Université de Strasbourg

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

École doctorale Mathématiques, sciences de l'information et de l'ingénieur | ED 269 Université de Strasbourg

ÉCOLE DOCTORALE MATHEMATIQUES, SCIENCES DE L'INFORMATION ET DE L'INGENIEUR – ED269

UMR 7501

THÈSE présentée par :

Antoine SZABO

soutenue le : 27 **septembre 2024**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : Mathématiques

Sur les représentations galoisiennes associées aux modèles étranges de Shimura

THÈSE dirigée par :

Mr. NOOT Rutger	Professeur, Université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

Mme. CADORET Anna	Professeur, Sorbonne Université
Mr. WILDESHAUS Jörg	Professeur, Université Paris 13

AUTRES MEMBRES DU JURY :

Mr. GENESTIER Alain	Professeur, Université de Lorraine
Mr. ANCONA Giuseppe	Maître de conférence, Université de Strasbourg

---

INVITÉS : Mr. AMBROSI Emiliano

SUR LES REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES ASSOCIÉES AUX MODÈLES ÉTRANGES DE SHIMURA

par

Antoine Szabo

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, je remercie mon directeur de thèse Rutger Noot. Il m'a proposé un sujet passionnant et m'a instruit sur de nombreux thèmes tout au long de ce voyage au pays des motifs et des variétés de Shimura. Je suis très reconnaisant de la patience et de la confiance qu'il m'a accordées, notamment durant mes deux dernières années de thèses.

Je remercie Jörg Wildeshaus et Anna Cadoret de m'avoir fait l'honneur de rapporter mes travaux ainsi que Alain Genestier et Giuseppe Ancona d'avoir accepté de les examiner.

J'ai profité d'un accueil remarquable au sein de l'équipe Arithmétique et Géométrie Algébrique de l'IRMA. Je pense en particulier à Mauro Porta, Emiliano Ambrosi et Giuseppe Ancona (encore !) qui m'ont beaucoup appris. Il me faut aussi adresser ma reconnaissance à Pierre Guillot et Pierre Baumann, les membres de mon comité de suivi, pour l'humanité dont ils ont fait preuve.

Je tiens également à remercier très chaleureusement mes professeurs Olivier Décultot et Stéphane Legros qui m'ont assurément transmis la passion des mathématiques, mais aussi Olivier Guibé et le regretté Bas Edixhoven pour avoir encadré très généreusement mes stages de recherche.

Je remercie également mes amis normands : Louis, Stanislas, Olivier et Loïc ; mes camarades de l'ENS : Lucien, Vivien, Vidal et Gabriel et mes amis strasbourgeois : Tarik, Duncan, Cyril et Alexis. Merci à Archia et Lukas, mes camarades doctorants, pour nos nombreuses discussions et l'implication dans notre groupe de lecture sur la cohomologie étale et les conjectures de Weil.

Enfin je remercie ma famille normande : Evelyne, Mamie, mes soeurs, mon frère et en particulier mes parents pour leur soutien depuis le tout début.

Introduction

Contexte. — La théorie de Shimura, développée dans les années 60 au travers d'une série d'articles [**Shi63**], [**Shi65**], [**Shi67**], est une vaste généralisation de la théorie des courbes modulaires et de ses liens avec les courbes elliptiques. Un *domaine symétrique hermitien* $X \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert connexe d'adhérence compacte dont le groupe des biholomorphismes $\mathrm{Aut}(X)$ agit transitivement et contient pour tout $x \in X$, une symétrie s_x admettant x comme point fixe isolé. La composante neutre $\mathrm{Aut}(X)^+ \subset \mathrm{Aut}(X)$, pour la topologie ouvert-compact, est alors un groupe de Lie réel semi-simple connexe et l'on considère les quotients de la forme X/Γ pour $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(X)^+$ un sous-groupe discret sans torsion. Sous l'hypothèse que Γ est *arithmétique*, le théorème de Baily-Borel confère à X/Γ une structure canonique de variété algébrique sur $\mathbb{C}$. En cas d'existence, le *modèle canonique* de Shimura associé à X/Γ est une variété algébrique $\mathrm{Sh}(\Gamma)$, uniquement déterminée et définie sur un corps de nombres, telle que $\mathrm{Sh}(\Gamma)_{\mathbb{C}} \simeq X/\Gamma$. Dans les premiers travaux de Shimura, l'espace X/Γ est solution d'un problème de modules de variétés abéliennes complexes munies de structures additionnelles (polarisations, endomorphismes et structures de niveau) et la construction du modèle canonique s'appuie alors sur la théorie de la multiplication complexe (développée la décennie précédente par Shimura et Taniyama) et la théorie des espaces de modules de variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$.

Dans [**Shi67**], la situation suivante, sans lien avec la théorie des variétés abéliennes, est envisagée. Soit F un corps totalement réel de degré $d \neq 1$ et soit D une algèbre de quaternions déployée en m places réelles de F avec $1 < m < d$. Fixant un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres,

$$D \otimes_F \mathbb{R} \simeq M_2(\mathbb{R}) \times \cdots \times M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \times \cdots \times \mathbb{H},$$

l'algèbre D agit via ses facteurs déployés sur un produit $\mathfrak{H} \times \cdots \times \mathfrak{H}$ de m copies du demi-plan de Poincaré. Il s'agit d'un domaine symétrique hermitien et pour chaque sous-groupe de congruence $\Gamma \subset D^\times$, Shimura construit un modèle algébrique $\mathrm{Sh}(\Gamma)$ de $(\mathfrak{H} \times \cdots \times \mathfrak{H})/\Gamma$ sur une extension finie de F. Un groupe de congruence Γ_0 suffisamment petit étant fixé, on obtient une tour de revêtements algébriques galoisiens

$$\mathrm{Sh}(\Gamma) \to \mathrm{Sh}(\Gamma_0)$$

pour $\Gamma \subset \Gamma_0$ un sous-groupe normal variable. L'action galoisienne sur les fibres de cette tour donne lieu à des représentations galoisiennes

ℓ-adiques dont Shimura démontre certaines propriétés analogues aux représentations ℓ-adiques fournies par la cohomologie étale des variétés abéliennes. Les variétés algébriques $\mathrm{Sh}(\Gamma)$ de cet exemple sont nommées *modèles étranges* par Deligne dans [**Del71**] en référence au fait qu'elles n'admettent pas naturellement d'interprétation modulaire en terme de variétés abéliennes.

Depuis les travaux de Deligne, une *variété de Shimura* est plutôt définie à partir d'un couple (G, X) constitué d'un groupe réductif G sur $\mathbb{Q}$ et d'une classe de conjugaison X d'homomorphismes de groupes algébriques réels $h : \mathbb{C}^\times \to G_\mathbb{R}$. Pour chaque sous-groupe ouvert compact $K \subset G(\mathbb{A}_f)$, l'espace

$$\mathrm{Sh}(G, X, K) = G(\mathbb{Q}) \setminus X \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

est une réunion finie d'espaces du type X/Γ comme considéré par Shimura et admet un modèle $\mathbf{Sh}(G, X, K)$ sur un corps de nombres. Les variétés de Shimura sont conjecturalement pensées comme espaces de modules de motifs (définis en terme de cycles de Hodge absolus). Cet espoir est cependant vain lorsque le *poids* $h|_{\mathbb{R}^\times}$ des éléments de X n'est pas défini sur $\mathbb{Q}$. Cette pathologie est présentée par les modèles étranges.

Dans la lettre [**Del82**], Deligne affirme que les représentations galoisiennes obtenues par Shimura sont en fait sous-jacentes à des motifs abéliens, autrement dit des motifs dans la $\otimes$-catégorie engendrée par les motifs de variétés abéliennes, expliquant *a posteriori* les résultats obtenus par Shimura. L'objet de cette thèse est de retrouver et de préciser cette assertion de Deligne dont la preuve ne semble pas figurer dans la littérature.

Approche. — La philosophie adoptée par Deligne dans [**Del71**] puis [**Del79**] pour refonder la théorie des modèles canoniques est explicitée dans l'article [**Del94**]. Soit (G, X) une donnée de Shimura dont le poids est défini sur $\mathbb{Q}$, K un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f)$ et $\mathbf{Sh}(G, X, K)$ le modèle canonique de $\mathrm{Sh}(G, X, K)$ défini sur le *corps réflex* $E(G, X)$. Si L est une extension finie de $E(G, X)$, un point L-rationnel de $\mathbf{Sh}(G, X, K)$ doit donner lieu à un $\otimes$-foncteur exact

$$\mathbf{Rep}_\mathbb{Q}(G) \to \mathbf{Mot}(L),$$

où la catégorie $\mathbf{Mot}(L)$ est définie dans [**DM82**] en terme de cycles de Hodge absolus. Inspirés par l'article [**Del89**], nous envisageons les motifs comme des systèmes de réalisations $V = (V_{\mathrm{B}}, V_{\mathrm{dR}}, V_{\text{ét}})$ où

- la réalisation de Betti V_{B} est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel,
- la réalisation de De Rham V_{dR} est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel filtré,
- la réalisation étale $V_{\text{ét}}$ est un $\mathbb{A}_f$-module libre de rang fini sur lequel agit le groupe de Galois absolu de L,

ces données étant reliées par des identifications $V_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq V_{\mathrm{dR}}$, donnant lieu à une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge polarisable sur V_{B}, et $V_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \simeq V_{\text{ét}}$. Lorsque le poids de la donnée de Shimura (G, X) n'est pas défini sur $\mathbb{Q}$, comme c'est le cas pour les modèles étranges introduits ci-dessus, le foncteur ci-dessus est au mieux défini sur une sous-catégorie de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G)$.

Pour une représentation algébrique V de G donnée, la réalisation de Betti V_{B} est par définition l'espace vectoriel V sous-jacent à cette représentation. Afin de définir la composante V_{dR}, on doit supposer que l'homorphisme

$$\mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Aut}(V_{\mathbb{R}})$$

donne lieu à une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge pure sur V, autrement dit dont le poids est défini sur $\mathbb{Q}$. On notera G' le quotient algébrique de G factorisant toutes les représentations ayant cette propriété. La définition de la réalisation étale passe par l'étude de la tour de revêtements étales galoisiens

$$\{\mathrm{Sh}(G, X, K') \to \mathrm{Sh}(G, X, K)\}_{K' \subset K},$$

K' parcourant les sous-groupes distingués de K, ouverts et compacts dans $G(\mathbb{A}_f)$. Dans le contexte des modèles étranges, le groupe de Galois du revêtement $\mathrm{Sh}(G, X, K') \to \mathrm{Sh}(G, X, K)$ est un quotient abstrait $[K/K']$ de K/K'. Passant à la limite, l'action de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ définie grâce aux modèles canoniques sur la fibre de x dans cette tour est décrite par un morphisme de groupes profinis

$$\alpha_x : \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \to [K],$$

où le groupe profini $[K]$ est un quotient abstrait de K. La composante étale est encore bien définie lorsque l'action de K sur $V_{\mathbb{A}_f}$ se factorise par $[K]$. On note $G \twoheadrightarrow G''$ le plus petit quotient algébrique ayant cette propriété sur les points adéliques. On choisit alors un quotient $G \twoheadrightarrow G_1$ factorisant G' et G''. Dans le cadre des modèles étranges, G_1 est décrit explicitement comme un quotient central de G. On obtient finalement un $\otimes$-foncteur exact

$$\mathfrak{sh}_x : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_1) \to \mathscr{R}(L),$$

où $\mathscr{R}(L)$ est la catégorie des systèmes de réalisations sur L. Pour les données étranges, G est le groupe multiplicatif $D^\times$ et X le produit de m copies de $\mathfrak{H}^\pm = \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Notre résultat principal (Th 16.4) s'exprime alors comme suit.

Théorème. *L'image du foncteur*

$$\mathfrak{sh}_x : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_1) \to \mathscr{R}(L)$$

est consistuée de systèmes de réalisations qui après extension finie de L sont associés à des motifs abéliens.

On déduit de ce théorème la motivicité (locale) des représentations étranges de Shimura (Cor 16.5).

Stratégie. — On définit $G \twoheadrightarrow G_1$ comme le quotient du $\mathbb{Q}$-groupe algébrique $G = D^\times$ par le sous-groupe $N \subset F^\times$ des éléments $x \in F^\times$ tels que $N_{F/\mathbb{Q}}(x) = 1$. Le poids de la donnée de Shimura (G_1, X_1) que l'on en déduit par composition est défini sur $\mathbb{Q}$. De plus, le centre Z_1 de G_1 vérifie la propriété que $Z_1(\mathbb{Q})$ est discret dans $Z_1(\mathbb{A}_f)$ ce qui facilite l'étude de la tour de revêtements

$$\mathrm{Sh}(G_1, X_1, U) \to \mathrm{Sh}(G_1, X_1, K)$$

pour un un niveau fini net K fixé et $U \subset K$ variable. Au dessus d'une composante géométriquement connexe $\mathrm{Sh}_1^+ = \mathrm{Sh}^+(G_1, X_1, K)$, cette tour correspond à un homomorphisme continu

$$\alpha_\xi : \pi_1(\mathrm{Sh}_1^+, \xi^K) \to K,$$

où ξ est un système compatible de points géométriques $(\xi^U)_{U \subset K}$ dans la tour.

Une famille de système de réalisations sur une variété algébrique S définie sur un corps de nombres est la donnée $\mathscr{V} = (\mathscr{V}_{\mathrm{B}}, \mathscr{V}_{\mathrm{dR}}, \mathscr{V}_{\text{ét}})$ où

- $\mathscr{V}_{\mathrm{B}}$ est un système local de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur $S(\mathbb{C})$,
- $\mathscr{V}_{\mathrm{dR}}$ est un fibré vectoriel plat filtré donnant lieu à une variation de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge sur $\mathscr{V}_{\mathrm{B}}$,
- $\mathscr{V}_{\text{ét}}$ est un $\mathbb{A}_f$-faisceau lisse sur le site pro-étale de S,

ces données étant reliés par des isomorphismes d'identifications (voir 13.2 pour une définition précise). On construit alors un foncteur

$$\mathfrak{sh}_\xi : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_1) \to \mathscr{R}(\mathrm{Sh}_1^+)$$

où $\mathscr{R}(\mathrm{Sh}_1^+)$ est la catégorie des familles de sytèmes de réalisations sur la variété algébrique Sh_1^+. On retrouve par spécialisation les foncteurs $\mathfrak{sh}_x$ introduit plus haut. Notre but est alors de montrer, pour toute représentation algébrique (V, ρ) de G_1, que $\mathfrak{sh}_\xi(\rho)$ est motivique au sens où c'est le noyau d'un idempotent du système de réalisations $\mathfrak{h}_1(A)$ associé à un certain schéma abélien sur Sh_1^+ (peut-être seulement défini sur un revêtement étale de Sh_1^+).

