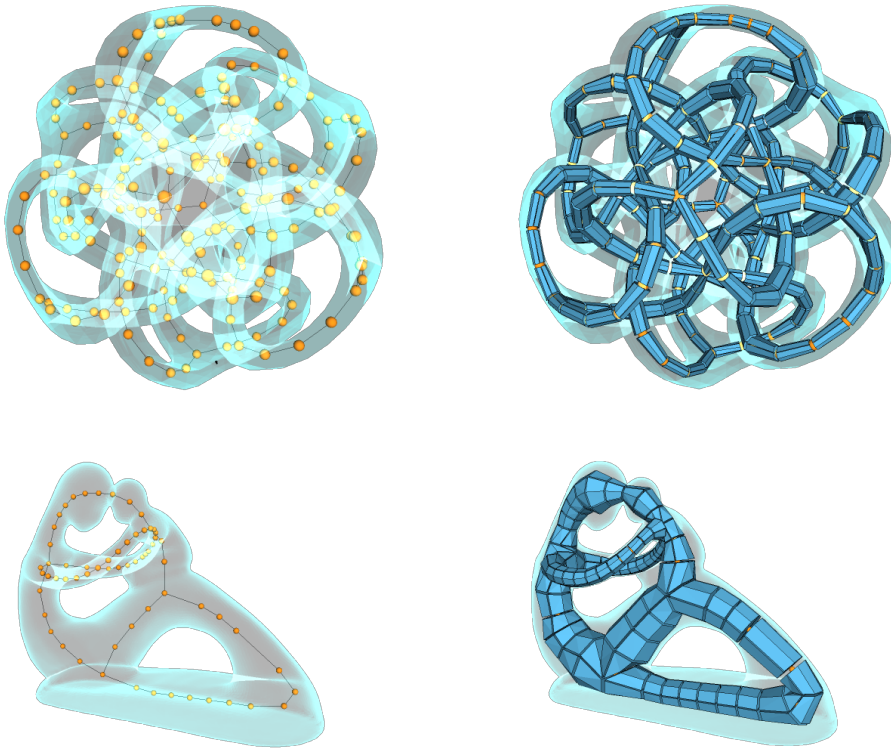


FIGURE 2.25 – Maillages bruts issus de notre méthode.

2.2.6 Limites

Ce premier algorithme présenté produit des résultats de bonne qualité pour un domaine dont la géométrie est adéquatement décrite par son squelette et son rayon. Donc les domaines ressemblants à un simple gonflement de la topologie décrite par le squelette. Lorsqu'on traite des domaines tubulaires tels que des réseaux vasculaires, l'algorithme est adéquat. Mais si le domaine contient des régions avec une tranche allongée dans le plan perpendiculaire au squelette (Figure 2.26), ou des angles saillants, l'algorithme produira des hexaèdres trop déformés.

Dans ce type de configurations, il n'est pas possible de garantir que les optimisations de la géométrie pourront corriger les défauts de qualité. La représentation de certains domaines par seulement un squelette courbe n'est pas suffisante. Tout un ensemble de domaines relativement proches de ceux que nous traitons sont éliminés par cette insuffisance (Figure 2.27).

2.3 Génération basée squelette 2D

La méthode présentée dans la section précédente ne permet pas d'obtenir de bons résultats lorsque le domaine comporte des éléments trop aplatis (Figure 2.27). Certains de ces domaines peuvent être convenablement représentés par des squelettes mixtes contenant des branches courbes pour les éléments tubulaires, et des **feuilletés** surfaciques pour

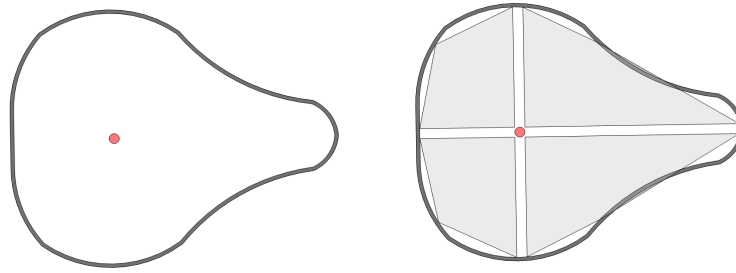


FIGURE 2.26 – Vue en tranche d’un domaine, en noir, avec son squelette, en rouge. Le tronçon inséré ne peut pas correctement approximer la surface

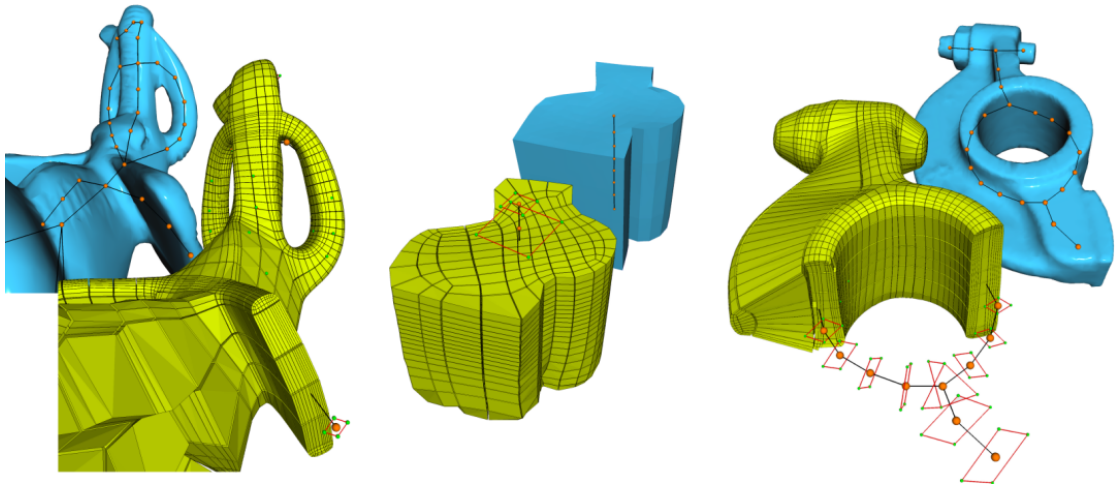


FIGURE 2.27 – Maillages mal décrits par leur squelette courbe résultant en des maillages hexaédriques de mauvaise qualité.

les éléments aplatis. L’utilisation de ces feuillets surfaciques va nous donner une information géométrique supplémentaire qui peut être exploitée pour pallier les limites énoncées précédemment. La possibilité de pallier ces difficultés nous a poussé à explorer le sujet de la génération de maillage hexaédrique à partir d’un squelette mixte et trouver une solution compatible avec celle présentée précédemment.

Palettes

Pour préserver la compatibilité avec notre structure de tronçons et les principes de construction utilisés pour notre premier algorithme, nous introduisons ici deux nouveaux éléments de base pour la construction : la palette (Figure 2.28 (b)), et le demi tronçon (Figure 2.28 (c)), tout deux composés de deux hexaèdres. A partir d’un maillage surfacique quadrilatère, ces éléments nous permettent respectivement de traiter les quadrilatères composant les feuillets, et la bordure des feuillets. Nous proposons d’associer une palette à chaque quadrilatère des feuillets et un demi tronçon par arête du bord des

feuillet. Comme montré sur la figure 2.28 (c), une paire de demi tronçons autour d'un sommet produisent une interface compatible avec celle de nos tronçons (Figure 2.11). L'introduction de ces nouveaux éléments structurels permet donc de gérer un squelette mixte comportant des feuillets quadrilatères et des branches courbes.

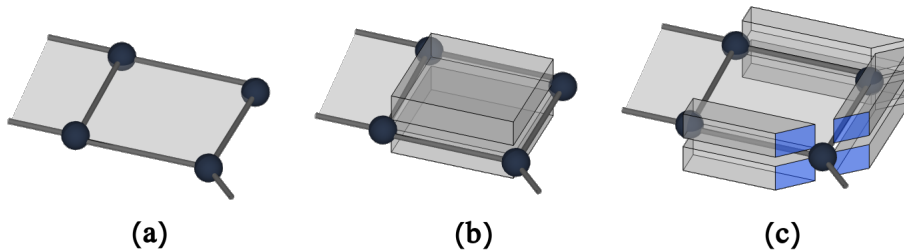


FIGURE 2.28 – (a) Feuillet du squelette mixte, (b) palette associée à un quad du feuillet, (c) demi-tronçons associés aux arêtes du bord du feuillet.

Algorithme 2.7 – Pipeline complet

```

generation2D(surface, squelet):
    adaptationSquelette(surface, squelet)
    {branches, feuillets} = analyseSquelette(squelet)
    echafaudage = constructionEchafaudage()
    propagerGeometrie(squelet, echafaudage, branches, feuillets)
    hexMesh = insertionVolumes(squelet, echafaudage, feuillets)
    coutureVolumes(hexMesh, echafaudage, feuillets)
    transfertGeometrie(echafaudage, feuillet, hexMesh)

    return hexMesh

```

2.3.1 Adaptation du squelette

Pour la génération à partir de squelettes courbes, nous avons montré qu'il est souhaitable que la longueur des arêtes du squelette soit corrélée au rayon local du domaine, car la longueur d'un tronçon est la même que celle de l'arête à laquelle il est associé. De cette façon, les tronçons construits sont des hexaèdres proches de cubes avec une longueur d'arête corrélée aux dimensions locales du domaine. De la même façon, il est souhaitable que les quadrilatères composants les feuillets soient de dimension proche de leur distance à la surface. Les palettes sont de même longueur et largeur que leur quad du squelette associé, et leur hauteur est la distance à la surface. Si les quads sont trop larges comparés à la distance à la surface, les palettes seront composés d'éléments trop plats (Figure 2.29 (a)). Si ils sont trop fins, les palettes seront composés d'éléments trop étirés en hauteur (Figure 2.29 (c)). En revanche si les quads ont une longueur et une largeur approximant le rayon local, les hexaèdres des palettes seront proches de cubes (Figure 2.29 (b)).

De plus, l'ajout d'une palette sur un quad du squelette est équivalent à une opération d'extrusion de part et d'autre du quad. Tout sommet irrégulier, de degré différent de 4, dans le feuillet causera la construction de sommets irréguliers dans le maillage volumique (Figure 2.30). En plus de chercher à contrôler la longueur des arêtes du feuillet,

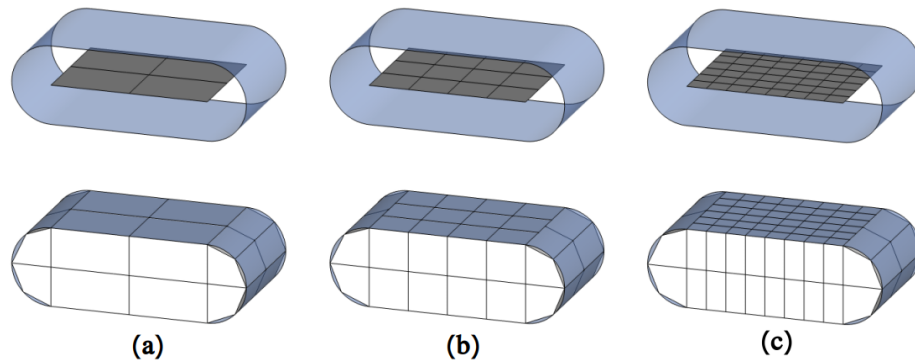


FIGURE 2.29 – En haut : le squelette surfacique, en bas : les palettes et demi-tronçons associés au squelette. (a) Quads plus large que le rayon local, les hexaèdres des palettes sont très aplatis, (b) quads de même largeur que le rayon local, les hexaèdres sont cubiques, (c) quads plus petit que le rayon, les hexaèdres sont trop allongés.

nous allons aussi vouloir contrôler le degré des sommets, en préservant uniquement les sommets du feuillet incidents à d'autres éléments du squelette, tels que les articulations et embranchements.

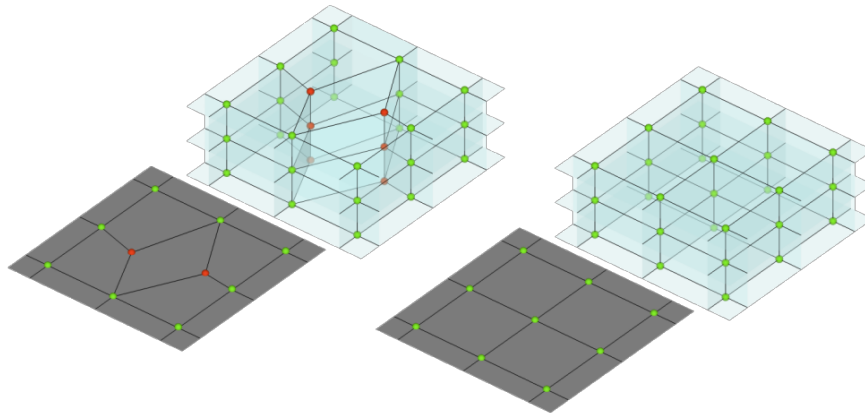


FIGURE 2.30 – Sommets irréguliers en rouge dans le feuillet d'un squelette et dans le maillage hexaédrique produit.

Comme mentionné dans la section 1.3, l'extraction et l'adaptation des squelettes mixtes ne rentraient pas dans le cadre de cette thèse, mais l'état de l'art comprend de nombreuses méthodes de remaillage quad qui pourraient être adaptées pour remplir nos critères de longueur d'arête et de régularité. Les méthodes proposées par [Bommes et al., 2013], [Docampo-Sánchez, 2019] et [Remacle et al., 2012] par exemple, permettent de remailler un maillage quelconque en maillage quad avec un contrôle de la densité de l'échantillonnage (Figure 2.31), et la méthode de régularisation de sommets de [Peng et al., 2011] permet de réduire au maximum le nombre de sommets irréguliers dans un maillage quad.

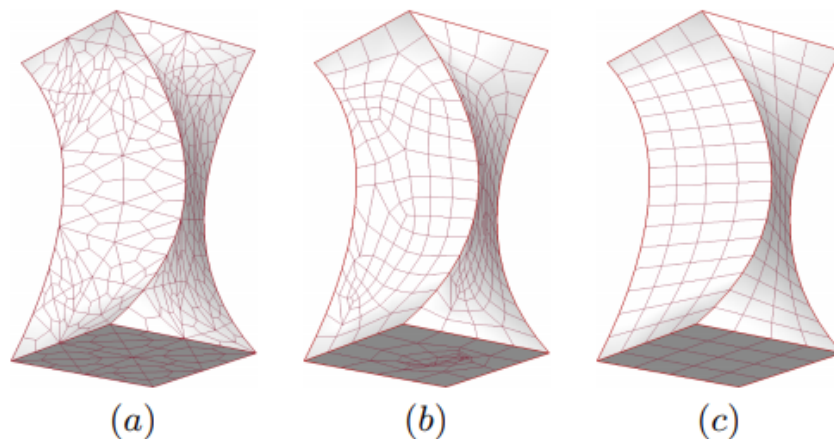


FIGURE 2.31 – Exemple de remaillage par [Docampo-Sánchez, 2019].

2.3.2 Analyse du squelette

De la même façon que pour les squelettes courbes, une étape d'analyse est effectuée pour déterminer la composition du squelette. Nous allons distinguer deux types d'éléments à l'analyse : les éléments courbes et les éléments planaires. Les éléments courbes sont analysés de la même façon que dans l'algorithme précédent, pour déterminer le nombre de branches et embranchements pour déterminer la topologie et les contraintes géométriques dans ces branches. De la même façon, les éléments planaires sont analysés pour dénombrer les feuillets et analyser leur topologie interne ainsi que déterminer la connectivité avec les branches et autres feuillets. Nous définissons un feuillet comme un ensemble de quadrilatères incidents par leurs arêtes. Deux quadrilatères adjacents par un sommet sont considérés comme deux feuillets différents. L'analyse des feuillets va permettre d'identifier les articulations entre différents feuillets, les connexions entre les feuillets et les branches, et les embranchements branches-feuillets (Figure 2.32 (b) et (c)). Ces éléments sont importants pour le traitement de la géométrie et la connexité des hexaèdres.

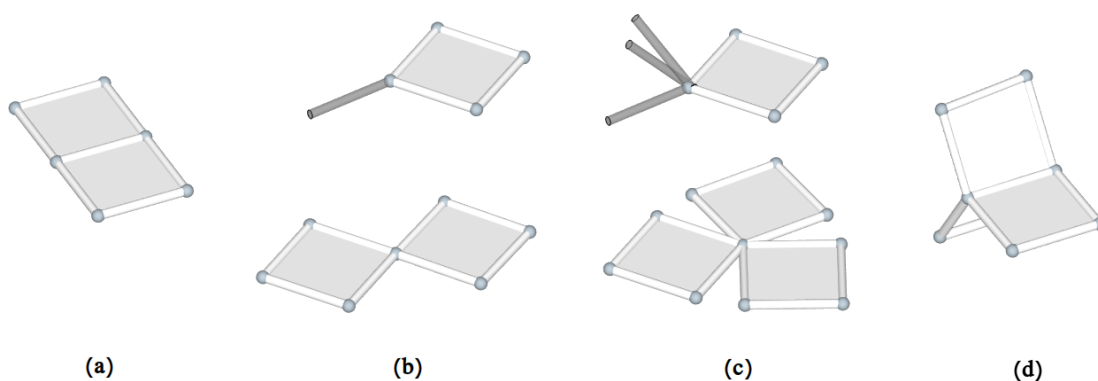


FIGURE 2.32 – (a) quads adjacents par une arête, (b) articulation feuillet-branch et feuillet-feuillet, (c) embranchement feuillet-branches et feuillets-feuillets, (d) quads adjacents par une arête formant un éventail.

Pour caractériser ces éléments à l'analyse, nous définissons un **pseudo-degré** pour les sommets du squelette. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes. Pour un squelette courbe, les arêtes incidentes à un sommet sont les branches incidentes. Nous définissons le pseudo-degré d'un sommet comme le nombre de branches et de feuillets incidents à ce sommet. Par exemple la figure 2.32 (b) présente des sommets de pseudo-degré 2 formant des articulations, et la figure 2.32 (c) présentent des sommets de pseudo-degré 3 (en bas) et 4 (en haut) formant des embranchements.

Au sein des feuillets, nous analysons comment ils sont composés, par exemple si un feuillet n'est composé que d'une surface, ou de plusieurs surfaces connectées via leurs bord par des arêtes charnières formant un éventail (Figure 2.32 (d)), ou si des éléments incompatibles avec notre structure sont présents. Pour être compatible avec notre structure de tronçons et de palettes, les feuillets doivent être composés des éléments présentés dans la Figure 2.32. Si le feuillet peut être représenté grossièrement par une composition de ces éléments il pourra être traité directement par notre structure.

Algorithme 2.8 – Analyse du squelette

```

analyseSquelette(squel):
    branches = listeBranches()
    feuillets = listeFeuillets()
    foreach arete ar of squel:
        if !marquee(ar) && nbFacesIncidentes(ar) == 0:
            branche = trouverBranche(ar)
            marquerBranche(branche)
            branches.ajouter(branche)

    foreach face f of squel:
        if !marquee(f) && nbFacesIncidentes(f) == 0:
            feuillet = trouverFeuille(f)
            marquerFeuille(feuillet)
            feuillets.ajouter(feuillet)

    return {branches, feuillets}

```

2.3.3 Construction de l'échafaudage

Les éléments de structure que nous introduisons pour la construction des éléments surfaciques restent compatibles avec le concept d'échafaudage. La gestion de la connectivité est donc faite de la même façon que pour l'algorithme basé squelette courbe. Un échafaudage quad est construit sur chaque extrémité, articulation et embranchement.

Algorithme 2.9 – Construction de l'échafaudage

```

constructionEchafaudage(squel):
    echafaudage = nouvelEchafaudage()
    /* parallele */
    foreach sommet s of squel:
        switch(pseudoDegre(s)):
            case 1 :
                ajouterQuad(echafaudage, s)
                break
            case 2:
                ajouterDoubleQuad(echafaudage, s)

```



```

if nbFacesIncidentes(s) != 0:
    /* geometrie contrainte par un feuillet */
    r = creerRepere(s, squel, echafaudage)
    fixerGeometrieQuad(s, echafaudage, r)
break
default:
if orthogonal(s):
    ajouterEchafOrtho(echafaudage, s)
else if planaire(s):
    ajouterEchafPlan(echafaudage, s)
else
    ajouterPartitionSphere(echafaudage, s)
return echafaudage

```

Extrémités et Articulations

Les extrémités des branches et les articulations le long des branches, donc les sommets de degré 1 et 2, sont gérées comme précédemment, un quadrilatère sans géométrie est inséré sur chacune.

Deux nouveaux types d'articulations (les sommets de pseudo-degré 2) sont ajoutés par les squelettes mixtes : les articulations connectant un feuillet et une branche (Figure 2.33 (a)), et les articulations connectant deux feuillets (Figure 2.33 (b)). Ces deux types d'articulation sont traités par l'ajout d'un quad double face. Contrairement aux articulations le long des branches, nous disposons d'informations géométriques sur ces types d'articulation. La tangente au sommet et la normale de la face incidente à l'articulation contraignent la position des sommets du quad.

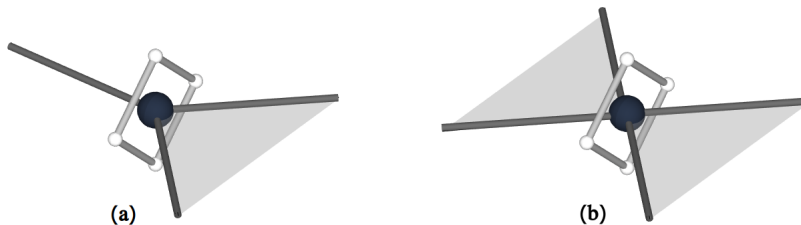


FIGURE 2.33 – (a) Quad double face contraint sur une articulation branche-feuillet, (b) quad double face contraint sur une articulation feuillet-feuillet.

Embranchements

Les embranchements étaient définis précédemment comme un sommet de degré supérieur à 2. Pour cette version de l'algorithme, les embranchements sont redéfinis comme la jonction entre un ensemble de branches et de feuillets (Figure 2.34), soit les sommets de pseudo-degré supérieur à 2.

Les échafaudages des embranchements génériques sont toujours construits par la partition d'une sphère placée sur le sommet. Les données utilisées en entrée de la partition sont les points d'intersection entre les branches et la sphère ainsi que les points d'intersection de la "direction moyenne" des arêtes incidentes des feuillets (Figure 2.35).

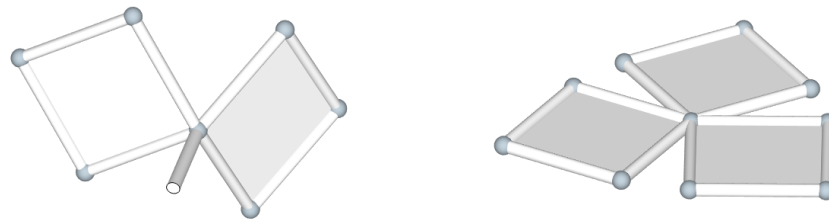


FIGURE 2.34 – Exemples d'embranchements de squelettes mixtes.

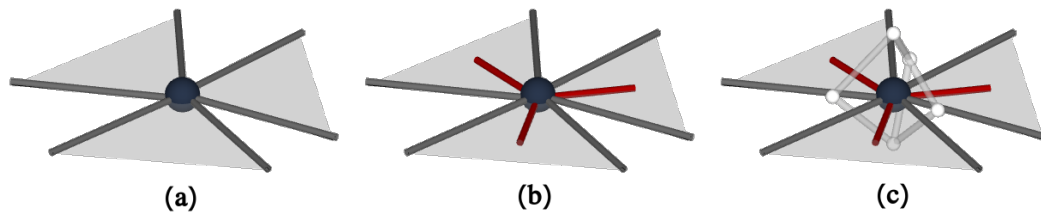


FIGURE 2.35 – Utilisation des directions moyennes (en rouge) pour la construction de l'échafaudage incident à un feuillet.

Le cas particulier des embranchement plats est encore applicable pour les embranchements courbes ainsi que les embranchements branches-feuillets. En revanche, le cas particuliers des embranchements orthogonaux n'est pertinent que pour les embranchements de courbes.

Feuillets

Les échafaudages sont construits sur les articulations des branches, les embranchements, et les connexions avec les feuillets, car ils sont nécessaires pour effectuer un ordonnancement des branches dans l'espace et orienter les connexions. Les feuillets sont composés d'éléments surfaciques, des quadrilatères adjacents les uns aux autres via des arêtes. L'orientation des normales aux faces adjacentes et les arêtes les connectant sont donc une information suffisante pour retrouver la connectivité du maillage hexaédrique. Il n'est donc pas nécessaire de construire d'échafaudage à l'intérieur des feuillets.

2.3.4 Géométrie

Dans le cas des squelettes mixtes, la géométrie est plus contrainte que pour les squelettes courbes. En plus de la surface du domaine et de la géométrie des embranchements, les surfaces des feuillets nous donnent une information géométrique pour la construction du maillage hexaédrique.

Contraintes sur les branches L'échafaudage n'est toujours pas contraint le long des branches ou à leurs extrémités. Sur ces sommets le quadrilatère de connexion est libre. Mais les échafaudages des embranchements et les articulations branche-feuillet sont construits avec une considération géométrique issue des directions des branches et les normales des surfaces incidentes. Des repères orthonormés peuvent être construits sur ces sommets et ensuite propagés sur l'ensemble des branches du squelette par RMF.

Contraintes sur les feuillets Les feuillets sont composés de quadrilatères alignés à la surface du domaine. Pour fixer la géométrie des palettes et des demi-tronçons sur la bordure nous allons utiliser la géométrie des feuillets, principalement les normales aux sommets des feuillets. Pour pouvoir utiliser cette information géométrique, il est nécessaire de calculer les normales aux sommets et les homogénéiser sur l'ensemble de la surface pour qu'elles aient toutes la même orientation (Figure 2.36). L'orientation des normales est utilisée à la construction du maillage hexaédrique pour s'assurer de la bonne connexion des palettes incidentes.

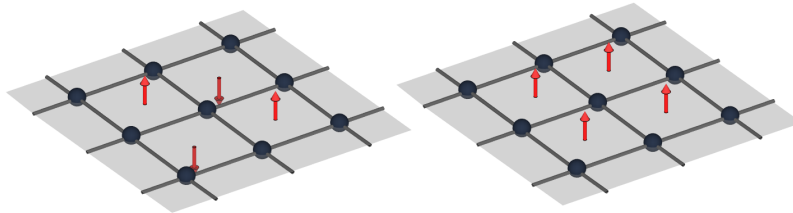


FIGURE 2.36 – Réorientation des normales sur un feuillet.

Algorithme 2.10 – Propagation de la géométrie

```
propagerGeometrie(echafaudage, branches, feuillets):
    /* parallele */
    foreach branche br of branches:
        brancheRMF(br)

    /* parallele */
    foreach feuillet f of feuillets:
        homogeneiserNormales(f)
```

2.3.5 Construction des volumes

Une fois les contraintes géométriques du squelette établies et propagées sur les branches et les feuillets, il est possible de construire les tronçons, palettes, et demi-tronçons composant le maillage hexaédrique et les enregistrer auprès des échafaudages et feuillets du squelette. Une fois tous les éléments construits et associés aux structures contenant les informations de connexion, ils pourront être cousus entre eux pour obtenir la topologie finale du maillage.

Tronçons et palettes

A chaque arête des branches (ou arête incidente à aucune face) est associé un tronçon qui est connecté comme précédemment aux échafaudages de part et d'autre de son arête (Figure 2.24). A chaque arête en bord de feuillet (ou arête incidente à une seule face) est associé un demi-tronçon. Il est associé à son arête du squelette et, si un des sommets incidents est un embranchement ou une articulation, il est associé à l'échafaudage qui y correspond (Figure 2.37). A chaque quadrilatère du squelette est associée une palette. Celle-ci est connectée aux arêtes du quadrilatère (Figure 2.38).

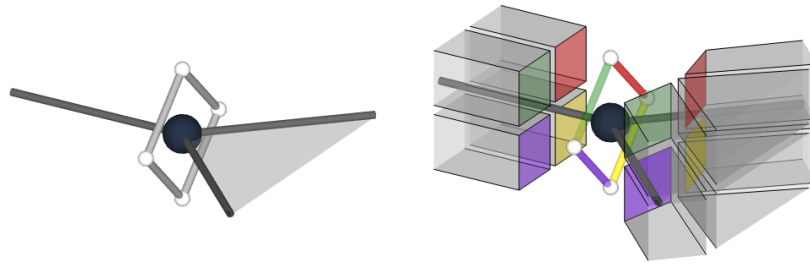


FIGURE 2.37 – Connexion des demi-tronçons autour d'un sommet avec échafaudage.

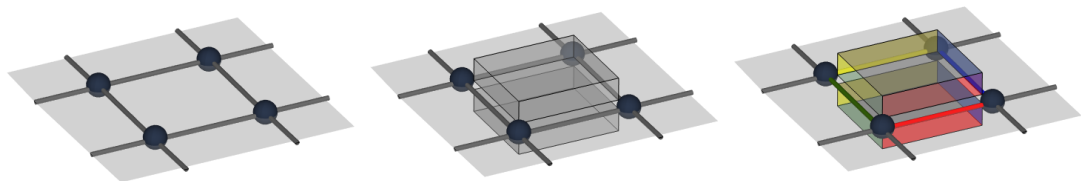


FIGURE 2.38 – Connexion des palettes aux arêtes incidentes à leur face et couture de palettes incidentes.

Algorithme 2.11 – Construction des volumes

```

constructionVolumes(squel, echafaudage, feuillets):
    hexMesh = maillageVolumique()
    /* parallele */
    foreach arete ar of squel:
        if nbFacesIncidentes(ar) == 0:
            /* arete d'une branche */
            troncon = ajouterTroncon(hexMesh)
            quads = trouverQuadsEchafaudage(echafaudage, ar)
            associerTronconEchafaudage(troncon, quads)
        else if nbFacesIncidentes(ar) == 1:
            /* arete du bord d'un feuillet */
            demiTroncon = ajouterDemiTroncon(hexMesh)
            quads = trouverQuadsEchafaudage(echafaudage, ar)
            if quads :
                associerDemiTronconEchafaudage(demiTroncon, quads)
                associerDemiTronconSquelette(demiTroncon, ar)

    /* parallele */
    foreach feuillet f of feuillets:
        palette = ajouterPalette(hexMesh)
        associerPaletteSquelette(palette, f)

    return hexMesh

```

Coutures

Une fois les éléments de constructions hexaédriques placés et enregistrés auprès des échafaudages et des feuillets du squelette, chaque arête des échafaudages est appariée à exactement deux hexaèdres qui peuvent être connectés. De même chaque arête des feuillets (celles incidentes à au moins une face) est entourée par une paire de palettes ou une paire palette et demi-tronçon dont les hexaèdres qui les forment peuvent être cousus deux à deux.

Une fois toutes les coutures effectuées, les informations géométriques portées par les éléments de l'échafaudage et les feuillets peuvent être transférés aux hexaèdres. La géométrie de l'échafaudage est appliquée aux sommets des hexaèdres qui lui sont associés. Pour les sommets des palettes, les sommets au milieu des palettes sont placés sur le sommet du squelette qui leur correspond, et les deux autres sommets sont placés de part et d'autre par une translation de la longueur du rayon le long de la normale au sommet.

Algorithme 2.12 – Couture des volumes

```

coutureVolumes(hexMesh, echafaudage, feuillets):
  /* parallele */
  foreach arete ar of echafaudage:
    hexas = trouverHexasAssocies(ar)
    coudre(hexas)

  /* parallele */
  foreach feuillet feuil of feuillets:
    /* parallele */
    /* couture de la bordure du feuillet */
    foreach sommet s of bord(feuil):
      hexasBord = trouverDemiTronconsAssocies(s)
      coudreBord(hexasBord)

    /* parallele */
    /* couture de l'interieur du feuillet */
    foreach arete ar of feuil:
      hexas = trouverHexasAssocies(ar)
      coudre(hexas)

```

Maillages bruts

Le processus décrit par ces étapes produit un maillage grossier topologiquement homotope au domaine, avec une meilleure gestion des éléments plats qu'avec un squelette courbe (Figure 2.39). Le maillage grossier forme une décomposition du domaine en blocs et peut être raffiné et optimisé pour être exploitable dans un contexte de simulation (Figure 2.40). Les résultats sont montrés en détails dans la section 3.2.

Limites

A cause des contraintes de structure présentées par les tronçons et les palettes, toutes les configurations de topologie ne sont pas possibles à traiter simplement. Certaines configurations de connexion ne sont pas compatibles avec la structure de tronçons. Pour qu'une connexion avec un feuillet soit compatible avec les tronçons d'une branche, elle doit présenter 4 hexaèdres, or par exemple, pour un éventail duquel part une branche,

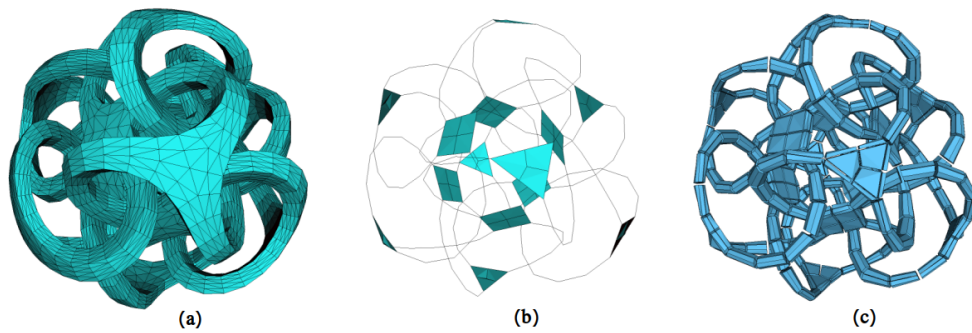


FIGURE 2.39 – Algorithme appliqué au Metatron utilisant un squelette mixte. (a) La surface, (b) le squelette, (c) le maillage brut.

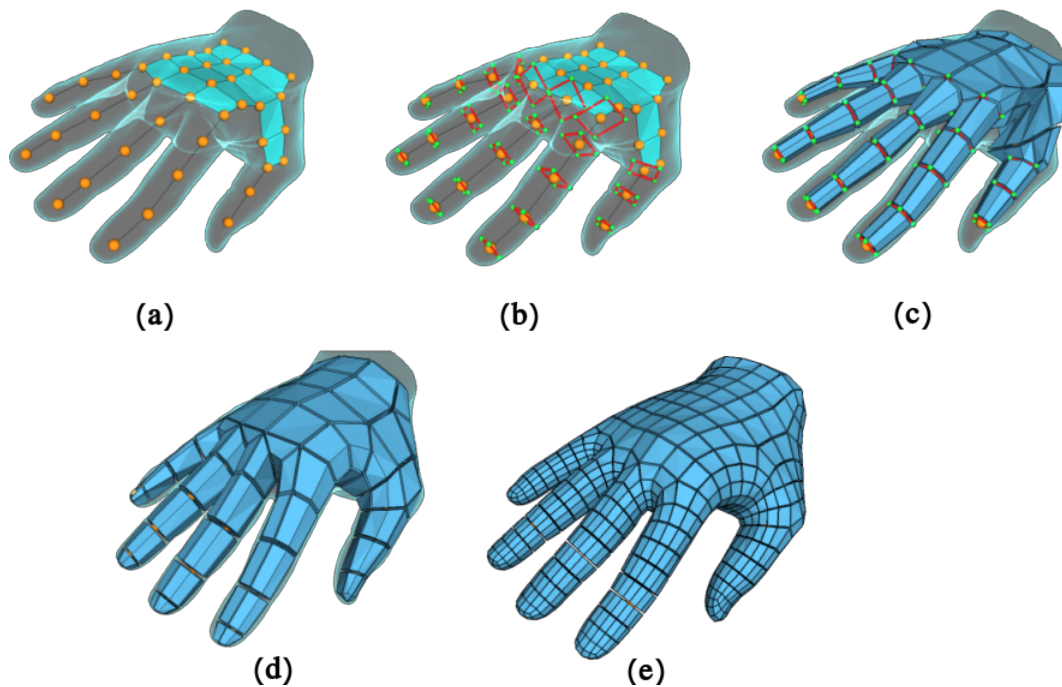


FIGURE 2.40 – Algorithme appliqué à une main utilisant un squelette mixte. (a) Le squelette, (b) construction de l'échafaudage, (c) le maillage brut, (d) optimisation du maillage, (e) maillage final raffiné.

l'interface qui est présentée par les demi-tronçons n'aura pas 4 quads mais $2n$, n étant le nombre de surfaces autour de l'éventail (Figure 2.41).

Hormis ce cas incompatible avec notre structure, plusieurs cas particuliers existent pour lesquels notre structure est compatible mais va requérir des modifications du squelette localement pour pouvoir les construire. Ces cas sont généralement ceux où une charnière est formée sur des arêtes internes d'une surface, ou une articulation est présente sur une surface (Figure 2.42).

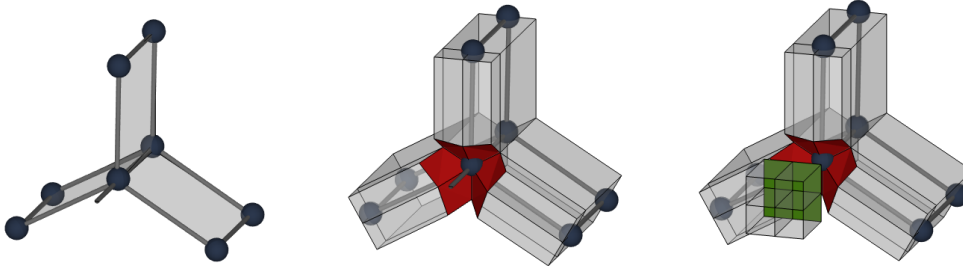


FIGURE 2.41 – Cas particulier incompatible avec notre structure. En rouge l’interface à 6 quads.

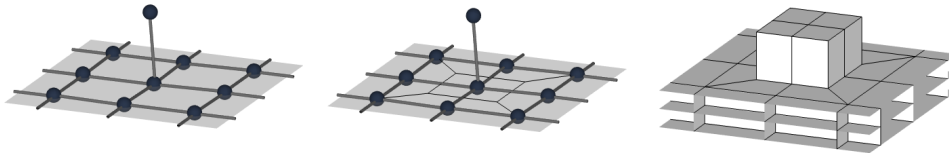


FIGURE 2.42 – Cas particulier compatible avec notre structure si remaillé.

2.4 Géométrie et optimisations

Une fois le maillage hexaédrique brut obtenu, on dispose d’une base topologique et géométrique pour obtenir un support de simulation respectant les critères que l’on avait établis comme désirables. Des opérations topologiques et géométriques vont pouvoir être effectuées pour construire une couche d’hexaèdres continue à la surface, assurer la correspondance à la surface, et ensuite optimiser la géométrie des mailles pour en améliorer la qualité, ainsi que des opérations d’optimisation spécifiques à certains types de simulations.

2.4.1 Subdivision et Optimisation

Le maillage brut, produit par l’algorithme de génération basé squelette est insuffisant pour la majorité des codes de simulation qui requièrent des discrétisations fines. Il nous permet de déterminer la qualité minimum qu’aura le maillage raffiné pour la simulation mais ne contient pas assez d’éléments pour obtenir une bonne précision de calcul sur des écoulements de fluides ou des déformations mécaniques.

Coussinage

La configuration initiale de nos tronçons forme une grille régulière le long des branches, mais chaque hexaèdre des tronçons expose 2 faces à la surface du maillage, 3 pour les extrémités. Cette configuration avec plus d’une face exposée par hexaèdre est problématique pour les optimisations visant à mieux approximer le bord du domaine. Un hexaèdre risque d’être aplati ou inversé, et donc réduire son Jacobien Normalisé à des valeurs négatives

et rendre le maillage inutilisable. Pour préserver l'alignement du maillage avec la surface en compensant ce problème, il est possible d'ajouter une couche continue d'hexaèdres sur la surface du maillage par une opération dite de coussinage. Une épaisseur d'hexaèdres est ajoutée sur toute la surface, correspondant à une opération d'extrusion uniforme de toutes les faces de la surface. De cette façon, on conserve l'alignement des éléments à la surface, en ajoutant un nombre raisonnable de sommets irréguliers : 4 sommets de degrés 3 par tronçon, et tous les hexaèdres du maillage n'exposent plus qu'une face à la surface (Figure 2.43).

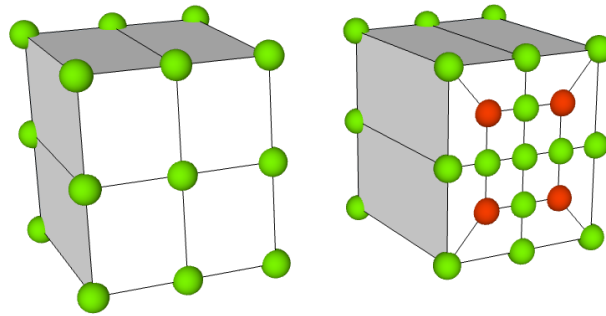


FIGURE 2.43 – A gauche : un tronçon brut, à droite : un tronçon coussiné. En rouge les sommets irréguliers ajoutés par le coussinage.

Placage à la surface

Le maillage brut construit n'est pas complètement adapté à la géométrie du domaine. La seule géométrie prise en compte à la construction est la géométrie des embranchements avec leurs rayons ainsi que la torsion le long des branches. Le maillage n'approxime qu'un épaissement du squelette. Il est donc nécessaire de pouvoir projeter un sommet de la surface du maillage hexaédrique vers la surface du domaine maillé. Cette projection est aussi nécessaire lors des subdivisions du maillage pour conserver la meilleure adaptation possible à la surface. L'opération est effectuée par lancer de rayon sur le maillage triangulaire de la surface du domaine pour chaque sommet extérieur du maillage hexaédrique le long des normales à ces sommets (Figure 2.44).

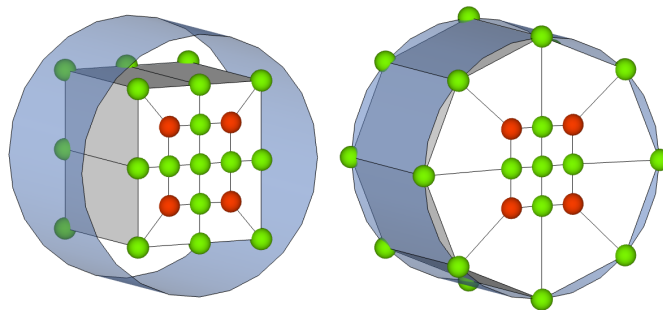


FIGURE 2.44 – Adaptation d'un tronçon à la surface (bleue).

Raffinement géométrique

Un maillage trop grossier ne peut généralement pas représenter correctement la géométrie d'un domaine. Raffiner la topologie initiale est nécessaire pour pouvoir mieux adapter le maillage au domaine et améliorer la forme des mailles par la suite. Le plus simple pour ce faire est d'utiliser un modèle de subdivision régulière telle que Catmull-Clark volumique [Xie et al., 2020]. Ce modèle de subdivision subdivise chaque hexaèdre du maillage en 8 (Figure 2.45). Il préserve la régularité du maillage aux étapes précédentes et ne peut ajouter des sommets irréguliers que sur les arêtes qui ne sont pas incidentes à exactement 4 hexaèdres. L'intérieur de chaque hexaèdre est subdivisé itérativement en une grille régulière. Minimiser le nombre d'hexaèdres initiaux minimise donc le nombre d'irrégularités qui seront insérées lors du raffinement.

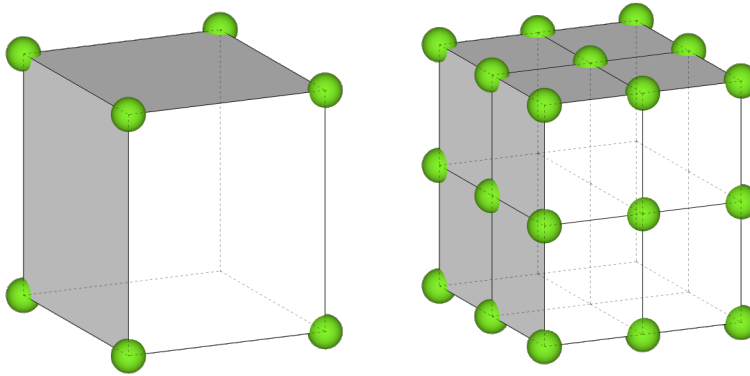


FIGURE 2.45 – Subdivision Catmull-Clark appliquée à un hexaèdre.

Ce type de subdivision a aussi pour propriété de lisser la qualité des mailles. Lorsqu'un hexaèdre est divisé, chaque hexaèdre résultant est de qualité supérieure ou égale à la qualité d'origine. La subdivision d'une grille régulière avec des mailles de bonne qualité n'aura donc pas nécessairement besoin d'un post traitement pour optimiser la forme des mailles et améliorer leur qualité.

Optimisation de forme

Pour être exploitable pour la simulation, les hexaèdres composant le maillage doivent être le plus proche possible d'un pavé droit. Plus la forme d'une maille dévie de celle d'un pavé droit, plus la précision de la simulation sera réduite. Lors de la construction du maillage brut, le placement géométrique est approximatif, il est possible que certains hexaèdres soient concaves, ou que deux branches voisines s'auto-intersectent. Ces défauts causés par l'approximation géométrique initiale peuvent être corrigés par optimisation du maillage. Il est nécessaire de pouvoir altérer la forme des mailles tout en préservant la correspondance à la surface, sans toucher à la connectivité du maillage. De nombreuses méthodes ont été proposées dans ce but, généralement basées sur la résolution de systèmes pour modifier les angles autour des sommets [Livesu et al., 2015, Huang et al., 2022, Marschner et al., 2020, Wang et al., 2021].

[Livesu et al., 2015] propose une méthode d'optimisation appelé Rectification de cône d'arête. Cette méthode permet l'amélioration de la forme des mailles, en s'adaptant à la surface du maillage et sans modifier la connectivité. Elle respecte donc nos objectifs pour l'optimisation de nos maillages. Cette méthode fait partie des méthodes dites "local-global" dans lesquelles on alterne le calcul de configurations optimales localement pour un ensemble de sous-maillages, avec la résolution d'un système global au sein duquel on essaie de respecter au maximum les objectifs locaux que l'on vient de calculer.

L'étape locale consiste ici à calculer la direction unité n_e et la longueur L_e idéales pour chaque arête orientée e du maillage. Pour chacune de ces arêtes orientées, la direction cible est calculée comme la moyenne des normales des faces qui forment la base du cône construit autour de cette arête orientée (Figure 2.46). Ce calcul peut également être adapté pour les arêtes du bord du maillage. La longueur cible de chaque arête peut soit être donnée par l'environnement applicatif (simulation), soit calculée en essayant par exemple d'homogénéiser les longueurs localement à partir des longueurs des arêtes voisines topologiquement "parallèles".

L'étape globale consiste à minimiser l'énergie quadratique suivante :

$$E = \sum_e (e/L_e - n_e)^2 + \sum_{v_b} w_b \|(v_b - \pi(v_b))\|^2$$

Le premier terme exprime l'alignement de chaque arête orientée e de longueur L_e avec la direction n_e . Afin de conserver une bonne approximation de la surface du domaine, chaque sommet du bord du maillage v_b se voit également ajouter une contrainte supplémentaire pondérée (de poids w_b) ayant pour objectif de positionner ce sommet sur son projeté sur la surface du domaine $\pi(v_b)$.

Ces deux étapes sont répétées itérativement jusqu'à convergence pour obtenir un maillage dont les hexaèdres sont de la meilleure qualité possible et dont la géométrie du bord est adaptée à celle du domaine.

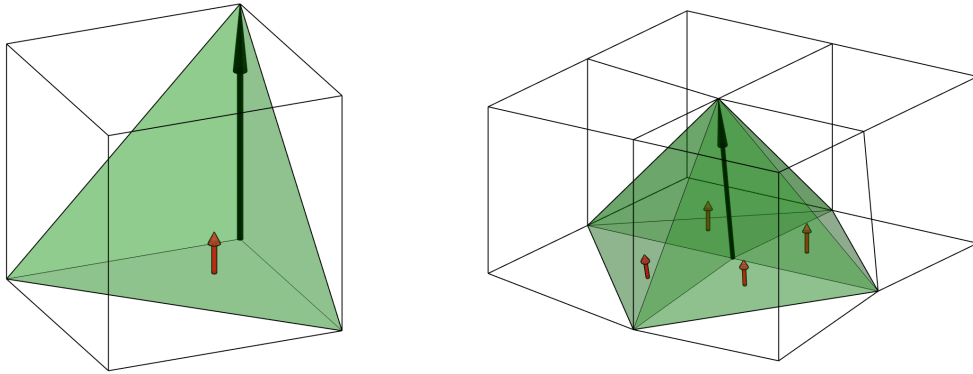


FIGURE 2.46 – A gauche : le tétraèdre formé par le coin d'un hexaèdre en vert et l'arête orientée en noir avec la normale de sa base en rouge. A droite : le cône formé par les tétraèdres autour d'une arête orientée et ses normales.

En combinant ces méthodes de raffinement et d'optimisation sur de multiples itérations, nous obtenons généralement des maillages de bonne qualité moyenne, réguliers par morceaux, avec un nombre de cellules suffisant pour être exploité pour la simulation. Ces méthodes sont génériques et applicables à tous les maillages hexaédriques et

ne sont pas spécifiques aux maillages produits par notre méthode. Par construction, nos maillages présentent certaines caractéristiques topologiques et géométriques connues, tels que l'alignement à la surface et la structure interne de la tranche. Ces caractéristiques peuvent être explicitement ciblées pour des optimisations spécialisées, comme décrit dans la section 2.4.2.

2.4.2 Optimisations spécialisées

En fonction du domaine applicatif visé, tel que la simulation de fluide, et selon les programmes utilisés, les critères géométriques et topologiques pour le maillage vont varier. Différents ratios sur les dimensions d'un hexaèdre peuvent être acceptables, par exemple, des hexaèdres très allongés et fins, mais aussi des variations de tailles d'éléments plus ou moins élevées au sein du maillage ou des éléments géométriquement hexaédriques mais pas topologiquement.

Notre construction par tronçons et palettes génériques sur l'ensemble du squelette nous donne une connaissance a priori de la structure interne de notre maillage. Cette connaissance a priori est préservée lors de l'utilisation d'opérations de raffinement régulières sur l'ensemble du maillage. Nous allons pouvoir exploiter cette connaissance pour optimiser les propriétés de nos maillages en vue de simulation. La structure de tronçons formera après raffinement une forme cylindrique avec des tranches alignées à la direction des branches composées de couches concentriques d'hexaèdres. La structure de palettes quant à elle produira des strates superposées alignées à la surface du feuillet.

Détection des orientations

Pour effectuer des optimisations spécifiques basées sur l'alignement et la distance au bord, il nous suffit d'avoir une information de direction de branche et une notion de numéro de couche d'hexaèdres dans la tranche. Les informations de direction et de profondeur vont nous permettre d'implémenter des algorithmes de raffinement spécialisés pour la structure de nos maillages. L'information de profondeur dans un tronçon ou une palette permet d'envisager un contrôle de l'épaisseur des couches concentriques d'hexaèdres en fonction de la distance au bord. Le long d'une branche, les tronçons successifs forment des fibres d'hexaèdres alignés avec la direction de la branche. L'information de direction de ces fibres permet d'utiliser des opérateurs de subdivision spécialisés pour contrôler l'épaisseur de ces fibres ou la longueur des tronçons dans le sens de la fibre.

Il est possible de générer ces informations de direction et de profondeur à la construction ou dans certains cas de les retrouver grâce aux suppositions que nous pouvons faire sur la structure.

À la construction, nos tronçons ont naturellement un alignement avec le squelette, les quatre hexaèdres sont connectés aux échafaudages par leurs sommets communs de part et d'autre du tronçon. Nous savons donc que l'arête reliant ces deux sommets est une fibre alignée avec le squelette et qu'elle est la fibre au centre de la branche. La solution choisie pour décrire l'orientation du maillage est un simple marquage binaire sur les arêtes indiquant si l'arête est oui ou non une fibre alignée avec la branche. En ajoutant à ce marquage un indice de profondeur, pour la fibre centrale en incrémentant vers la surface, nous pouvons enregistrer la profondeur de la fibre. Lors de la construction d'un tronçon nous pouvons immédiatement marquer l'arête centrale comme une fibre, en lui

attribuant le niveau 0, et ensuite propager le marquage de fibre à ses 8 arêtes parallèles en leur attribuant le niveau 1 (Figure 2.47). Pour les palettes, l'information de direction de fibre n'a pas de sens donc seule la profondeur est marquée. Les demi tronçons qui forment la bordure des feuillets en revanche ont une direction alignée avec le bord du domaine et peuvent recevoir un marquage de fibre.

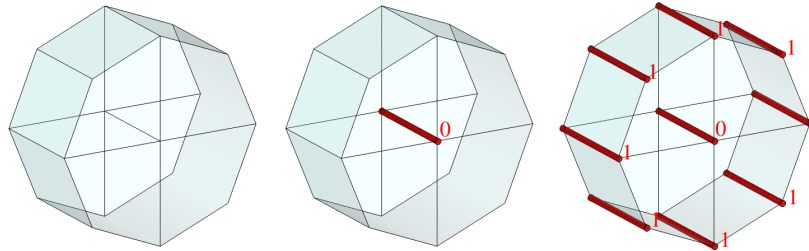


FIGURE 2.47 – Marquage des fibres et niveaux dans un tronçon.

Marquer les directions et la profondeur à la construction, marquage préservé lors des raffinements et adaptations, est la méthode la plus efficace, mais ce marquage n'est pas nécessairement conservé par les formats de fichiers qui peuvent être utilisés pour sauvegarder le maillage. Dans le cas des maillages issus de squelettes courbes l'information peut être retrouvée. Du fait que les opérations de raffinement que nous utilisons préservent une structure de tranches perpendiculaires à la branche composées de couches concentriques nous pouvons reconstruire les données d'orientation et de profondeur. Nous avons élaboré un algorithme pour le faire qui requiert une arête de la surface du maillage le long d'une branche donnée par l'utilisateur. A partir d'une arête en surface correctement orientée dans le sens de la fibre nous pouvons propager la direction à toutes les arêtes parallèles en surface du même tronçon. Ces arêtes parallèles à la fibre forment un anneau sur la surface du tronçon (Figure 2.48). Par inondation, nous pouvons propager cet anneau le long de toutes les branches du maillage. Chaque arête marquée comme fibre de l'anneau en cours vérifie que les arêtes parallèles des anneaux incidents sont marquées elles aussi. Si ce n'est pas le cas, elles sont marquées comme fibre et toutes les arêtes parallèles de l'anneau sont marquées elles aussi. Cette redondance dans l'inondation permet d'assurer la propagation à travers les embranchements complexes de tous types.

Le cas particulier des intersections orthogonales est contourné par la propagation des anneaux.

Dans un embranchement orthogonal, la notion de fibre n'existe pas dans les hexaèdres qui composent le noyau de l'embranchement. Il n'y a pas de direction privilégiée au sein de l'embranchement. Cependant, l'inondation en surface permet de les contourner et atteindre les autres branches incidentes à l'embranchement.

Cette première propagation en surface nous permet de récupérer la liste de tous les anneaux sur l'intégralité du maillage, à partir de là nous pouvons ajouter l'information de profondeur en descendant vers le centre depuis la surface, d'arête parallèle en arête parallèle, couche par couche (Figure 2.49). Nous pouvons traiter les embranchements orthogonaux en récupérant tous les hexaèdres ne contenant pas d'arête avec un marquage de fibre. A nouveau, en descendant couche par couche depuis la surface, nous pouvons marquer toutes les arêtes parallèles à la surface avec leur profondeur.

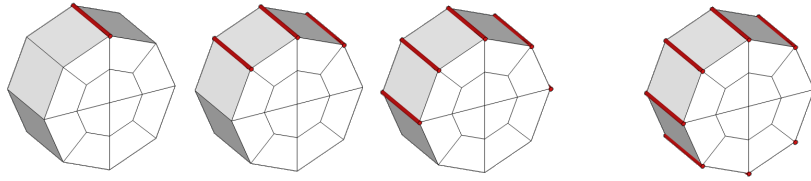


FIGURE 2.48 – Propagation des informations de fibres sur l'anneau en surface.

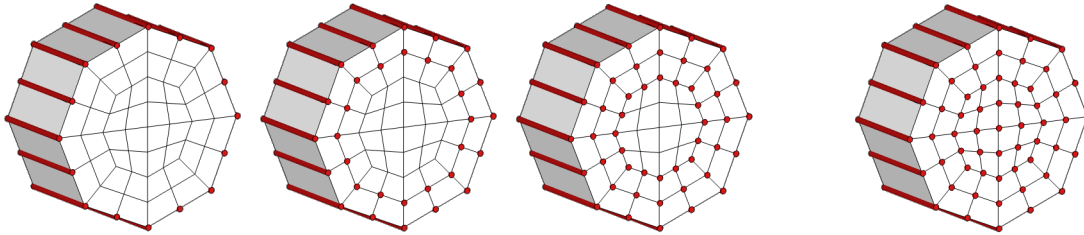


FIGURE 2.49 – Propagation en profondeur des marquages.

Opérations

Subdivision en fibre Les algorithmes de simulation de fluides qui nous ont été présentés ont une tolérance pour des hexaèdres très allongés dans le sens du flux, avec des ratios entre la longueur et la largeur des hexaèdres pouvant atteindre des ratios de 1 : 5 à 1 : 1000. Avec le marquage de fibre des arêtes le long des branches, il nous est possible d'effectuer des subdivisions dans le sens de la fibre sur l'intégralité du maillage en coupant les hexaèdres en 4 dans la direction de la branche (Figure 2.50). Cette subdivision est compatible avec les interfaces utilisées pour gérer les embranchements complexes (Figure 2.51 (a)). Seuls les hexaèdres à l'intersection de plusieurs fibres tels que les embranchements orthogonaux ne peuvent pas être subdivisés ainsi, et devront être découpés en 8 pour rester compatibles avec la subdivision le long des branches (Figure 2.51 (b)). Il en va de même pour les palettes, les bords sont subdivisés dans le sens de la fibre, mais les palettes qui n'ont pas d'orientation sont scindées en deux pour rester compatible avec le bord (Figure 2.53).

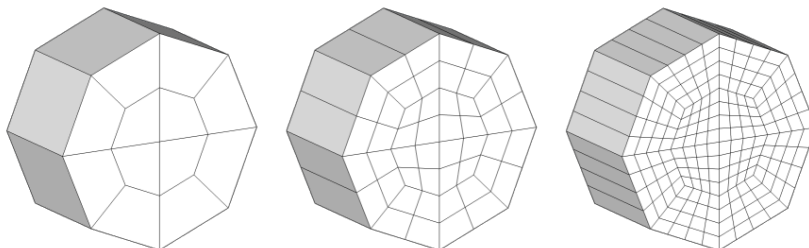


FIGURE 2.50 – Subdivision d'un tronçon en fibres.

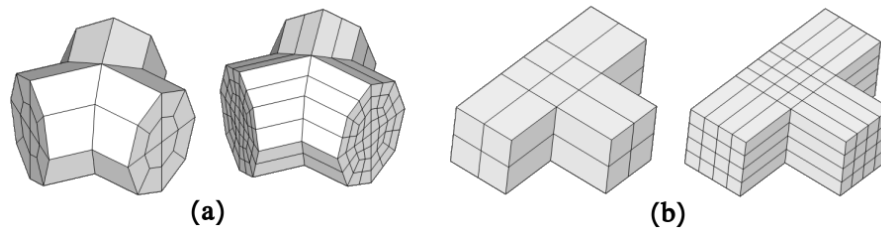


FIGURE 2.51 – Subdivision en fibres. (a) sur un embranchement complexe, (b) sur un embranchement orthogonal.