Le groupe algébrique G_1 est isomorphe à un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathscr{D}^\times$ de la corestriction $\mathscr{D}$ de D le long de l'extension $F/\mathbb{Q}$. Ceci donne en particulier une représentation fidèle V_1 de G_1, représentation régulière de l'algèbre $\mathscr{D}$. Par le théorème de Chevalley, il suffit de montrer que le système de réalisation $\mathfrak{sh}_\xi(V_1)$ est motivique au sens précédent. Notre point de départ est une construction de Shimura : on choisit une extension quadratique imaginaire E/F et l'on considère l'algèbre $B = D \otimes_F E$. Celle-ci permet de définir une variété de Shimura Sh_B de type PEL dont on sait que les réalisations associées sont motiviques d'après l'interprétation modulaire. On construit alors un diagramme commutatif de groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$,

$$\begin{tikzcd}
D^\times \times E^\times \arrow[r] \arrow[d] & B^\times \arrow[d] \\
\mathscr{D}^\times \times \mathscr{E}^\times \arrow[r] & \mathscr{B}^\times
\end{tikzcd}$$

où $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ sont les corestrictions le long de $F/\mathbb{Q}$ des F-algèbres E et B respectivement. Ce diagramme donne lieu à un diagramme de groupes algébriques que l'on enrichit en un diagramme de données de Shimura, donnant finalement lieu à un diagramme de variétés de Shimura qui s'écrit comme suit (avec des notations abusives [1]).

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sh}(D) \times \mathrm{Sh}(E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}(B) \arrow[d] \\ \mathrm{Sh}(\mathscr{D}) \times \mathrm{Sh}(\mathscr{E}) \arrow[r] & \mathrm{Sh}(\mathscr{B}) \end{tikzcd}$$

Un argument tannakien montre que $\mathrm{Sh}(\mathscr{B})$ est un espace de modules de motifs abéliens. En particulier la représentation régulière W_1 de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathscr{B}$ définit un système de réalisations motivique. La variété $\mathrm{Sh}(E)$ présente des pathologies similaires à la variété étrange $\mathrm{Sh}(D)$ mais on montre que sa modification $\mathrm{Sh}(\mathscr{E})$ est bien motivique par une étude reposant sur la théorie de la multiplication complexe. On obtient ainsi que la représentation régulière U_1 de E fournit un système de réalisations motivique. On a un isomorphisme $V_1 \otimes U_1 \simeq W_1$ et l'on vient de voir que W_1 est motivique. On démontre finalement que V_1 est (localement) motivique en réalisant cette représentation comme sous-quotient de $W_1 \otimes U_1^{\vee}$ grâce à la trace. La mise en place rigoureuse de cet argument nécessite l'étude des propriétés formelles du foncteur $\mathfrak{sh}$ lorsque la donnée de Shimura varie.

1. Les variétés en question ne sont pas directement associées aux $\mathbb{Q}$-algèbres considérées. Des définitions précises et des notations adéquates sont explicités dans la partie II du texte

Résumé. —

- Dans la première partie de cette thèse, on étudie des variétés de Shimura étranges associées à des tores algébriques. Celles-ci proviennent d'un couple (E, Ψ) consistué d'un corps à multiplication complexe E et d'un sous-ensemble Ψ d'un type CM de E. Dans cette situation le poids de la donnée de Shimura $(E^\times, h)$ associée n'est pas défini sur $\mathbb{Q}$ et l'on passe à un quotient algébrique de $E^\times$ pour corriger cette pathologie. Le tore algébrique apparaissant dans la donnée modifiée n'est autre qu'un tore de Serre en niveau fini. On compare finalement ces variétés de Shimura à celles obtenues en partant d'un type CM complet dont l'étude (classique) se réduit à une reformulation de la théorie de la multiplication complexe. Le résultat final de cette première partie est que les systèmes de réalisations obtenus à partir des variétés de Shimura torales modifiées sont motiviques. Ce résultat sera appliqué dans les parties suivantes à l'extension auxiliaire E/F donnant l'algèbre B par la formule $B = D \otimes_F E$.
- La seconde partie vise à construire le diagramme de $\mathbb{Q}$-groupes algébriques évoqué plus-haut. On y définit précisément les groupes algébriques apparaissant dans les données de Shimura qui serviront ensuite.
- Finalement, dans la dernière partie, nous définissons la représentations galoisiennes qui font l'objet de notre étude, que l'on envisage en fait comme des systèmes locaux adéliques. Une construction similaire est donnée dans [**CM18**] sous l'hypothèse supplémentaire que $Z(\mathbb{Q})$ est discret dans $Z(\mathbb{A}_f)$, Z étant le centre du groupe réductif définissant la donnée de Shimura. Dans les bons cas, ce système local se prolonge rn une famille de systèmes de réalisations sur chaque composante connexe de la variété de Shimura, cela définit le foncteur $\mathfrak{sh}_\xi$. Nous démontrons également quelques propriétés géométriques des variétés de Shimura utilisées dans la démonstration finale.

Conventions et notations. —

- Sauf mention du contraire, les schémas sont localement noethériens sur un corps de caractéristique nulle.
- Si (G, X) est une donnée de Shimura (1.1.1) et $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact on note $\mathrm{Sh}(G, X, K)$ le double quotient adélique
$$G(\mathbb{Q}) \setminus X \times G(\mathbb{A}_f)/K.$$
- On note $\mathrm{Sh}(G, X)$ la limite projective des $\mathrm{Sh}(G, X, K)$ pour K variable.
- Nous désignons par $\mathbf{Sh}(G, X, K)$ le modèle canonique de $\mathrm{Sh}(G, X, K)$.
- Si G est un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ et $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert, nous notons $K^{\downarrow}$ le système filtrant des sous-groupes compacts ouverts $U \subset K$. Lorsque G s'inscrit dans une donnée de Shimura (G, X), nous noterons $\mathrm{Sh}(G, X, K^{\downarrow})$ la pro-variété limite projective des $\mathrm{Sh}(G, X, U)$ pour $U \in K^{\downarrow}$.
- Si $\alpha : G_1 \to G_2$ est un homomorphisme de groupes algébriques, on note
$$\alpha^{\top} : \mathsf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_2) \to \mathsf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_1),$$
le foncteur $(V, \rho) \mapsto (V, \rho \circ \alpha)$.
- Bien que nous soyons intéressés par quelques données de Shimura particulières, beaucoup de paragraphes sont rédigés dans un contexte général. Les conflits de notations engendrés (pour les groupes algébriques G, G_1 ou les algèbres F, E et B) sont le plus souvent passés sous silence.

PARTIE I. ASPECTS COMMUTATIFS

1. Variétés de Shimura torales

1.1. Loi de réciprocité. —

1.1.1. — Rappelons les axiomes **(1.5.1,2,3)** de [**Del71**]. Une *donnée de Shimura* est un couple (G, h) où G est un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}$ et $h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ un homomorphisme de groupes algébriques réels, $\mathbb{S}$ étant la restriction de Weil $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m)$, vérifiant,

i) l'image du *poids* $w_h = h|_{\mathbb{G}_m}$ est centrale, où l'inclusion $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{S}$ est donnée sur les $\mathbb{R}$-algèbres A par

$$A^{\times} \hookrightarrow (A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{\times}, a \mapsto a \otimes 1;$$

ii) la bigraduation induite par h sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est de type

$$(-1, 1), (0, 0), (1, -1);$$

iii) l'automorphisme $\mathrm{ad}_{h(i)}$ de $G_{\mathbb{R}}$ induit une involution de Cartan du groupe $G_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$.

1.1.2. — Si T est un tore algébrique sur $\mathbb{Q}$, tout $\mathbb{R}$-homomorphisme $h : \mathbb{S} \to T_{\mathbb{R}}$ vérifie les axiomes d'une donnée de Shimura. Dans ce cadre, nous utiliserons la donnée équivalente du cocaractère

$$\mu : \mathbb{G}_m \to T_{\mathbb{C}}$$

donné par la formule $\mu(z) = h_{\mathbb{C}}(z, 1)$ selon l'identification $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$, $z \otimes 1 \mapsto (z, \bar{z})$. On retrouve h à partir de μ par la règle $h = \mu\mu^*$ où $t \mapsto t^*$ désigne la conjugaison complexe de $T_{\mathbb{C}}$ héritée de sa $\mathbb{R}$-forme $T_{\mathbb{R}}$. Puisque T est défini sur $\mathbb{Q}$, le cocaractère μ est nécessairement défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et nous l'envisagerons comme tel. Le corps réflex de la donnée (T, μ), noté $E_\mu \subset \bar{\mathbb{Q}}$, est le corps de définition de μ.

1.1.3. — Fixons une donnée de Shimura (T, μ). On notera indifférem-ment $\mathrm{Sh}(T, h)$ ou $\mathrm{Sh}(T, \mu)$ la pro-variété de Shimura associée. Si $K \subset T(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe compact ouvert, la variété de Shimura en niveau fini K s'écrit

$$\mathrm{Sh}(T, \mu, K) = T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})K$$

puisque la $T(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de h est réduite à un élément. Il s'agit d'un ensemble fini d'après le résultat principal de [**Bor63**]. On note $\mathrm{Sh}(T,\mu)$ la limite projective des $\mathrm{Sh}(T,\mu,K)$ pour K variable. Cette pro-variété est un espace profini décrit par le lemme suivant.

Lemme 1.1. — [**Del79**, prop. 2.1.10] *On a l'identification,*

$$\mathrm{Sh}(T,\mu) \simeq T(\mathbb{A}_f)/\overline{T(\mathbb{Q})}$$

où $(-)^{-}$ *désigne l'adhérence adélique dans* $T(\mathbb{A}_f)$.

Démonstration. — [2] Notons $\mathscr{S}$ le membre de droite. Pour tout K, nous avons l'égalité $T(\mathbb{Q})K = \overline{T(\mathbb{Q})}K$ (nous donnons une preuve de ce fait dans un contexte plus général au lemme 12.4). Chaque variété en niveau fini $\mathrm{Sh}(T,\mu,K)$ s'identifie ainsi au quotient de $\mathscr{S}$ sous l'action de K. Puisque K est compact, les K-orbites dans $\mathscr{S}$ sont compactes. De plus les stabilisateurs sont également compacts car ils sont fermés dans K, l'espace topologique $\mathscr{S}$ étant séparé. D'après [**Bou71**, III.7.1, prop.1] on a un homéomorphisme

$$\varprojlim \mathrm{Sh}(T,\mu,K) = \varprojlim \mathscr{S}/K \simeq \mathscr{S}/\bigcap_K K.$$

Le groupe $T(\mathbb{A}_f)$ étant localement profini, l'intersection précédente est triviale et l'obtient finalement $\mathrm{Sh}(T,\mu) \simeq \mathscr{S}$. □

1.1.4. — Rappelons la définition donné dans [**Del71**] par Deligne de la loi de réciprocité du modèle canonique $\mathbf{Sh}(T,\mu)$ de $\mathrm{Sh}(T,\mu)$. Notons λ^{alg} la composée,

$$E_\mu^\times \xrightarrow{\mathrm{Res}_{E_\mu/\mathbb{Q}}(\mu)} \mathrm{Res}_{E_\mu/\mathbb{Q}}(T\otimes_{\mathbb{Q}} E_\mu) \xrightarrow{\mathrm{Nm}_{E_\mu/\mathbb{Q}}} T\ .$$

Normalisons l'homomorphisme d'Artin

$$\mathrm{Art} : E_\mu^\times(\mathbb{A})/E_\mu^\times(\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(E_\mu^{\mathrm{ab}}/E_\mu)$$

en faisant correspondre à une uniformisante locale $\pi_{\mathfrak{p}} \in E_{\mu,\mathfrak{p}}$ (vue comme l'élément $(1,\ldots,1,\pi_{\mathfrak{p}},1,\ldots,1)$ de $E_\mu^\times(\mathbb{A})$) l'inverse du Frobenius arithmétique $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}$ pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de E_μ non ramifiée. Il induit un isomorphisme de groupes topologiques

$$\pi_0(E_\mu^\times(\mathbb{A})/E_\mu^\times(\mathbb{Q})) \simeq \mathrm{Gal}(E_\mu^{\mathrm{ab}}/E_\mu).$$

2. Une démonstration plus générale est donnée par [**Pin88**, lemma 3.7]

On définit alors l'homomorphisme de groupes abstraits λ par le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd} E_\mu^\times(\mathbb{A}) \arrow[rr, "\lambda_{\mathbb{A}}^{\mathrm{alg}}"] \arrow[d, "\mathrm{Art}"'] & & T(\mathbb{A}) \arrow[d, "\mathrm{pr}"] \\ \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E_\mu)^{\mathrm{ab}} \arrow[rr, "\lambda"'] & & T(\mathbb{A}_f)/\overline{T(\mathbb{Q})} \end{tikzcd}$$

l'existence de cette factorisation étant due au fait que l'espace $T(\mathbb{A}_f)/\overline{T(\mathbb{Q})}$ est totalement discontinu (car profini). On confère alors à chaque ensemble fini $\mathrm{Sh}(T,\mu,K)$ une action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E_\mu)$ par la formule

$$\sigma \cdot (t \bmod T(\mathbb{Q})K) = \lambda(\sigma^{\mathrm{ab}})t \bmod T(\mathbb{Q})K.$$

On note $\mathbf{Sh}(T,\mu,K)$ le schéma fini étale sur E_μ obtenu par correspondance de Galois. Il s'agit du modèle canonique de $\mathrm{Sh}(T,\mu,K)$.

1.2. Représentations galoisiennes abstraites. —

1.2.1. — L'ensemble $\mathrm{Sh}(T,\mu)$, identifié à $T(\mathbb{A}_f)/\overline{T(\mathbb{Q})}$, possède une structure de groupe abélien profini d'élément neutre [1]. Pour un sous-groupe compact-ouvert $K \subset T(\mathbb{A}_f)$, l'ensemble $\mathrm{Sh}(T,\mu,K)$ est un groupe abélien fini et l'application $\mathrm{Sh}(T,\mu) \twoheadrightarrow \mathrm{Sh}(T,\mu,K)$ est un homomorphisme surjectif. Définissons le groupe abstrait $[K]$ par la suite exacte suivante.

$$1 \to [K] \to T(\mathbb{A}_f)/\overline{T(\mathbb{Q})} \to T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})K \to 1.$$

C'est un groupe profini en vertu de l'isomorphisme

$$[K] = T(\mathbb{Q})K/\overline{T(\mathbb{Q})} \simeq K/K \cap \overline{T(\mathbb{Q})}.$$

1.2.2. — Soit k/E_μ un corps sur lequel le point $[1]_K \in \mathrm{Sh}(T,\mu,K)$ est défini. La composée

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/k) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E_\mu) \xrightarrow{\lambda} T(\mathbb{A}_f)/\overline{T(\mathbb{Q})} \to T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})K$$

est alors triviale. D'après la propriété universelle du noyau, il existe un unique homomorphisme $\alpha_{[1]}$ rendant commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/k) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{[1]}"'] & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E_\mu) \arrow[d, "\lambda"] & \\ 1 \arrow[r] & {[K]} \arrow[r] & T(\mathbb{A}_f)/\overline{T(\mathbb{Q})} \arrow[r] & T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})K \end{tikzcd}$$

Cet homomorphisme décrit l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/k)$ sur la fibre de [1] égale à $[K]$ par définition. Concrètement, $\alpha_{[1]}$ est caractérisé par la formule

$$\sigma \cdot [t] = [\alpha_{[1]}(\sigma)t] = [\lambda(\sigma^{\mathrm{ab}})t] \in T(\mathbb{A}_f)/\overline{T(\mathbb{Q})}$$

pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/k)$ et tout $[t]$ se réduisant à [1] modulo $T(\mathbb{Q})K$.