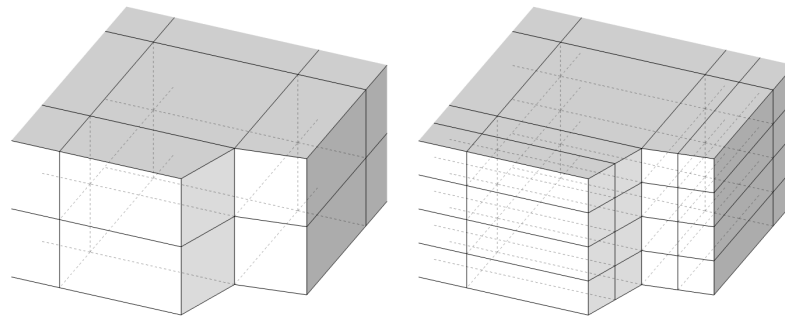


FIGURE 2.52 – Subdivision en fibres sur une palette et son bord.

Longueur des fibres En plus de permettre une subdivision longitudinale dans les branches, le marquage d'orientation nous permet d'effectuer des subdivisions transversales à la branche. Un tronçon peut être bisecté dans le sens de la longueur. Les modifications de cette subdivision sont locales, nous donnant la possibilité de contrôler la longueur des fibres le long des branches manuellement ou à l'aide d'un paramètre sur le maillage (Figure 2.53).

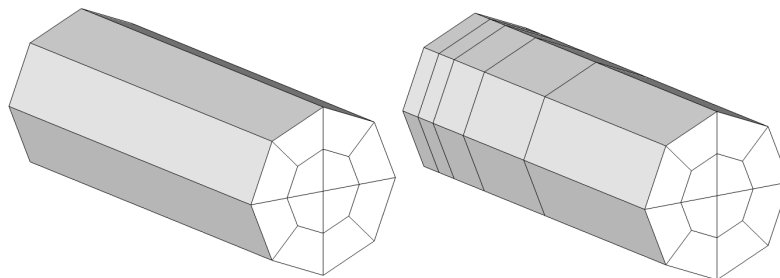


FIGURE 2.53 – Découpe d'un tronçon dans le sens de la longueur.

Contrôle de l'épaisseur des couches Pour certains codes de simulation, il n'est pas nécessaire que la taille des hexaèdres soit homogène dans le maillage. Par exemple, une discrétisation plus fine le long des bords où peuvent apparaître des effets de turbulences

est souhaitable, contre des mailles plus grossières loin des bords pour réduire la quantité de calculs [Decroocq et al., 2022]. Le marqueur de profondeur donne la possibilité de contrôler l'épaisseur des couches en fonction de la distance au bord. Il permet de détecter la direction radiale au sein du maillage, trouver la profondeur d'un sommet dans un tronçon ou une palette, et le déplacer en fonction de cette profondeur. Nous pouvons donc choisir de modifier la longueur des arêtes entre les couches en fonction de leur profondeur et du rayon avec des fonctions d'interpolation non linéaires (Figure 2.54).

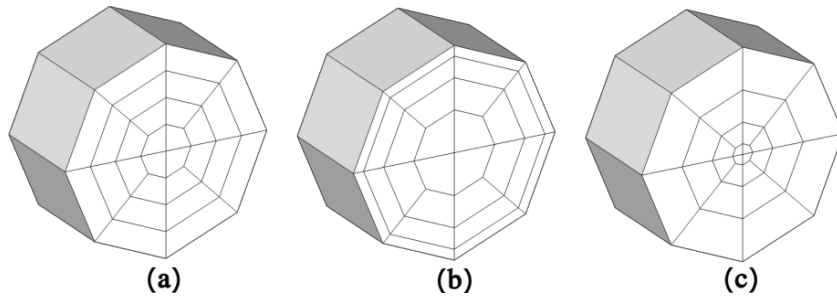


FIGURE 2.54 – Contrôle de l'épaisseur des couches en fonction de la profondeur des mailles.

Subdivision non conforme Pour le moment, nous avons produit et utilisé exclusivement des maillages conformes, où la topologie et la géométrie de nos mailles sont des hexaèdres. Certains codes de simulation peuvent utiliser des maillages non conformes, avec des éléments géométriquement hexaédriques mais pas topologiquement. Donc un hexaèdre dont les faces ne sont pas un, mais potentiellement plusieurs quadrilatères (Figure 2.55).

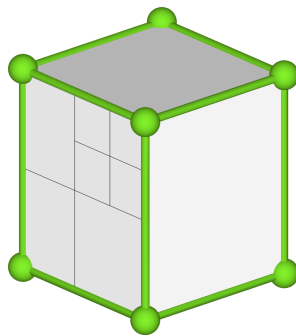


FIGURE 2.55 – Hexaèdre non conforme.

Ce type de maillage ouvre la porte à des raffinements locaux sur les branches. Le sujet n'a pas été exploré en profondeur, mais des optimisations locales le long d'une branche (Figure 2.56 (a)) ou entre les couches d'un tronçon ou d'une palette (Figure 2.56 (b)) sont envisageables.

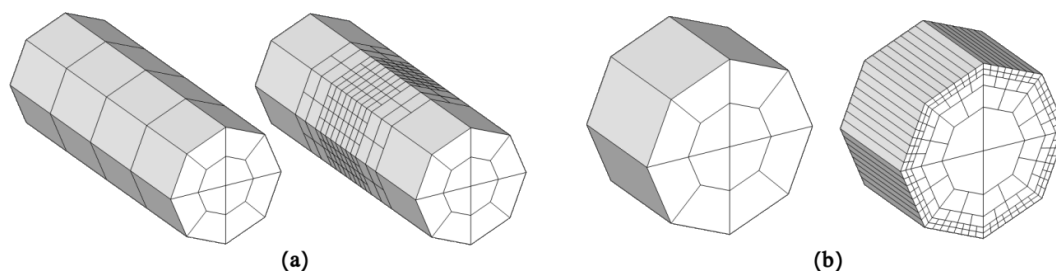


FIGURE 2.56 – Maillages non conformes. (a) Adaptation dans le sens de la longueur d’une branche, (b) adaptation dans la profondeur de la branche.

2.5 Propriétés des algorithmes

Nous avons établi plusieurs critères de qualité pour ce qui constitue un maillage hexaédrique convenable pour la simulation. Le maillage hexaédrique doit être le plus régulier possible, donc maximiser les sommets internes de degré 6 et les sommets en surface de degré 5. Il doit être composé de couches alignées à la surface du domaine, et maximiser le Jacobien Normalisé des hexaèdres en minimisant le nombre d’hexaèdres. Les algorithmes que nous proposons ici sont conçus pour remplir ces critères au mieux. Nous récapitulons ici ces critères et comment ils sont pris en compte dans les algorithmes. Ensuite nous discuterons les limitations actuelles et les pistes potentiellement importantes ou envisageables.

Nature des mailles Les maillages résultants de ces algorithmes sont garantis purement hexaédriques car leur construction est effectuée uniquement à l’aide d’éléments hexaédriques connectés entre eux. Aucun élément d’une nature autre n’est ajouté et aucune modification topologique des tronçons et palettes utilisés pour la construction n’est effectuée.

Régularité Comme nous l’avons montré, nos structures de tronçons et de palettes offrent la possibilité de décomposer le domaine en un ensemble de blocs simples connectés entre eux. Ces blocs sont individuellement divisibles en grilles régulières, et peuvent collectivement former une grille régulière sous certaines conditions, tel que le long d’une branche, ou sur un feuillet quadrilatère régulier.

Dans le maillage brut issu du pipeline, les sommets irréguliers sont concentrés sur les embranchements complexes (Figure 2.57 (a)) et les sommets irréguliers des feuillets du squelette (Figure 2.57 (c)). Les embranchements complexes contiennent 1 sommet irrégulier au centre, et 1 sommet irrégulier en surface par sommet de l’échafaudage de degré différent de 4. L’assemblage des palettes et demi-tronçons présente 3 sommets irréguliers par sommet irrégulier du feuillet et par articulation.

Le premier coussinage pour éviter d’exposer plus d’une face par hexaèdre à la surface ajoute inévitablement un certain nombre de sommets irréguliers. Chaque sommet du squelette courbe ajoute 4 sommets irréguliers (Figure 2.57 (b)), chaque sommet de la bordure d’un feuillet en ajoute 2, et chaque sommet irrégulier du feuillet en ajoute 2. Les coussinages suivants n’ajouteront des sommets irréguliers que pour les sommets irréguliers du squelette des feuillets. Le nombre de sommets irréguliers et leurs positions sont donc

contrôlables dans une certaine mesure.

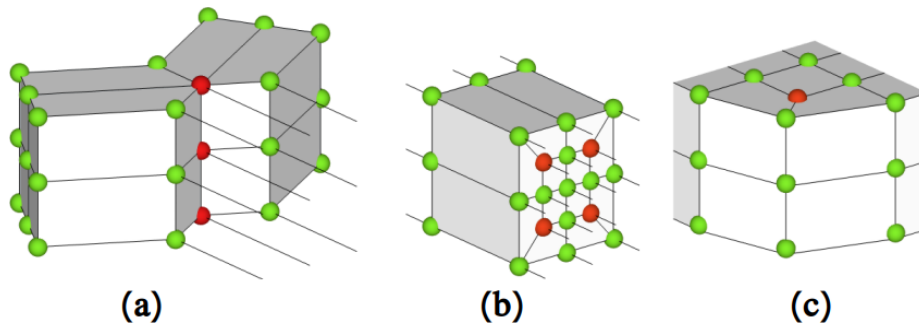


FIGURE 2.57 – Sommets irréguliers en rouge dans le maillage. (a) Embranchement entouré par trois tronçons, (b) tronçon après coussinage, (c) palettes et demi-tronçons sur un sommet de degré 2 d'un feuillet.

Qualité La qualité individuelle des hexaèdres, mesurée par le Jacobien Normalisé, est principalement affectée par la régularité du maillage. Les hexaèdres incidents à un sommet irrégulier ne pourront pas être tous optimisés pour avoir uniquement des coins orthogonaux. Cependant, ayant limité au maximum le nombre de sommets irréguliers, et ayant principalement des sommets irréguliers de valence 5 au lieu de 6 dû au coussinage, la qualité reste raisonnablement optimisable pour la plupart des sommets. Seuls les sommets irréguliers au centre des embranchements vont avoir des degrés potentiellement très élevés, réduisant la qualité des hexaèdres directement incidents. Nous trouverons les hexaèdres de moins bonne qualité concentrés sur les embranchements. Après les opérations de raffinement et d'optimisation nécessaires pour que le maillage soit exploitable pour la simulation, ces hexaèdres de moins bonne qualité seront concentrés loin de la surface où ils causeront moins de problèmes de précisions pour la simulation.

Alignement à la surface L'alignement à la surface du maillage hexaédrique découle naturellement de l'utilisation du squelette comme support. Les éléments courbes des squelettes suivent l'axe principal des éléments tubulaires, les tronçons construits alignés avec le squelette sont donc directement alignés avec la surface. De même, les feuillets sont parallèles à la surface des éléments plats du domaine, les palettes sont construites parallèles à la feuille et sont par extension parallèles à la surface. Les opérations de coussinage et de subdivision n'affectent pas l'alignement des hexaèdres à la surface. Notre méthode produit donc des maillages hexaédriques toujours alignés avec la surface du domaine.

Algorithme déterministe En plus de respecter les critères requis pour les applications de simulation, notre méthode dispose de propriétés intéressantes pour les optimisations du pipeline. L'algorithme est complètement déterministe après l'analyse. A partir de l'analyse du squelette, il est possible de déterminer précisément le nombre d'hexaèdres dans le maillage final en fonction du nombre d'arêtes et de faces du squelette. Il est donc possible de prévoir des amortissements en mémoire dès la première étape du pipeline.

De plus, chaque décision sur la connectivité du maillage est prise localement autour des sommets du squelette et des feuilletts. Il n'a aucun effet de bord pour la création des échafaudages, la construction des tronçons et palettes, ou la propagation de la géométrie au sein des branches ou des feuilletts. La parallélisation du pipeline est donc aisément envisageable. La construction du domaine par des éléments génériques nous paraît aussi un point important, puisqu'il nous permet une connaissance a priori de la structure du maillage et donc la possibilité d'effectuer des optimisations spécifiques à la structure.

Limitations Malgré les points positifs expliqués précédemment, notre méthode est limitée. Elle a fait ses preuves sur des domaines dont les squelettes sont simples et représentatifs de la surface, mais elle reste très sensible à la qualité du squelette et restreinte dans le type de domaines qu'elle peut traiter.

En terme de sensibilité à la qualité du squelette, deux cas de figures peuvent se présenter. Au sein d'un feuillet la régularité de la surface du squelette a un impact sur la régularité du maillage hexaédrique à cause de la façon de produire et connecter nos palettes. Un sommet irrégulier dans le maillage quadrangulaire du squelette cause l'apparition de sommets irréguliers dans le maillage hexaédrique (Figure 2.30). L'algorithme d'adaptation utilisé pour les éléments surfaciques du squelette va donc avoir un impact potentiellement conséquent sur le maillage hexaédrique final.

De même, si la surface est détaillée avec des aspérités et des protubérances, il est possible que le squelette contienne des détails superflus (Figure 2.58). Si ces détails ne sont pas éliminés correctement, ils peuvent être interprétés comme des embranchements supplémentaires et causer la construction de tronçons comprimés ou distordus dans le maillage brut alors que ce genre d'aspérité pourrait être éliminé à la phase de raffinement et d'optimisation du maillage.

Pour finir, avec l'extension aux squelettes mixtes, il apparaît des configurations incompatibles avec notre structure de tronçons et palettes connectés via un échafaudage. Comme vu précédemment certaines configurations de surfaces non variétés pourraient être gérées avec des modifications locales des quadrangles du squelette, pour émuler la méthode utilisée pour les embranchements orthogonaux. Cependant certaines ne peuvent pas être adaptées par de simples modifications topologiques, telles qu'une branche quittant un éventail de feuilles. L'interface produite par l'éventail, les demi tronçons de bords de chaque feuille, peuvent être en nombre impair et donc au lieu de présenter $4n$ hexaédres à la surface de connexion, peuvent présenter un nombre impair de demi tronçons (Figure 2.41) et donc ne pas être connectables à la surface quadrilatère. Sans développer de nouvelles méthodes d'interfacage, il ne sera pas possible de les traiter.

Notre méthode reste limitée dans le type de domaine qu'elle peut correctement traiter, étant restreinte aux domaines composés d'éléments tubulaires et plats. Certaines configurations ne sont pas encore prises en compte, mais peuvent être envisagées avec des modifications mineures, d'autres en revanche nécessiteraient des modifications significatives qui pourraient être faites au détriment de l'optimisation du pipeline. Le résultat est aussi très dépendant de la qualité du squelette extrait. L'extraction d'un squelette mixte et le remaillage quadrilatère n'étant pas des problèmes triviaux, un travail peut encore être fait pour améliorer cette partie du pipeline.

La méthode que nous proposons pour la génération de maillages hexaédriques à partir de squelettes respecte les conditions que nous avons établies pour un maillage exploité pour la simulation. La structure est alignée à la surface et les irrégularités des sommets

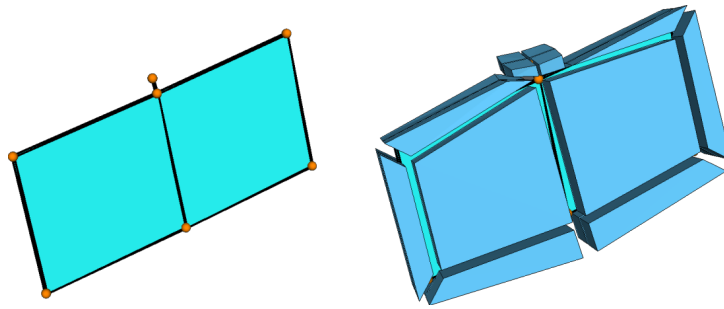


FIGURE 2.58 – Exemple de squelette avec des détails inutiles réduisant la qualité.

sont minimisées permettant d’optimiser au mieux la forme des mailles. En plus de respecter ces critères, le processus est hautement parallélisable, offrant la possibilité d’une implémentation efficace du pipeline. De plus, notre méthode corrige les éléments identifiés comme problématiques dans la méthode proposée par [Livesu et al., 2016], car toutes les décisions sont prises localement, sans résolution de système global, et ne sont donc pas affectées par la présence de cycles.

2.6 Partition de Sphère

Pour la gestion des embranchements complexes nous avons choisi de construire un échafaudage quadrilatère. Cet échafaudage est construit par la partition de la surface d’une sphère en quadrilatères, préférablement convexes, contenant chacun un point de l’ensemble de points à sa surface correspondant aux branches incidentes à l’embranchement. La position de ces points est fixe. Le besoin d’une surface composée de quadrilatères est fixé par la structure de nos tronçons.

La formule d’Euler appliquée à une surface de genre 0, homotope a une sphère, nous garantit l’existence d’une telle surface composée de quadrilatères et ce quelque soit le nombre de quadrilatères : $v - e + f = 2$, v étant le nombre de sommets, e le nombre d’arêtes, et f le nombre de faces. Chaque arête étant partagée par 2 faces et chaque face étant entourée de 4 arêtes, nous avons $e = 2f$ et donc $v = 2f - f + 2$ qui a une solution pour toute valeur de f . Nous savons donc qu’il existe toujours une surface quad correspondant à nos besoins, mais il est difficile de définir si celle-ci sera optimale. Après avoir initialement testé la méthode de partition de sphère [Panotopoulou et al., 2018] présentée dans l’état de l’art et constaté qu’elle ne remplissait pas optimalement nos besoins, nous avons élaboré notre propre méthode de partition de sphère qui a été utilisée dans notre pipeline. Une alternative proposée par [Peltier et al., 2021] à notre méthode a été publiée simultanément à la notre et s’avère aussi prometteuse pour obtenir des échafaudages de bonne qualité. Nous commençons par expliquer notre méthode, puis la méthode proposée par [Peltier et al., 2021], et finalement les perspectives pour la partition de sphère qui pourraient mener à de meilleurs résultats.

2.6.1 Partition par remaillage

Le fait qu’une sphère puisse être divisée en un nombre n de quadrilatères implique qu’il existe un maillage dual à cette partition composé de n sommets de degré 4. Notre premier

objectif est donc de produire un maillage dont les sommets sont les points d'entrées (Figure 2.59 (a)) et tous de degré 4, le maillage primal. Le dual de ce maillage sera une partition de la sphère composée exclusivement de quadrilatères, avec chaque face contenant son propre point d'entrée (Figure 2.59 (e)). Pour construire ce maillage initial, nous commençons par construire la triangulation de Delaunay des points sur la sphère (Figure 2.59 (b)) que nous remaillons (Figure 2.59 (c)) avant d'en produire le dual (Figure 2.59 (d)).

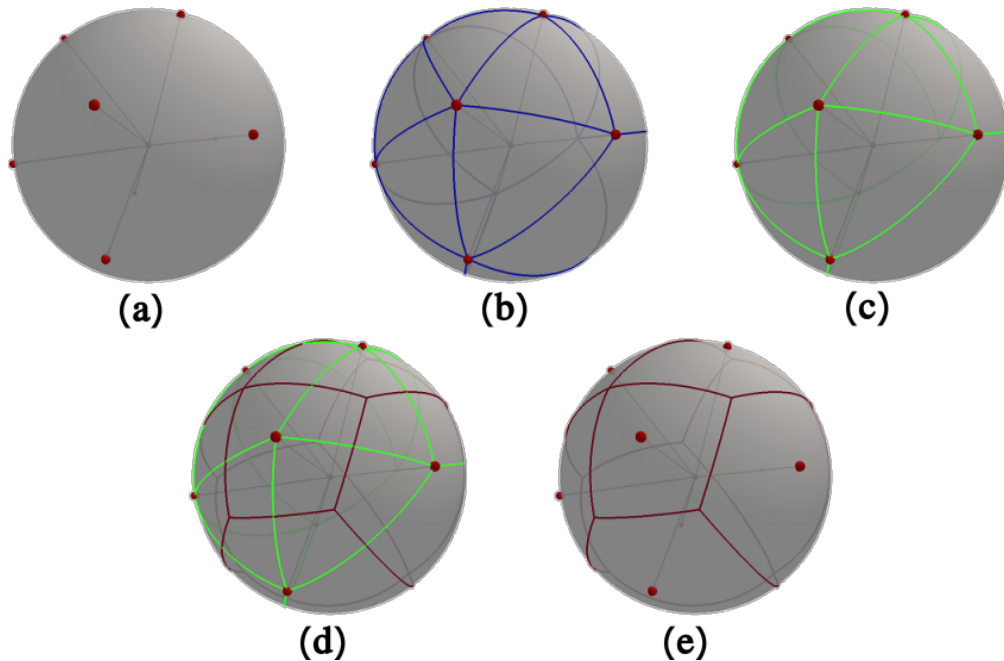


FIGURE 2.59 – Processus de partition de la sphère. (a) l'ensemble de points, (b) la triangulation de Delaunay, (c) la triangulation remaillée, (d) la construction du dual, (e) la partition quadrilatère.

Triangulation de Delaunay La triangulation de Delaunay d'un ensemble de point est unique, et ne dépend pas de l'ordre de traitement des points. De plus, le dual de la triangulation de Delaunay est le diagramme de Voronoï utilisant les points d'entrée comme graines (Figure 2.60). Le diagramme de Voronoï est la configuration idéale pour notre partition de sphère, ses faces sont toutes convexes, et toutes les faces contiennent leur sommet respectif. La construction de l'enveloppe convexe de ces points sur une sphère correspond à la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points [Na et al., 2002].

Dans certains cas idéaux, l'enveloppe convexe ne contiendra que des sommets de degré 4 initialement et aucun remaillage ne sera nécessaire, le dual composé de quads sera donc le diagramme de Voronoï de nos points.

Dans les cas où tous les points seraient sur un même cercle, l'enveloppe convexe est un polygone et tous les sommets sont de degré 2. Pour cette configuration la construction spécifique aux cas "plats" est utilisée (Section 2.2.3, Figure 2.17).

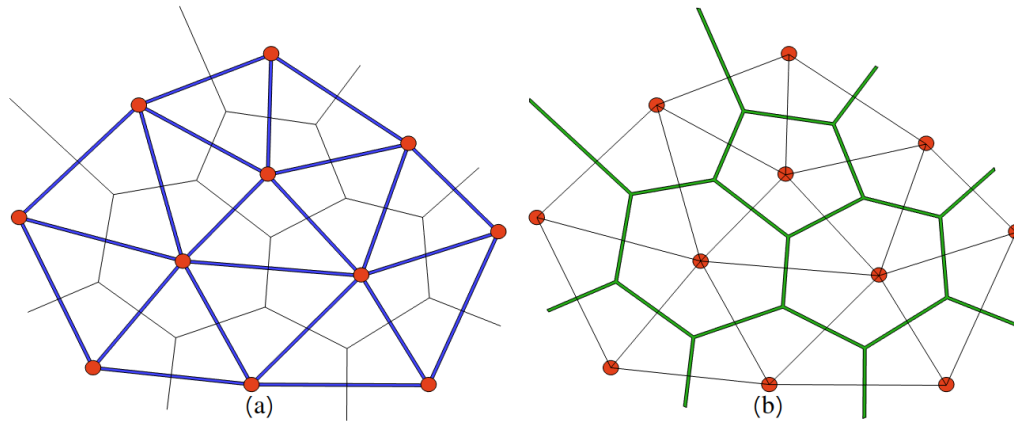


FIGURE 2.60 – Triangulation de Delaunay et diagramme de Voronoï correspondant. (a) triangulation de Delaunay, (b) diagramme de Voronoï.

Remaillage Dans le cas général, un remaillage est nécessaire pour obtenir un maillage composé uniquement de sommets de degré 4. Les modifications sont effectuées en deux étapes : une étape de réduction de valence pour les sommets de valence supérieure à 4, suivie d’une étape d’augmentation de valence pour les paires de sommets de valence 3. En effet, en repartant de la formule d’Euler et en raisonnant sur la connectivité du maillage dual, si $f = q + t$ avec q le nombre de quadrangles et t le nombre de triangles, alors $a = \frac{3}{2}t + 2q$ d’où il découle que $s = \frac{1}{2}t + q + 2$ qui n’a de solution entière que pour un nombre pair de triangles. En faisant attention de ne pas créer de sommet de valence inférieure à 3 lors de la première étape, nous savons que les sommets de valence 3 seront en nombre pair. Ces paires de sommets de valence 3 sont alors éliminées en s’inspirant de la méthode de [Peng et al., 2011].

Nous souhaitons minimiser le nombre d’opérations de remaillage pour que le résultat final soit le plus proche possible du diagramme de Voronoï de l’ensemble de points de départ. Il faut également conserver les propriétés de convexité des faces et d’inclusion des sommets d’entrée dans leur face respective. Ne pouvant pas modifier le nombre de sommets, les seules opérations à notre disposition sont l’ajout d’une arête, ou coupe d’une face, et la suppression d’une arête, ou fusion de deux faces.

Nous avons choisi d’utiliser l’angle entre des arêtes successives autour d’un sommet comme critère principal pour gérer les priorités des opérations. Pour ce faire l’algorithme enchaîne les opérations dans l’objectif de minimiser les angles créés par une opération de suppression d’arête (Figure 2.61) et de maximiser les angles créés lors de l’ajout d’une arête. Le critère d’angle nous semble le plus pertinent pour minimiser le degré des polygones créés dans le maillage final et maximiser leur convexité.

Nous proposons donc l’algorithme de remaillage suivant :

Étape de réduction de valence (Figure 2.62) :

- Suppression des arêtes dont les valences des sommets sont toutes les deux strictement supérieures à 4, triées par angle croissants créés par la suppression.
- Suppression des arêtes dont les valences des sommets sont strictement supérieures à 4 pour l’un et égale à 4 pour l’autre, triées par angle croissant créés par la suppression.

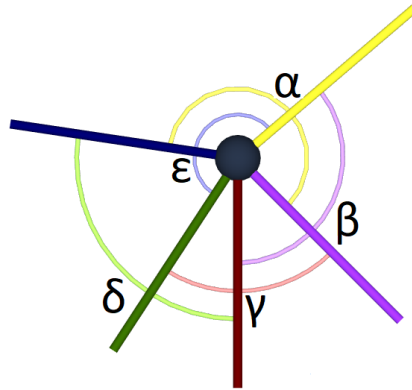
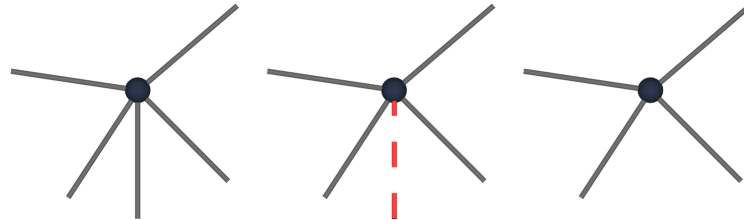
FIGURE 2.61 – Critère d'angle : $\gamma < \beta < \delta < \epsilon < \alpha$ 

FIGURE 2.62 – Réduction de valence

Étape de suppression des paires 3 - 3

- Coupe des faces ayant deux sommets de valence 3 non adjacents.
- Coupe des faces ayant 2 sommets de valence 3 adjacents (crée une arête double).
- Recherche des chemins les plus courts entre toutes les paires de sommets de valence 3. Le plus long des plus courts chemins est traité en priorité, pour que les modifications topologiques restent locales. Application d'un modèle d'opérations en fonction de la parité de la longueur du chemin (Figures 2.63 et 2.64). Dans le cas impair, par ajout puis suppression d'une arête, une valence 3 est approchée de l'autre de deux pas sur le chemin. Lorsqu'elles sont côte à côte, elles sont supprimées par l'ajout d'une arête. Dans le cas pair, via l'utilisation d'un sommet adjacent au chemin, la valence 3 est déplacée d'un pas et le modèle des chemins impairs peut être appliqué.

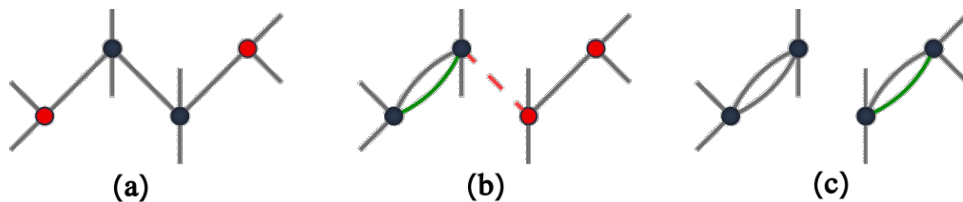


FIGURE 2.63 – Gestions topologique du maillage entre deux sommets de valence 3 avec un chemin de longueur impaire

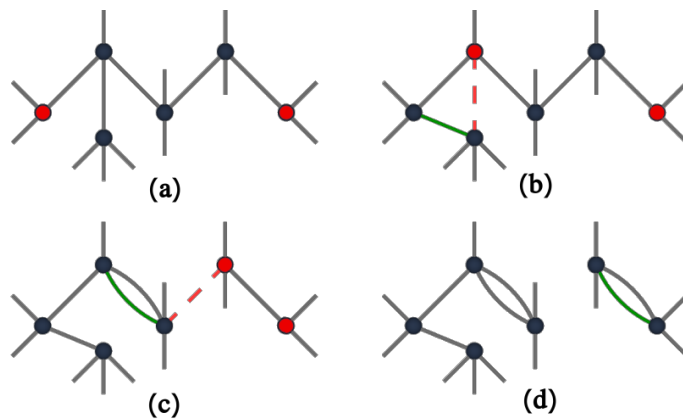


FIGURE 2.64 – Gestions topologique du maillage entre deux sommets de valence 3 avec un chemin de longueur pair

Dual Une fois le maillage composé uniquement des sommets de valence 4, nous en construisons le dual. Les sommets de ce maillage dual sont positionnés au barycentre des faces. Au final, le résultat est une partition de la sphère en quadrangles contenant chacun son point d'entrée. La Figure 2.59 illustre les différentes étapes de cet algorithme sur un exemple contenant 7 directions de sortie.