1.2.3. — Plus généralement, considérons maintenant un élément arbitraire $x \in \mathrm{Sh}(T, \mu, K)$ défini sur k/E_μ et $\xi \in \mathrm{Sh}(T, \mu)$ un relèvement. La fibre au-dessus de x s'écrit $[K]\xi$ par homogénéité. Le groupe abstrait $[K]$ opérant simplement transitivement, il s'agit d'un $[K]$-torseur et il existe un unique homomorphisme

$$\alpha_\xi : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/k) \to [K]$$

décrivant l'action galoisienne sur cette fibre au sens de la formule

$$\sigma \cdot [t\xi] = [\alpha_\xi(\sigma)t\xi].$$

1.2.4. — Soient $f : (T, \mu) \to (T', \mu')$ un morphisme de données de Shimura et $K \subset T(\mathbb{A}_f), K' \subset T'(\mathbb{A}_f)$ des sous-groupes ouverts-compacts tels que $f_{\mathbb{A}_f}(K) \subset K'$. Notons qu'étant donné K', on peut choisir K assez petit vérifiant cette condition. En effet $f_{\mathbb{A}_f}^{-1}K'$ est ouvert contenant 1 et les sous-groupes ouverts compacts de $T(\mathbb{A}_f)$ forment un système fondamental de voisinage de l'élément neutre. Notons que dans ce cas on a l'inclusion $E_{\mu'} \subset E_\mu$. L'homomorphisme $f : T \to T'$ induit un homomorphisme de groupes abstraits $[f] : [K] \to [K']$. Si x est un élément de $\mathrm{Sh}(T, \mu, K)$ défini sur k et ξ un relèvement de x à $\mathrm{Sh}(T, \mu)$, le point $\mathrm{Sh}(f)(x)$ est encore défini sur k et le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
 & {[K]} \arrow[dd, "{[f]}"] \\
\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/k) \arrow[ur, "\alpha_\xi"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathrm{Sh}(f)(\xi)}"'] & \\
 & {[K']}
\end{tikzcd}$$

1.3. $\mathbb{Q}$-Modifications. —

1.3.1. — Soit k un corps de caractéristique nulle. Si $D \to \mathrm{Spec}(k)$ est un groupe diagonalisable, son groupe de caractère est défini comme

$$X(D) = \mathrm{Hom}(D_{\bar{k}}, \mathbb{G}_{m,\bar{k}}),$$

il s'agit d'un groupe abélien muni d'une action continue du groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Le foncteur X est une équivalence exacte de catégories abéliennes,

$$X : (\mathsf{\textbf{Diag}}/k)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\Gamma]\text{-}\mathsf{\textbf{Mod}}.$$

Un k-tore algébrique est un groupe diagonalisable connexe. Le groupe des cocaractères est,

$$Y(T) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, T_{\bar{k}}),$$

encore muni d'une action galoisienne. Si T est un k-tore algébrique, on a un accouplement non-dégénéré et Galois-invariant, naturel en T,

$$\langle\ ,\ \rangle_T : X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} Y(T) \to X(\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z},\ (\chi, \gamma) \mapsto \chi \circ \gamma,$$

réalisant un isomorphisme naturel $Y(T) = X(T)^{\vee}$. Le foncteur Y réalise une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathsf{\textbf{Tor}}/k$ des k-tores algébriques et la catégorie $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)]$-$\mathsf{\textbf{Latt}}$ des modules galoisiens libres de rang fini sur $\mathbb{Z}$. Tout homomorphisme de k-tores algébriques $\alpha : T \to S$ induit des morphismes de modules galoisiens,

$$\alpha^* : X(S) \to X(T),\ \text{ et } \alpha_* : Y(T) \to Y(S),$$

qui sont adjoints l'un de l'autre au sens où,

$$\langle \chi, \alpha_* \gamma \rangle_S = \langle \alpha^* \chi, \gamma \rangle_T\ ,\ \forall \chi \in X(S), \forall \gamma \in Y(T).$$

Pour toute partie $P \subset Y(T)$, on notera P° son orthogonal dans $X(T)$.

1.3.2. — Soit (T, μ) une donnée de Shimura torale. On dit qu'un quotient de $\mathbb{Q}$-tores algébriques $f : T \twoheadrightarrow S$ est une $\mathbb{Q}$-*modification* de la paire de Shimura (T, μ) si l'homomorphisme poids associée à la paire $(S, f_* \mu)$ est défini sur $\mathbb{Q}$.

Lemme 1.2. — *Soit (T, μ) une paire de Shimura et soit $W \subset \mathbb{R}$ le corps de définition de son poids. Alors $f : T \twoheadrightarrow S$ est une $\mathbb{Q}$-modification de (T, μ) si et seulement si,*

$$f^* X(S) \subset M(w) := \langle \tau(w) - w \rangle^{\circ}_{\tau \in \mathscr{T}}\ ,$$

où $\mathscr{T}$ est un système de représentants de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/W)$*-classes à gauches dans* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Démonstration. — Le cocaractère f_*w est défini sur $\mathbb{Q}$ si et seulement s'il est invariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Considérons $\mathscr{T}$ un système de représentants comme dans le lemme. Puisque w est $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/W)$-invariant par définition du corps W, f_*w est $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/W)$-invariant si et seulement si $\tau(f_*w) = f_*w$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$. Ceci est équivalent à la condition :

$$\langle \chi, \tau(f_*w) - f_*w \rangle_S = 0, \forall \chi \in X(S), \forall \tau \in \mathscr{T},$$

puisque que le crochet de dualité est non-dégénéré. Par adjonction, ceci s'écrit comme voulu :

$$\langle f^*\chi, \tau(w) - w \rangle_T\,,\ \forall \chi \in X(S), \forall \tau \in \mathscr{T},$$

en utilisant que f_* est un morphisme de modules galoisiens puisque f est un $\mathbb{Q}$-homomorphisme. □

Corollaire 1.3. — *Il existe une $\mathbb{Q}$-modification minimale*

$$f_0 : T \twoheadrightarrow S_0$$

au sens où pour toute $\mathbb{Q}$-modification $f : T \twoheadrightarrow S$, il existe une unique factorisation,

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "f_0"'] \arrow[dr, "f"] & \\ S_0 \arrow[rr, dotted, "\theta"'] & & S \end{tikzcd} .$$

Démonstration. — L'inclusion $M(w) \subset X(T)$ définie dans le lemme précédent vérifie la propriété analogue dans la catégorie des modules galoisiens. Le quotient $f_0 : T \twoheadrightarrow S_0$ qui lui correspond par l'anti-équivalence de catégories $T \mapsto X(T)$ répond au problème universel posé. □

2. Variétés de Shimura étranges : cas commutatif

2.1. Données étranges commutatives. —

2.1.1. — Soit E un corps à multiplication complexe de degré $2d$ et soit F son sous-corps totalement réel maximal (de degré d). Nous noterons $\Sigma = \mathrm{Hom}(E, \bar{\mathbb{Q}})$ et $\Sigma^+ = \mathrm{Hom}(F, \bar{\mathbb{Q}})$. Si φ est un élément de Σ, on notera φ^+ sa restriction à F. L'application $\varphi \mapsto \varphi^+$ définit alors une surjection $\Sigma \twoheadrightarrow \Sigma^+$. Un type CM de E est par définition l'image d'une section de cette surjection. Nous fixons pour la suite de ce texte un tel type Φ dont les éléments seront notés $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$, de sorte que Σ est consitué des éléments $\varphi_1, \ldots, \varphi_d, \varphi_1^*, \ldots, \varphi_d^*$ où $\varphi \mapsto \varphi^*$ désigne l'action de la conjugaison complexe de E sur les plongements complexes de E.

2.1.2. — Notons T et T^+ les $\mathbb{Q}$-tores algébriques $E^\times$ et $F^\times$, *i.e.* pour tout $\mathbb{Q}$-algèbre commutative R, on a

$$T(R) = (E \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times, \; T^+(R) = (F \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times.$$

Le groupe $X(T)$ est le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\varphi_1, \ldots, \varphi_d, \varphi_1^*, \ldots, \varphi_d^*$ et nous noterons $\mu_1, \ldots, \mu_d, \mu_1^*, \ldots, \mu_d^*$ les éléments de la base duale dans $Y(T) \simeq X(T)^\vee$. L'application $\varphi \mapsto \varphi^+$ induit un homomorphisme galoisien $X(T) \twoheadrightarrow X(T^+)$ que l'on notera encore $\chi \mapsto \chi^+$. Il s'inscrit dans la suite exacte

$$0 \to \langle \varphi_1 - \varphi_1^*, \ldots, \varphi_d - \varphi_d^* \rangle \to X(T) \to X(T^+) \to 0,$$

et correspond à l'inclusion $T^+ \hookrightarrow T$. Par dualité, on obtient une injection $Y(T^+) \hookrightarrow Y(T)$ donnant lieu à l'identification,

$$Y(T^+) \simeq \langle \mu_1 + \mu_1^*, \ldots, \mu_d + \mu_d^* \rangle \subset Y(T).$$

Nous noterons $\mu \mapsto \mu^+$ l'extension $\mathbb{Z}$-linéaire de l'application $\mu_i \mapsto \mu_i^+ = \mu_i + \mu_i^*$ de sorte que l'application induit $Y(T) \to Y(T^+)$ correspond à l'homomorphisme algébrique $\mathrm{Nm}_{E/F} : T \to T^+$.

2.1.3. — Considérons à présent un sous-ensemble non vide $\Psi \subset \Phi$ dont les éléments seront notés $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ et notons

$$\mu_\Psi = \mu_1 + \ldots + \mu_l.$$

Le couple (T, μ_Ψ) est la *donnée étrange associé au type partiel* (E, Ψ). Le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agissant sur les sous-ensembles de Σ, le corps réflex de la donnée (T, μ_Ψ) est le sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$ correspondant au stabilisateur de Ψ. En particulier lorsque Ψ est réduit à un élément φ, il s'agit de $\varphi(E) \subset \bar{\mathbb{Q}}$. Le corps de définition du poids,

$$w = \mu_1 + \mu_1^* + \cdots + \mu_l + \mu_l^* = \mu_1^+ + \cdots \mu_l^+,$$

correspond au stabilisateur de la partie $\Psi \sqcup \Psi^*$; lorsque $\Psi = \{\varphi\}$, il s'agit du sous-corps réel $\varphi^+(F) \subset \mathbb{R}$.

2.1.4. — Puisque T est commutatif, la multiplication induit un homomorphisme surjectif $T \times \cdots \times T \to T$ et en particulier un morphismes de données de Shimura (étranges)

$$(T, \mu_1) \times \cdots \times (T, \mu_l) \twoheadrightarrow (T, \mu_\Psi).$$

Si $K, K_1, \ldots, K_l \subset T(\mathbb{A}_f)$ sont des sous-groupes ouverts-compacts nets tels que $K_1 \cdots K_l \subset K$, on obtient ainsi un revêtement étale surjectif

$$\mathrm{Sh}(T, \mu_1, K_1) \times \cdots \times \mathrm{Sh}(T, \mu_l, K_l) \to \mathrm{Sh}(T, \mu_\Psi, K),$$

défini sur le compositum $\varphi_1(E) \cdots \varphi_l(E)$.

2.2. Les tores N et T_1. —

2.2.1. — Considérons le $\mathbb{Q}$-groupe algébrique N, noyau de l'homomorphisme

$$\mathrm{Nm}_{F/\mathbb{Q}} : T^+ \to \mathbb{G}_m,$$

vu comme sous-groupe de T. Au niveau des caractères, l'application $\mathrm{Nm}^*_{F/\mathbb{Q}} : \mathbb{Z} \to X(T^+)$ est donnée par $1 \mapsto \varphi_1^+ + \cdots + \varphi_d^+$. En particulier, le $\mathbb{Z}$-module

$$X(N) = \mathrm{Coker}\, \mathrm{Nm}^*_{F/\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Z}^{\oplus d}/\mathbb{Z} \cdot (1, \ldots, 1) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus (d-1)}$$

est sans torsion, donc le groupe N est un tore algébrique. L'adjoint $\mathrm{Nm}_{F/\mathbb{Q},*}$ est donné par $\sum_i a_i \mu_i^+ \mapsto \sum_i a_i$ et l'on obtient ainsi,

$$Y(N) = \mathrm{Ker}\, \mathrm{Nm}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q},*} = \mathbb{Z}(\mu_1^+ - \mu_2^+) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(\mu_1^+ - \mu_d^+).$$

2.2.2. — Un objet central de notre étude est le quotient algébrique

$$q : T \twoheadrightarrow T_1 = T/N.$$

Vu comme sous-module de $X(T)$ par q^*, son module de caractères

$$\mathfrak{X} = X(T/N) = \mathrm{Ker}(X(T) \to X(T^+) \to X(N))$$

est engendré librement par les éléments

$$\varphi_1 - \varphi_1^*, \ldots, \varphi_d - \varphi_d^*, \varphi_1 + \ldots + \varphi_d.$$

Le sous-$\mathbb{Z}$-module $\mathfrak{X} \subset X(T)$ est ainsi constitué des éléments $\chi = \sum_\varphi a(\varphi)\varphi$ tels que le poids

$$w(\chi) = a(\varphi) + a(\varphi^*)$$

soit indépendant de φ. Dans la littérature, ces éléments sont parfois appelés *types infinis* (voir par exemple [**Sch88**]).

Proposition 2.1. — *Le quotient $q : T \twoheadrightarrow T_1$ est une $\mathbb{Q}$-modification de la donnée étrange (T, μ_Ψ). On l'appelle* modification normale.

Démonstration. — Reprenons les notations du lemme 1.2. L'homomorphisme poids w s'écrit

$$\mu_1 + \mu_1^* + \cdots + \mu_l + \mu_l^*.$$

Les automorphismes $\tau \in \mathscr{T}$ commutent à la conjugaison complexe et $\tau(w) - w$ est donc une combinaison linéaire de la forme

$$\sum_i \varepsilon_i(\mu_i + \mu_i^*)$$

dont les coefficients $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ vérifient

$$\sum_i \varepsilon_i = 0.$$

Si χ est un élément de $\mathfrak{X}$ on a donc

$$\langle \chi, \tau(w) - w \rangle = \sum_i \varepsilon_i \langle \chi, \mu_i + \mu_i^* \rangle = w(\chi) \sum_i \varepsilon_i = 0.$$

On a finalement $\mathfrak{X} \subset M(w)$, ce qui conclut. □

2.2.3. — On peut également relier le quotient T_1 aux groupes algébriques $T_{\mathfrak{m}}$ introduits par Serre dans [**Ser68**] grâce au lemme suivant.

Lemme 2.2. — *Pour tout sous-groupe arithmétique Δ assez petit de $T(\mathbb{Q})$ ou $T^+(\mathbb{Q})$, on a,*

$$\Delta^{\mathrm{zar}} = N.$$

Démonstration. — D'après le théorème des unités de Dirichlet, les groupes abéliens $\mathscr{O}_F^\times$ et $\mathscr{O}_E^\times$ ont même rang, à savoir $d-1$. En particulier, $\mathscr{O}_F^\times$ est d'indice fini dans $\mathscr{O}_E^\times$ et tout sous-groupe arithmétique de $T^+(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe arithmétique de $T(\mathbb{Q})$. Il suffit donc de prouver le lemme pour T^+. D'après [**Ser68**, II.1.2], le sous-groupe $X(T^+/\Delta^{\mathrm{zar}}) \subset X(T^+)$ est constitué des éléments $\chi = \sum_\varphi a(\varphi)\varphi$ tels que $\prod_\varphi \varphi(t)^{a(\varphi)} = 1$ pour tout $t \in \Delta$. Considérons le plongement logarithmique

$$\log_F : t \mapsto (\log|\varphi(t)|)_{\varphi \in \Sigma^+}$$

de $F^\times$ dans $\mathbb{R}^{\Sigma^+}$. Il s'agit un homomorphisme identifiant $\mathscr{O}_F^\times$ à un réseau de rang $d-1$ de l'hyperplan de $\mathbb{R}^{\Sigma^+}$ défini par l'équation $\sum_\varphi x_\varphi = 0$. En particulier, puisque $\Delta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathscr{O}_F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, le vecteur $(a(\varphi)) \in \mathbb{Z}^{\Sigma^+}$ doit être orthogonal à ce réseau ; en effet on a alors,

$$\sum_{\varphi \in \Sigma} a(\varphi) \log|\varphi(x)| = 0,$$

pour tout $x \in \mathscr{O}_E^\times$. Ces vecteurs forment donc un réseau de rang 1 engendré par l'élément $(1, \dots, 1)$ correspondant au caractère

$$\varphi_1^+ + \cdots + \varphi_d^+.$$

On obtient donc l'inclusion $X(T^+/\Delta^{\mathrm{zar}}) \subset X(T^+/N)$, autrement dit $N \subset \Delta^{\mathrm{zar}}$, pour tout sous-groupe arithmétique Δ de $T^+(\mathbb{Q})$. D'autre part le sous-groupe $\mathscr{O}_F^\times \subset T^+(\mathbb{Q})$ est arithmétique et la restriction de $\mathrm{Nm}_{F/\mathbb{Q}}$ à celui-ci est à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Le noyau $\Delta_0 = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Nm}_{F/\mathbb{Q}}|_{\mathscr{O}_F^\times}$, d'indice au plus 2 dans $\mathscr{O}_F^\times$, est donc un sous-groupe arithmétique de $T^+(\mathbb{Q})$ contenu dans $N(\mathbb{Q})$. Finalement, pour tout $\Delta \subset \Delta_0$, on a

$$\Delta \subset N \subset \Delta^{\mathrm{zar}}$$

d'où l'égalité $\Delta^{\mathrm{zar}} = N$. □

3. Motifs abéliens

3.1. Systèmes de réalisations. —

3.1.1. — Comme dans [**Del89**], on considère un motif comme un système de réalisations. Le fait que la catégorie des motifs de Hodge absolus se plonge de façon pleinement fidèle dans une telle catégorie est démontré dans [**Jan90**, th 4.4]. Notre traitement est inspiré plus directement de [**FM22**] et [**Yan23**].

3.1.2. — Soit k un sous-corps de $\mathbb{C}$. Un *système faible de réalisations* ou *$\mathscr{R}$-structure* sur k est un quintuplet $(V_{\mathrm{B}}, V_{\mathrm{dR}}, V_{\text{ét}}, i_{\mathrm{dR}}, i_{\text{ét}})$, où :

- V_{B} est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel,
- V_{dR} est $\mathbb{C}$-espace vectoriel munie d'une $\mathbb{Z}$-filtration décroissante finie,
- $V_{\text{ét}}$ est un $\mathbb{A}_f$-module libre de rang fini muni d'une action continu du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$,
- $i_{\mathrm{dR}} : V_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq V_{\mathrm{dR}}$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V_{dR} en ainsi muni d'une forme réelle $V_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et donc d'une conjugaison complexe $v \mapsto \bar{v}$. On suppose que que la filtration
$$0 = F^n \subset \cdots \subset F^m = V_{\mathrm{dR}}$$
vérifie la condition de Hodge :
$$F^p \oplus \overline{F}^{n-p+1} = V_{\mathrm{dR}}.$$

Elle induit ainsi une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge sur V_{B} que l'on suppose également polarisable.

- $i_{\text{ét}} : V_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \simeq V_{\text{ét}}$ est un isomorphisme de $\mathbb{A}_f$-modules.

Si $V = (V_{\mathrm{B}}, V_{\mathrm{dR}}, V_{\text{ét}}, i_{\mathrm{dR}}, i_{\text{ét}})$ et $W = (W_{\mathrm{B}}, W_{\mathrm{dR}}, W_{\text{ét}}, j_{\mathrm{dR}}, j_{\text{ét}})$ sont deux $\mathscr{R}$-structures sur k, un morphisme de $\mathscr{R}$-structures $f : V \to W$ est la donnée d'un triplet $(f_{\mathrm{B}}, f_{\mathrm{dR}}, f_{\text{ét}})$ dont les composantes sont des morphismes pour les structures correspondantes et tel que les diagrammes suivants soient commutatifs.

$$\begin{tikzcd} V_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \arrow[r, "f_{\mathrm{B}}\otimes 1"] \arrow[d, "i_{\mathrm{dR}}"'] & W_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \arrow[d, "j_{\mathrm{dR}}"] \\ V_{\mathrm{dR}} \arrow[r, "f_{\mathrm{dR}}"'] & W_{\mathrm{dR}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \arrow[r, "f_{\mathrm{B}}\otimes 1"] \arrow[d, "i_{\text{ét}}"'] & W_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \arrow[d, "j_{\text{ét}}"] \\ V_{\text{ét}} \arrow[r, "f_{\text{ét}}"'] & W_{\text{ét}} \end{tikzcd}$$

On notera $\mathscr{R}(k)$ la catégorie ainsi définie, il s'agit d'une catégorie tannakienne $\mathbb{Q}$-linéaire ([**Jan90**, prop 2.15]). Si $k \hookrightarrow k'$ est une extension finie, le foncteur d'extension des scalaire $(-)|_{k'} : \mathscr{R}(k) \to \mathscr{R}(k')$ associe à une $\mathscr{R}$-structure V sur k le même quintuplet mais où l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $V_{\text{ét}}$ est restreinte au sous-groupe $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k')$. Il s'agit d'un $\otimes$-foncteur exact.

3.1.3. — Si A est une variété abélienne sur k, on définit la $\mathscr{R}$-structure $\mathfrak{h}_1(A)$ dont les composantes sont :

- $\mathfrak{h}_1(A)_{\mathrm{B}}$ est l'homologie $H_1(A^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$,
- $\mathfrak{h}_1(A)_{\mathrm{dR}}$ est $H_1(A^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ muni de la filtration de Hodge,
- $\mathfrak{h}_1(A)_{\text{ét}}$ est le module de Tate $V_f(A) = \lim A[N]_{\bar{k}}$,
- i_{dR} provient du changement de coefficients en homologie singulière,
- $i_{\text{ét}}$ provient de l'égalité $A[N]_{\bar{k}} = A[N]_{\mathbb{C}}$ valable pour tout N.

3.1.4. — Le *système de Tate*, abusivement noté $\mathbb{Q}(1)$, est défini comme,

- $\mathbb{Q}(1)_{\mathrm{B}} = 2\pi i \subset \mathbb{C}$,
- $\mathbb{Q}(1)_{\mathrm{dR}} = \mathbb{C}$, $0 = F^0 \subset F^{-1} = \mathbb{C}$,
- $\mathbb{Q}(1)_{\text{ét}} = V_f(\mathbb{G}_m)$ (qui est un $\mathbb{A}_f$-module libre de rang 1).

Si V est une $\mathscr{R}$-structure, on note $V(1) = V \otimes \mathbb{Q}(1)$ et l'on dit que $V(1)$ est le *tordu de Tate de* V. Une $\square$-construction sur une $\mathscr{R}$-structure V est une $\mathscr{R}$-structure $V^{\square}$ obtenue à partir de V par somme directe, torsion de Tate, dualité et produits tensoriels.

Définition 3.1. — On dit qu'une $\mathscr{R}$-structure V est $\mathfrak{A}$-*motivique* s'il existe une variété abélienne A sur k, une $\square$-construction $\mathfrak{h}_1(A)^\square$ sur $\mathfrak{h}_1(A)$ et un idempotent
$$e \in \mathrm{End}_{\mathscr{R}(k)}(\mathfrak{h}_1(A)^\square)$$
tels que $V = \mathrm{Im}(e)$. Une $\mathscr{R}$-structure V est *localement* $\mathfrak{A}$-*motivique* s'il existe une extension finie $k \hookrightarrow k'$ telle que $V|_{k'}$ soit $\mathfrak{A}$-motivique.

Les catégories $\mathfrak{A}(k)$ et $\mathfrak{A}(k)_{\mathrm{loc}}$ ainsi définies sont des sous-$\otimes$-catégories tannakiennes de $\mathscr{R}(k)$.

3.2. Réalisations de Shimura torales. —

3.2.1. — Considérons une donnée de Shimura torale (T, μ) et supposons donné un sous-groupe ouvert-compact net $K \subset T(\mathbb{A}_f)$ vérifiant l'axiome suivant : *le poids de la composé*
$$\mathbb{G}_m \xrightarrow{\mu} T_{\mathbb{R}} \longrightarrow (T/\Delta^{\mathrm{zar}})_{\mathbb{R}}$$
est défini sur $\mathbb{Q}$; Δ désignant le sous-groupe de congruence $K \cap T(\mathbb{Q})$. Soit x un point de $\mathbf{Sh}(T, \mu, K)$ défini sur une extension L/E_μ et soit $\xi \in \mathrm{Sh}(T, \mu, K^\downarrow)$ un système compatible de points géométriques (définis sur $\bar{\mathbb{Q}}$) dont la K-composante est $x|_{\bar{\mathbb{Q}}}$, *i.e.* tel que le triangle suivant soit commutatif.
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}) \arrow[d] \arrow[dr, "\xi^K"] & \\ \mathrm{Spec}(L) \arrow[r, "x"'] & \mathbf{Sh}(T, \mu, K) \end{tikzcd}$$
Notons que l'axiome précédent entraîne que le groupe $[K]$, quotient de K par $\overline{\Delta}$, s'envoie naturellement dans $(T/\Delta^{\mathrm{zar}})(\mathbb{A}_f)$ d'après l'inclusion
$$\overline{\Delta} \subset \Delta^{\mathrm{zar}}(\mathbb{A}_f).$$

3.2.2. — Soit V une $\mathbb{Q}$-représentation du groupe algébrique T/Δ^{zar}, on définit le système de réalisations $\mathfrak{sh}_{\xi,x}(V)$ dont les composantes sont :

- $\mathfrak{sh}_{\xi,x}(V)_{\mathrm{B}} = V$,
- $\mathfrak{sh}_{\xi,x}(V)_{\mathrm{dR}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. Considérant la bigraduation
$$V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} (V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^{p,q}$$

définie par $h_{\mathbb{C}}$, la filtration est donnée par

$$F^m = \bigoplus_{p \geqslant m} (V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^{p,q}.$$

- $\mathfrak{sh}_{\xi,x}(V)_{\text{ét}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f$ muni de l'action galoisienne définie par la composée,

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/L) \xrightarrow{\alpha_{\xi,x}} [K] \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{A}_f}(V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f)\ .$$

- i_{dR} et $i_{\text{ét}}$ sont les identifications tautologiques.

On définit ainsi un $\otimes$-foncteur exact

$$\mathfrak{sh}_{\xi,x} : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(T/\Delta^{\mathrm{zar}}) \to \mathscr{R}(L).$$

3.2.3. — Notons qu'un morphisme de données de Shimura $f : (T, \mu) \to (T', \mu')$ induit un diagramme commutatif de foncteurs,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(T/\Delta^{\mathrm{zar}}) \arrow[dr, "\mathfrak{sh}_{\xi,x}"] & \\
& \mathscr{R}(L) \\
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(T'/\Delta'^{,\mathrm{zar}}) \arrow[uu, "f^{\top}"] \arrow[ur, "\mathfrak{sh}_{\xi',x'}"'] &
\end{tikzcd}$$

où $K \subset T(\mathbb{A}_f)$ et $K' \subset T'(\mathbb{A}_f)$ vérifient $f_{\mathbb{A}_f}(K) \subset K'$ et où x' et ξ' sont les images de x et ξ par le morphisme algébrique $\mathrm{Sh}(f)$.

3.3. Théorie de Shimura-Taniyama. —

3.3.1. — Il est bien connu que la théorie de la multiplication complexe de Shimura-Taniyama produit des systèmes de réalisations $\mathfrak{A}$-motiviques. Donnons quelques indications sur ce point crucial en référant à l'appendice de [**CCO14**] pour les détails techniques. Considérons un couple (E, Φ) constitué d'un corps à multiplication complexe E et d'un type CM de E. Soit (T, μ_Φ) la donnée de Shimura torale qu'elle définit comme en 2.1. Le poids est alors défini sur $\mathbb{Q}$ et μ_Φ se factorise par le *tore réflex*

$$S = \mathrm{Nm}_{E/F}^{-1} \mathbb{G}_m \subset T.$$

Notons V la représentation régulière (à droite) du corps E que l'on munit de la structure de Hodge induite par Φ. Cette structure de Hodge est polarisée par la forme symplectique $\psi : V \otimes_{\mathbb{Q}} V \to \mathbb{Q}$ donnée par

$\psi(v,w) = \mathrm{Tr}_{E/\mathbb{Q}}(\theta v w)$ où θ est un élément de E vérifiant $\theta^* = -\theta$. Fixons un sous-groupe ouvert-compact net $K \subset S(\mathbb{A}_f)$. Considérons l'ensemble $\mathscr{A}_\Phi^K(\mathbb{C})$ des classes d'isomorphismes d'objets $(A, \iota, \lambda, \eta K)$ où :

- A est une variété abélienne à isogénie près sur $\mathbb{C}$,
- $\iota : E \to \mathrm{End}^0(A)$ est un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres tel que les $E \otimes \mathbb{C}$-modules $\mathrm{Lie}(A)$ et $V^{-1,0}$ soient isomorphes (un tel isomorphisme n'étant pas fixé),
- $\lambda : A \to A^\vee$ est une $\mathbb{Q}$-polarisation E-linéaire,
- ηK est une structure de niveau K, *i.e.* une classe modulo K d'isomorphismes $\mathbb{A}_f$-linéaires

$$V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \xrightarrow{\sim} V_f(A)$$

compatibles aux formes symplectiques et à l'action de E [3].

Fixons un objet $(A, \iota, \lambda, \eta K)$. Il existe alors un isomorphisme E-linéaire de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge polarisées $f : H_1(A, \mathbb{Q}) \simeq V$. La composée

$$V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \xrightarrow{\eta} V_f(A) \simeq H_1(A, \mathbb{A}_f) \xrightarrow{f \otimes 1} V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f$$

est une similitude symplectique $(E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f)$-linéaire représentée par un élément $s \in S(\mathbb{A}_f)$. On peut montrer que la classe $[s]_K \in S(\mathbb{A}_f)/S(\mathbb{Q})K$ ne dépend que de la classe d'isomorphie $[A, \iota, \lambda, \eta K]$ et que l'application

$$[A, \iota, \lambda, \eta_K] \mapsto [s]$$

est une bijection de $\mathscr{A}_\Phi^K(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{Sh}(S, \mu_\Phi, K)$. Le théorème principal de la multiplication complexe tel que formulé dans [**CCO14**, A.2.9.1] implique que cette bijection induit une identification $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/E_\mu)$-équivariante

$$\mathscr{A}_\Phi^K(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}(S, \mu_\Phi, K).$$

L'action galoisienne sur $\mathscr{A}_\Phi^K(\mathbb{C})$ provient ici du fait que le foncteur $\mathscr{A}_\Phi^K$ prend sa source sur la catégorie des E_μ-schémas. Signalons également l'égalité classique $\mathscr{A}_\Phi^K(\bar{\mathbb{Q}}) = \mathscr{A}_\Phi^K(\mathbb{C})$.