Résultats Dans le cas d'embranchements dont la répartition des branches est trop hétérogène, il est possible que les faces de la partition ne contiennent pas toutes leur point d'entrée (Figure 2.65 (b)). Dans les cas où la répartition des branches est plus homogène, les résultats remplissent généralement nos critères de faces convexes contenant leur point d'entrée respectif (Figure 2.65 (a)). Dans notre pipeline, une partition dont les points d'entrée ne sont pas tous dans leur face respective n'est pas un résultat bloquant. Les optimisations de la géométrie vont encore déplacer les sommets pour approximer la surface du domaine et améliorer la forme des mailles.

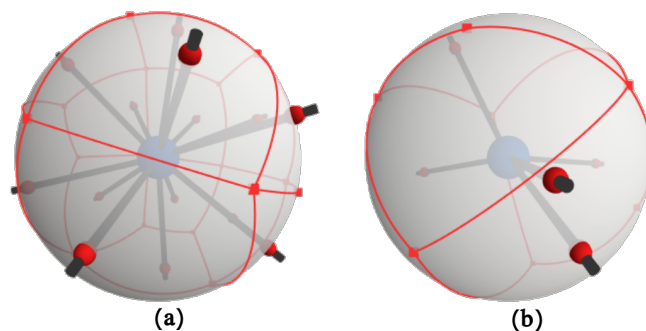


FIGURE 2.65 – (a) Partition réussie avec 14 points d'entrée, (b) partition échouée avec 5 points d'entrée.

Validation de l'algorithme Des tests de l'algorithme ont été effectués sur des centaines de configurations d'embranchements générés aléatoirement avec succès. Cependant, nous n'avons pas pu prouver que l'algorithme est robuste. Nous avons montré avec la formule d'Euler qu'il est possible d'avoir un polyèdre à n sommets de degré 4 pour tout n (A), et de la même façon que si un polyèdre à n sommets contient uniquement des sommets de degré 3 et 4 alors le nombre de sommets de degré 3 est pair (B). Nous avons montré qu'il est possible de supprimer des paires de sommets de degré 3 sans affecter le degré d'autres sommets (Figures 2.63 et 2.64) pour passer de l'état (B) vers l'état (A) dans l'étape de suppression des paires de sommets de degré 3. En revanche, nous ne sommes pas sûrs que l'étape de réduction de valence permette toujours de réduire un polyèdre quelconque à n sommets vers l'état (B). Nous ne pouvons pas éliminer la possibilité qu'il existe des configurations où cette étape entrerait dans une boucle infinie.

2.6.2 Partition par pincement

[Peltier et al., 2021] propose une méthode de partition de sphère en quadrilatères aussi basée sur la construction du dual de la partition désirée. Contrairement à notre méthode qui part de la triangulation de Delaunay de l'ensemble des points qui est modifiée itérativement, cette méthode construit itérativement un maillage en considérant les points d'entrée successivement et en garantissant qu'à chaque étape les sommets du maillage sont de degré 4.

La construction est initialisée par la sélection de 3 points de l'ensemble (Figure 2.66 (a)). Un polyèdre composé de 2 triangles et 3 faces à 2 côtés, ou un triangle avec des arêtes double, est construit sur ces 3 points. Ce polyèdre est donc composé de 3 sommets de degré 4 (Figure 2.66 (b)). A partir de là, pour préserver la valence des sommets la seule opération qui est autorisée à chaque itération où un nouveau point est pris en compte est le "pincement". Deux arêtes de la face contenant le nouveau point sont coupées en deux, et les deux sommets créés sont fusionnés sur ce point (Figure 2.66 (e-f)). De cette façon le degré des sommets précédents n'est pas modifié et le nouveau sommet créé est de degré 4. Le degré des sommets à chaque étape est donc garanti d'être 4.

Par pincement, des faces à 2 côtés, autrement dit des arêtes doubles, peuvent être créées. De plus le noyau initial en contient 3. Puisqu'il est peu probable qu'un point soit contenu dans la face de degré 2 (ou sur l'arête double), si le point est suffisamment proche d'une de ces arêtes doubles alors celle-ci est coupée et le sommet du milieu est placé sur le point, créant ainsi 2 arêtes doubles (Figure 2.66 (c-d)).

Une preuve a été faite montrant que cette méthode peut générer un maillage composé exclusivement de sommets de degré 4 pour tout ensemble de points sur la sphère ([Peltier et al., 2021], Théorème 1). Cette robustesse lui donne un avantage sur notre méthode qui n'est que vérifiée empiriquement par des tests aléatoires.

2.6.3 Observations et perspectives

Les deux méthodes proposées présentent des avantages et des inconvénients. Aucune des deux méthodes ne peut garantir systématiquement la convexité des faces et l'inclusion du point d'entrée dans sa face (Figure 2.65 (b)). Les deux méthodes sont itératives et leurs résultats vont dépendre de l'ordre des opérations. A moins de trouver une forme canonique pour la partition qui garantirait un résultat, nous dépendons de ce genre de

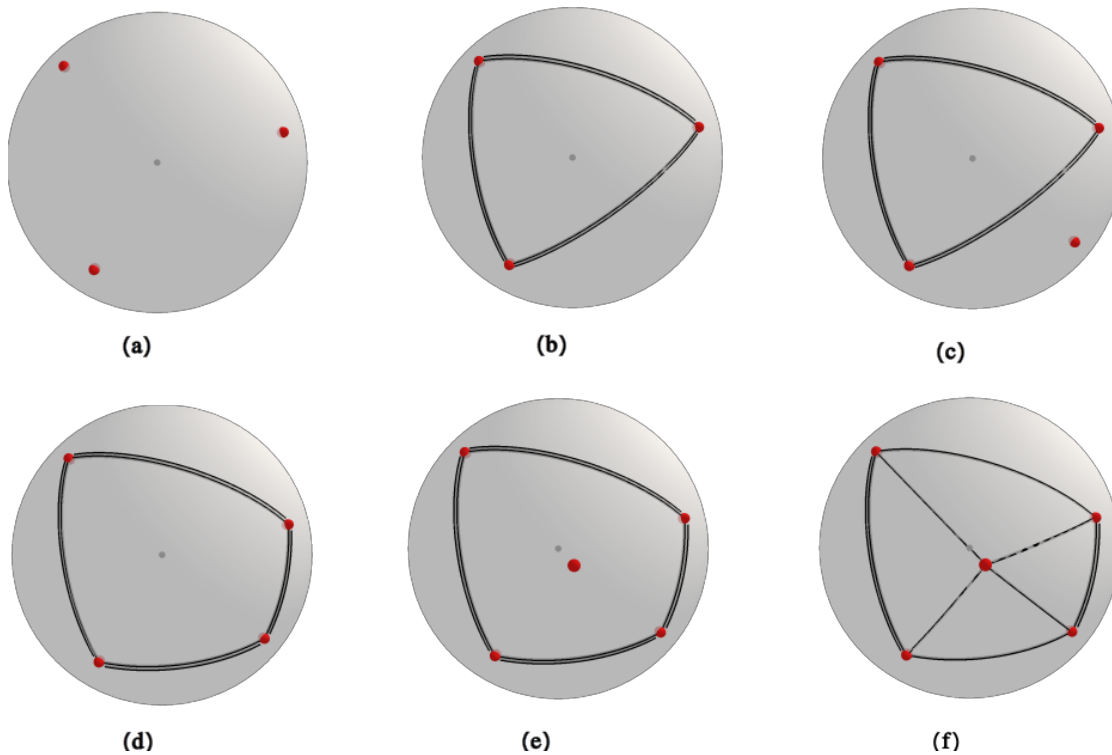


FIGURE 2.66 – Algorithme de partitionnement par pincements. (a) 3 points initiaux, (b) polyèdre initial, (c) point loin du barycentre de sa face, (d) coupe d’une arête double, (e) point proche du barycentre de sa face, (f) pincement de deux arêtes.

méthodes. Idéalement nous voudrions une partition minimisant le nombre d’arêtes communes à deux quadrangles voisins, et maximisant l’orthogonalité des angles. La notion même d’orthogonalité va poser problème en géométrie sur la sphère puisqu’un quadrangle peut avoir jusqu’à 4 angles à 180° , si les points sont répartis sur un même cercle, et remplir nos critères.

Avec notre méthode par remaillage telle qu’elle est actuellement définie, nous ne pouvons pas garantir la convexité des faces ou l’inclusion des sommets dans leur faces. Nous tentons de minimiser le nombre d’opérations lors du remaillage pour rester au plus proche du diagramme de Voronoï, et empiriquement nous constatons que nos critères produisent des résultats exploitables pour notre pipeline, mais il est difficile de savoir si tous nos critères sont pertinents. Nous avons pu constater par les tests qu’il est facile d’ajouter des critères antagonistes aux précédents ou inutiles.

La méthode par pincement souffre des mêmes défauts. Elle est aussi pour le moment incomplète, aucun critère sur l’ordre de traitement des points n’ayant été défini. Nous avons tenté de définir des critères pertinents mais nos tests n’étaient pas probants. En revanche, contrairement à notre méthode, il y a une garantie prouvée de résultats topologiquement corrects. Si des critères optimaux peuvent être définis pour cette méthode, elle pourrait garantir une meilleure robustesse du pipeline.

Nous avons donc choisi d’utiliser notre propre méthode dans le pipeline, puisque après de nombreux tests elle semblait produire des résultats corrects, mais avec la séparation des étapes de notre pipeline elle pourrait être substituée par une autre méthode tant que

le résultat construit produit une interface compatible avec l'insertion des tronçons.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les deux algorithmes de génération de maillages hexaédriques à partir de squelettes courbes et mixtes conçus durant cette thèse. Ces algorithmes permettent la décomposition automatique du domaine en blocs discrets via l'analyse du squelette et la construction d'échafaudages pour déterminer la connexité et géométrie finale des maillages. Il est garanti que le résultat est purement hexaédrique grâce à l'utilisation exclusive d'éléments de construction hexaédriques, les tronçons et palettes.

Les algorithmes remplissent autant que possible les critères que nous avons établis d'alignement à la surface, de minimisation du nombre d'éléments, et de maximisation de la régularité, en plus d'être locaux, déterministes et parallélisables.

Nous avons aussi proposé un ensemble d'opérations de raffinement et d'optimisation pour rendre les maillages bruts issus de nos méthodes exploitables pour la simulation, ainsi qu'élaboré un algorithme de partition de sphères en quads pour construire les échafaudages dont dépendent nos algorithmes.

Chapitre 3

Résultats

Introduction

Après la mise en oeuvre de nos algorithmes, nous avons appliqué nos algorithmes sur des maillages communément utilisés dans le domaine de la modélisation géométrique ainsi que des données médicales. Pour pouvoir comparer nos résultats à l'état de l'art, nous avons choisi la métrique du Jacobien Normalisé car c'est la plus fréquemment utilisée et la qualité du Jacobien Normalisé d'un maillage et la précision des simulations appliquées dessus sont fortement corrélées [Gao et al., 2017].

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps les résultats obtenus avec l'application de nos algorithmes à différents maillages surfaciques. Dans un second temps, nous couvrons la mise en application de nos méthodes sur des données médicales ainsi que les travaux menés en parallèle sur cette thématique.

3.1 Génération basée squelette courbe

Pour tester la première version de notre algorithme, nous avons principalement travaillé avec des maillages issus de [Livesu et al., 2016] et [Livesu et al., 2020], des travaux récents bien positionnés dans l'état de l'art. Les données sur les maillages produits : le Jacobien normalisé minimum et moyen, ainsi que le nombre d'hexaèdres composants ces maillages sont données dans la Table 3.1.

La qualité de nos maillages est généralement meilleure avec un nombre de cellules moins élevé. Nous rappelons que pour qu'un maillage soit exploitable par des codes de simulations, il doit avoir un Jacobien Normalisé minimum supérieur à 0.3, et une valeur moyenne du Jacobien Normalisé plus élevée avec moins d'éléments est désirable.

En plus de produire des résultats avec une qualité adéquate, notre méthode gère les embranchements du squelette individuellement, et décide de la manière dont ils sont traités en fonction de leurs caractéristiques géométriques locales. Un embranchement ne correspondant pas naturellement à un cube est traité par notre méthode de partition de sphère en quads. Cela nous permet de traiter les embranchements complexes sans propager de découpe ou de contraintes supplémentaires le long des branches incidentes tel que dans le modèle *Cycles* (Figure 3.1).

Nous obtenons aussi des résultats plus symétriques lorsque le domaine contient des symétries tels que dans le modèle *Santa* dont l'embranchement du torse est géré par un

Maillage	Travaux précédents		Notre méthode	
	Min/Moy JN	#Hex	Min/Moy JN	#Hex
Cycles (Fig. 3.1)			.316/.937	8192
Santa (Fig. 3.2)	.367/.941	26240	.514/.965	21312
Metatron (Fig. 3.2)	.682/.941	4544	.820/.981	6624
Fertility (Fig. 3.3)	.500/.892	7456	.543/.933	6848
Horse (Fig. 3.4)			.449/.912	5568
Dinopet (Fig. 3.5)	.177/.920	18080	.540/.919	13120
Vessel (Fig. 3.6)			.615/.930	24592
Cactus (Fig. 3.5)	.526/.919	4128	.635/.930	2400
Holes (Fig. 3.11)	.104/.746	858	.704/.828	304

TABLE 3.1 – Jacobien Normalisé minimum et moyen des maillages testés. Les valeurs présentées dans les travaux précédents proviennent de [Livesu et al., 2016] pour les maillages *Dinopet*, *Cactus*, *Fertility*, et *Santa*, et de [Livesu et al., 2020] pour les maillage *Metatron* et *Holes*.

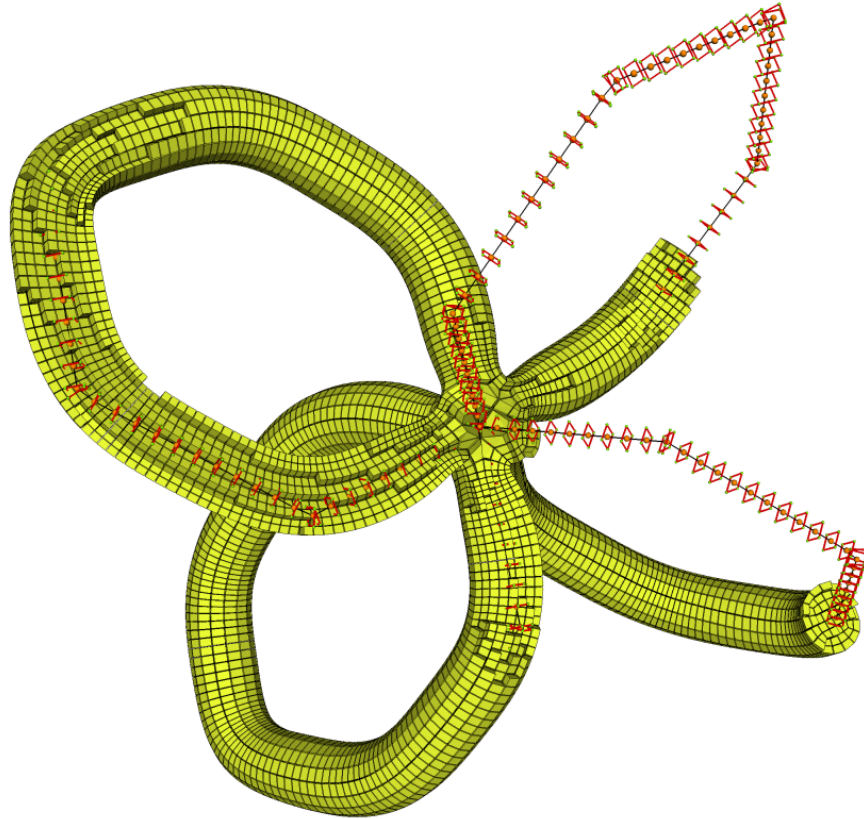


FIGURE 3.1 – Maillage hexaédrique de *Cycles*.

cube alors que celui des hanches est géré par une partition de sphère comme vu en haut de la Figure 3.2. Dans le cas du modèle *Metatron* aussi, le cas particulier orthogonal est utilisé en combinaison avec la partition de sphère. Notre résultat est comparé à celui présenté par la méthode plus générale de [Livesu et al., 2020] en bas de la Figure 3.2.

La régularité des hexaèdres et la qualité du résultat sont améliorés par l'utilisation de la meilleure méthode de construction de l'échafaudage en fonction de l'angle entre les branches de l'embranchement.

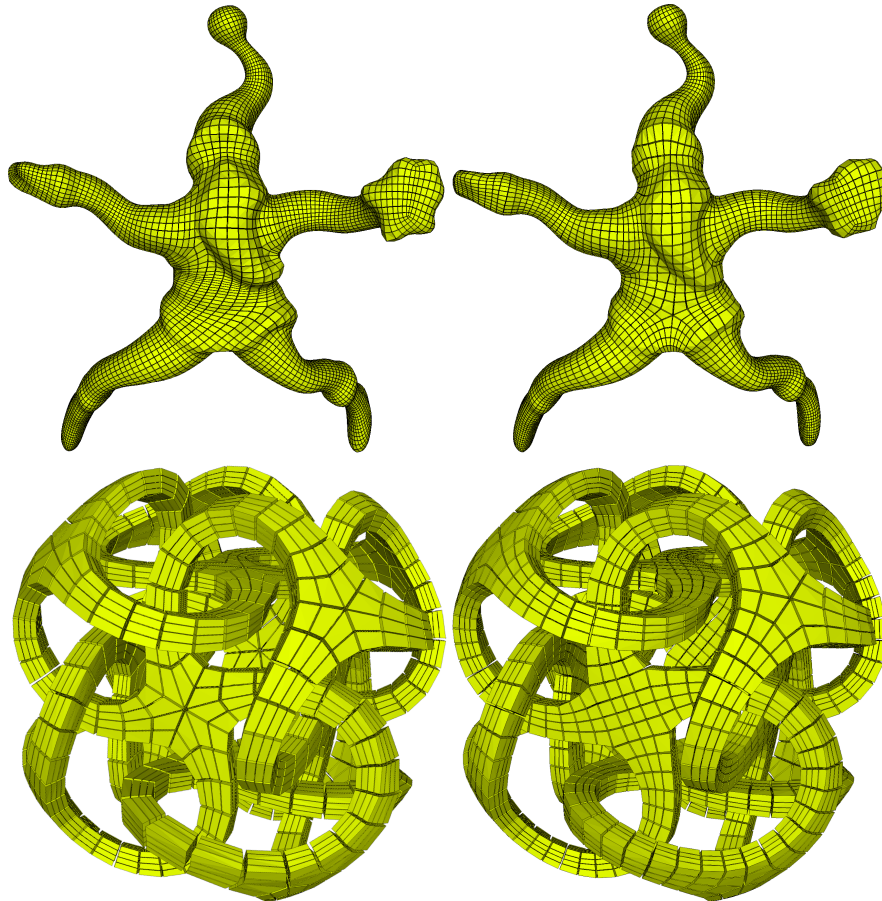


FIGURE 3.2 – A gauche, les résultats obtenus par [Livesu et al., 2016] *Santa* et [Livesu et al., 2020] *Metatron*. A droite, nos résultats. Combiner l'insertion d'un cube sur l'embranchement orthogonal avec la partition de sphère selon les angles des branches des embranchements améliore la symétrie et la qualité des éléments des maillages hexaédriques obtenus.

L'algorithme a été testé sur des données médicales représentant des éléments biologiques, ceux-ci sont présentés dans la Section 3.3. Grâce à la nature radiale de la structure générée, notre méthode fonctionne particulièrement bien sur ce type de domaines tubulaires lisses dont la tranche relative au squelette approxime un disque. En revanche, comme indiqué précédemment, cette version de l'algorithme échoue sur des domaines contenant des éléments trop plans, dont la tranche perpendiculairement au squelette est trop éloignée d'un disque.

Les temps d'exécutions de notre méthode sont bons grâce à l'absence de système à résoudre puisque tous nos choix de construction sont locaux. [Livesu et al., 2016] estiment leurs temps pour générer des maillages entre 1.5 secondes et 1 minute. [Livesu et al., 2020] indique un temps de génération de 121 secondes pour *Fertility*. L'exécution de notre

algorithme avec l'adaptation du squelette, la génération des échafaudage, et la générations du maillage brut même sur les plus gros maillages, prend un temps inférieur à une seconde. Par exemple, testé sur un réseau vasculaire cérébral avec 355 embranchements et 712 branches, la génération du maillage brut prend 0.2s.

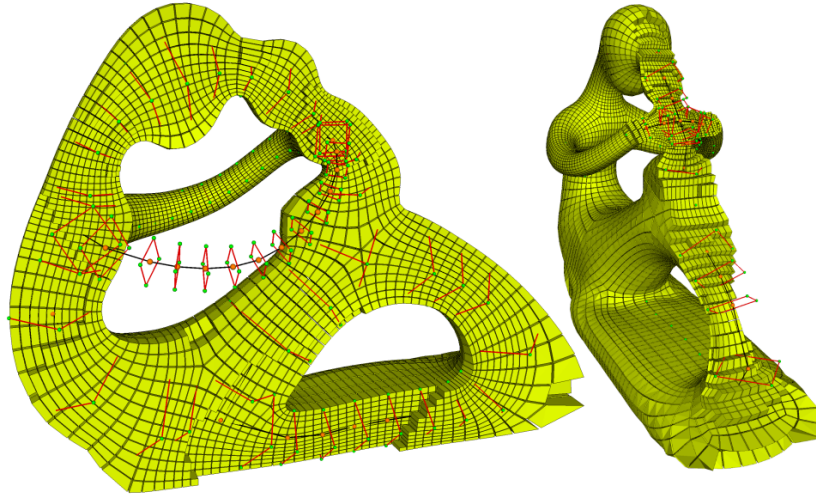


FIGURE 3.3 – Maillage hexaédrique de *Fertility*.

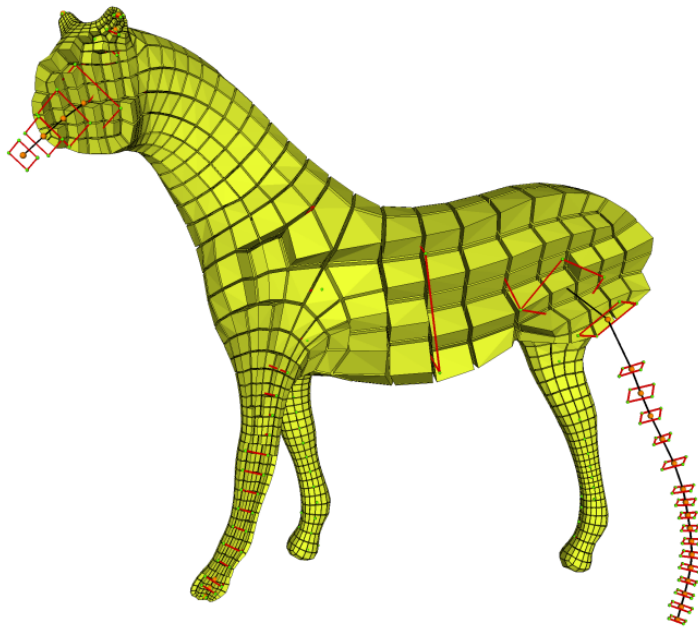


FIGURE 3.4 – Maillage hexaédrique de *Horse*.

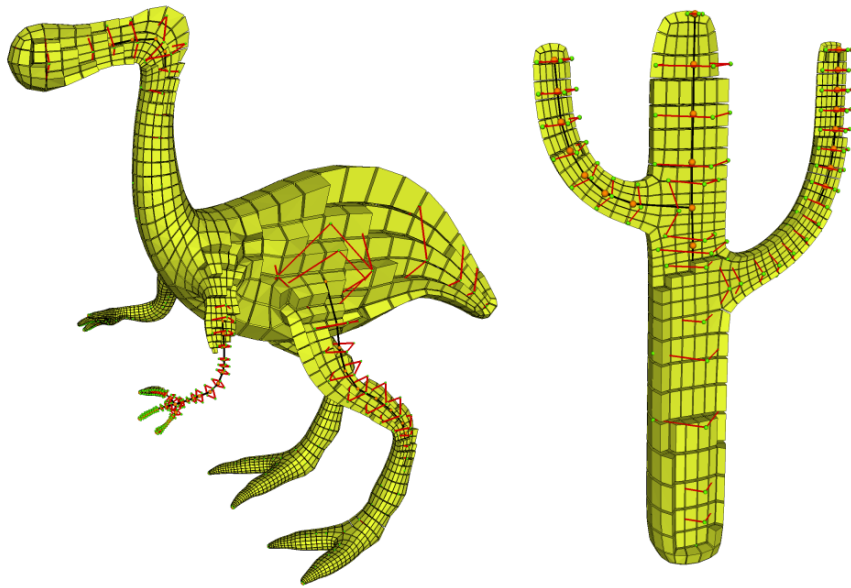


FIGURE 3.5 – Maillages hexaédriques de *Dinopet* et *Cactus*.

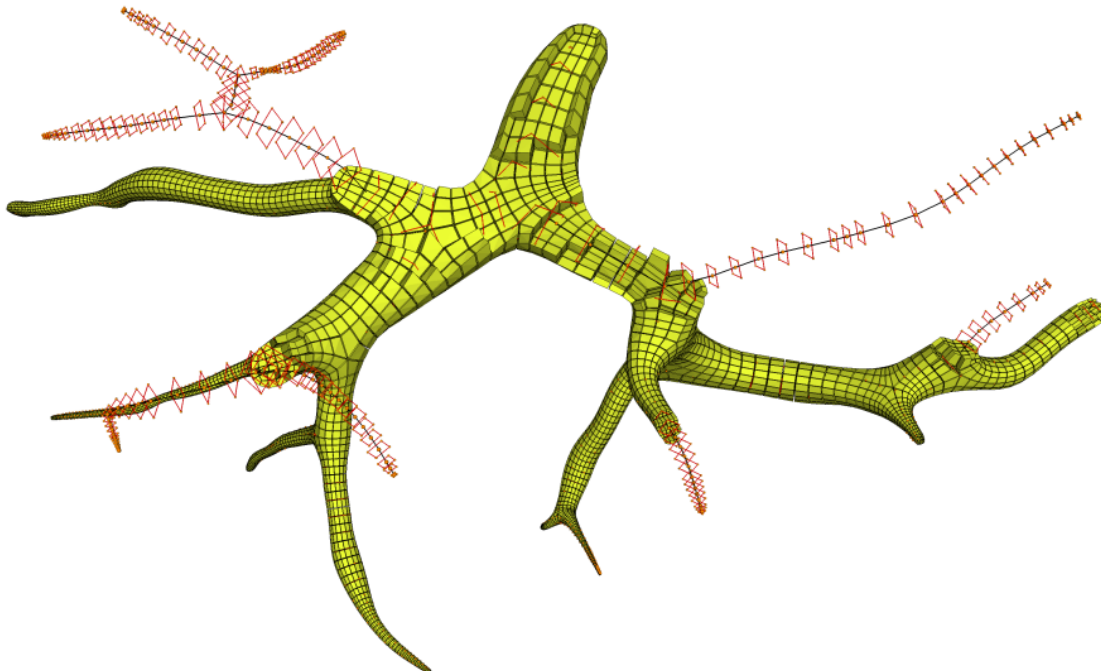


FIGURE 3.6 – Maillage hexaédrique de *Vessels*.

3.2 Génération basée squelette mixte

L'algorithme étendu aux squelettes mixtes nous a permis de produire des résultats pour des domaines combinant des éléments tubulaires et des éléments plans.

Nous avons pu générer des maillages hexaédriques pour des structures qui n'étaient pas ou mal gérées par le premier algorithme. Par exemple des structures comme le maillage *Hand*, dont le squelette courbe ne représente pas assez d'informations géométriques dans la paume et le poignet (Figure 3.7 (a)). Exploiter la représentation du domaine par son squelette mixte (Figure 3.7 (b)) a permis la construction d'un maillage hexaédrique de bonne qualité (Figure 3.8).

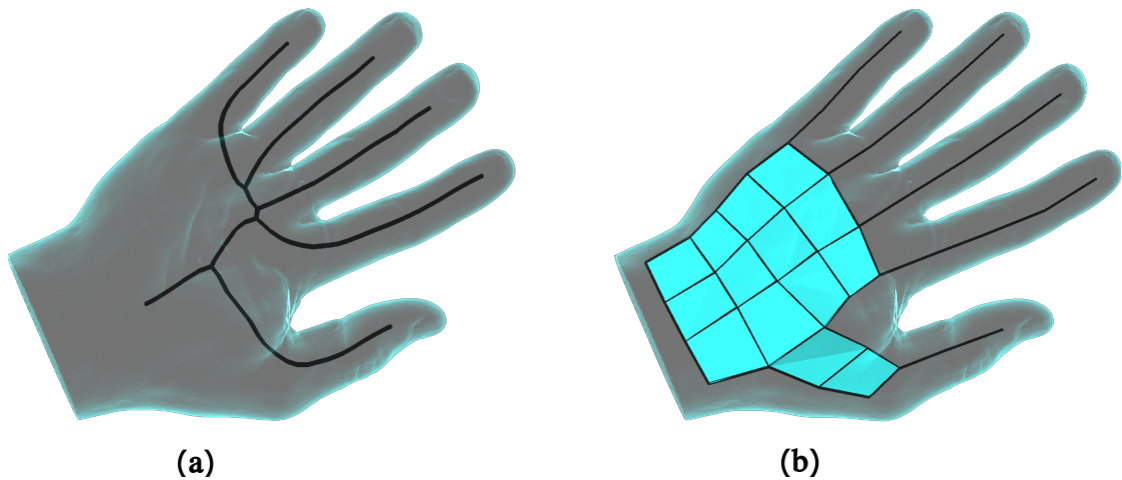


FIGURE 3.7 – (a) Squelette courbe de la main. (b) Squelette mixte de la main.

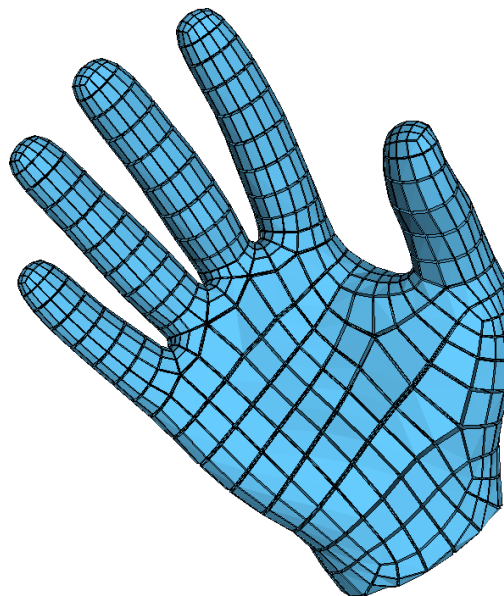


FIGURE 3.8 – Résultat obtenu par un squelette fait à la main. 3584 hexaèdres. Jacobien Normalisé minimum : 0.62, moyen : 0.91.

De même, nous avons généré le maillage *Dilo*, qui n'est pas assez bien représenté par un squelette courbe. Avec un squelette grossier fait à la main (Figure 3.9 gauche) nous parvenons à obtenir un maillage composé de 39232 hexaèdres, avec un Jacobien Normalisé minimum de 0.36 et moyen de 0.96.

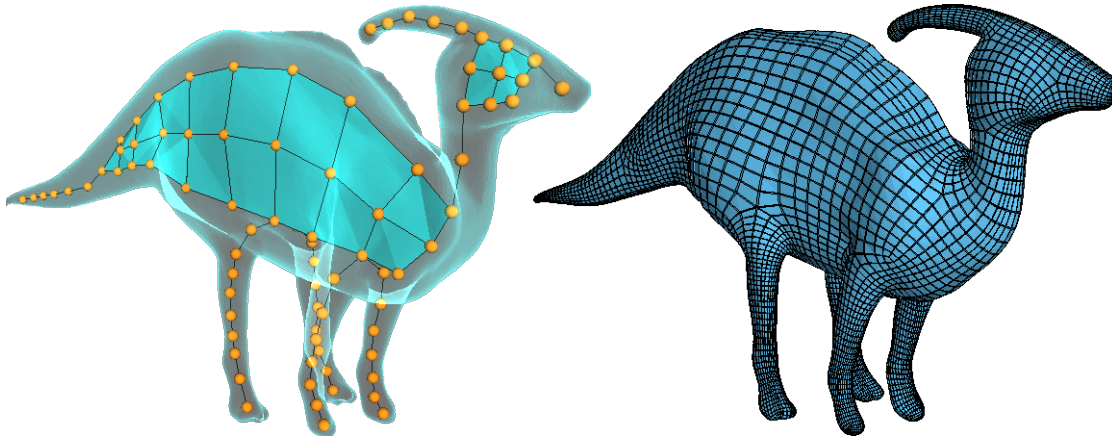


FIGURE 3.9 – Maillage Dilo et son squelette à gauche, le résultat de notre algorithme à droite.

Certains des domaines traités précédemment pouvaient potentiellement bénéficier de l'utilisation d'un squelette mixte plutôt qu'un squelette courbe.

Nous avons fait la comparaison avec le *Metatron* (Figure 3.10). La version utilisant le squelette courbe avait 6624 hexaèdres, et un Jacobien Normalisé minimum de 0.820 et moyen de 0.981. La version utilisant le squelette mixte est composée de 7008 hexaèdres, et un Jacobien Normalisé minimum de 0.839 et moyenne de 0.977. Les résultats sont extrêmement proches sur ces métriques. En revanche, la nouvelle version a des mailles mieux alignées avec la surface du domaine sur les intersections (Figure 3.10 (b)).

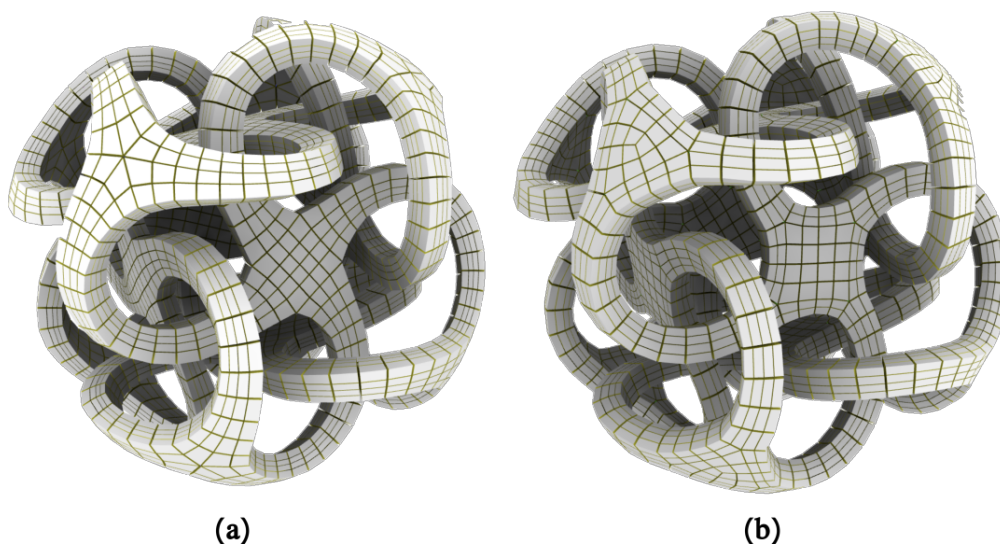


FIGURE 3.10 – (a) Résultat par squelette courbe. (b) Résultat par squelette mixte.

Le maillage *Holes* (Figure 3.11) nous donne un autre exemple de configuration pouvant être traitée aussi bien avec un squelette courbe que mixte. Par contre, cette fois ci, utiliser le squelette mixte produit des résultats significativement meilleurs. Avec le squelette courbe (Figure 3.11 (a)), le maillage hexaédrique est composé de 2304 hexaèdres avec un Jacobien Normalisé minimum de 0.671 et moyen de 0.926. Avec le squelette mixte (Figure 3.11 (b)), le maillage hexaédrique est composé de 2432 hexaèdres, avec un Jacobien Normalisé minimum de 0.725 et moyen de 0.938.

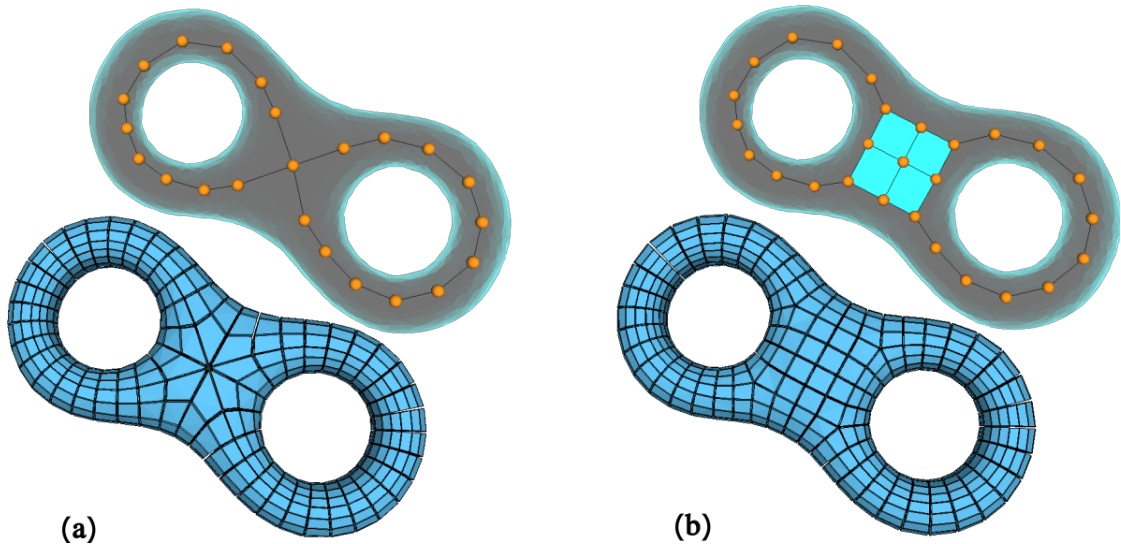


FIGURE 3.11 – Génération de *Holes* par : (a) squelette courbe, (b) squelette mixte.

La méthode de génération de maillage hexaédrique à partir d'un squelette mixte nous permet donc d'obtenir des résultats de qualité suffisante pour la simulation tout en étendant de manière importante le type de domaines possibles à traiter.

3.3 Exploitation médicale

Un des domaines applicatifs visés par notre travail est la génération de maillage à partir de données médicales pour avoir des supports pour la simulation de fluides (Computational Fluid Dynamics ou CFD). Les données médicales d'intérêt principal sont les vaisseaux sanguins, tel qu'un réseau vasculaire cérébral, ou des bronches (Figure 3.12). Certains travaux scientifiques ont besoin de pouvoir simuler efficacement les flux dans ces structures, par exemple pour calculer et analyser les dépôts de particules dans les bronches.

3.3.1 Données types

Les éléments anatomiques telles que les bronches, et réseaux vasculaires, sont le cas applicatif idéal pour notre méthode de génération basée squelette. Ces structures tubulaires vont typiquement présenter un très grand nombre d'embranchements, de la centaine aux milliers en fonction de la résolution des données. Ce genre de configurations va présenter des complexités très élevées, mais des squelettes courbes parfaitement adaptés aux besoins de notre méthode (Figure 3.13).

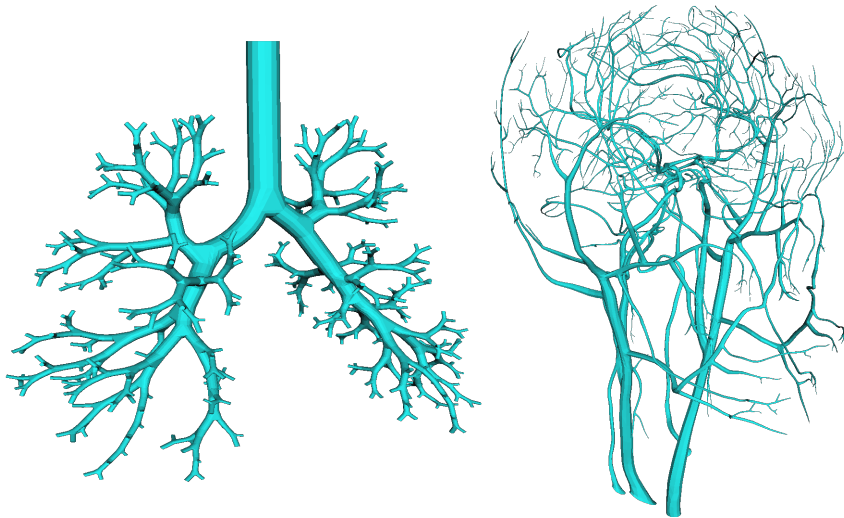


FIGURE 3.12 – Types de structures biologiques visées.

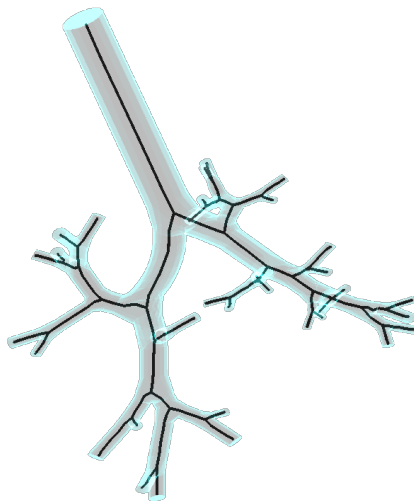


FIGURE 3.13 – Surface de bronches et le squelette correspondant.

L'application des méthodes d'extraction de squelette de l'état de l'art et de notre méthode de génération de maillage sur ces données nous a permis de tester la robustesse du pipeline et vérifier le bon fonctionnement sur des structures complexes (Figure 3.14). Pour être exploitables pour des applications de CFD, les maillages produits doivent être composés de centaines de milliers à centaines de millions d'hexaèdres et les hexaèdres doivent être alignés avec le bord pour former des fibres alignées avec la direction principale du flux. Ces fibres peuvent être composées d'hexaèdres avec une longueur très différente des dimensions de la section.

D'autres propriétés sont souhaitables pour le maillage, telle qu'une discrétisation plus fine de l'espace le long des bords où peuvent apparaître des effets de turbulences, et une discrétisation plus grossière au centre des flux où le flot est quasiment laminaire. Le

maillage obtenu respecte les propriétés que nous avons énoncées sur notre structure, il est donc possible de le raffiner et l’optimiser avec les fonctions génériques ou spécialisées de raffinement de maillages que nous avons introduites précédemment (Section 2.4) pour le rendre exploitable pour des applications de CFD.

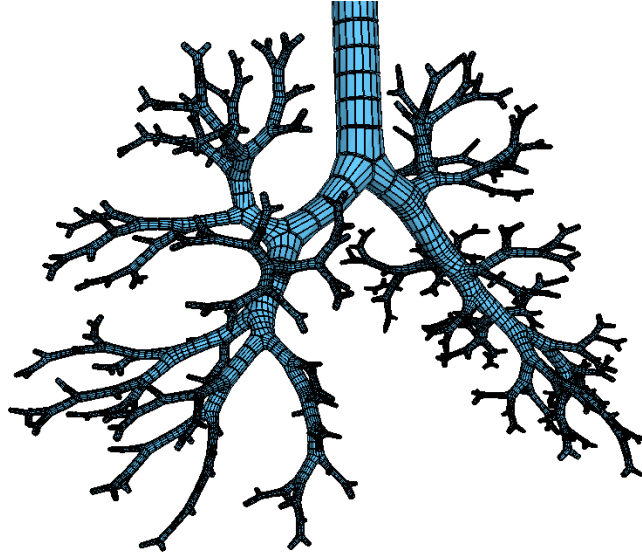


FIGURE 3.14 – Maillage hexaédrique de bronches généré par notre méthode.

3.3.2 Maillages animés

Dans le cadre de l’application aux données médicales pour la simulation, une demande tangente à nos travaux principaux nous a été faite : animer nos maillages. Les systèmes biologiques tels que les bronches ne sont pas statiques. Les bronches par exemple évoluent au fil du cycle de respiration, causant une déformation et expansion du volume. Pour pouvoir appliquer une simulation de gaz sur les bronches dont on connaît la surface à différents temps de l’animation, il faut construire un maillage pour chaque pas de temps. Les outils classiques ne garantissent pas de conserver la même connectivité au fil de l’animation ce qui engendre des difficultés supplémentaires pour le suivi de la simulation. Au vu de la nature des déformations en question, il est tout à fait envisageable de conserver la connectivité du maillage volumique au fil du temps (Figure 3.15). Nous avons donc proposé une méthode permettant d’obtenir un maillage hexaédrique animé au fil du temps. Nos tests ont été faits uniquement sur des bronches générées par notre pipeline, que nous utilisons ici pour illustrer le propos, mais la méthode devrait être applicable sur tout type de maillage hexaédrique.

Nos données d’entrée pour cette construction sont une série de surfaces représentant chacune un pas de temps du cycle étudié ainsi qu’un maillage volumique brut construit par notre méthode, adapté à l’une des surfaces. L’objectif étant d’avoir un maillage qui se déplace au fil du cycle sans en modifier la topologie, nous ne modifions donc que la géométrie des sommets. La solution que nous proposons consiste à utiliser nos outils d’optimisation du maillage pour construire un buffer de positions de sommets par pas de temps, que nous appelons des *keyframes* (Figure 3.16).

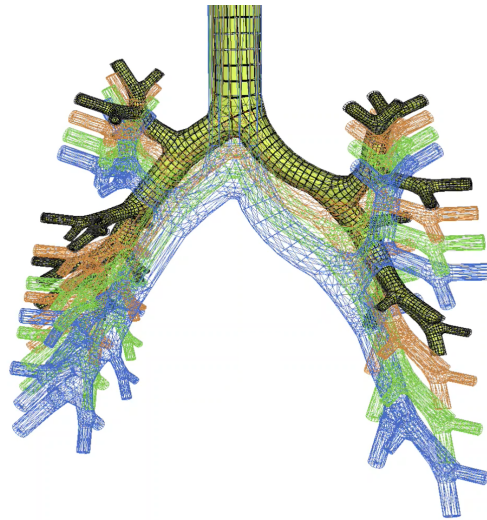
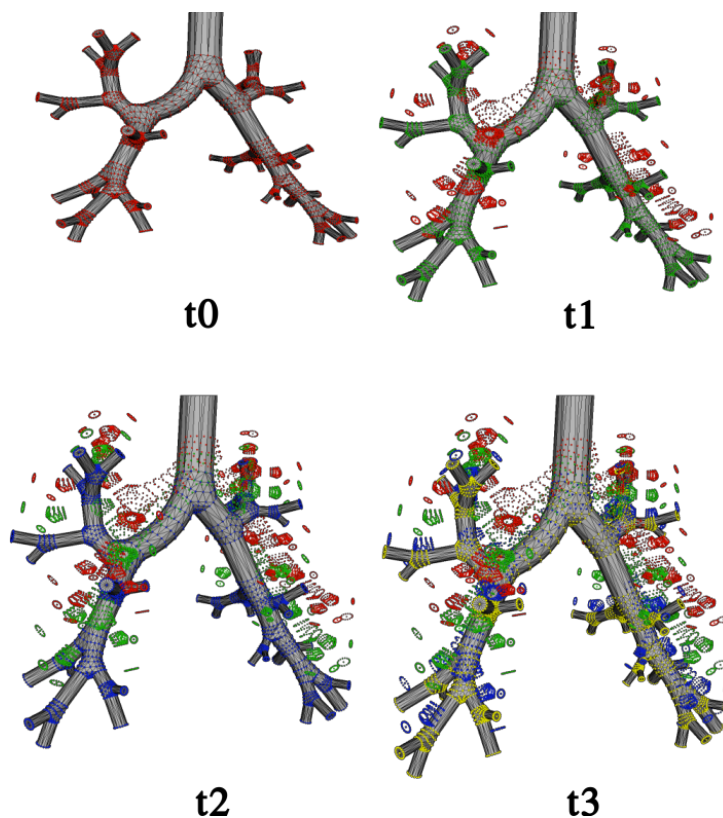


FIGURE 3.15 – Surfaces du cycle de respiration de bronches à différents pas de temps.

FIGURE 3.16 – Construction des *keyframes* t_0 (rouge), t_1 (vert), t_2 (bleu), t_3 (jaune). En gris la topologie aux différents pas de temps.

Si l'écart dans le temps entre deux surfaces S^t et S^{t+1} du cycle est faible, l'écart de géométrie entre ces surfaces l'est aussi. Nous pouvons donc progressivement transformer un maillage d'une *keyframe* au temps t à une *keyframe* au temps $t + 1$, et répéter cette

transformation pour chaque pas de temps.

Dans un premier temps, nous calculons une transformation rigide permettant de recalculer la surface S^t (Figure 3.17 (a)) à la surface S^{t+1} (Figure 3.17 (b)) en utilisant l'algorithme ICP (Iterative closest point). ICP permet de calculer la transformation rigide, déplaçant l'objet (Figure 3.17 (c)) par translation et rotation, permettant de minimiser la distance entre deux nuages de points. La transformation rigide calculée est appliquée à l'ensemble des sommets du maillage volumique du temps t pour le déplacer au mieux vers la surface S^{t+1} (Figure 3.17 (d)).

Nous appliquons ensuite itérativement plusieurs étapes de recalage non-rigide de la surface du maillage volumique vers la surface S^{t+1} (Figure 3.17 (e)) entremêlés d'optimisation des sommets internes du maillage volumique de sorte que les sommets internes suivent la déformation appliquée à la surface tout en s'assurant de la bonne qualité des hexaèdres (Figure 3.17 (f)).

Le recalage non-rigide de la surface du maillage volumique vers la surface S^{t+1} est effectué en utilisant le cadre des déformations "aussi rigides que possible" [Sorkine and Alexa, 2007] auquel on ajoute des contraintes afin de maîtriser la vitesse du mouvement et de sorte à ce que les sommets soient attirés vers la surface S^{t+1} . On commence par calculer le vecteur laplacien L_0 de chaque sommet de la surface au temps t_0 . Ensuite, on résout itérativement le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} W_l L \\ W_s \\ W_p \end{bmatrix} V^{t+1} = \begin{bmatrix} r(L_0) \\ V^t \\ P^{t+1} \end{bmatrix}$$

où V^t sont les positions des sommets au temps t , V^{t+1} les positions des sommets que l'on cherche à calculer, L est l'opérateur laplacien, $r(L_0)$ les vecteurs laplaciens calculés au temps t_0 auxquels on a appliqué pour chaque sommet une rotation calculée à partir de la configuration locale du voisinage de chaque sommet au temps t et à ce même voisinage au temps t_0 , W_l est une matrice diagonale de poids qui permet de fixer l'importance du respect du laplacien, W_s une matrice diagonale de poids qui permet de fixer la "vitesse" du mouvement, W_p une matrice diagonale de poids qui permet de fixer l'importance de l'attraction vers la surface cible $t + 1$ et P^{t+1} les projetés des sommets sur la surface S^{t+1} .

L'optimisation des sommets internes du maillage volumique est effectuée après chaque mise à jour de la position des sommets de la surface. Cette optimisation suit la même procédure que celle décrite dans le chapitre précédent, à la différence près que les sommets de la surface sont fixés.

Lorsque le maillage satisfait l'utilisateur, la position des sommets est enregistrée comme image $t + 1$.

En répétant successivement ce processus, nous pouvons obtenir les *keyframes* pour chaque pas de temps. L'animation est ensuite produite en interpolant les positions des sommets entre les différentes *keyframes* du maillage volumique. Cette méthode nous a permis de produire les bronches utilisées en illustration de cette section, et a vocation à être utilisée ultérieurement pour la création d'un maillage animé d'un cœur avec un cycle de battement cardiaque (projet 22-26 Def-RV - Région Grand-Est).

Ce processus de construction des *keyframes* est relativement coûteux en calculs, et requiert une intervention régulière de l'utilisateur. Le traitement de maillages trop volumineux serait potentiellement très long, mais l'absence de modification topologique entre

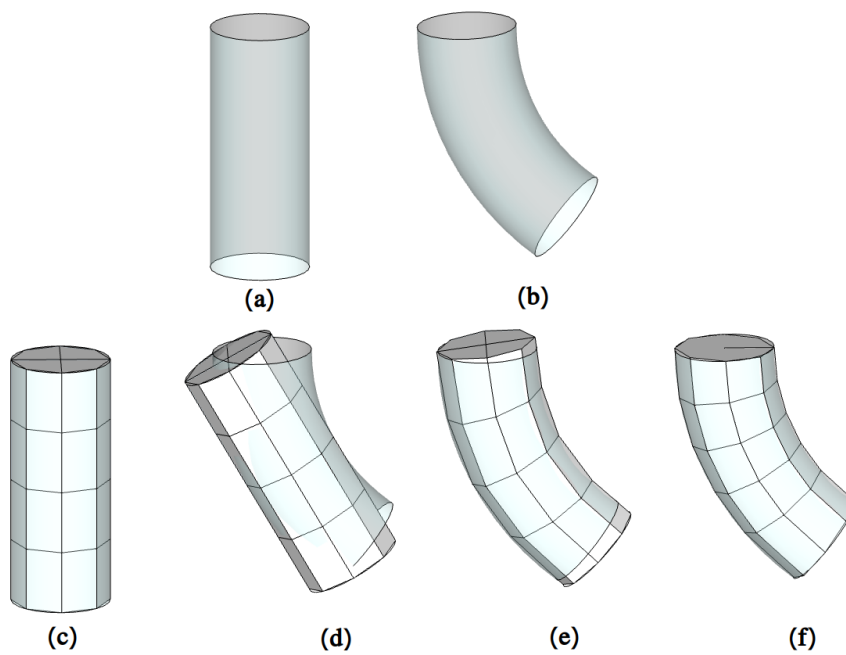


FIGURE 3.17 – Une étape de recalage pour l’animation. (a) position t_0 , (b) position t_1 , (c) maillage à t_0 , (d) recalage rigide du maillage, (e) recalage non-rigide du maillage, (f) optimisation des sommets internes du maillage.

les *keyframes* ouvre la possibilité d’effectuer un amortissement sur les subdivisions et optimisations du maillage car les indices des sommets et des volumes restent inchangés entre les *keyframes*.

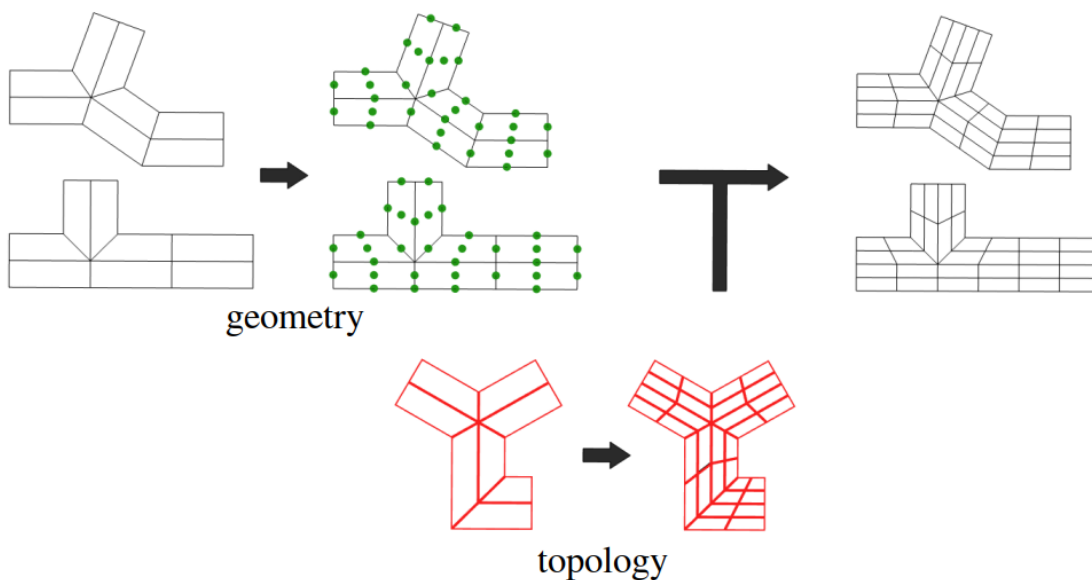


FIGURE 3.18 – Modification séparée de la topologie du maillage (en rouge) et des données géométriques des *keyframes*.

La topologie du maillage étant partagée par toutes les *keyframes*, les différentes modifications que nous pouvons vouloir appliquer au maillage pour le raffiner telles que le coussinage, la subdivision, ou encore les optimisations spécialisées pour l'application médicale, n'ont besoin d'être appliquées qu'une seule fois, et les calculs des positions des nouveaux sommets sont indépendants entre les *keyframes*. Il n'est donc pas nécessaire d'appliquer le processus d'animation sur un maillage extrêmement fin comme ceux requis par la simulation. Nous pouvons appliquer le processus d'animation sur un maillage relativement grossier, mais suffisant pour bien décrire le domaine, et ensuite appliquer les opérations de raffinement dont le calcul de la topologie est unique et le calcul de la géométrie est parallèle sur toutes les *keyframes*. En d'autres termes, nous calculons séparément la position des futurs sommets issus de la subdivision pour chaque *keyframe*, ensuite nous appliquons l'opération de raffinement souhaitée sur la topologie partagée.

Conclusion

L'application de nos algorithmes sur des maillages surfaciques classiques de l'état de l'art nous a permis de produire des résultats de maillages hexaédriques surpassant parfois l'état de l'art et généralement d'assez bonne qualité pour leur utilisation pour la simulation. Pour les maillages issus de données médicales, la qualité des maillages satisfait les conditions pour être utilisés en simulation, mais la validation des données par l'application de codes de simulation n'a pas encore pu être faite.

Chapitre 4

Mise en oeuvre

Introduction

Dans le chapitre 2, les algorithmes que nous avons développés ont été expliqués d’une façon indépendante de la structure de données utilisée pour leur exploitation. Ce travail théorique a abouti aussi sur un important travail technique visant à vérifier nos hypothèses et optimiser le processus proposé pour obtenir des outils viables. Dans ce chapitre nous détaillons dans un premier temps les structures de données que nous avons utilisées pour l’implémentation de nos méthodes en justifiant leur intérêt. Ensuite nous décrivons l’outil principal découlant de nos travaux ainsi que comment il peut être utilisé pour remplir notre objectif initial d’exploitation de données médicales. Finalement nous abordons la bibliothèque de code et les outils de prototypage et de test développés en parallèle de ces travaux.

4.1 Structures de données

Pour l’implémentation des outils mettant en oeuvre nos algorithmes, trois structures de données distinctes ont été utilisées. Pour la construction des maillages surfaciques et volumiques, nous utilisons une structure de carte combinatoire implémentée dans la bibliothèque de topologie et géométrie CGoGN (https://github.com/cgogn/CGoGN_3) développée en interne par notre équipe. Pour la construction des squelettes courbes, nous utilisons une structure de graphe non orienté, et une structure de graphe d’incidence pour les squelettes mixtes.

4.1.1 Carte combinatoire orientée

Une carte combinatoire orientée est une représentation topologique de la décomposition cellulaire de variétés orientables généralisable en toute dimension. Les cellules sont représentées par des brins avec les relations topologiques, information de voisinages, connectant ces brins entre eux.