3. Une définition plus détaillée est donnée au paragraphe 14

3.3.2. — Soit $\xi \in \mathrm{Sh}(S, \mu_\Phi, K^\downarrow)$ un système compatible et x un élement de $\mathbf{Sh}(S, \mu_\Phi, K)(L)$ comme précédemment. Au point ξ^K correspond une variété abélienne A_ξ sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et au point x, un modèle $A_{\xi,x}$ sur L. Choisissons alors un isomorphisme E-linéaire de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge $f : H_1(A_{\xi,\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) \simeq V$ comme précédemment. En faisant l'identification

$$V_f(A_{\xi,x}) \simeq H_1(A_{\xi,\mathbb{C}}, \mathbb{A}_f)$$

et en considérant f étendu à $\mathbb{C}$ et $\mathbb{A}_f$, on obtient le triplet d'isomorphismes

$$(f, f_\mathbb{C}, f_{\mathbb{A}_f}) : \mathfrak{h}_1(A_{\xi,x}) \simeq \mathfrak{sh}_{\xi,x}(V).$$

Il s'agit d'un isomorphisme dans la catégorie $\mathscr{R}(L)$: seule reste à vérifier la compatibilité avec l'identificatioin Betti-étale. L'action galoisienne sur le module de Tate de $A_{\xi,x}$ est décrite par un morphisme

$$\alpha'_\xi : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/L) \to K,$$

étant donné que A est muni d'une structure de niveau K. Le théorème principal de la multiplication complexe montre que α'_ξ est induit par la loi de réciprocité (voir [**Lan83**, chap 4, thm 1.1]) au sens où $\lambda(\sigma^{\mathrm{ab}})$ se décompose de façon unique en

$$\lambda(\sigma^{\mathrm{ab}}) = \alpha'_\xi(\sigma^{\mathrm{ab}})\beta(\sigma^{\mathrm{ab}})$$

pour tout σ, β étant un morphisme de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/L)$ dans $S(\mathbb{Q})$. En effet, K étant net l'intersection $K \cap S(\mathbb{Q})$ est triviale et l'on a un isomorphisme abstrait $KS(\mathbb{Q}) \simeq K \times S(\mathbb{Q})$. Par unicité, on obtient $\alpha_\xi = \alpha'_\xi$ vu la caractérisation de α_ξ donnée en 1.2.3, et donc que l'identification

$$V_f(A_{\xi,x}) \simeq V_{\text{ét}}$$

obtenue en remarquant que $V_f(A_{\xi,x})$ est un $(E \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{A}_f)$-module libre de rang 1, est équivariante pour l'action galoisienne.

3.3.3. — Si W est maintenant une représentation algébrique quelconque de S, il existe d'après le théorème de Chevalley [**Wat79**, 3.5, p.25] une construction tensorielle $V^\square$ dont V est une sous-représentation. Puisque S est réductif, sa catégorie de représentations algébriques est semi-simple et il existe donc un idempotent S-invariant $e \in \mathrm{End}(V^\square)$ dont W est l'image. On en déduit

$$\mathfrak{sh}_{\xi,x}(W) \simeq \mathrm{Im}\, \mathfrak{sh}_{\xi,x}(e)$$

et donc que $\mathfrak{sh}_{\xi,x}(W)$ est $\mathfrak{A}$-motivique.

4. Algèbre des types CM

4.1. Construction. —

4.1.1. — Soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble des types CM de E. En associant à tout type CM sa fonction caractéristique, on interprète cet ensemble comme celui des fonctions $\varepsilon : \Sigma \to \{0,1\}$ vérifiant $\varepsilon(\varphi) + \varepsilon(\varphi^*) = 1$ pour tout $\varphi \in \Sigma$. L'action à gauche du groupe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)$ sur $\mathfrak{C}$ donnée par la règle

$$\tau \cdot \{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\} = \{\tau \circ \varphi_1, \ldots, \tau \circ \varphi_d\}$$

s'interprète alors comme l'action $\tau \cdot \varepsilon : \varphi \mapsto \varepsilon(\tau^{-1} \circ \varphi)$. Notons en particulier que la conjugaison complexe ι de E induit une involution $\Phi \mapsto \Phi^*$ de $\mathfrak{C}$ qui s'écrit aussi $\varepsilon^* = 1 - \varepsilon$. D'après la théorie de Galois, il correspond à $\mathfrak{C}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre étale finie $\mathscr{E}$ munie d'une identification d'ensembles galoisiens

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{E}, \bar{\mathbb{Q}}) \simeq \mathfrak{C},$$

que nous appelerons *algèbre des types CM de E*. La décomposition $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{C}_s$ en orbites galoisiennes donne lieu à une décomposition de $\mathbb{Q}$-algèbres $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_s$ où chaque $\mathscr{E}_i$ s'identifie à un sous-corps de la clôture galoisienne de E dans $\bar{\mathbb{Q}}$.

Lemme 4.1. — *La $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathscr{E}$ est à multiplication complexe. Plus précisément, chaque facteur $\mathscr{E}_i$ est un corps à multiplication complexe.*

Démonstration. — Puisque E est un corps à multiplication complexe, sa clôture galoisienne E' l'est également (étant le compositum des conjugués de E qui sont aussi à multiplication complexe). Ainsi tout sous-corps de E', et en particulier chaque facteur $\mathscr{E}_i$, est totalement réel ou à multiplication complexe. Or l'involution $\varepsilon \mapsto \varepsilon^*$ est sans point fixe (d'après la formule $\varepsilon^* = 1 - \varepsilon$ par exemple) sur $\mathfrak{C}$, donc aussi sur chaque orbite $\mathfrak{C}_i$. Le fait qu'un facteur $\mathscr{E}_i$ soit totalement réel est donc exclu. □

Remarque 4.2. — Si $\Xi \subset \mathfrak{C}$ est un type CM de $\mathscr{E}$, i.e. une partie telle que $\Xi \sqcup \Xi^* = \mathfrak{C}$, chaque $\Xi_i = \Xi \cap \mathfrak{C}_i$ est un type CM de $\mathscr{E}_i$.

4.1.2. — Au module galoisien $\mathbb{Z}[\mathfrak{C}]$, engendré librement par l'ensemble $\mathfrak{C}$, correspond le tore induit $\mathscr{E}^\times$ donné sur tout $\mathbb{Q}$-algèbre commutative R par $\mathscr{E}^\times(R) = (\mathscr{E} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times$ de sorte que

$$X(\mathscr{E}^\times) = \mathbb{Z}[\mathfrak{C}].$$

Si $\varepsilon \in \mathfrak{C}$, on note φ_ε l'élément $\sum_\varphi \varepsilon(\varphi)\varphi$ de $X(E^\times)$. Il s'agit d'un élément de $\mathfrak{X}$ de poids 1. Fixant $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$, un type CM de E, une base de $\mathfrak{X}$ sur $\mathbb{Z}$ est donnée par les éléments

$$e_0 = \varphi_1 + \cdots + \varphi_d, e_1 = \varphi_1 - \varphi_1^*, \dots, e_d = \varphi_d - \varphi_d^*.$$

Une autre base est alors donnée par les éléments,

$$e_0, e_0 - e_1, \dots, e_0 - e_d$$

qui sont en outre de la forme φ_ε. La règle $j^* : \varepsilon \mapsto \varphi_\varepsilon$, étendue par $\mathbb{Z}$-linéarité, définit une surjection de modules galoisiens $\mathbb{Z}[\mathfrak{C}] \twoheadrightarrow \mathfrak{X}$ et par suite un monomorphisme $j : T_1 \hookrightarrow \mathscr{E}^\times$.

4.1.3. — Identifiant $Y(\mathscr{E}^\times)$ au $\mathbb{Z}$-dual de $X(\mathscr{E}^\times)$, l'injection j_* de $Y(T_1)$ dans $Y(\mathscr{E}^\times)$ est donnée par la règle

$$\langle j_*\mu, \varepsilon\rangle = \langle \mu, \varphi_\varepsilon\rangle .$$

Nous noterons $\mu_\varepsilon \in Y(\mathscr{E}^\times)$ les éléments de la base duale de $\mathfrak{C}$.

Lemme 4.3. — *L'ensemble $\Xi_1 = \{\varepsilon : \varepsilon(\varphi_1) = 1\}$ est un type CM de l'algèbre $\mathscr{E}$. De plus, l'image ν_1 de $q_*\mu_1 \in Y(T_1)$ dans $Y(\mathscr{E}^\times)$ est le cocaractère associé à Ξ_1 au sens où*

$$\nu_1 = \sum_{\varepsilon\in\Xi_1} \mu_\varepsilon.$$

Démonstration. — L'ensemble Ξ_1^* est donné par les fonctions ε telles que $\varepsilon(\varphi_1) = 0$, il est donc clair que Ξ_1 est un type CM de l'algèbre $\mathscr{E}$. Si ε_0 est un élément de $\mathfrak{C}$ on a

$$\langle \nu_1, \varepsilon_0\rangle = \langle q_*\mu_1, j^*\varepsilon_0\rangle = \langle q_*\mu_1, \varphi_{\varepsilon_0}\rangle = \varepsilon_0(\varphi_1),$$

montrant que les formes linéaires ν_1 et $\sum_{\varepsilon\in\Xi_1} \mu_\varepsilon$ sont égales. □

4.1.4. — Soit $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ la sous-$\mathbb{Q}$-algèbre invariante sous la conjugaison complexe. Il s'agit aussi de la $\mathbb{Q}$-algèbre produit des sous-corps totalement réels maximaux des facteurs $\mathscr{E}_i$. La formule $\alpha \mapsto \alpha\alpha^*$ définit un homomorphisme de tores algébriques $(1 + *) : \mathscr{E}^\times \to \mathscr{F}^\times$ qui au niveau des caractères donne l'application $\varepsilon^+ \mapsto \varepsilon + \varepsilon^*$ où ε^+ désigne la classe de ε dans le quotient $X(\mathscr{E}^\times) \twoheadrightarrow X(\mathscr{F}^\times)$. On définit le tore $S \subset \mathscr{E}^\times$ comme le produit fibré suivant.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{E}^\times \arrow[d, "1+*"] \\ \mathbb{G}_m^s \arrow[r] & \mathscr{F}^\times \end{tikzcd}$$

Il s'agit aussi du produit $S_1 \times \cdots \times S_s$ où chaque $S_i \subset \mathscr{E}_i^\times$ est le groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ défini par la condition $\alpha\alpha^* \in \mathbb{Q}^\times$.

Lemme 4.4. — *L'inclusion $T_1 \subset \mathscr{E}^\times$ se factorise par S. Plus précisément T_1 est inclu dans le sous-groupe de S défini par la condition*

$$\alpha_1\alpha_1^* = \cdots = \alpha_d\alpha_d^*.$$

Démonstration. — Il s'agit de vérifier que la composée des flèches

$$X(\mathscr{F}^\times) \to X(\mathscr{E}^\times) \twoheadrightarrow X(T_1),$$

est à valeurs dans $\mathbb{Z} \cdot \sum_\varphi \varphi$. Or

$$\varphi_\varepsilon + \varphi_{\varepsilon^*} = \varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon^* = \sum_\varphi \varphi,$$

et le résultat en découle par linéarité. □

4.2. Motivicité des données modifiées. —

4.2.1. — Notons $\nu_{1,i}$ la projection du cocaractère ν_1 sur le facteur S_i. Alors le cocaractère $\nu_{1,i}$ est associé au type $\Xi_{1,i} = \Xi_1 \cap \mathfrak{C}_i$. La paire $(S_i, \nu_{1,i})$ est donc la paire de Shimura associée au couple $(\mathscr{E}_i, \Xi_{1,i})$. Considérons U la représentation régulière (à gauche) de l'algèbre $\mathscr{E}$. Il s'agit d'une représentation fidèle des tores $T_1 \subset S \subset \mathscr{E}^\times$. Elle se décompose en une somme directe $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$ de représentations fidèles des S_i (chaque U_i étant la représentation régulière du corps $\mathscr{E}_i$). Afin de compléter le problème de modules, on fait le choix de la polarisation $\psi = \psi_1 \times \cdots \times \psi_s$ avec

$$\psi_i(\alpha_i, \beta_i) = \mathrm{Tr}_{\mathscr{E}_i/\mathbb{Q}}(\theta_i\alpha_i\beta_i^*),$$

les éléments $\theta_i \in \mathscr{E}_i^\times$ vérifiant $\theta_i^* = -\theta_i$. Pour chaque i, la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(S_i, \nu_{1,i})$ s'interprète comme l'espace de modules des variétés abéliennes à multiplication complexe (à isogénie près) admettant $(\mathscr{E}_i, \Xi_{1,i})$

pour type CM, munies d'une trivialisation du module de Tate adélique. Quant à la variété $\mathrm{Sh}(S, \nu_1)$, elle se décompose en

$$\mathrm{Sh}(S_1, \nu_{1,1}) \times \cdots \times \mathrm{Sh}(S_s, \nu_{1,s}).$$

Choisissons un sous-groupe ouvert compact produit

$$K^\natural = K_1 \times \cdots \times K_s \subset S(\mathbb{A}_f).$$

Si les K_i sont suffisamment petits, il existe un sous-groupe ouvert $K \subset T_1(\mathbb{A}_f)$ tel que

$$\mathrm{Sh}(T_1, q_*\mu_1, K) \to \mathrm{Sh}(S, \nu_1, K^\natural),$$

soit une immersion fermée (elle est également ouverte puisque les espaces sont finis discrets à la source comme au but). Si ξ est un système de $\bar{\mathbb{Q}}$-points compatibles sur $\mathrm{Sh}(T_1, q_*\mu_1, K^\downarrow)$, avec ξ^K défini sur une extension finie $k/E(T_1, q_*\mu_1)$, et si $\xi^\natural$ est son image dans $\mathrm{Sh}(S, \nu_1, K^\natural)$, on a alors le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(T_1) \arrow[dr, "\mathfrak{sh}_\xi"] & \\
& \mathscr{R}(k) \\
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(S) \arrow[uu] \arrow[ur, "\mathfrak{sh}_{\xi^\natural}"'] &
\end{tikzcd}$$

En particulier le système de réalisations $\mathfrak{sh}_\xi(U)$ coïncide avec le système $\mathfrak{sh}_{\xi^\natural}(U)$ qui est $\mathfrak{A}$-motivique.

Théorème 4.5. — *Si $K_0 \subset T_1(\mathbb{A}_f)$ est net, les $\mathscr{R}$-structures associées à la variété de Shimura*

$$\mathrm{Sh}(T_1, q_*\mu_1, K_0)$$

sont localement $\mathfrak{A}$-motiviques.

Démonstration. — La discussion précédente montre que le théorème est vrai pour K assez petit. Pour K_0 net quelconque, on choisit $K \subset K_0$ suffisamment petit, le revêtement fini étale

$$\mathrm{Sh}(T_1, q_*\mu_1, K) \to \mathrm{Sh}(T_1, q_*\mu_1, K_0)$$

donne la $\mathfrak{A}$-motivicité locale en niveau K_0. $\square$

4.2.2. — La construction 2.1.4 donne immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 4.6. — *Les $\mathscr{R}$-structures associées aux données étranges modifiées sont localement $\mathfrak{A}$-motiviques.*

PARTIE II. ASPECTS HODGIENS

5. $\mathbb{Q}$-Structures de Hodge

5.1. Formalisme général. —

5.1.1. — Soit (G, h) une paire constituée

- d'un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique réductif G,
- d'un homomorphisme de $\mathbb{R}$-groupes algébriques $h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$.

On a alors un $\otimes$-foncteur

$$\mathscr{H}_{(G,h)} : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \to \mathbb{Q}\mathbf{HS}^*,$$

donné par $(V, \alpha) \mapsto (V, \alpha_{\mathbb{R}} \circ h)$ où $\alpha : G_0 \to \mathrm{Aut}(V)$ est une représentation algébrique. La catégorie $\mathbb{Q}\mathbf{HS}^*$ désigne celle des paires (V, h) où V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et $h : \mathbb{S} \to \mathrm{Aut}(V_{\mathbb{R}})$ un homomorphisme de $\mathbb{R}$-groupes algébriques. La sous-catégorie pleine $\mathbb{Q}\mathbf{HS}$ est donnée par les objets (V, h) tels que le poids de h soit défini sur $\mathbb{Q}$, appelés $\mathbb{Q}$-structures de Hodge (pures). Pour éviter tout confusion, les objets de $\mathbb{Q}\mathbf{HS}^*$ seront appelés *pseudo-$\mathbb{Q}$-structures de Hodge.*

5.1.2. — On note $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$ la sous-$\otimes$-catégorie de $\mathbb{Q}\mathbf{HS}$ engendrée par les $\mathbb{Q}$-structures de Hodge pures polarisables de poids -1 et de type

$$\{(-1, 0), (0, -1)\},$$

autrement dit la sous-$\otimes$-catégorie engendrée par les $H_1(A, \mathbb{Q})$ de variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$. D'après les résultats [**Del80**], cette catégorie est équivalente à celle des $\mathbb{C}$-motifs abéliens (pour les cycles de Hodge absolus). Le *groupe de Mumford-Tate* d'un objet $\mathfrak{a} = (V_{\mathfrak{a}}, h_{\mathfrak{a}})$ de $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$ est le plus-petit sous-$\mathbb{Q}$-groupe algébrique $M_{\mathfrak{a}}$ de $\mathrm{Aut}(V_{\mathfrak{a}})$ dont le groupe des $\mathbb{R}$-points contienne $h_{\mathfrak{a}}(\mathbb{C}^{\times})$. On a alors une équivalence de catégories,

$$\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(M_{\mathfrak{a}}) \simeq \langle \mathfrak{a} \rangle^{\otimes} \subset \mathfrak{A}(\mathbb{C}).$$

On dira qu'une représentation V de G est **$\mathfrak{A}$-motivique** (relativement à la paire (G, h)) lorsque $\mathscr{H}_{(G,h)}(V)$ est un objet de $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$.

5.1.3. — Lorsque V est une représentation de G, notons $G \twoheadrightarrow G(V)$ le quotient de G agissant fidèlement sur V, *i.e.* l'image de G dans $\mathrm{Aut}(V)$. Pour tout objet de $\langle V \rangle^{\otimes} \subset \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G)$, la représentation de G se factorise en une représentation de $G(V)$ et l'on obtient une $\otimes$-équivalence de catégories

$$\langle V\rangle^{\otimes} \simeq \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G(V)),$$

compatible avec les foncteurs fibres.

Lemme 5.1. — *Une représentation V de G est $\mathfrak{A}$-motivique (relativement à (G,h)) si et seulement si il existe un plongement*

$$(M_{\mathfrak{a}}, h_{\mathfrak{a}}) \hookrightarrow (G(V), h)$$

où $\mathfrak{a} = (V_{\mathfrak{a}}, h_{\mathfrak{a}})$ est un objet de $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$.

Démonstration. — Si V est motivique et si $\mathscr{H}_{(G,h)}(V) = \mathfrak{a}$, le groupe algébrique $G(V)$ agit fidèlement sur $V = V_{\mathfrak{a}}$ et l'homomorphisme $h : \mathbb{S} \to \mathrm{Aut}(V_{\mathbb{R}})$ se factorise par $G(V)_{\mathbb{R}}$. Le groupe algébrique $M_{\mathfrak{a}}$ étant le plus petit sous-groupe algébrique de $\mathrm{Aut}(V_{\mathfrak{a}})$ défini sur $\mathbb{Q}$, l'image de $M_{\mathfrak{a}}$ dans $\mathrm{Aut}(V)$ est contenu dans $G(V)$ ce qui donne la première implication. Réciproquement, étant donné un plongement $M_{\mathfrak{a}} \hookrightarrow G(V)$ on obtient un diagramme de foncteurs,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G(V)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_{\mathfrak{a}}) \arrow[d, hook] \\
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[r, "\mathscr{H}_{(G,h)}"'] & \mathbb{Q}\mathbf{HS}
\end{tikzcd}$$

commutatif d'après la compatibilité demandée. Il s'ensuit que V est bien motivique puisque $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_{\mathfrak{a}})$ s'identifie à $\langle\mathfrak{a}\rangle^{\otimes} \subset \mathfrak{A}(\mathbb{C})$. $\square$

5.2. Paires de Shimura. —

5.2.1. — Nous aurons à modifier des données de Shimura par des homomorphismes surjectifs à noyaux centraux. Notons d'abord qu'un homomorphisme surjectif induit un homomorphisme sur les groupes adjoints d'après le lemme suivant.

Lemme 5.2. — *Soit $\alpha : G \to G_1$ un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Q}$-groupes algébriques. Alors α envoie $Z(G)$ dans $Z(G_1)$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer l'inclusion demandée sur les $\bar{\mathbb{Q}}$-points. Dans ce cas, l'homomorphisme $\alpha_{\bar{\mathbb{Q}}}$ est surjectif. Soit $z \in Z(G)(\bar{\mathbb{Q}})$

et $g_1 = \alpha(g)$ un élément de $G_1(\bar{\mathbb{Q}})$. On a

$$\alpha(z)g_1 = \alpha(z)\alpha(g) = \alpha(zg) = \alpha(gz) = g_1\alpha(z).$$

D'où l'assertion. $\square$

5.2.2. — Soit (G, h) une paire de Shimura et $\alpha : G \twoheadrightarrow G_1$ un homomorphisme surjectif. Supposons que l'homomorphisme induit

$$\alpha^{\mathrm{ad}} : G^{\mathrm{ad}} \to G_1^{\mathrm{ad}}$$

soit un isomorphisme (condition vérifiée lorsque le noyau de α est central par exemple). Alors $(G_1, \alpha_{\mathbb{R}} \circ h)$ est une paire de Shimura. En effet, les axiomes ne dépendent que du groupe adjoint.

6. Structure étrange de Shimura

6.1. $\mathbb{Q}$-modifications. —

6.1.1. — Soit (G, h) une paire de Shimura, son poids

$$w_h : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}$$

est défini comme la restriction de h au sous-$\mathbb{R}$-groupe algébrique $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \subset \mathbb{S}$. D'après les axiomes d'une paire de Shimura (voir 1.1.1), le poids est central, *i.e.* le $\mathbb{R}$-homomorphisme w_h se factorise par $Z_{\mathbb{R}}$, Z étant le centre de G.

Définition 6.1. — Soit (G, h) une paire de Shimura.

- Une $\mathbb{Q}$-*modification* de (G, h) est un $\mathbb{Q}$-homomorphisme surjectif $\alpha : G \twoheadrightarrow G_1$ tel que le poids de $\alpha_{\mathbb{R}} \circ h$ soit défini sur $\mathbb{Q}$.
- Une $\mathbb{Q}$-modification est *centrale* lorsque son noyau l'est.
- Une $\mathbb{Q}$-modification $\alpha_0 : G \twoheadrightarrow G_0$ est dite *minimale* lorsque toute $\mathbb{Q}$-modification $\alpha : G \twoheadrightarrow G_1$ se factorise (de façon unique) par α_0.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, two heads, "\alpha_0"'] \arrow[dr, two heads, "\alpha"] & \\ G_0 \arrow[rr, dotted, "\pi"'] & & G_1 \end{tikzcd}$$

Théorème 6.2. — *Toute paire de Shimura admet une $\mathbb{Q}$-modification minimale. De plus, toute $\mathbb{Q}$-modification minimale est centrale.*

Démonstration. — Considérons le poids w comme cocaractère réel de Z. En tant qu'homomorphisme entre tores algébriques définis sur $\mathbb{Q}$, w est en fait défini sur un corps de nombres $F \subset \mathbb{R}$ que l'on peut supposer galoisien. Le poids w est alors défini sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si, vu comme élément de $Y(Z)$, il est stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$. Considérons le sous-$\mathbb{Z}$-module $M \subset Y(Z)$ engendré par les $w - \gamma w$ pour $\gamma \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$. Puisque $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ agit trivialement sur w, M est un sous-module galoisien de $Y(Z)$. Il lui correspond un sous-tore $N \subset Z$ défini sur $\mathbb{Q}$. Le $\mathbb{Q}$-homomorphisme $\alpha_0 : G \to G/N$ est alors une $\mathbb{Q}$-modification de (G, h), centrale par construction. Soit maintenant $\alpha : G \twoheadrightarrow G_1$ une modification arbitraire et Z_1 le centre de G_1. Puisque α est surjectif, on a $\alpha(Z) \subset Z_1$ et ainsi un morphisme $\alpha_* : Y(Z) \to Y(Z_1)$ sur les cocaractères. Puisque $\alpha_* w$ est défini sur $\mathbb{Q}$, on a

$$\alpha_*(w - \gamma w) = 0$$

pour tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$. On a donc $\alpha_*(M) = 0$ et ainsi

$$N \subset \mathrm{Ker}(\alpha|_Z : Z \to Z_1).$$

En particulier, on a $N \subset \mathrm{Ker}(\alpha)$, donnant lieu à une factorisation de α par α_0 et prouvant ainsi la minimalité de α_0. $\square$

Proposition 6.3. — *Soit (G, h) une paire de Shimura et $\alpha : G \twoheadrightarrow G_1$ une modification centrale de noyau N. Alors,*

(i) le centre Z de G s'envoie surjectivement sur le centre Z_1 de G_1, réalisant un isomorphisme

$$Z_1 \simeq Z/N.$$

(ii) les groupes adjoints G^{ad} et G_1^{ad} sont isomorphes.

(iii) la paire $(G_1, \alpha_{\mathbb{R}} \circ h)$ est de Shimura.

Démonstration. — Puisque α est surjectif, on a $\alpha(Z) \subset Z_1$ et l'on peut tracer le diagramme suivant, à ligne exactes.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & G^{\mathrm{ad}} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 1 \\
1 \arrow[r] & Z_1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] & G_1^{\mathrm{ad}} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Puisque α' est un homomorphismes entre $\mathbb{Q}$-groupes algébriques commutatifs, il admet un conoyau α dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-groupes algébriques. De même, α et α'' admettent un conoyau trivial puisqu'ils sont surjectifs. On peut donc appliquer le lemme du serpent pour obtenir un isomorphisme,

$$\operatorname{Ker}(G^{\mathrm{ad}} \twoheadrightarrow G_1^{\mathrm{ad}}) \simeq \operatorname{Coker}(Z \to Z_1).$$

En particulier $A = \operatorname{Ker}(G^{\mathrm{ad}} \twoheadrightarrow G_1^{\mathrm{ad}})$ est un groupe commutatif fini comme sous-groupe normal commutatif du groupe adjoint G^{ad}. Les orbites de l'action de G^{ad} par conjugaison sur A sont connexes (par connexité de G^{ad}) et ainsi triviales. On en déduit que A est un sous-groupe central de G^{ad} donc trivial. Ceci valide les assertions *(i)* et *(ii)*. Pour *(iii)* il suffit d'appliquer le résultat de 5.2.2. □

6.2. Donnée étrange de Shimura. —

6.2.1. — Soit $F/\mathbb{Q}$ un corps totalement réel distinct de $\mathbb{Q}$ et $d = (F : \mathbb{Q})$ son degré. Fixons un sous-ensemble propre et non vide $\Psi \subset \operatorname{Hom}(F, \mathbb{R})$. Soit D une algèbre de quaternions sur F vérifiant $D \otimes_{F,\rho} \mathbb{R} \simeq M_2(\mathbb{R})$ si $\rho \in \Psi$ et $D \otimes_{F,\rho} \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ sinon, où $\mathbb{H}$ est la $\mathbb{R}$-algèbre d'Hamilton. On a ainsi un isomorphisme de $\mathbb{R}$-groupes algébriques

$$D_{\mathbb{R}}^{\times} \simeq \prod_{\rho \in \Psi} \mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}} \times \prod_{\rho \notin \Psi} \mathbb{H}^{\times}.$$

Considérons l'homomorphisme de $\mathbb{R}$-groupes algébriques $h : \mathbb{S} \to D_{\mathbb{R}}^{\times}$ décrit sous l'identification précédente par

$$h = \prod_{\rho \in \Psi} h_{\mathrm{ell}} \times \prod_{\rho \notin \Psi} h_{\mathrm{triv}},$$

où h_{ell} correspond à l'action de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^2$ par similitudes directes et où h_{triv} correspond à l'action triviale. Il s'agit de l'unique choix, à conjugaison près, définissant une paire de Shimura [**Del71**] (6.3). Nous appellerons $(D^{\times}, h)$ une *donnée étrange de Shimura*.

Lemme 6.4. — *Identifié à un élément de $Y(F^{\times})$, le poids de h est*

$$w_h = \sum_{\rho \in \Psi} \rho^{\vee}.$$

Il est défini sur $\mathbb{Q}(\Psi)$, sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$ correspondant au stabilisateur de Ψ dans $\operatorname{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Lorsque Ψ est réduit à un élément ρ, il s'agit de $\rho(F)$.

Démonstration. — Le poids $w_h : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \to D_\mathbb{R}^\times$ est visiblement à valeurs dans $F_\mathbb{R}^\times$. Sous l'identification

$$F_\mathbb{R}^\times \simeq \prod_{\rho \in \mathrm{Hom}(F,\mathbb{R})} \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}},$$

il s'écrit $w_h = \prod_{\rho\in\Psi} \mathrm{id} \times \prod_{\rho\notin\Psi} 1$ ce qui correspond à la description voulue. Le calcul de son corps de définition découle de l'indépendance sur $\mathbb{Z}$ des cocaractères $\rho^\vee$. □

6.2.2. — Notons V le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel sous-jacent à D que l'on considère comme représentation du $\mathbb{Q}$-groupe algébrique $D^\times$ via la représentation régulière (à gauche).