Décrire les cartes combinatoires incrémentalement de dimension en dimension permet une intuition simple du principe. Une carte de dimension 0, ou 0-carte (Figure 4.1 (a)), est composée de brins n’ayant aucune relation topologique. Chaque brin représente un point et la carte un nuage de points. Pour monter d’une dimension, et construire une 1-carte (Figure 4.1 (b)), il faut ajouter une relation ϕ_1 aux brins. ϕ_1 est la connexion d’un

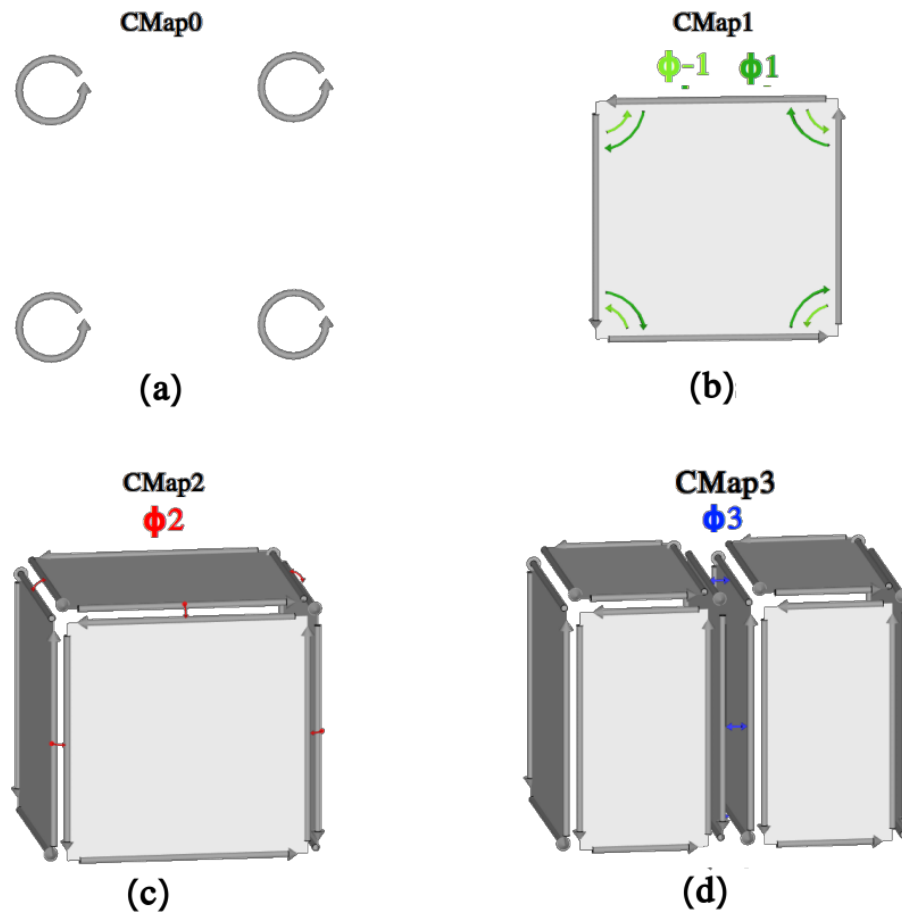


FIGURE 4.1 – (a) 0-carte, (b) 1-carte, (c) 2-carte, (d) 3-carte, avec les relations topologiques ajoutées pour monter en dimension

brin avec le brin “suivant”, ce qui induit la notion d’orientation de la carte. Cette relation définit implicitement une arête entre 2 brins reliés, et une face par un cycle. Par confort d’utilisation la relation $\phi - 1$, l’inverse de ϕ_1 , est souvent ajoutée. La construction d’une 2-carte (Figure 4.1 (c)) se fait par l’ajout de la relation ϕ_2 , qui relie un brin d’une face au brin d’une face voisine. Les brins connectés par ϕ_2 sont contraints d’être de directions opposées. Avec cette relation, un ensemble de faces connectées forme un volume fermé dont toutes les faces sont orientées dans le même sens. De la même façon, la construction d’une 3-carte (Figure 4.1 d.) se fait par l’ajout d’une relation ϕ_3 reliant les brins d’une face du volume aux brins d’une face de même degré sur un volume voisin pour former une composante connexe de volumes. Nous pouvons observer à chaque étape qu’une n-carte est composée d’un ensemble de (n-1) cartes reliées entre elles. Une 2-carte est composée d’un ensemble de faces ou de 1-cartes connectées par ϕ_2 , et une 3-carte est composée d’un ensemble de volumes ou de 2-cartes connectées par ϕ_3 . L’ajout itératif de relations topologiques aux brins de cette façon permet de modéliser un maillage de dimension quelconque.

Chaque brin de la carte est un représentant de plusieurs cellules de l’objet représenté : une pour chacune des dimensions décrites par la carte. Simultanément, chaque cellule est

composée d'un ensemble de brins. Ces ensembles de brins sont construits en appliquant des combinaisons des relations topologiques à partir d'un brin. Par exemple, dans une 2-carte, les sommets, les arêtes et les faces sont les sous-ensembles obtenus en appliquant respectivement la relation $\langle \phi_1 \circ \phi_2 \rangle$, $\langle \phi_2 \rangle$ et $\langle \phi_1 \rangle$ à partir d'un brin. Dans la Figure 4.2, on peut voir l'ensemble des brins qui composent le sommet, l'arête et la face du brin b.

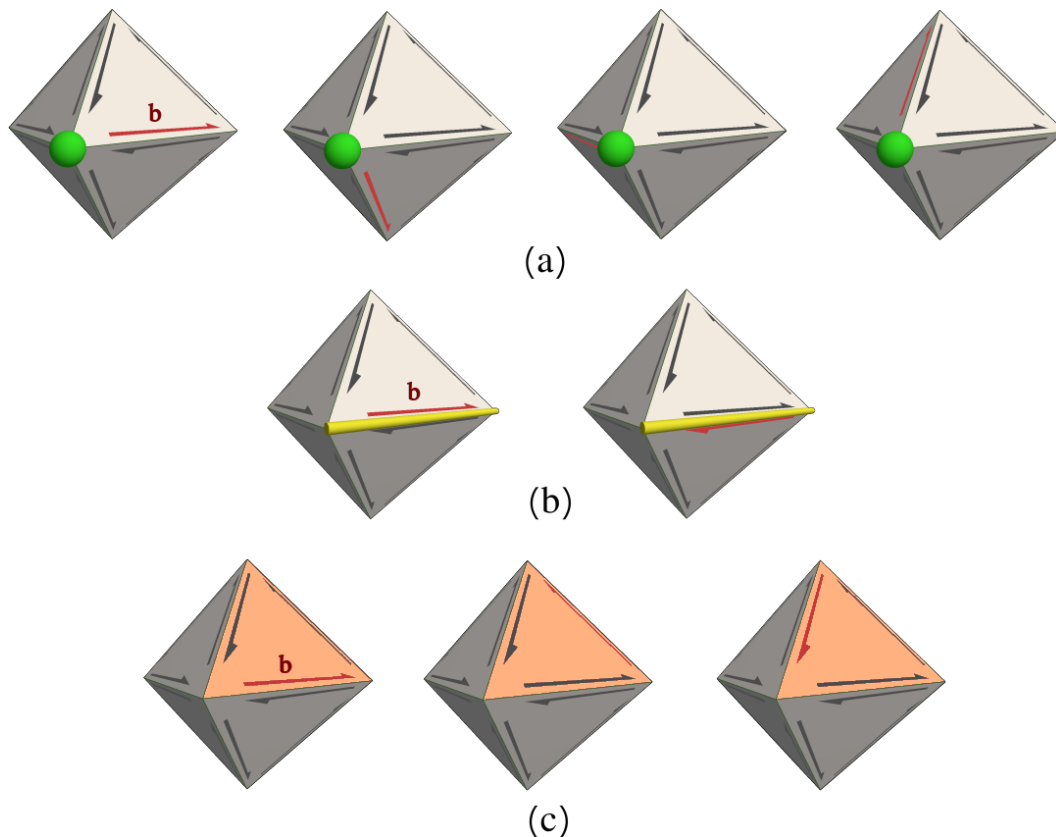


FIGURE 4.2 – Les 3 orbites d'un même brin b dans une 2-carte : (a) orbite sommet, (b) orbite arête, (c) orbite face

Afin de pouvoir associer des données aux cellules de la carte, on établit une indexation des cellules. Pour chaque dimension de la carte, tous les brins d'une même cellule se voient attribuer le même index. Ainsi, le brin b porte un index de sommet, un index d'arête et un index de face. Chacun de ces index est partagé avec tous les brins qui composent respectivement ce sommet, cette arête et cette face. Il est alors aisé de stocker des données dans des tableaux annexes. On accède aux données d'une cellule dans ces tableaux à l'index associé à l'un des brins de cette cellule.

L'intérêt de stocker les relations topologiques des brins est qu'en conséquence, tous les parcours du voisinage d'une cellule sont aussi efficaces que possible : la complexité pour parcourir le voisinage d'une cellule ne dépend que du nombre de voisins de la cellule et pas de la taille du maillage. En contre-partie, la complexité en mémoire des cartes combinatoires est plus élevée que d'autres structures. La structure en brin permet aussi un grand nombre de modifications topologiques du maillage sans effets de bords

ouvrant la porte à de nombreuses optimisations. Par exemple la connexion, ou couture (Figure 4.3 a.), d'éléments entre eux n'apporte de modifications qu'aux brins directement concernés. Il en va de même pour certaines subdivisions ou simplifications (Figure 4.3 b-c.). La possibilité d'associer trivialement tout type de données à tous les types de cellules représentables par la carte offre aussi de la flexibilité à l'utilisation.

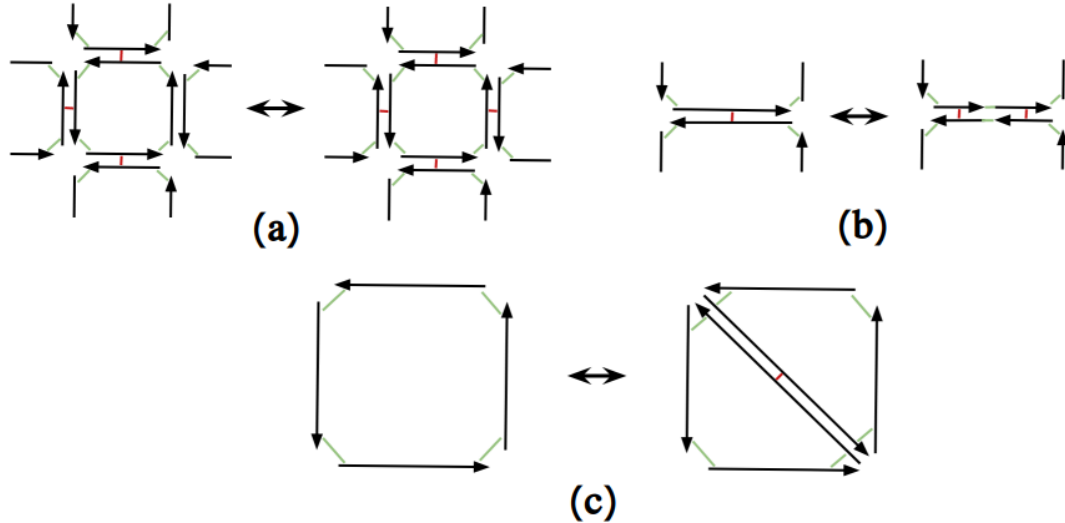


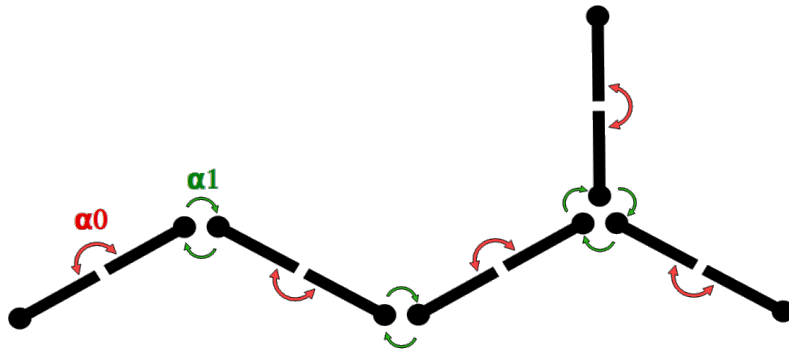
FIGURE 4.3 – (a) couture d'arête : ϕ_2 , (b) coupure d'arête, (c) coupure de face

La simplicité de circulation au sein du maillage et la possibilité d'effectuer des opérations de subdivision ou connexion efficacement sont des attributs particulièrement attractifs pour l'implémentation de notre méthode qui génère le maillage par blocs, et donc requiert de trouver les voisinages et effectuer un grand nombre de connexions. Construire l'échafaudage avec des 2-cartes permet d'aisément retrouver les tronçons et feuillet adjacents les uns aux autres avec une bonne orientation. Construire le maillage hexaédrique avec une 3-carte permet de paralléliser efficacement la connexion des hexaèdres entre eux et des optimisations sur les opérations de raffinement qui lui sont appliquées. Globalement, les cartes combinatoires facilitent la conception et la mise en oeuvre des opérations de modification géométrique impliquant des modifications de la topologie.

4.1.2 Graphe non orienté

Un graphe non orienté permet de représenter des maillages non variétés de dimension 1 composés uniquement d'arêtes et de sommets. Le graphe est composé de brins liés entre eux par les relations topologiques α_0 et α_1 .

Une arête est représentée par une paire de brins reliés par α_0 , et un sommet par un ensemble de brins reliés par α_1 . Les notions d'orbites autour de sommets et d'arêtes existent encore. L'ordre des arêtes autour d'un sommet est arbitraire. En revanche, au sein des arêtes la structure de brins faces à faces oriente l'arête par rapport aux sommets incidents. Les deux orientations possibles des arêtes sont représentées simultanément. Le graphe est "non-orienté" car on y représente les deux orientations et aucune n'est préférentielle. Cette propriété permet de conserver une orientation le long d'une branche

FIGURE 4.4 – Exemple de graphe non orienté. En rouge α_0 , en vert α_1 .

par composition de α_0 et α_1 .

Cette structure de graphe permet la représentation des squelettes courbes pour notre premier algorithme. Cette structure est attractive pour les mêmes raisons que les cartes combinatoires, elle offre la possibilité d'ajouter aisément des propriétés sur les cellules qu'elle représente, ici les demi-arêtes ou les brins eux mêmes, les sommets, et les arêtes, et les effets de bords à la modification sont limités aux brins directement incidents à la modification. L'orientabilité des arêtes vis à vis des sommets incidents et au sein des branches par la structure en demi arête réduit la complexité des parcours du graphe nécessaire pour son analyse, et simplifie les choses pour la connexion entre le squelette et l'échafaudage.

4.1.3 Graphe d'incidence

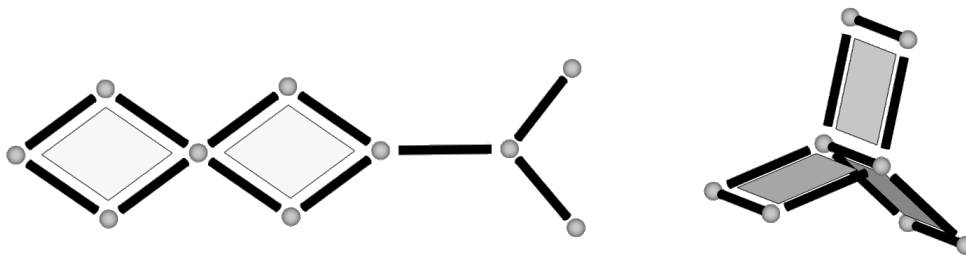


FIGURE 4.5 – Exemples de graphes d'incidence

Un graphe d'incidence est une représentation générique d'une décomposition cellulaire pour toute dimension [Lu et al., 2019b]. Dans un graphe de dimension 2, les cellules représentées sont les sommets, les arêtes, et les faces. Les cellules sont définies par leurs relations d'incidence avec des cellules de dimensions inférieures. Une arête est définie par ses deux sommets extrémités. Une face de degré n est définie par les n arêtes formant son bord. Les cellules de dimension n sont définies par les cellules incidentes de dimension $n - 1$, et pour pouvoir circuler plus efficacement dans le maillage on peut ajouter aussi la liste des cellules incidentes de dimensions $n + 1$ (Figure 4.6). Ainsi, les sommets connaissent leurs arêtes incidentes. Les arêtes connaissent leurs faces incidentes.

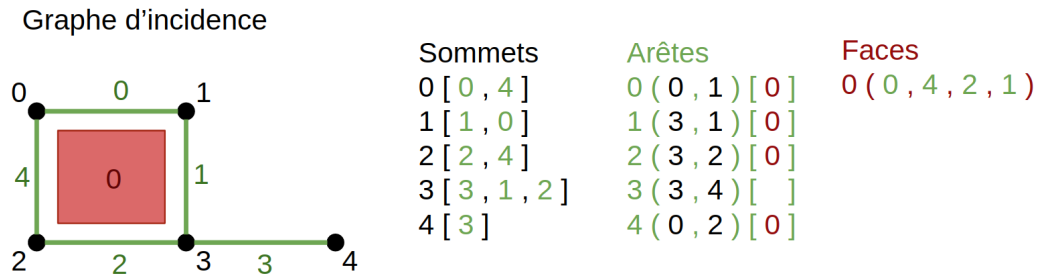


FIGURE 4.6 – Relations de voisinage dans un graphe d'incidence. Entre parenthèses les cellules de dimension $n - 1$ définissant la cellule. Entre crochet les cellules voisines de dimension $n + 1$.

Contrairement aux graphes non orientés et aux cartes combinatoires, cette structure ne contient aucune orientation intrinsèque, mais elle permet la représentation de maillages non variété de dimension 2.

Cette structure est adaptée pour la construction des squelettes mixtes pour notre deuxième algorithme. L'implémentation que nous avons faite des graphes d'incidence impose un ordonnancement à la construction. Les arêtes sont orientées par l'ordre de leur paire de sommets (Figure 4.7 (a)). La construction des faces est initiée par la liste des arêtes incidentes, celles-ci sont triées pour déterminer un cycle, et leur direction vis-à-vis des sommets dans ce cycle est notée (Figure 4.7 (b)). Pour un maillage non variété il n'est pas toujours possible de déterminer une orientation pour une surface, mais cette modification permet de déterminer des orientations locales entre deux faces voisines. Connaître les orientations relatives de deux faces adjacentes permet de simplifier la gestion des coutures des palettes lors de la construction du maillage volumique.

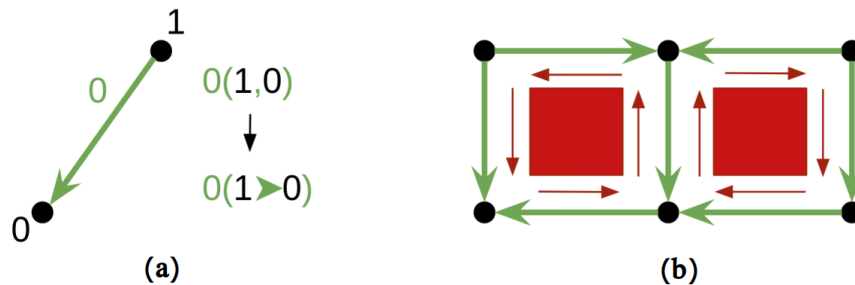


FIGURE 4.7 – (a) Orientation locale d'une arête par les sommets qui la définissent. (b) Orientation locale de faces par leur sens de parcours des arêtes qui les définissent.

4.2 Modules CGoGN

Les algorithmes décrits dans ce manuscrit ont été implémentés et testés avec la bibliothèque CGoGN. Une attention particulière a été portée à l'optimisation du processus et la parallélisation des étapes au maximum pour pouvoir traiter efficacement et rapidement des domaines complexes. Nous décrivons ici rapidement la bibliothèque CGoGN et ses spécificités, et ensuite l'implémentation faite des algorithmes.

4.2.1 CGoGN

CGoGN, la bibliothèque de topologie et géométrie de l'équipe IGG, contient une implémentation efficace du modèle des cartes combinatoires. Le modèle est représenté par une structure de conteneurs d'attributs dynamiques. Un conteneur d'attributs est un ensemble de tableaux, ou attributs, partageant une indexation commune. Chaque type de cellule représentable par la carte dispose de son propre conteneur d'attributs. Le conteneur des brins contient pour sa part les attributs de relations topologiques des brins ainsi que les indices des cellules dont ils font partie (Figure 4.8). L'utilisation d'indices partagés pour les tableaux simplifie les accès mémoire, et pour minimiser le nombre d'allocations mémoire les tableaux sont alloués par blocs.

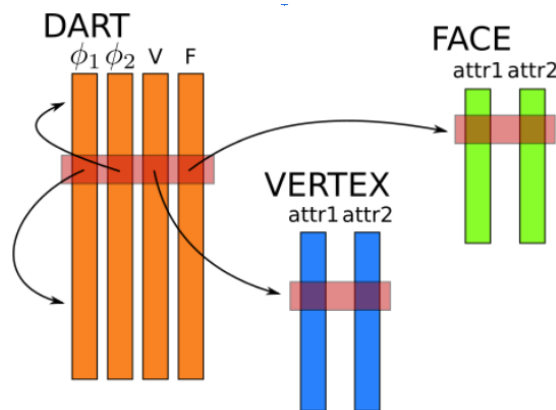


FIGURE 4.8 – Conteneurs d'attributs de brins, sommets, et faces, d'une 2-carte [Kraemer et al., 2014].

Initialement, CGoGN ne contenait que les cartes combinatoires orientées, mais dans le cadre de ce projet, les graphes non orientés et les graphes d'incidences ont été ajoutés. Le système de conteneurs a permis l'implémentation des graphes non orientés avec un simple changement des relations topologiques dans le conteneur de brins, et l'implémentation des graphes d'incidence avec des conteneurs d'attributs qui ne sont pas associés à un conteneur de brins.

L'utilisation de CGoGN pour l'implémentation des algorithmes de génération de maillage est motivée par l'efficacité de la structure de données des conteneurs d'attributs. La possibilité d'associer trivialement tout type de données à n'importe quel orbite offre une grande flexibilité d'implémentation. En profitant de cette flexibilité, nous pouvons pleinement tirer parti des propriétés de nos algorithmes pour optimiser l'implémentation.

4.2.2 Implémentation

En choisissant les bonnes structures de données et en séparant correctement les étapes de notre pipeline, il est possible de produire une implémentation hautement parallèle. C'est ce que nous avons fait au travers d'un module CGoGN intégrant le pipeline complet pour les squelettes courbes et les squelettes mixtes (Figure 4.9).

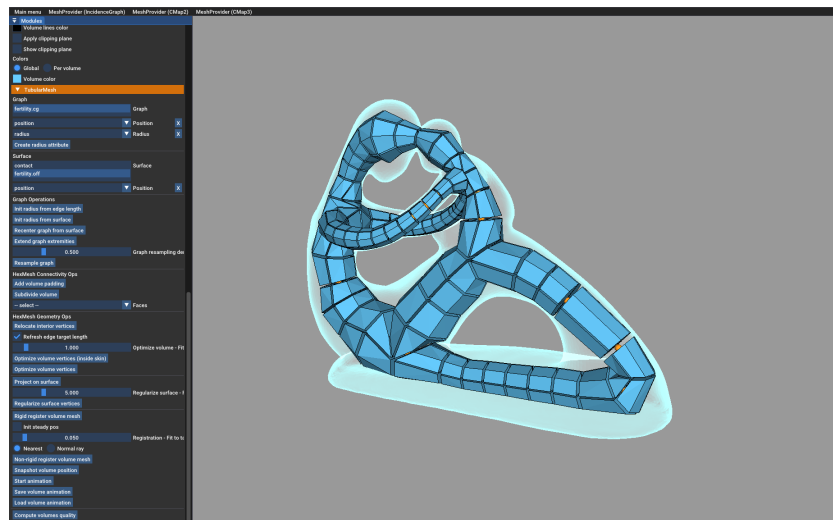


FIGURE 4.9 – Interface utilisateur du module CGoGN de génération depuis un squelette courbe.

Structures

Nos algorithmes nécessitent l'utilisation d'une structure pour le squelette, pour l'échafaudage, et pour le maillage volumique. Les 2-cartes et 3-cartes, avec les avantages décrits précédemment, sont utilisés respectivement pour l'échafaudage, et le maillage hexaédrique.

Nous avons choisi d'implémenter les deux algorithmes que nous avons produits sous la forme de deux modules séparés, utilisant le graphe non orienté pour le traitement des squelettes courbes, et le graphe d'incidence pour les squelettes mixtes. Ils seront ici expliqués ensemble en détaillant simplement les différences structurelles pertinentes à chaque étape.

(A) Analyse du squelette

Dans un premier temps dans une étape séquentielle, le squelette est analysé par inondation pour déterminer les informations topologiques du domaine et déduire des informations du maillage volumique à venir.

L'inondation progressive des éléments courbes (les arêtes isolées sans faces incidentes) permet de construire une liste des branches et une liste des embranchements ainsi que leurs types. Tous les sommets articulation ou embranchement sont marqués pour la construction de l'échafaudage. L'inondation des faces nous permet de construire une liste des feuillets et détecter les cas de géométries incompatibles avec notre structure.

En conséquence de l'analyse, le nombre requis de chaque élément structurel, les tronçons et palettes, est déterminé. La construction de ces éléments peut commencer. Lors de l'inondation, une pré-allocation par blocs des brins nécessaires à la construction du maillage hexaédrique est effectuée. Nous savons que chaque arête isolée nécessite 96 brins pour le tronçon, les embranchements orthogonaux 192 brins, et les faces et arêtes en bordure de feuillets en requièrent 48 chacune pour leur palette et demi tronçon respectivement. Les indices de début de blocs de brins sont stockés dans des attributs de

cellules du squelette, d'arête pour les tronçons et demi tronçons, de face pour les palettes, et de sommet pour les embranchements orthogonaux. Les coutures des brins entre eux n'ayant pas d'effet de bord, les pré-allouer à cette étape permet de construire nos éléments structurels sans création concurrente d'éléments au sein du conteneur de brins.

(B) Construction des échafaudages

La construction des échafaudages est une étape parallèle. Tous les sommets marqués à l'analyse pour la construction de l'échafaudage sont traités en parallèle. Chacun se voit attribuer une 2-carte et leur morceau de l'échafaudage est construit dedans.

Dans le cas de la génération à partir d'un squelette courbe, où le squelette est représenté par un graphe non orienté, un brin de chaque quad de la 2-carte est associé au brin du graphe non orienté de chaque branche incidente (Figure 4.10 (a)).

Dans le cas de la génération à partir d'un squelette mixte, où le squelette est représenté par un graphe d'incidence, un brin de chaque quad de la 2-carte est associé à la paire sommet et arête incidente, permettant ainsi de conserver une forme d'orientation dans la connexion de l'échafaudage au squelette (Figure 4.10 (b-c)).

Nous rappelons que sur les articulations et extrémités des branches, les sommets des 2-cartes ne sont pas plongés géométriquement. Ils ne sont construit que topologiquement.

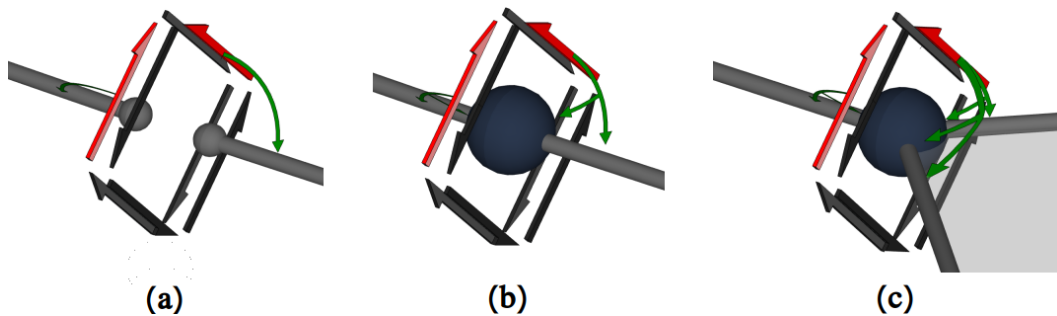


FIGURE 4.10 – (a) Association des quads de l'échafaudage avec les brins du graphe non orienté, (b) association des quads de l'échafaudage avec une paire sommet-arête du graphe d'incidence, (c) association des quads avec une paire sommet-arête du graphe d'incidence pour un sommet incident à une face.

(C) Propagation de la géométrie

La propagation de la géométrie le long des branches est effectuée en parallèle sur la liste des branches du squelette par l'utilisation de Rotation Minimizing Frames. A l'issue de ce processus, tous les sommets des 2-cartes sont maintenant plongés géométriquement.

(D) Constructions des tronçons et palettes

A partir des brins pré-alloués lors de l'analyse, les éléments structurels de notre maillage hexaédriques peuvent être assemblés et connectés aux échafaudages et aux faces du squelette.

En parallèle, les brins affectés aux arêtes des branches sont cousus en tronçons, et chaque hexaèdre du tronçon est associé au quad incident de l'échafaudage. L'association

est faite par un brin de chaque hexaèdre associé (Figure 4.11 (a)) à une des demi arêtes du quad de l'échafaudage. Les brins affectés aux arêtes au bord des feuillets sont cousus en demi tronçons et associés par un brin aux sommets incidents (Figure 4.11 (b)). Si l'un des sommets incidents possède une 2-carte, le demi-tronçon y est connecté. Les brins affectés aux faces des feuillets sont cousus en palettes et associés par un brin aux arêtes incidentes (Figure 4.11 (c)).

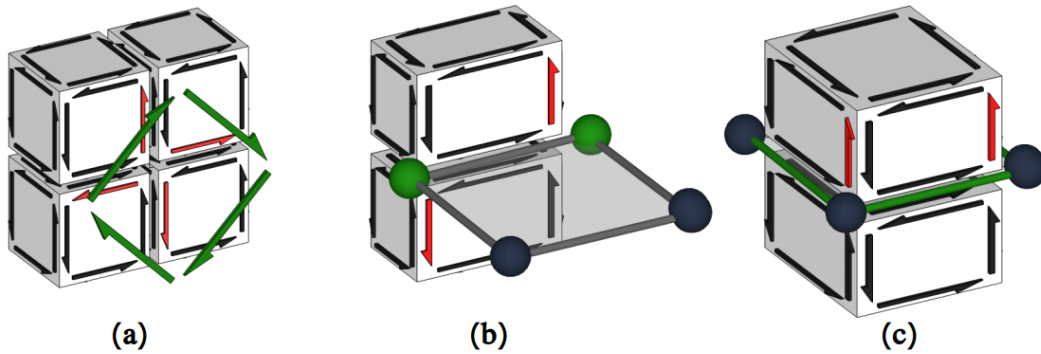


FIGURE 4.11 – (a) Tronçon pour une arête isolée, les brins rouges sont associés au quad incident, (b) demi-tronçon pour une arête de bord de feuillet, les brins rouges sont associés aux sommets incidents, (c) palette pour une face de feuillet, les brins rouges sont associés aux arêtes incidentes.