Proposition 6.5. — *La pseudo-$\mathbb{Q}$-structure de Hodge $\mathscr{H}_{(D^\times,h)}(V)$ est de type $\{(-1,0),(0,0),(0,-1)\}$ et ses nombres de Hodge sont,*

$$h^{-1,0} = h^{0,-1} = 2\,|\Psi|\,,\ \ h^{0,0} = 4\,|\Psi^c|\,.$$

Démonstration. — Notons d'abord l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$D \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C} \simeq (M_2(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathbb{H}) \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} \simeq M_2(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_2(\mathbb{C}).$$

Les $(D \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C}$-modules simples sont de la forme $V_0(\rho) \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$, l'action du facteur $M_2(\mathbb{C})$ correspondant à ρ étant la représentation standard sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ et les autres triviales. Dans la décomposition isotypique en sous-$(D \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C})$-modules

$$V \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C} = \prod_{\rho\in\Psi} V_\mathbb{C}(\rho) \times \prod_{\rho\notin\Psi} V_\mathbb{C}(\rho)$$

chaque facteur est le complexifié d'une sous-$\mathbb{R}$-structure de Hodge. Notons que la composante $V_0(\rho)$-isotypique $V_\mathbb{C}(\rho)$ est égale à $V_0(\rho) \oplus V_0(\rho)$ pour tout ρ. En terme d'espaces propres sous-l'action de $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$, cette décomposition s'écrit aussi $V_\mathbb{C}(\rho) = V_\mathbb{C}^{-1,0} \oplus V_\mathbb{C}^{0,-1}$ si $\rho \in \Psi$ et $V_\mathbb{C}(\rho) = V_\mathbb{C}^{0,0} \oplus V_\mathbb{C}^{0,0}$ sinon. Le résultat découle de cette description. □

6.3. La $\mathbb{Q}$-modification normale. —

6.3.1. — Comme précédemment le groupe algébrique N désigne le noyau

$$N = \mathrm{Ker}\left(N_{F/\mathbb{Q}} : F^\times \to \mathbb{G}_m\right).$$

D'après 5.2.2 la donnée $(D^\times/N, q_\mathbb{R} \circ h)$ est encore une donnée de Shimura : il s'agit de la *donnée étrange modifiée.*

Proposition 6.6. — *Le quotient*

$$q : D^\times \to D^\times/N$$

est une $\mathbb{Q}$-modification de $(D^\times, h)$.

Démonstration. — Puisque le poids est central, il est à valeurs dans $Z(D^\times/N)$. Or d'après la propoposition 6.3, on a

$$Z(D^\times/N) \simeq F^\times/N \simeq \mathbb{G}_m.$$

Le poids est donc un cocaractère de $\mathbb{G}_m$ et ainsi défini sur $\mathbb{Q}$. □

Lemme 6.7. — *Le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} F^\times \arrow[r] \arrow[d, "N_{F/\mathbb{Q}}"'] & D^\times \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r] & D^\times/N \end{tikzcd}$$

est cocartésien.

Démonstration. — En effet, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d, "N_{F/\mathbb{Q}}"'] & F^\times \arrow[r] \arrow[d, "N_{F/\mathbb{Q}}"'] & D^\times \arrow[d, "q"] \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] & D^\times/N \end{tikzcd}$$

le rectangle et le carré de gauche sont cocartésiens par propriété universelle du quotient, donc le carré de droite l'est également. □

Remarque 6.8. — Le groupe $D^\times/N$ est ainsi le produit amalgamé $D^\times *_{F^\times} \mathbb{G}_m$ mais nous réservons cette notation à la situation particulière introduite en section suivante.

6.3.2. *Critères de minimalité.* — En général la modification

$$q : D^\times \twoheadrightarrow D^\times/N$$

n'est pas minimale. Ce phénomène dépend de l'arithmétique du couple (F, Ψ) et nous étudions à présent quelques exemples. Cette modification est minimale si et seulement si le noyau N_0 de la $\mathbb{Q}$-modification minimale vérifie

$$\mu_i^+ - \mu_j^+ \in Y(N_0)$$

pour tous $(i,j) \in \{1,\ldots,d\}$, où les μ_i^+ constituent la base duale de celle de $X(F^\times)$ donnée par les plongements $F \to \bar{\mathbb{Q}}$.

Proposition 6.9. — *Si $|\Psi| = 1$ ou $|\Psi| = d-1$ alors q est minimal.*

Démonstration. — Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)$ agit transitivement sur les plongements de F dans $\bar{\mathbb{Q}}$ (donc aussi sur les parties à $d-1$ éléments). Le noyau N_0 de la modification minimale vérifie alors $N \subset N_0$ comme on le voit aussitôt sur les cocaractères. □

Proposition 6.10. — *Si le groupe de Galois d'une clôture galoisienne de F est égal à $\mathfrak{S}_n$, alors q est minimal.*

Démonstration. — Puisque $\mathfrak{S}_n$ est n-transitif, le groupe de Galois agit en particulier transitivement sur les sommes de $|\Psi|$ plongements et la démonstration précédente s'applique.

□

Proposition 6.11. — *Soit $F/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne cyclique et choisissons une identification*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathrm{Hom}(F, \bar{\mathbb{Q}}), [m] \mapsto \rho_m$$

de sorte que

$$[k] \cdot \rho_m = \rho_{m+k \mod n}.$$

Si $\Psi = \{\rho_0, \ldots \rho_{m-1}\}$ alors q est une modification minimale si et seulement si $(n,m) = 1$.

Démonstration. — Adoptons la notation $\mu \sim \mu'$ pour signifier que $\mu - \mu' \in Y(N_0)$. Il s'agit donc de montrer que $\mu_i^+ \sim \mu_j^+$ pour tous i,j, si et seulement si $(n,m) = 1$. Par définition de N_0, on a

$$\mu_0^+ + \cdots + \mu_{m-1}^+ \sim \mu_2^+ + \cdots + \mu_m^+$$

donc $\mu_0^+ \sim \mu_m^+$. Par récurrence immédiate on trouve

$$\mu_0^+ \sim \mu_m^+ \sim \mu_{2m}^+ \sim \cdots \sim \mu_{nm}^+$$

et que ces éléments forment exactement une orbite galoisienne de plongements. Son cardinal est n si et seulement si $(n, m) = 1$.

$\square$

Exemple 6.12. — Soit $F = \mathbb{Q}(\zeta_p)^+$, où p est premier. Choisissons pour Ψ, la paire de plongements $\{\rho_1, \rho_2\}$ où

- $\rho_1 : \zeta_p + \zeta_p^{-1} \mapsto \zeta_p + \zeta_p^{-1}$,
- $\rho_2 : \zeta_p + \zeta_p^{-1} \mapsto \zeta_p^2 + \zeta_p^{-2}$.

Alors q est minimal si et seulement si $p \equiv 3 \bmod 4$.

Exemple 6.13. — Considérons

$$F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

Alors $F/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne de groupe $V_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Pour $\varepsilon \in V_4$, désignons par ρ_ε le plongement réel

$$\rho_\varepsilon : \sqrt{2} \mapsto (-1)^{\varepsilon_1}\sqrt{2}, \sqrt{3} \mapsto (-1)^{\varepsilon_2}\sqrt{3}$$

Alors q n'est jamais minimal pour $|\Psi| = 2$.

7. Corestriction I

7.1. Corestriction d'une algèbre. — Soit L/k une extension finie séparable de corps et soit A une L-algèbre (associative, unifère) de dimension finie. Pour chaque k-plongement σ de L dans k_s considérons la k_s-algèbre $A_\sigma = A \otimes_{L,\sigma} k_s$. En prenant le produit tensoriel sur k_s indexé par ces plongements, on obtient la k_s-algèbre $A' = \bigotimes_\sigma A_\sigma$. Lorsque τ est un élément de $\mathrm{Gal}(k_s/k)$, la formule $a \otimes \lambda \mapsto a \otimes \lambda^\tau$ définit un isomorphisme de k-algèbres

$$\varphi_{\sigma,\tau} : A_\sigma \to A_{\tau\sigma}.$$

On obtient un automorphisme Φ_τ de k-algèbres de la k_s-algèbre A' donné sur les tenseurs purs par la formule,

$$\Phi_\tau(\cdots \otimes a_\sigma \otimes \cdots) = \cdots \otimes \varphi_{\tau^{-1}\sigma,\tau}(a_{\tau^{-1}\sigma}) \otimes \cdots .$$

Les Φ_τ définissent alors une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ sur A' et l'on appelle *corestriction de A selon L/k*, notée $\mathrm{Cor}_{L/k}(A)$, la sous-k-algèbre invariante sous cette action. Par descente galoisienne ([**Dra83**, theorem 1, p.33]), on a un isomorphisme de k_s-algèbres,

$$\mathrm{Cor}_{L/k}(A) \otimes_k k_s \simeq A'.$$

En particulier, on a

$$\dim_k \mathrm{Cor}_{L/k}(A) = (\dim_k A)^{(L:k)}.$$

Proposition 7.1. — *Soient A et B deux L-algèbres. Il existe un isomorphisme canonique de k-algèbres,*

$$\mathrm{Cor}_{L/k}(A \otimes_L B) \simeq \mathrm{Cor}_{L/k}(A) \otimes_k \mathrm{Cor}_{L/k}(B).$$

Démonstration. — Voir [**Dra83**, lemma 10, p.55]. □

7.2. La norme. —

7.2.1. — Soit $F/\mathbb{Q}$ une extension finie et A une F-algèbre de dimension finie. Comme précédemment notons A' la $\bar{\mathbb{Q}}$-algèbre $\bigotimes_\sigma A_\sigma$ et $\mathrm{Cor}_{F/\mathbb{Q}}(A)$ la sous-$\mathbb{Q}$-algèbre de A' invariante sous l'action galoisienne. Soit maintenant R une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative. Pour tout $\sigma : F \to \bar{\mathbb{Q}}$, on note

$$\sigma \otimes 1 : F \otimes_{\mathbb{Q}} R \to \bar{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} R$$

le plongement étendu à R. On a alors des isomorphismes de $\bar{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} R$-algèbres $A_\sigma \otimes_{\mathbb{Q}} R \simeq (A \otimes_{\mathbb{Q}} R)_{\sigma\otimes 1}$ fonctoriels en R. En particulier, on en déduit un isomorphisme de $\bar{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} R$-algèbres

$$A' \otimes_{\mathbb{Q}} R = (\bigotimes_\sigma A_\sigma) \otimes_{\mathbb{Q}} R \simeq \bigotimes_\sigma (A \otimes_{\mathbb{Q}} R)_{\sigma\otimes 1}$$

(où le produit tensoriel est sur $\bar{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} R$ pour le dernier membre) fonctoriel en R. Pour chaque R,

$$\mathrm{Nm}_A(R) : (A \otimes_{\mathbb{Q}} R)^* \to \left[\bigotimes_\sigma (A \otimes_{\mathbb{Q}} R)_{\sigma\otimes 1}\right]^\times \simeq (A' \otimes_{\mathbb{Q}} R)^*$$

$$\alpha \otimes \beta \mapsto (\alpha \otimes \beta \otimes 1) \otimes \cdots \otimes (\alpha \otimes \beta \otimes 1)$$

est un homomomorphisme de groupes abstraits fonctoriel en R. En effet les sous-groupes $1 \otimes \cdots \otimes A_\sigma^* \otimes \cdots 1$ de $A'^{,\times}$ commutent entre eux. Lorsque R est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative, on a l'égalité

$$(A' \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\Gamma = \mathrm{Cor}_{F/\mathbb{Q}}(A) \otimes_{\mathbb{Q}} R,$$

prouvant que l'homomorphisme de foncteurs en groupes Nm_A est à valeurs dans $\mathrm{Cor}_{F/\mathbb{Q}}(A)^\times$. D'où un homomorphisme de $\mathbb{Q}$-groupes algébriques

$$\mathrm{Nm}_A : A^\times \to \mathrm{Cor}_{F/\mathbb{Q}}(A)^\times$$

déjà considéré par Mumford dans [**Mum69**].

Lemme 7.2. — *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} F^\times \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}"'] & A^\times \arrow[d, "\mathrm{Nm}_A"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r] & \mathrm{Cor}_{F/\mathbb{Q}}(A)^\times \end{tikzcd}$$

est commutatif et cocartésien. L'homomorphisme Nm_A *induit ainsi un isomorphisme de* $\mathbb{Q}$*-groupes algébriques,*

$$A^\times/N \simeq \mathrm{Nm}_A(A^\times).$$

Démonstration. — Notons $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ les plongements de F dans $\bar{\mathbb{Q}}$. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de A sur F telle que $e_1 = 1_A$. Soit R une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative. Alors $\{e_1 \otimes 1, \ldots, e_n \otimes 1\}$ est une base de $A \otimes R$ sur $F \otimes_{\mathbb{Q}} R$. Soit $\alpha = \sum_i \alpha_i(e_i \otimes 1)$ un élement de $(A \otimes R)^\times$ tel que $\mathrm{Nm}_A(\alpha) = 1$. Le développement de $\mathrm{Nm}_A(\alpha)$ donne,

$$\sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_d \leqslant n} (\sigma_1 \otimes 1)(\alpha_{i_1}) \cdots (\sigma_d \otimes 1)(\alpha_{i_d}) \left[(e_{i_1} \otimes 1) \otimes \ldots \otimes (e_{i_d} \otimes 1)\right].$$

Notons que les éléments $(e_{i_1} \otimes 1) \otimes \ldots \otimes (e_{i_d} \otimes 1)$ forment une base de $A' \otimes_{\mathbb{Q}} R$ sur $\bar{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} R$. On a donc les équations,

$$(\sigma_1 \otimes 1)(\alpha_{i_1}) \cdots (\sigma_d \otimes 1)(\alpha_{i_d}) = 0,$$

dès qu'il existe un indice k pour lequel $i_k > 1$, ainsi que l'équation

$$(\sigma_1 \otimes 1)(\alpha_1) \cdots (\sigma_d \otimes_1)(\alpha_1) = 1.$$

En particulier α_1 est inversible dans $F \otimes_{\mathbb{Q}} R$. En choisissant les indices i_k tous égaux à 1 sauf un, et en utilisant que α_1 est inversible (donc $(\sigma_i \otimes 1)(\alpha_1)$ également), on trouve

$$(\sigma_i \otimes 1)(\alpha_j) = 0,$$

pour tout couple (i, j) vérifiant $j > 1$. On a en particulier pour tout indice $j > 1$,

$$(\sigma_1 \otimes 1, \ldots, \sigma_d \otimes 1)(\alpha_j) = 0.$$

Or $(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ réalise un isomorphisme de $\bar{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} F$ sur $\bar{\mathbb{Q}}^d$, donc son changement de base $(\sigma_1 \otimes 1, \ldots, \sigma_d \otimes 1)$ induit également un isomorphisme de $\bar{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} (F \otimes_{\mathbb{Q}} R)$ sur $(\bar{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^d$. On en déduit que $\alpha_j \in F \otimes_{\mathbb{Q}} R$ est nul dès que $j > 1$. On obtient donc $\alpha = \alpha_1 \cdot 1_A$ soit $\alpha \in (F \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times$. En remarquant que

$$(\sigma_1 \otimes 1)(\alpha_1) \cdots (\sigma_d \otimes_1)(\alpha_1) = \mathrm{N}_{F \otimes_{\mathbb{Q}} R/R}(\alpha_1),$$

formule visible après passage aux caractères, on a finalement $\alpha \in N(R)$. On a démontré la commutativité du diagramme et l'exactitude de la suite,

$$1 \to N \to A^\times \to \mathrm{Cor}_{F/\mathbb{Q}}(A)^\times$$

d'où résultent les autres assertions. $\square$

7.3. L'algèbre $\mathscr{D}$. — Nous notons désormais $\mathscr{D}$ la $\mathbb{Q}$-algèbre

$$\mathscr{D} = \mathrm{Cor}_{F/\mathbb{Q}}(D),$$

de dimension 4^d sur $\mathbb{Q}$, D étant la $\mathbb{Q}$-algèbre introduite en 6.2.1. D'après la section précédente, on a la factorisation suivante.

$$\begin{tikzcd} D^\times \arrow[rr, "\mathrm{Nm}"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & \mathscr{D}^\times \\ & D^\times/N \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Nous noterons G_1 l'image de $D^\times$ dans $\mathscr{D}^\times$, le plus souvent identifiée à $D^\times/N$. L'intérêt de l'algèbre $\mathscr{D}$ est de fournir, au moyen de sa représentation régulière (à gauche), une représentation fidèle du quotient G_1. Nous noterons V_1 cette représentation. L'homomorphisme $\mathrm{Nm}_{D,\mathbb{R}} \circ h$ munit V_1 d'une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge pure de poids $-m = -|\Psi|$. En effet on a un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\mathscr{D} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq M_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}),$$

et écrivant les m premiers facteurs comme $W^{-1,0} \oplus W^{0,-1}$ et les $d-m$ autres comme $W^{0,0} \oplus W^{0,0}$ comme dans la démonstration 6.5 on trouve des nombres de Hodge égaux à

$$h^{p,q} = 2^m 4^{d-m} \binom{m}{p}$$

pour $p+q=-m$ et nuls sinon.