(E) Coutures des volumes

Comme la construction des éléments structuraux, la couture des éléments entre eux n'a pas d'effet de bord. La couture finale des volumes peut donc elle aussi être entièrement parallélisée.

Pour chaque arête des 2-cartes de l'échafaudage, les brins associés aux deux demi-arêtes sont récupérés et les hexaèdres correspondant sont cousus entre eux deux à deux. De même, pour chaque arête des feuillets, les brins des palettes incidentes sont récupérés et celles-ci sont cousues ensemble, ainsi que pour chaque sommet du bord d'un feuillet pour connecter les demi-tronçons entre eux et aux palettes incidentes.

Après cette étape, la topologie du maillage brut est terminée. Toutes les informations de connectivité ont été complétées, mais le plongement géométrique du maillage n'est pas fait.

(F) Plongement géométrique

Pour compléter le maillage brut, les informations géométriques issues des sommets de l'échafaudage et des feuillets du squelette sont transférées sur le maillage hexaédrique via les connexions établies précédemment entre les éléments structuraux du maillage hexaédrique, les échafaudages, et le squelette. Le maillage hexaédrique brut est maintenant complet topologiquement et géométriquement.

Conclusion

Dans le cadre de nos travaux nous avons proposé et développé une implémentation efficace de notre pipeline. Nous avons décrit ici comment hormis l'analyse du squelette, toutes les étapes peuvent être parallélisées par l'utilisation de structures de données adaptées et l'optimisation des prises de décisions locales lors de la construction du maillage hexaédrique. La mise en oeuvre du pipeline décrit ici a abouti sur deux des modules intégrés dans notre bibliothèque CGoGN permettant de rapidement produire des maillages.

4.3 CMapJS

Les cartes combinatoires orientées sont un outil puissant pour la génération et la modification de maillages, et comme expliqué précédemment, CGoGN est une implémentation efficace de cette représentation mathématique. L'efficacité de la bibliothèque en revanche n'est pas pertinente pour le prototypage et l'expérimentation. CGoGN est implémentée en C++, de ce fait la syntaxe est relativement lourde et la compilation du code est gourmande en temps. Pour le prototypage, la rapidité du programme produit par le langage C++ n'est pas une nécessité. Les critères importants pour le prototypage sont la simplicité de mise en oeuvre de l'élément à tester, et la souplesse du code.

Pour atteindre ces objectifs et gagner en productivité un travail a été fait pour réimplémenter le modèle des cartes combinatoires en une bibliothèque Javascript. Le Javascript est un langage interprété exécutable dans un navigateur web. Du fait d'être interprété le code ne requiert pas de temps de compilation, et en conséquence pour un projet relativement léger le chargement et l'exécution du code seront quasi immédiats. Il existe aussi un très grand nombre de bibliothèques open source en Javascript. L'exécution des projets dans un navigateur nous donne accès à l'ensemble des fonctionnalités d'interaction déjà existantes et une gestion des événements du clavier et de la souris déjà intégrée, il est donc trivial de créer une nouvelle application avec une interactivité personnalisée et modulable à la volée. L'exécution sur navigateur offre aussi la possibilité de très facilement partager les outils et données produites via la création de pages web.

La contrepartie des avantages énoncés pour le Javascript est la performance du langage qui sera typiquement 10-20% plus lent à l'exécution qu'un code équivalent en C++, mais vu que l'on souhaite traiter des données de petites tailles, ce n'est pas un problème. A posteriori, tous les outils développés en Javascript ont été utilisables sans problème de performances visibles sur tous types de systèmes, smartphones inclus.

4.3.1 Bibliothèque

Inspiré de CGoGN, CMapJS est basée sur un système de conteneurs d'attributs. Un conteneur contient un ensemble de tableaux de données. La longueur et les indices de ces tableaux sont gérés par le conteneur propriétaire. La base de la structure, la CMapBase, est composée d'un conteneur pour les brins et leurs attributs. Par héritage prototypal, on construit les types CMap0, CMap1, etc... par l'ajout d'attributs de brins pour les relations topologiques et les indices des cellules formées par les brins, ainsi que l'ajout de conteneurs d'attributs pour les nouvelles cellules émergentes avec l'augmentation de dimension. De cette façon on peut construire des cartes de toutes dimensions incrémentalement. On conserve de cette façon la représentation compacte et efficace de CGoGN qui

exploite des indexations de tableaux pour implicitement construire nos maillages plutôt que des pointeurs entre les éléments (Figure 4.8).

L'objectif d'utiliser cette bibliothèque pour le prototypage implique que la simplicité d'utilisation est primordiale. Pour maximiser la productivité avec CMapJS, deux efforts ont été faits au développement. D'un côté, un travail sur la simplicité de la syntaxe pour rendre le code le plus lisible possible. Les opérations des cartes sont nommées et construites de façon à ce que le code forme des phrases prenant les types de cellules et des lambdas expressions en paramètres. Le sucre syntaxique du Javascript est tout de même évité autant que possible pour que le code reste proche du C++ et puisse être rapidement traduit dans CGoGN si nécessaire.

Le résultat de ce travail de développement est une bibliothèque Javascript open source pour la topologie et la géométrie. Les cartes sont implémentées jusqu'à la dimension 3 : les nuages de points, les courbes, les maillages surfaciques, et les maillages volumiques, avec comme types respectifs : CMap0, CMap1, CMap2, et CMap3, avec toutes les opérations de base de topologie. Les graphes non orientés et les graphes d'incidences ont été ajoutés dans le contexte du développement d'outils. L'import et l'export de quelques formats majeurs est codé, ainsi que quelques algorithmes de subdivision tels que Catmull Clark, Loop, et Butterfly, et des opérations de mesures de propriétés géométriques comme la qualité des mailles, les normales, et la courbure. Ces éléments pourront être utilisés comme exemples de bonne pratique pour étoffer la bibliothèque avec plus d'opérations et d'algorithmes de modification de maillage. Le rendu des données est fait à l'aide de la bibliothèque ThreeJS. Celle-ci contient tous les outils utiles pour la visualisation des cartes dans une scène ainsi que les fonctionnalités pour l'interaction avec les maillages.

4.3.2 Applications

Cette bibliothèque a permis le développement de plusieurs outils de prototypage et de génération de données. Les deux outils principaux basés sur CMapJS sont un éditeur de graphes pour générer ou corriger des squelettes, ainsi qu'un outil de partition de sphère permettant de tester différents algorithmes et différentes configurations interactivement.

Editeur de graphe

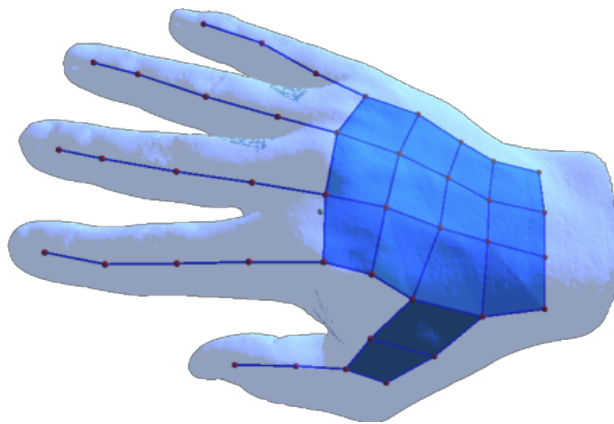


FIGURE 4.12 – Surface d'une main et squelette mixte en cours d'édition

Initialement dans le développement des algorithmes, nous n'avions pas de données de tests et pas de méthode d'extraction de squelette ou de méthode d'adaptation du squelette. Il nous était donc nécessaire de pouvoir produire manuellement des squelettes, aussi bien pour produire des squelettes à partir de surfaces que pour créer des configurations de tests.

Pour produire ces squelettes, un outil de modélisation et d'édition de graphe a été développé permettant de construire un graphe d'incidence à la main ou en éditer un avec la possibilité d'utiliser un maillage surfacique comme support visuel.

Topologiquement, la construction d'un graphe d'incidence ne requiert que quatre opérations fondamentales : l'ajout d'un sommet, l'ajout d'une arête à partir de deux sommets, l'ajout d'une face à partir d'une boucle fermée d'arêtes, et la suppression d'une cellule. En composant ces opérations de base on peut construire un ensemble d'opérateurs topologiques avec l'opération géométrique de translation permettant d'intuitivement et rapidement construire un squelette. Par composition de ces opérations on définit les opérations de connexion de sommets, d'ajout d'une face, d'extrusion d'un sommet, d'extrusion d'une arête, de coupure d'une arête, et de coupure d'une face.

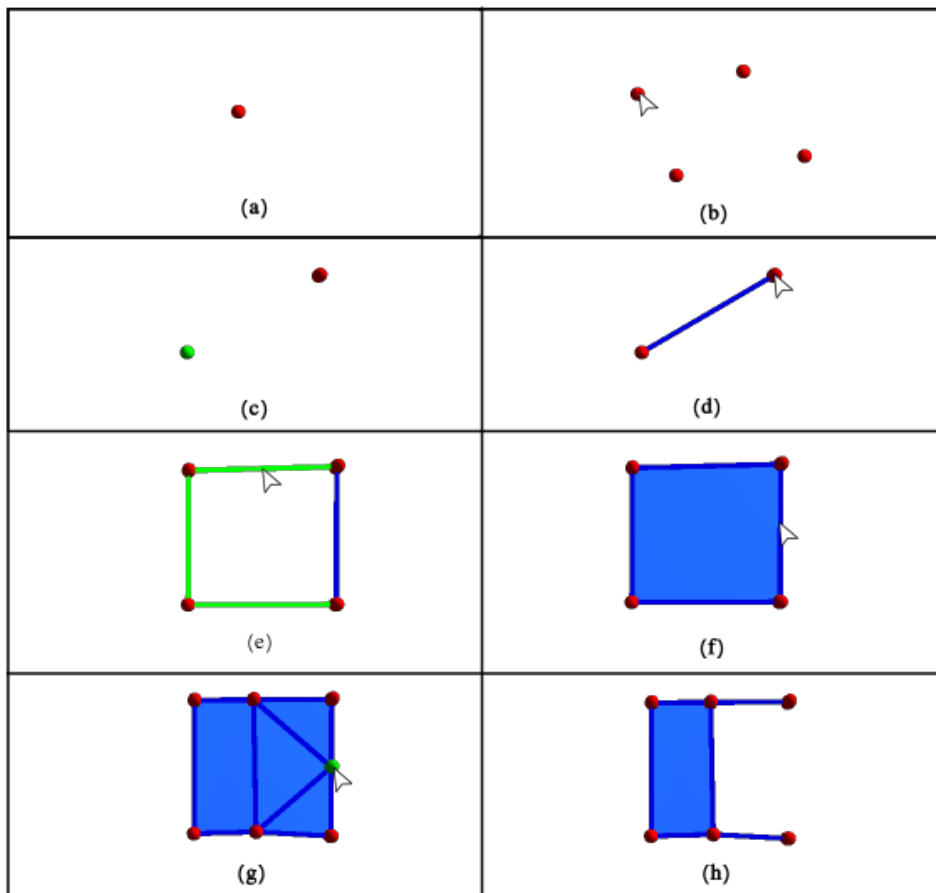


FIGURE 4.13 – Opérations de base de construction d'un graphe d'incidence. (a-b) ajout de sommets, (c-d) ajout d'une arête, (e-f) ajout d'une face, (g-h) suppression d'un sommet.

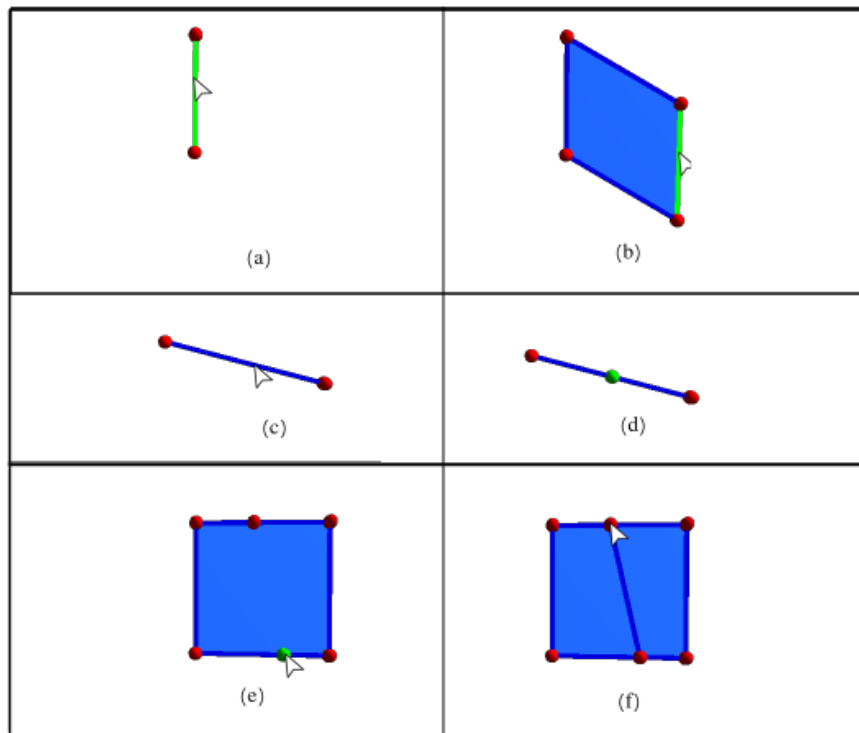


FIGURE 4.14 – Opérations composées implémentées dans l’outil. (a-b) extrusion d’une arête en face, (c-d) coupure d’une arête, (e-f) coupure d’une face entre deux sommets.

Cet outil a permis de générer manuellement un grand nombre de cas de test pour notre algorithme, un bestiaire des configurations, des cas particuliers, et des cas extrêmes ou dégénérés, qu’il aurait été difficile d’obtenir algorithmiquement. Il a aussi permis la construction de squelettes simples et la correction de squelettes mal construits par les premières tentatives d’extraction.

Partition de sphère

Un élément clef de notre méthode de génération de maillage est la construction de l’échafaudage autour des embranchements avec une partition de la surface d’une sphère en quadrilatères à partir d’un ensemble de points graines sur la sphère. La méthode existante pour ce genre de construction était itérative, sans critère donné pour l’ordre de traitement des points. Tester une méthode itérative avec des cas particuliers sans pouvoir observer en direct l’impact de petites modifications sur les données d’entrées ou les critères n’est pas pratique. Une petite modification de la position d’un point peut avoir un impact conséquent sur le résultat. De plus, la géométrie et la topologie sur la surface d’une sphère peuvent être contre intuitives et dures à représenter en 2D, donc avoir un support visuel 3D était une nécessité. Il a donc semblé pertinent de produire un outil permettant interactivement de générer des ensembles de points modifiables à la volée avec la visualisation du résultat étape par étape. CMapJS est parfaitement adaptée pour ce genre de cas et a donc été utilisée pour créer un outil de prototypage d’algorithmes de partition de sphère.

Initialement l'outil était fait pour tester et améliorer la méthode de [Panotopoulou et al., 2018], mais après la réalisation que cette méthode n'était pas idéale pour nos besoins il a aussi servi à développer notre propre méthode, ainsi que tester la méthode de [Peltier et al., 2021] publiée ultérieurement.

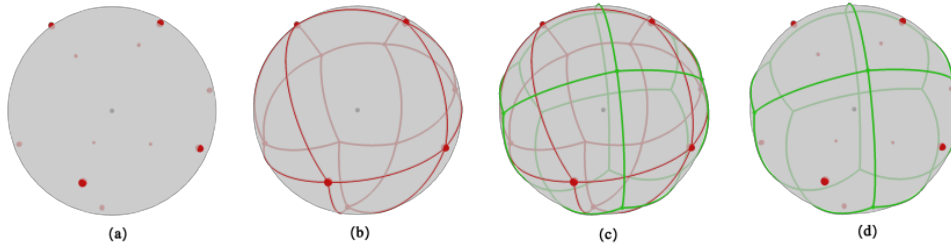


FIGURE 4.15 – Aperçu de l'outil de partition de sphère. (a) points d'entrées, (b) enveloppe remaillée, (c) enveloppe et dual, (d) dual des points d'entrées.

L'outil a été construit en utilisant ThreeJS et CMapJS. Sur la sphère à partitionner l'utilisateur peut interactivement placer des points (Figure 4.15 a.) qui sont ensuite utilisés pour obtenir une surface quadrilatère avec l'une des trois méthodes mentionnées précédemment. Les points sont enregistrés sous la forme d'un nuage de points CMap0, pour bénéficier des outils de rendu de CMapJS et avoir une gestion simple de l'indexation au fil des modifications. La surface partitionnée est représentée par une CMap2 pour avoir accès aux opérations topologiques efficaces et les fonctions telles que le dual de Poincaré qui est trivial dans une carte combinatoire.

Trois méthodes sont implémentées dans l'outil, la méthode de [Panotopoulou et al., 2018], la méthode de [Peltier et al., 2021], et notre méthode (Figure 4.15), ainsi que les cas particuliers des embranchements orthogonaux et plats. Pour les méthodes itératives, il est possible de définir des critères sur l'ordre de traitement des points, ou d'imposer l'ordre en sélectionnant manuellement les points. Il est possible d'afficher les étapes intermédiaires une par une ainsi que l'enveloppe et son dual au fur et à mesure, ou directement afficher le résultat final. Les points placés par l'utilisateur peuvent aussi être déplacés et il est possible de voir l'impact sur le résultat en temps réel. Ces méthodes déjà implémentées pourront servir d'exemples pour insérer de nouvelles méthodes dans l'outil pour permettre la comparaison avec l'état de l'art.

Conclusion

En plus de la contribution théorique apportée par nos deux algorithmes de génération de maillages à partir de squelettes et l'algorithme de partition de sphère en quadrilatères, nous avons mis ces travaux en application avec une contribution technique à travers une proposition d'implémentation hautement parallèle pour traiter efficacement des données de grande dimension. Le pipeline complet est implémenté dans la bibliothèque CGoGN (C++), avec en plus un jeu d'outils de prototypage, modélisation, et de visualisation basés sur une bibliothèque CMapJS (Javascript) de topologie et géométrie utilisant la même structure de cartes que CGoGN.

Conclusion

Nos travaux avaient pour objectif de proposer une méthode de génération de maillages hexaédriques pour des domaines géométriques tubulaires complexes issus de données médicales dans le but d'utiliser ces maillages pour la simulation. Ce type de géométrie complexe n'est pas aisément traitable par les méthodes classiques de génération de maillage, et ils sont très demandés pour la recherche médicale. Le type de domaine étudié, par leur complexité, proscrit l'intervention manuelle de l'utilisateur, et l'intention d'application de simulation impose des contraintes sur la topologie et la géométrie du maillage hexaédrique à produire.

Contributions

Pour résoudre ce problème, nous avons proposé deux algorithmes basés sur l'exploitation de la représentation squelettique du domaine étudié et la construction d'un échafaudage s'appuyant sur ce squelette pour effectuer une décomposition du domaine en blocs, ainsi qu'un algorithme de partition de sphère en quads nécessaire à l'étape de construction des échafaudages.

Génération basée squelette courbe

Le premier algorithme que nous avons proposé permet la génération d'un maillage hexaédrique à partir d'un squelette courbe. Le squelette courbe, représentation simplifiée de la topologie du maillage, est utilisé pour décomposer le domaine en un ensemble de segments sur lesquels s'insèrent des tronçons hexaédriques. Un échafaudage est construit sur chaque sommet du squelette pour servir de support contenant les informations de connectivité et de géométrie des tronçons. Ce premier algorithme nous a permis de générer des maillages respectant les critères communs de qualité tels que la régularité des sommets, l'alignement à la surface, en minimisant le nombre d'éléments utilisés. Il a aussi pu être testé sur des données médicales avec des résultats satisfaisants.

Génération basée squelette mixte

Le deuxième algorithme proposé est une extension du premier, utilisant des squelettes mixtes, composés de surfaces et de courbes, pour une meilleure gestion des zones aplaties du domaine, représentés par des feuillets dans le squelette. Le principe d'échafaudage pour décomposer le domaine est conservé, et de nouveaux éléments de construction : le demi tronçon et la palette, sont définis pour traiter la décomposition des feuillets.

Ces deux algorithmes présentent des propriétés intéressantes de localité des décisions ouvrant la porte à du parallélisme efficace, et une structure topologique permettant de faire des suppositions a posteriori pour des raffinements du maillage.

Algorithme de partition de sphère

Pour générer l'échafaudage dont dépendent nos algorithmes sur les embranchements, nous avons proposé un nouvel algorithme de partition de sphère en quads. A partir des points d'intersection des branches avec une sphère centrée sur l'embranchement, notre méthode utilise une représentation duale de l'échafaudage par la construction et le remaillage de l'enveloppe convexe de l'ensemble de points pour produire une partition de la sphère en quads la plus proche possible du diagramme de Voronoï des points de départ.

Implémentations et optimisations

En plus de cette contribution théorique, nous proposons une implémentation efficace des algorithmes en exploitant les propriétés de parallélisation des algorithmes à l'aide des cartes combinatoires dans la bibliothèque CGoGN (C++). Cette implémentation consiste en deux pipelines complets, de génération, raffinement, et optimisation de maillages hexaédriques. Elle a permis la production de quelques maillages hexaédriques sur des données médicales telles qu'un réseau vasculaire cérébral et des bronches. En plus de ces pipelines, une bibliothèque Javascript de topologie et géométrie a été développée avec une suite d'outils de modélisation, visualisation, et prototypage, basés web l'utilisant.

Perspectives

Nous avons mis en avant plusieurs méthodes et développé une solution logicielle contenant le pipeline complet de nos méthodes, cependant certains travaux complémentaires permettraient d'augmenter leur portée ou de confirmer leur validité.

Algorithme de partition de sphère

L'algorithme de partition de sphère que nous avons développé a été testé avec succès sur des centaines de configurations générées aléatoirement, mais cela n'exclut pas l'existence de cas limites. Une démonstration mathématique rigoureuse de la robustesse de l'algorithme pourrait s'avérer utile pour pérenniser notre méthode. Dans l'hypothèse où des cas limites seraient trouvés ou que la méthode serait démontrée incapable de gérer toutes les configurations, la méthode proposée par [Peltier et al., 2021] pourrait être adaptée à nos besoins et insérée dans notre pipeline. Un travail sur la priorité des opérations lors de l'insertion itérative des points à traiter reste à effectuer. Leur méthode est prouvée robuste pour toutes les configurations mais ne propose pas de critère sur l'ordre du traitement des points d'entrée du partitionnement.

Extraction automatique de squelettes mixtes

Avoir à disposition une méthode d'extraction de squelettes mixtes ouvrirait plusieurs pistes d'amélioration de nos méthodes. Entre autres, cela nous permettrait de compléter le

pipeline en remplaçant la construction manuelle des squelettes mixtes avec une extraction automatique.

L'extension du traitement des squelettes courbes aux squelettes mixtes apporte un grand nombre de nouvelles configurations géométriques et topologiques possible dans le squelette. Nous avons identifié plusieurs types de ces configurations, mais nous ne sommes pas certains d'avoir identifié la liste exhaustive des possibilités. Disposer de plus de squelettes issus de données réelles permettrait de confirmer l'exhaustivité des configurations possibles.

Adaptation et remaillage du squelette

La génération automatique de squelettes mixtes permettrait aussi un travail sur l'adaptation et le remaillage du squelette avec les critères que nous avons établi, ainsi que la gestion des cas particuliers que nous avons identifiés pour lesquels un remaillage de la topologie interne des feuillet est nécessaire pour conserver la compatibilité à notre structure.

Nous avons identifié un cas incompatible avec notre structure lorsqu'un sommet embranchement est connecté à une charnière. Un travail sur la modification géométrique du squelette dans ce genre de situation pour déplacer l'embranchement pourrait être envisagé. Alternativement, ce genre de cas pourrait être géré par l'insertion d'une interface d'hexaèdres du même type que celles proposées par [Livesu et al., 2016] dans leur section *5 Resolution control*, pour l'adaptation de leurs maillages le long des branches. Cependant, une attention particulière à la préservation des propriétés topologiques de nos maillages serait nécessaire si l'on souhaite conserver les optimisations spécialisées pour la simulation.

Caractérisation des domaines géométriques

Distinguer si un domaine peut être représenté correctement par un squelette n'est pas évident. De même, savoir si un domaine bénéficierait d'être représenté par un squelette mixte plutôt qu'un squelette courbe ne l'est pas non plus. Disposer d'une méthode d'extraction automatique de squelettes mixtes permettrait de tester plus de données et effectuer des comparaisons de résultats entre les deux versions de l'algorithme. Cette comparaison donnerait la possibilité de trouver des critères pour caractériser les domaines plus précisément.

Validation des résultats par l'expérience

Les maillages résultants de nos pipelines ont été évalués avec des critères théoriques sur le Jacobien Normalisé, l'alignement à la surface, et la régularité des éléments. Ces critères théoriques sont atteints, mais aucune mise en pratique n'a pu être faite pour le moment. L'utilisation du pipeline et l'application de codes de simulation sur les maillages produits par des experts permettrait une validation pratique de nos travaux et permettrait peut être de découvrir de nouvelles problématiques à résoudre.

Bibliographie

- [Armstrong et al., 2015] Armstrong, C. G., Fogg, H. J., Tierney, C. M., and Robinson, T. T. (2015). Common themes in multi-block structured quad/hex mesh generation. *Procedia Engineering*, 124 :70–82. 24th International Meshing Roundtable.
- [Beaufort et al., 2021] Beaufort, P.-A., Reberol, M., Liu, H., Ledoux, F., and Bommès, D. (2021). Hex me if you can. *arXiv preprint arXiv :2111.10295*.
- [Blacker and Meyers, 1993] Blacker, T. D. and Meyers, R. J. (1993). Seams and wedges in plastering : A 3-d hexahedral mesh generation algorithm. *Engineering with Computers*, 9(2) :83–93.
- [Bommès et al., 2013] Bommès, D., Campen, M., Ebke, H.-C., Alliez, P., and Kobbelt, L. (2013). Integer-grid maps for reliable quad meshing. *ACM Trans. Graph.*, 32(4).
- [Bracci et al., 2019] Bracci, M., Tarini, M., Pietroni, N., Livesu, M., and Cignoni, P. (2019). Hexalab.net : An online viewer for hexahedral meshes. *Computer-Aided Design*, 110 :24–36.
- [Brückler et al., 2022] Brückler, H., Gupta, O., Mandad, M., and Campen, M. (2022). The 3d motorcycle complex for structured volume decomposition. *Computer Graphics Forum*, 41(2) :221–235.
- [Calderan et al., 2019] Calderan, S., Hutzler, G., and Ledoux, F. (2019). Dual-based user-guided hexahedral block generation using frame fields.
- [Chen and Zhu, 2022] Chen, D. and Zhu, L. (2022). Branching tubular surfaces based on spherical voronoi diagrams. *Computers Graphics*, 105 :1–11.
- [Decroocq et al., 2022] Decroocq, M., Frindel, C., Ohta, M., and Lavou’e, G. (2022). Modeling and hexahedral meshing of arterial networks from centerlines. *ArXiv*, abs/2201.08279.
- [Docampo-Sánchez, 2019] Docampo-Sánchez, J. (2019). A regularization approach for automatic quad mesh generation.
- [Dou et al., 2022] Dou, Z., Lin, C., Xu, R., Yang, L., Xin, S., Komura, T., and Wang, W. (2022). Coverage axis : Inner point selection for 3d shape skeletonization. *Computer Graphics Forum*, 41(2) :419–432.
- [Dumery et al., 2022] Dumery, C., Protais, F., Mestrallet, S., Bourcier, C., and Ledoux, F. (2022). Evocube : a genetic labeling framework for polycube-maps.
- [Fuentes Suárez and Hubert, 2018] Fuentes Suárez, A. J. and Hubert, E. (2018). Scaffolding skeletons using spherical voronoi diagrams : feasibility, regularity and symmetry. *Computer-Aided Design*, 102 :83–93.
- [Gao et al., 2017] Gao, X., Huang, J., Xu, K., Pan, Z., Deng, Z., and Chen, G. (2017). Evaluating hex-mesh quality metrics via correlation analysis. *Computer Graphics Forum*, 36 :105–116.
- [Gao et al., 2019] Gao, X., Shen, H., and Panozzo, D. (2019). Feature preserving octree-based hexahedral meshing. *Computer Graphics Forum*, 38 :135–149.
- [Goff et al., 2019] Goff, N. L., Ledoux, F., Janodet, J.-C., and Owen, S. J. (2019). Guaranteed quality-driven hexahedral overlay grid method.
- [Gregson et al., 2011] Gregson, J., Sheffer, A., and Zhang, E. (2011). All-Hex Mesh Generation via Volumetric PolyCube Deformation. *Computer Graphics Forum*, 30(5) :1407–1416.

- [Hijazi et al., 2010] Hijazi, Y., Bechmann, D., Cazier, D., Kern, C., and Thery, S. (2010). Fully-automatic branching reconstruction algorithm : application to vascular trees. In *Shape Modeling International (SMI10), Aix-en-Provence, 21-23 June*.
- [Hoarau et al., 2016] Hoarau, Y., Choquet, P., Goetz, C., Fouras, A., Dubsy, S., Braza, M., Saintlos-Brillac, S., Plouraboué, F., and Lo Jacono, D. (2016). Flow and particles deposition in rabbit and rat airways under realistic inflow rate. In Braza, M., Bottaro, A., and Thompson, M., editors, *Advances in Fluid-Structure Interaction*, pages 193–204, Cham. Springer International Publishing.
- [Hu et al., 2020] Hu, Y., Schneider, T., Wang, B., Zorin, D., and Panozzo, D. (2020). Fast tetrahedral meshing in the wild. *ACM Transactions on Graphics*, 39(4).
- [Hu et al., 2018] Hu, Y., Zhou, Q., Gao, X., Jacobson, A., Zorin, D., and Panozzo, D. (2018). Tetrahedral meshing in the wild. *ACM Trans. Graph.*, 37(4).
- [Huang et al., 2022] Huang, Q., Zhang, W.-X., Wang, Q., Liu, L., and Fu, X.-M. (2022). Untangling all-hex meshes via adaptive boundary optimization. *Graphical Models*, 121 :101136.
- [Knupp, 2000] Knupp, P. (2000). Achieving finite element mesh quality via optimization of the jacobian matrix norm and associated quantities. part i—a framework for surface mesh optimization. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING Int. J. Numer. Meth. Engng*, 48 :401–420.
- [Kraemer et al., 2014] Kraemer, P., Untereiner, L., Jund, T., Thery, S., and Cazier, D. (2014). Cgogn : n-dimensional meshes with combinatorial maps. In Sarrate, J. and Staten, M., editors, *Proceedings of the 22nd International Meshing Roundtable*, pages 485–503, Cham. Springer International Publishing.
- [Li et al., 2020] Li, C., Qiang, S., and Hua, X. (2020). Advances in automatic hexahedral meshing. *Journal of Physics : Conference Series*, 1637 :012141.
- [Liu et al., 2018] Liu, H., Zhang, P., Chien, E., Solomon, J., and Bommers, D. (2018). Singularity-constrained octahedral fields for hexahedral meshing. *ACM Trans. Graph.*, 37(4).
- [Livesu et al., 2016] Livesu, M., Muntoni, A., Puppo, E., and Scateni, R. (2016). Skeleton-driven adaptive hexahedral meshing of tubular shapes. *Computer Graphics Forum*, 35(7) :237–246.
- [Livesu et al., 2020] Livesu, M., Pietroni, N., Puppo, E., Sheffer, A., and Cignoni, P. (2020). Loopycuts : Practical feature-preserving block decomposition for strongly hex-dominant meshing. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*, 39(4).
- [Livesu et al., 2021] Livesu, M., Pitzalis, L., and Cherchi, G. (2021). Optimal dual schemes for adaptive grid based hexmeshing.
- [Livesu et al., 2015] Livesu, M., Sheffer, A., Vining, N., and Tarini, M. (2015). Practical hex-mesh optimization via edge-cone rectification. *ACM Transactions on Graphics*, 34(4).
- [Livesu et al., 2013] Livesu, M., Vining, N., Sheffer, A., Gregson, J., and Scateni, R. (2013). Polycut : Monotone graph-cuts for polycube base-complex construction. *Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH ASIA 2013)*, 32(6).
- [Lu et al., 2017] Lu, J. H.-C., Quadros, W. R., and Shimada, K. (2017). Evaluation of user-guided semi-automatic decomposition tool for hexahedral mesh generation. *Journal of Computational Design and Engineering*, 4(4) :330–338.
- [Lu et al., 2019a] Lu, L., Morse, M. J., Rahimian, A., Stadler, G., and Zorin, D. (2019a). Scalable simulation of realistic volume fraction red blood cell flows through vascular networks. *CoRR*, abs/1909.11085.
- [Lu et al., 2019b] Lu, L., Morse, M. J., Rahimian, A., Stadler, G., and Zorin, D. (2019b). Scalable simulation of realistic volume fraction red blood cell flows through vascular networks. *CoRR*, abs/1909.11085.
- [Marschner et al., 2020] Marschner, Z., Palmer, D., Zhang, P., and Solomon, J. (2020). Hexahedral mesh repair via sum-of-squares relaxation. *Computer Graphics Forum*, 39(5) :133–147.

- [Mattingly et al., 2015] Mattingly, W., H., J., Paris, R., Chang, D.-j., and Pani, R. (2015). 3d modeling of branching structures for anatomical instruction. *Journal of Visual Languages Computing*, 29.
- [Murdoch et al., 1997] Murdoch, P., Benzley, S., Blacker, T., and Mitchell, S. A. (1997). The spatial twist continuum : A connectivity based method for representing all-hexahedral finite element meshes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 28(2) :137–149.
- [Na et al., 2002] Na, H.-S., Lee, C.-N., and Cheong, O. (2002). Voronoi diagrams on the sphere. *Computational Geometry*, 23(2) :183–194.
- [Panotopoulou et al., 2018] Panotopoulou, A., Ross, E., Welker, K., Hubert, E., and Morin, G. (2018). Scaffolding a skeleton. *Research in Shape Analysis*, 12 :17–35.
- [Papadimitrakakis et al., 2020] Papadimitrakakis, D., Armstrong, C., Robinson, T., Moigne, A., and Shahpar, S. (2020). Building direction fields on the medial object to generate 3d domain decompositions for hexahedral meshing.
- [Peltier et al., 2021] Peltier, S., Morin, G., and Aholou, D. (2021). Tubular parametric volume objects : Thickening a piecewise smooth 3d stick figure. *Computer Aided Geometric Design*, 85 :101981.
- [Peng et al., 2011] Peng, C.-H., Zhang, E., Kobayashi, Y., and Wonka, P. (2011). Connectivity editing for quadrilateral meshes. *ACM Transactions of Graphics*, 30(6).
- [Pietroni et al., 2022] Pietroni, N., Campen, M., Sheffer, A., Cherchi, G., Bommes, D., Gao, X., Scateni, R., Ledoux, F., Remacle, J.-F., and Livesu, M. (2022). Hex-mesh generation and processing : a survey.
- [Pitzalis et al., 2021] Pitzalis, L., Livesu, M., Cherchi, G., Gobbetti, E., and Scateni, R. (2021). Generalized adaptive refinement for grid-based hexahedral meshing. *ACM Trans. Graph.*, 40(6).
- [Protais et al., 2022] Protais, F., Reberol, M., Ray, N., Corman, E., Ledoux, F., and Sokolov, D. (2022). Robust Quantization for Polycube Maps. *Computer-Aided Design*, Volume 150(103321).
- [Quadros, 2016] Quadros, W. R. (2016). Laytracks3d : A new approach for meshing general solids using medial axis transform. *Computer-Aided Design*, 72 :102–117. 23rd International Meshing Roundtable Special Issue : Advances in Mesh Generation.
- [Ray et al., 2017] Ray, N., Sokolov, D., Reberol, M., Ledoux, F., and Lévy, B. (2017). Hexahedral Meshing : Mind the Gap! working paper or preprint.
- [Remacle et al., 2012] Remacle, J.-F., Lambrechts, J., Seny, B., Marchandise, E., Johnen, A., and Geuzainet, C. (2012). Blossom-quad : A non-uniform quadrilateral mesh generator using a minimum-cost perfect-matching algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(9) :1102–1119.
- [Schneiders, 2005] Schneiders, R. (2005). A grid-based algorithm for the generation of hexahedral element meshes. *Engineering with Computers*, 12 :168–177.
- [Shepherd and Johnson, 2008] Shepherd, J. and Johnson, C. (2008). *Eng. Comput. (Lond.)*, pages 195–213.
- [Siddiqi et al., 2002] Siddiqi, K., Bouix, S., Tannenbaum, A., and Zucker, S. (2002). Hamilton-jacobi skeletons. *International Journal of Computer Vision*, 48 :215–231.
- [Sorkine and Alexa, 2007] Sorkine, O. and Alexa, M. (2007). As-Rigid-As-Possible Surface Modeling. In Belyaev, A. and Garland, M., editors, *Geometry Processing*. The Eurographics Association.
- [Staten et al., 2005] Staten, M. L., Owen, S. J., and Blacker, T. D. (2005). Unconstrained paving & plastering : A new idea for all hexahedral mesh generation. In Hanks, B. W., editor, *Proceedings of the 14th International Meshing Roundtable*, pages 399–416, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.

- [Tagliasacchi et al., 2012] Tagliasacchi, A., Alhashim, I., Olson, M., and Zhang, H. (2012). Mean curvature skeletons. In *Computer Graphics Forum (Proc. of the Symposium on Geometry Processing)*, volume 31, pages 1735–1744. Wiley Online Library.
- [Tagliasacchi et al., 2016] Tagliasacchi, A., Delame, T., Spagnuolo, M., Amenta, N., and Telea, A. C. (2016). 3D Skeletons : A State-of-the-Art Report. *Computer Graphics Forum*, 35(2) :573–597.
- [Takayama, 2019] Takayama, K. (2019). Dual sheet meshing : An interactive approach to robust hexahedralization. *Computer Graphics Forum*, 38(2) :37–48.
- [Usai et al., 2015] Usai, F., Livesu, M., Puppo, E., Tarini, M., and Scateni, R. (2015). Extraction of the quad layout of a triangle mesh guided by its curve skeleton. *ACM Transactions on Graphics*, 35 :1–13.
- [Verhetsel et al., 2019] Verhetsel, K., Pellerin, J., and Remacle, J. (2019). Finding hexahedralizations for small quadrangulations of the sphere. *CoRR*, abs/1904.11229.
- [Viville et al., 2021] Viville, P., Kraemer, P., and Bechmann, D. (2021). Hexahedral Mesh Generation For Tubular Shapes Using Skeletons and Connection Surfaces. In *16th International Joint Conference on Computer Vision, Imaging and Computer Graphics Theory and Applications*, En ligne, France.
- [Wang et al., 2021] Wang, R., Zheng, Z., Yu, W., Shao, Y., and Gao, S. (2021). Structure-aware geometric optimization of hexahedral mesh. *Comput. Aided Des.*, 138 :103050.
- [Wang et al., 2008] Wang, W., Jüttler, B., Zheng, D., and Liu, Y. (2008). Computation of rotation minimizing frames. *ACM Transactions on Graphics*, 27.
- [Xie et al., 2020] Xie, J., Xu, J., Dong, Z., Xu, G., Deng, C., Mourrain, B., and Zhang, Y. J. (2020). Interpolatory catmull-clark volumetric subdivision over unstructured hexahedral meshes for modeling and simulation applications. *Computer Aided Geometric Design*, 80 :101867.
- [Xiong et al., 2013] Xiong, G., Musuvathy, S., and Fang, T. (2013). Automated structured all-quadrilateral and hexahedral meshing of tubular surfaces. In Jiao, X. and Weill, J.-C., editors, *Proceedings of the 21st International Meshing Roundtable*, pages 103–120, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.

Table des figures

1	Des exemples de maillages obtenus avec notre méthode de génération à partir d'un squelette courbe.	ii
2	Maillage tétraédrique à gauche [Hu et al., 2020], hex-dominant au centre [Ray et al., 2017], et hexaédrique à droite [Bracci et al., 2019]	2
3	Processus de génération d'un maillage hexaédrique à partir d'un squelette courbe. (a) la surface du domaine à mailler, (b) le squelette adapté du domaine, (c) l'échafaudage décomposant le domaine, (d) le maillage hexaédrique résultant.	4
4	Processus de génération d'un maillage hexaédrique à partir d'un squelette mixte. (a) la surface du domaine à mailler et son squelette, (b) l'échafaudage décomposant le domaine, (c) le maillage hexaédrique résultant.	5
1.1	Exemple d'hexaèdres non conformes.	8
1.2	Repère direct autour d'un sommet d'un hexaèdre.	9
1.3	Qualité du Jacobien Normalisé sur : (a) un pavé droit, (b) un hexaèdre convexe, (c) un hexaèdre concave.	9
1.4	A cause de la présence de 5 hexaèdres autour d'une même arête améliorer la qualité de l'élément a a un impact négatif sur l'élément b	10
1.5	A gauche un maillage dont les hexaèdres forment une couche alignée à la surface du cylindre. A droite un maillage dont les hexaèdres ne forment pas un feuillet continu. [Shepherd and Johnson, 2008]	11
1.6	Lissage de la qualité moyenne d'un domaine par subdivision. En bleu les éléments de meilleure qualité, en rouge les éléments de pire qualité.	11
1.7	A gauche : intersection d'une grille avec une surface. A droite : plaquage du bord de la grille à la surface. [Schneiders, 2005]	12
1.8	Construction d'un octree pour voxeliser le domaine, et construction du dual de l'octree. [Livesu et al., 2021]	13
1.9	Modification de la connectivité avant de construire le dual. [Pitzalis et al., 2021]	13
1.10	Processus de plâtrage d'une surface vue en 2D [Staten et al., 2005].	14
1.11	Décomposition d'un domaine géométrique en blocs simples. [Livesu et al., 2020]	15
1.12	A gauche : un hexaèdre, à droite : le dual d'un hexaèdre, l'intersection de 3 feuilles	15
1.13	Feuilles duales décomposant un domaine [Takayama, 2019]	16
1.14	Exemple de construction de maillage par champ de directions [Liu et al., 2018]	17

1.15	(a) Maillage en entrée, (b) maillage orthogonal, (c) maillage hexaédrique aligné aux axes, (d) maillage hexaédrique final [Pietroni et al., 2022]. . . .	17
1.16	Sphères maximales inscrites dans un domaine 2D et son axe médian [Tagliasacchi et al., 2016].	18
1.17	Axes médians de domaines 2D : (a) Surface lisse, (b) Surface bruitée. [Tagliasacchi et al., 2016]	19
1.18	Exemple de squelette. En vert : (a) les branches, (b) les embranchements, (c) le feuillet.	19
1.19	Démonstration du processus d'extraction du squelette.	21
1.20	Méthode de génération de maillage à partir d'un squelette de [Hijazi et al., 2010]. (a) Extrusion d'une branche, (b) projection du bout des branches sur la sphère centrée sur l'embranchement, (c) construction de l'enveloppe convexe des points sur la sphère.	22
1.21	Résultats de [Hijazi et al., 2010] après subdivision du maillage.	22
1.22	Construction des plans bissecteurs séparant les branches [Mattingly et al., 2015].	23
1.23	Exemples d'embranchement avec des sections polygonales quelconques [Mattingly et al., 2015].	23
1.24	(a) Domaine et squelette traités, (b) hexaèdres insérés et subdivisés, (c) extrusion des hexaèdres, (d) plaquage du maillage quad à la surface du domaine. [Usai et al., 2015]	24
1.25	(a) Subdivision de l'hexaèdre d'embranchement en fonction des branches, (b) propagation par effet de bord des subdivisions sur les branches incidentes. [Usai et al., 2015]	25
1.26	Choix de fermeture d'un cycle. [Usai et al., 2015]	25
1.27	(a) Domaine et son squelette, (b) hexaèdres d'embranchement en rouge et maillage hexaédrique grossier extrudé, (c) maillage hexaédrique raffiné. [Livesu et al., 2016]	26
1.28	Partition de la surface d'une sphère par un diagramme de Voronoï. [Fuentes Suárez and Hubert, 2018]	26
1.29	Exemples d'applications de la méthode sur des cas simples. [Fuentes Suárez and Hubert, 2018]	27
1.30	Sphère partitionnée en 3 quads, connectée à 3 branches à tranche quad. [Panotopoulou et al., 2018]	28
1.31	Construction du maillage volumique paramétrique [Peltier et al., 2021].	28
1.32	Construction du maillage volumique paramétrique [Peltier et al., 2021].	28
1.33	Construction du maillage à partir d'une <i>centerline</i> [Decroocq et al., 2022].	29
1.34	A gauche, la structure "O-Grid" dessinée sur les disques supports. A droite, un maillage hexaédrique formé par connection des "O-Grid" [Decroocq et al., 2022].	30
1.35	Processus de génération d'un maillage hexaédrique avec la méthode de [Xiong et al., 2013].	30
1.36	(a) Maillage composé de prismes triangulaires. (b) Maillage subdivisé par Catmull-Clark en hexaèdres. [Xiong et al., 2013].	31
1.37	Processus de génération de maillage hexaédrique de [Quadros, 2016]	32
1.38	Processus de génération de maillage hexaédrique de [Papadimitrakis et al., 2020]	33

2.1	Gauche : extrémité, centre : articulation, droite : embranchement	36
2.2	Exemple de branche	36
2.3	Insertion d'un polygone sur un embranchement	37
2.4	Décomposition de polygones de degrés 5, 6, et 7	37
2.5	Suppression du noyau polygonal et fusion des nouveaux sommets sur le centre de l'embranchement.	38
2.6	(a) Embranchement, (b) construction de l'échafaudage (en rouge), (c) connexion des branches, (d) fusion des sommets.	38
2.7	(a) quads mal appariés à l'échafaudage. (b) quads correctement appariés à l'échafaudage.	39
2.8	Sections de branches. Sommets réguliers en bleu, sommets irréguliers en rouge. (a) une branche à section triangulaire, (b) une branche à section quadrangulaire.	40
2.9	Gestion d'un embranchement : à gauche l'embranchement, (A) polyèdre décomposé, (B) polyèdre subdivisé, (C) fusion des sommets	41
2.10	Subdivision de polyèdres. En rouge les polyèdres quelconques, en verts les hexaèdres	42
2.11	Tronçon de 4 hexaèdres exposant une interface à 4 quadrilatères en bleu	43
2.12	Connexion topologique de tronçons d'hexaèdres autour d'un embranchement à l'aide d'un échafaudage quadrilatère. (a) Sommet incident à 3 branches (b) Surface de connexion composée de 3 quadrilatères (c, d, e) appairage des tronçons incidents avec les arêtes de leur quadrilatère respectif (f) connexion des paires d'hexaèdres.	44
2.13	Adaptation d'un squelette en fonction du rayon local. (a) Squelette fin, (b) initialisation de l'itération, (c - e) itérations successives, (f) squelette adapté final.	45
2.14	Exemple de l'adaptation du squelette pour un tube dont le rayon n'est pas homogène. Là où le rayon réduit, la densité des sommets du squelette est plus importante.	46
2.15	(a) quadrilatère d'extrémité, (b) quadrilatère double face.	47
2.16	Trois exemples de partitions génériques de sphères en quadrilatères pour construire des échafaudages. En rouge les points d'intersection des branches avec la sphère, en vert la partition.	48
2.17	Trois exemples de partitions de sphères en quadrilatères dans des cas plats	48
2.18	Trois exemples d'insertion d'un cube subdivisé avec la surface de connexion associée en quadrilatère pour des cas orthogonaux	49
2.19	Partition générique à gauche, utilisation du cas orthogonal à droite	49
2.20	Initialisation des Rotation Minimizing Frames. [Wang et al., 2008]	51
2.21	Extrusion d'une surface le long d'une courbe. [Wang et al., 2008]	51
2.22	Rotation Minimizing Frame avec une double contrainte d'orientation. [Wang et al., 2008]	52
2.23	(a) Une arête du squelette et l'échafaudage, (b) insertion d'un tronçon sur l'arête, (c) appairage du tronçon à l'échafaudage.	53

2.24	Connexion topologique de tronçons d'hexaèdres autour d'une articulation à l'aide d'un échafaudage quadrilatère. (a) Sommet incident à 2 branches (b) échafaudage composée d'un quad double face, (c, d) appairage des tronçons incidents avec les arêtes de leur face respective du quad, (e) couture des paires d'hexaèdres.	54
2.25	Maillages bruts issus de notre méthode.	55
2.26	Vue en tranche d'un domaine, en noir, avec son squelette, en rouge. Le tronçon inséré ne peut pas correctement approximer la surface	56
2.27	Maillages mal décrits par leur squelette courbe résultant en des maillages hexaédriques de mauvaise qualité.	56
2.28	(a) Feuillet du squelette mixte, (b) palette associée à un quad du feuillet, (c) demi-tronçons associés aux arêtes du bord du feuillet.	57
2.29	En haut : le squelette surfacique, en bas : les palettes et demi-tronçons associés au squelette. (a) Quads plus large que le rayon local, les hexaèdres des palettes sont très aplatis, (b) quads de même largeur que le rayon local, les hexaèdres sont cubiques, (c) quads plus petit que le rayon, les hexaèdres sont trop allongés.	58
2.30	Sommets irréguliers en rouge dans le feuillet d'un squelette et dans le maillage hexaédrique produit.	58
2.31	Exemple de remaillage par [Docampo-Sánchez, 2019].	59
2.32	(a) quads adjacents par une arête, (b) articulation feuillet-branche et feuillet-feuillet, (c) embranchement feuillet-branches et feuillets-feuillets, (d) quads adjacents par une arête formant un éventail.	59
2.33	(a) Quad double face contraint sur une articulation branche-feuillet, (b) quad double face contraint sur une articulation feuillet-feuillet.	61
2.34	Exemples d'embranchements de squelettes mixtes.	62
2.35	Utilisation des directions moyennes (en rouge) pour la construction de l'échafaudage incident à un feuillet.	62
2.36	Réorientation des normales sur un feuillet.	63
2.37	Connexion des demi-tronçons autour d'un sommet avec échafaudage. . . .	64
2.38	Connexion des palettes aux arêtes incidentes à leur face et couture de palettes incidentes.	64
2.39	Algorithme appliqué au Metatron utilisant un squelette mixte. (a) La surface, (b) le squelette, (c) le maillage brut.	66
2.40	Algorithme appliqué à une main utilisant un squelette mixte. (a) Le squelette, (b) construction de l'échafaudage, (c) le maillage brut, (d) optimisation du maillage, (e) maillage final raffiné.	66
2.41	Cas particulier incompatible avec notre structure. En rouge l'interface à 6 quads.	67
2.42	Cas particulier compatible avec notre structure si remaillé.	67
2.43	A gauche : un tronçon brut, à droite : un tronçon coussiné. En rouge les sommets irréguliers ajoutés par le coussinage.	68
2.44	Adaptation d'un tronçon à la surface (bleue).	68
2.45	Subdivision Catmull-Clark appliquée à un hexaèdre.	69
2.46	A gauche : le tétraèdre formé par le coin d'un hexaèdre en vert et l'arête orientée en noir avec la normale de sa base en rouge. A droite : le cône formé par les tétraèdres autour d'une arête orientée et ses normales. . . .	70

2.47	Marquage des fibres et niveaux dans un tronçon.	72
2.48	Propagation des informations de fibres sur l’anneau en surface.	73
2.49	Propagation en profondeur des marquages.	73
2.50	Subdivision d’un tronçon en fibres.	73
2.51	Subdivision en fibres. (a) sur un embranchement complexe, (b) sur un embranchement orthogonal.	74
2.52	Subdivision en fibres sur une palette et son bord.	74
2.53	Découpe d’un tronçon dans le sens de la longueur.	74
2.54	Contrôle de l’épaisseur des couches en fonction de la profondeur des mailles.	75
2.55	Hexaèdre non conforme.	75
2.56	Maillages non conformes. (a) Adaptation dans le sens de la longueur d’une branche, (b) adaptation dans la profondeur de la branche.	76
2.57	Sommets irréguliers en rouge dans le maillage. (a) Embranchement entouré par trois tronçons, (b) tronçon après coussinage, (c) palettes et demi- tronçons sur un sommet de degré 2 d’un feuillet.	77
2.58	Exemple de squelette avec des détails inutiles réduisant la qualité.	79
2.59	Processus de partition de la sphère. (a) l’ensemble de points, (b) la tri- angulation de Delaunay, (c) la triangulation remaillée, (d) la construction du dual, (e) la partition quadrilatère.	80
2.60	Triangulation de Delaunay et diagramme de Voronoï correspondant. (a) triangulation de Delaunay, (b) diagramme de Voronoï.	81
2.61	Critère d’angle : $\gamma < \beta < \delta < \epsilon < \alpha$	82
2.62	Réduction de valence	82
2.63	Gestions topologique du maillage entre deux sommets de valence 3 avec un chemin de longueur impaire	82
2.64	Gestions topologique du maillage entre deux sommets de valence 3 avec un chemin de longueur pair	83
2.65	(a) Partition réussie avec 14 points d’entrée, (b) partition échouée avec 5 points d’entrée.	83
2.66	Algorithme de partitionnement par pincements. (a) 3 points initiaux, (b) polyèdre initial, (c) point loin du barycentre de sa face, (d) coupe d’une arête double, (e) point proche du barycentre de sa face, (f) pincement de deux arêtes.	85
3.1	Maillage hexaédrique de <i>Cycles</i>	88
3.2	A gauche, les résultats obtenus par [Livesu et al., 2016] <i>Santa</i> et [Livesu et al., 2020] <i>Metatron</i> . A droite, nos résultats. Combiner l’insertion d’un cube sur l’embranchement orthogonal avec la partition de sphère selon les angles des branches des embranchements améliore la symétrie et la qualité des éléments des maillages hexaédriques obtenus.	89
3.3	Maillage hexaédrique de <i>Fertility</i>	90
3.4	Maillage hexaédrique de <i>Horse</i>	90
3.5	Maillages hexaédriques de <i>Dinopet</i> et <i>Cactus</i>	91
3.6	Maillage hexaédrique de <i>Vessels</i>	91
3.7	(a) Squelette courbe de la main. (b) Squelette mixte de la main.	92
3.8	Résultat obtenu par un squelette fait à la main. 3584 hexaèdres. Jacobien Normalisé minimum : 0.62, moyen : 0.91.	92

3.9	Maillage Dilo et son squelette à gauche, le résultat de notre algorithme à droite.	93
3.10	(a) Résultat par squelette courbe. (b) Résultat par squelette mixte.	93
3.11	Génération de <i>Holes</i> par : (a) squelette courbe, (b) squelette mixte.	94
3.12	Types de structures biologiques visées.	95
3.13	Surface de bronches et le squelette correspondant.	95
3.14	Maillage hexaédrique de bronches généré par notre méthode.	96
3.15	Surfaces du cycle de respiration de bronches à différents pas de temps.	97
3.16	Construction des <i>keyframes</i> t0 (rouge), t1 (vert), t2 (bleu), t3 (jaune). En gris la topologie aux différents pas de temps.	97
3.17	Une étape de recalage pour l'animation. (a) position t0, (b) position t1, (c) maillage à t0, (d) recalage rigide du maillage, (e) recalage non-rigide du maillage, (f) optimisation des sommets internes du maillage.	99
3.18	Modification séparée de la topologie du maillage (en rouge) et des données géométriques des <i>keyframes</i>	99
4.1	(a) 0-carte, (b) 1-carte, (c) 2-carte, (d) 3-carte, avec les relations topologiques ajoutées pour monter en dimension	102
4.2	Les 3 orbites d'un même brin b dans une 2-carte : (a) orbite sommet, (b) orbite arête, (c) orbite face	103
4.3	(a) couture d'arête : ϕ_2 , (b) coupure d'arête, (c) coupure de face	104
4.4	Exemple de graphe non orienté. En rouge α_0 , en vert α_1	105
4.5	Exemples de graphes d'incidence	105
4.6	Relations de voisinage dans un graphe d'incidence. Entre parenthèses les cellules de dimension $n - 1$ définissant la cellule. Entre crochet les cellules voisines de dimension $n + 1$	106
4.7	(a) Orientation locale d'une arête par les sommets qui la définissent. (b) Orientation locale de faces par leur sens de parcours des arêtes qui les définissent.	106
4.8	Conteneurs d'attributs de brins, sommets, et faces, d'une 2-carte [Kraemer et al., 2014].	107
4.9	Interface utilisateur du module CGoGN de génération depuis un squelette courbe.	108
4.10	(a) Association des quads de l'échafaudage avec les brins du graphe non orienté, (b) association des quads de l'échafaudage avec une paire sommet-arête du graphe d'incidence, (c) association des quads avec une paire sommet-arête du graphe d'incidence pour un sommet incident à une face.	109
4.11	(a) Tronçon pour une arête isolée, les brins rouges sont associés au quad incident, (b) demi-tronçon pour une arête de bord de feuillet, les brins rouges sont associés aux sommets incidents, (c) palette pour une face de feuillet, les brins rouges sont associés aux arêtes incidentes.	110
4.12	Surface d'une main et squelette mixte en cours d'édition	112
4.13	Opérations de base de construction d'un graphe d'incidence. (a-b) ajout de sommets, (c-d) ajout d'une arête, (e-f) ajout d'une face, (g-h) suppression d'un sommet.	113

- 4.14 Opérations composées implémentées dans l'outil. (a-b) extrusion d'une arête en face, (c-d) coupure d'une arête, (e-f) coupure d'une face entre deux sommets. 114
- 4.15 Aperçu de l'outil de partition de sphère. (a) points d'entrées, (b) enveloppe remaillée, (c) enveloppe et dual, (d) dual des points d'entrées. 115

Liste des tableaux

3.1 Jacobien Normalisé minimum et moyen des maillages testés. Les valeurs présentées dans les travaux précédents proviennent de [Livesu et al., 2016] pour les maillages *Dinopet*, *Cactus*, *Fertility*, et *Santa*, et de [Livesu et al., 2020] pour les maillage *Metatron* et *Holes*. 88

Paul VIVILLE

Génération de maillages hexaédriques à partir de squelettes

Résumé

La thèse se concentre sur la création de maillages hexaédriques à partir de squelettes pour produire des supports de simulation médicaux. Il existe peu de méthodes automatiques pour générer ces maillages, qui sont utiles pour la simulation numérique de phénomènes physiques. Le type de données qui intéresse les auteurs, comme les bronches ou les réseaux vasculaires, nécessitent une génération automatique sans intervention de l'utilisateur. La thèse décrit une méthode basée sur la construction d'un échafaudage quadrilatère pour gérer la géométrie et la connectivité des éléments de construction simples. Les travaux ont abouti sur un premier algorithme permettant de décomposer automatiquement un domaine géométrique représentable par un squelette courbe en blocs hexaédriques, et sur un deuxième algorithme pour des domaines représentables par un squelette mixte. Un travail technique a également été réalisé pour mettre à disposition un pipeline complet de génération de maillage avec des outils de post-traitement pour l'exploitation en simulation.

Mots clés : Génération de maillage, hexaèdres, squelettes

Summary

The thesis focuses on creating hexahedral meshes from skeletons in order to produce simulation supports from medical data. There are few automatic generalist methods for generating these meshes, which are useful for numerical simulation of physical phenomena. The type of data that interests the authors, such as bronchi or vascular networks, requires automatic generation without user intervention. The thesis describes a method based on building a quadrilateral scaffold to manage the geometry and connectivity of simple construction elements. The work resulted in a first algorithm allowing to automatically decompose a geometrical domain representable by a curve skeleton into hexahedral blocks, and a second algorithm for domains representable by a mixed skeleton. Technical work has also been carried out to make available a complete mesh generation pipeline with post-processing tools for simulation exploitation.

Keywords : Hexahedral Mesh Generation, Skeleton