8. Amalgame I

8.1. Produits amalgamés. — Donnons nous un diagramme

$$G_1 \hookleftarrow Z \hookrightarrow G_2$$

de $\mathbb{Q}$-groupes algébriques. Le produit amalgamé $G_1 *_Z G_2$ est la colimite, lorsqu'elle existe, de ce diagramme dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-groupes algébriques. Il reçoit en particulier deux flèches universelles i_1, i_2 de sources G_1, G_2. Supposons que Z soit central dans G_1 et dans G_2. Alors Z se réalise également comme sous-groupe central de $G_1 \times G_2$ par l'inclusion antidiagonale $j(z) = (z, z^{-1})$. En particulier le conoyau de j existe dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-groupes algébriques et il s'agit du produit amalgamé recherché. Dans ce cas, le produit amalgamé $G_1 *_Z G_2$ est se réalise donc dans la suite exacte suivante.

$$1 \to Z \to G_1 \times G_2 \to G_1 *_Z G_2 \to 1.$$

Les flèches i_1 et i_2 sont alors obtenues par composition de $\alpha : G_1 \times G_2 \to G_1 *_Z G_2$ et des homomorphismes $g_1 \mapsto (g_1, 1)$ et $g_2 \mapsto (1, g_2)$. Notons que $G_1 *_Z G_2$ est connexe si G_1 et G_2 le sont et que sa dimension est donnée par la formule,

$$\dim(G_1 *_Z G_2) = \dim(G_1) + \dim(G_2) - \dim(Z),$$

comme on le voit en passant aux algèbres de Lie.

Lemme 8.1. — *Soient $F/L/\mathbb{Q}$ une tour d'extensions finies et A, B deux F-algèbres (associatives, unifères) de dimension finie. Alors $A^\times *_{L^\times} B^\times$ s'identifie à un sous-groupe de $(A \otimes_L B)^\times$.*

Démonstration. — Les sous-L-algèbres $A \otimes 1$ et $1 \otimes B$ de $A \otimes_L B$ donnent lieu par fonctorialité aux sous-groupes $(A \otimes 1)^\times$ et $(1 \otimes B)^\times$ de $(A \otimes_L B)^\times$. Le morphisme de $\mathbb{Q}$-schémas

$$\Theta : A^\times \times B^\times \simeq (A \otimes 1)^\times \times (1 \otimes B)^\times \to (A \otimes_L B)^\times$$

donné par la multiplication de $(A \otimes_L B)^\times$ est un homomorphisme car les sous-groupes $(A \otimes 1)^\times$ et $(1 \otimes B)^\times$ commutent entre eux. La suite

$$1 \to L^\times \to A^\times \times B^\times \to (A \otimes_L B)^\times$$

est alors exacte comme on le vérifie en passant aux algèbres de Lie. On peut donc identifier le produit amalgamé recherché à l'image de Θ. $\square$

Remarque 8.2. — Si G_1 et G_2 sont deux $\mathbb{Q}$-groupes algébriques fidèlement représentés respectivement sur V_1 et V_2. Alors le quotient de $G_1 \times G_2$ agissant fidèlement sur $V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} V_2$ n'est autre que $G_1 *_{\mathbb{G}_m} G_2$. Il suffit d'appliquer le lemme précédent en partant de l'isomorphisme de

$\mathbb{Q}$-algèbres

$$\mathrm{End}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} V_2) \simeq \mathrm{End}(V_1) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{End}(V_2).$$

8.2. L'algèbre B. —

8.2.1. — On dit qu'une donnée de Shimura (G,h) est *de type Hodge* s'il existe un plongement

$$(G,h) \hookrightarrow (\mathrm{GSp}(V,\psi), h_{\mathrm{Siegel}}),$$

où $\psi : V \otimes V \to \mathbb{Q}$ est une forme alternée non dégénérée. On a dans ce cas une factorisation,

$$\mathscr{H}_{(G,h)} : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \to \mathfrak{A}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{Q}\mathbf{HS}^{\mathrm{pol}},$$

l'image de la représentation fidèle V de G étant une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge polarisée (par ψ) dont les poids sont de type $\{(-1,0),(0,-1)\}$, donc isomorphe à l'homologie de degré 1 d'une variété abélienne sur $\mathbb{C}$.

Lemme 8.3. — *Une donnée de Shimura (G,h) est de type Hodge si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.*

(i) Il existe une représentation fidèle $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(V)$ telle que $(V, \alpha_{\mathbb{R}} \circ h)$ soit de type $\{(-1,0),(0,-1)\}$.

(ii) Il existe une suite exacte,

$$1 \to \mathbb{G}_m \to Z \to T \to 1$$

où Z est le centre de G et où T est un tore $\mathbb{R}$-anisotrope.

Démonstration. — Le sens réciproque est donné par [**Del79**, (2.3.2, 2.3.4)]. Pour le sens direct fixons un plongement

$$(G,h) \hookrightarrow (\mathrm{GSp}(V,\psi), h_{\mathrm{Siegel}})$$

comme précédement. Le groupe $h(\mathbb{G}_m)$ est le groupe des homothéties scalaires de $\mathrm{Aut}(V)_{\mathbb{R}}$. L'image $Z(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Aut}(V,\psi)^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}}$ est contenue dans le stabilisateur de h dans $\mathrm{Aut}(V,\psi)^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}}$ qui est compact. La suite exacte voulue s'en déduit. □

8.2.2. — Retournons à la situation envisagée au paragraphe 6.2.1. On fixe une extension auxiliaire E/F telle que E quadratique imaginaire sur F. On notera $\iota_{E/F}$ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$: ι est induit par la conjugaison complexe sous tout plongement de E dans $\mathbb{C}$ (puisque E

est un corps à multiplication complexe). On détermine un isomorphisme de $\mathbb{R}$-groupes algébriques réels

$$E_{\mathbb{R}}^{\times} \simeq \prod_{\rho \in \mathrm{Hom}(F,\mathbb{R})} \mathbb{S}$$

par le choix d'un type CM $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\}$ de E. Posons alors

$$\Psi^E = \left\{\varphi \in \Phi : \varphi^+ \in \Psi\right\},$$

et notons m l'entier naturel $|\Psi| = |\Psi^E|$. On définit $h_E : \mathbb{S} \to E_{\mathbb{R}}^*$ comme,

$$h_E(z) = \prod_{\varphi \in \Psi^E} 1 \times \prod_{\varphi \notin \Psi^E} z.$$

Il s'agit d'une donnée étrange commutative comme étudiée en 2.1, ici associée au couple $(E, \Phi \setminus \Psi^E)$. On notera U la représentation régulière de la $\mathbb{Q}$-algèbre E, considéré comme représentation fidèle de $T = E^{\times}$.

Proposition 8.4. — *La pseudo-$\mathbb{Q}$-structure de Hodge (U, h_E) est de type $\{(-1,0),(0,0),(0,-1)\}$ et ses nombres de Hodge sont donnés par,*

$$h^{-1,0} = h^{0,-1} = |\Psi^c|, \;\; h^{0,0} = 2|\Psi|.$$

Démonstration. — L'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$$

donne lieu à une décomposition isotypique en sous-$(E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$-modules

$$U \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = (U_1 \oplus \overline{U_1}) \oplus \cdots \oplus (U_d \oplus \overline{U_d})$$

où les m premiers facteurs sont de type $W^{0,0}$ et les $d - m$ autres de type $W^{-1,0} \oplus W^{0,-1}$. D'où $h^{0,0} = 2m$ et $h^{-1,0} = h^{0,-1} = m$. □

8.2.3. — La construction qui suit est due à Shimura [**Shi67**] et exposée par Deligne dans [**Del71**, 6. Modèles étranges].

8.2.4. — Considérons à présent la $\mathbb{Q}$-algèbre

$$B = D \otimes_F E.$$

On note H le produit amalgamé $D^{\times} *_{F^{\times}} E^{\times}$ identifié à un sous-groupe de $B^{\times}$ par le lemme 8.1. Notons l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-groupes algébriques

$$H_{\mathbb{R}} = D_{\mathbb{R}}^{\times} *_{F_{\mathbb{R}}^{\times}} E_{\mathbb{R}}^{\times} \simeq \prod_{\rho \in \Psi} \mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}} *_{\mathbb{G}_m} \mathbb{S} \times \prod_{\rho \notin \Psi} \mathbb{H}^{\times} *_{\mathbb{G}_m} \mathbb{S},$$

comme sous-groupes de $B_{\mathbb{R}}^{\times} \simeq \prod_{\rho \in \Psi} \mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}}$, le produit amalgamé commutant aux extensions de corps vu sa définition par une suite exacte.

On définit alors $h_B : \mathbb{S} \to H_{\mathbb{R}}$ par la propriété universelle du produit amalgamé comme

$$h_B = h_D * h_E.$$

On note $W = V \otimes_F U$ vu comme représentation fidèle de H, il s'agit aussi de la représentation régulière (à gauche) de l'algèbre B.

Lemme 8.5. — *Le poids de la donnée de Shimura (H, h_B) est défini sur $\mathbb{Q}$ et la $\mathbb{Q}$-structure de Hodge (W, h_B) est pure de poids -1, de type*

$$\{(-1,0),(0,-1)\}.$$

Démonstration. — Il s'agit de la concaténation des propositions 6.5 et 8.4, la tensorisation sur F annulant les croisements non isotypiques. □

8.2.5. — Considérons l'involution de seconde espèce $* = \gamma_D \otimes \iota_{E/F}$ de B, où γ_D est l'involution standard ([**KMRT20**]) de D, *i.e.*

$$\alpha^{\gamma_D} = \mathrm{Trd}(\alpha) - \alpha$$

pour tout $\alpha \in D$.

Proposition 8.6. — *Pour tout $\mathbb{Q}$-algèbre commutative R, on a,*

$$H(R) = \left\{\alpha \in (B \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times : \alpha\alpha^{*\otimes 1} \in (F \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times\right\}.$$

Démonstration. — [4] Le second membre définit un $\mathbb{Q}$-schéma en groupes H' et l'inclusion $H \subset H'$ étant claire, il suffit de montrer $H'(\mathbb{C}) \subset H(\mathbb{C})$. Traitons d'abord les facteurs déployés. Il s'agit de montrer que les éléments $\alpha \in M_2(\mathbb{C})$ tels que $\alpha\alpha^* \in \mathbb{R}^\times$ s'écrivent sous la forme βz avec $\beta \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{C}^\times$, $\alpha \mapsto \alpha^*$ étant l'involution

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Quitte à multiplier α par un réel positif, on peux supposer $\alpha\alpha^* = \pm 1$. Notons que $\det(\alpha\alpha^*) = |\det(\alpha)|^2$ donc que $\det(\alpha) = u$ avec $|u| = 1$. On a alors $\alpha^* = \pm u^{-1}\alpha^\gamma$ ($\alpha \mapsto \alpha^\gamma$ étant l'involution standard de $M_2(\mathbb{C})$, *i.e.* la transposée de la comatrice). Notons $\pm u^{-1} = e^{2i\theta}$, on a alors

$$(e^{i\theta}\alpha)^* = (e^{i\theta}\alpha)^\gamma$$

4. Il s'agit d'un exercice laissé au lecteur dans [**Car86**].

et ainsi $e^{i\theta}\alpha$ à coefficients réels, ce que l'on voulait. Le cas des facteurs non déployés est identique en considérant l'involution

$$(a+ib+jc+kd)^* = \bar{a} - i\bar{b} - j\bar{c} - k\bar{d}$$

et en remplaçant le déterminant par la norme réduite de $\mathbb{H}$. $\square$

8.2.6. — L'homomorphisme h_B se factorise par le $\mathbb{Q}$-groupe algébrique H_0 défini par le diagramme cartésien,

$$\begin{tikzcd} H_0 \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d, "\nu"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r] & F^\times \end{tikzcd}$$

où $\nu(\alpha) = \alpha\alpha^*$ est le caractère de similitude. Le foncteur des points de H_0 est ainsi décrit par la formule,

$$H_0(R) = \left\{\alpha \in (B \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times : \alpha\alpha^{*\otimes 1} \in R^\times\right\}$$

pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre commutative R.

Proposition 8.7. — *La donnée de Shimura (H_0, h_B) est une donnée type Hodge.*

Démonstration. — Les $\mathbb{R}$-points du centre Z_0 de H_0, vu comme sous-groupe de $H_0(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times$ est l'ensemble des $(z_1, \ldots, z_d)$ tels que $z_1\bar{z}_1 = \ldots = z_d\bar{z}_d$. On a donc un diagramme commutatif à lignes exactes de groupes de Lie réels,

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & (\mu_2)^d \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}^\times \arrow[r, "x\mapsto x^2"] \arrow[d, "w"'] & \mathbb{R}^{+,\times} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & (S^1)^d \arrow[r] & Z_0(\mathbb{R}) \arrow[r, "(z_1,\ldots,z_d)\mapsto z_1\bar{z}_1"'] & \mathbb{R}^{+,\times} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

et le lemme du serpent donne un isomorphisme

$$Z_0(\mathbb{R})/w(\mathbb{R}^\times) \simeq (S^1/\mu_2)^d$$

montrant que $Z_0(\mathbb{R})/w(\mathbb{R}^\times)$ est un groupe de Lie compact. D'après Hilbert 90, on a $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{G}_m) = 1$ et ainsi $(Z_0/w(\mathbb{G}_m))(\mathbb{R}) = Z_0(\mathbb{R})/w(\mathbb{R}^\times)$. En particulier, dans la suite exacte de groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$,

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{w} Z_0 \longrightarrow U \longrightarrow 1$$

le tore U est $\mathbb{R}$-anisotrope. Ceci suffit d'après le lemme 8.3. $\square$

Corollaire 8.8. — *La $\mathbb{Q}$-structure de Hodge (W, h_B) isomorphe au H_1 d'une variété abélienne sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — La proposition précédente montre qu'elle est polarisable et elle est de type $\{(-1,0),(0,-1)\}$ d'après le lemme 8.5. $\square$

9. Corestriction II

9.1. L'algèbre $\mathscr{B}$. —

9.1.1. — Introduisons finalement la $\mathbb{Q}$-algèbre

$$\mathscr{B} = \mathrm{Cor}_{F/\mathbb{Q}}(B).$$

Le $\mathbb{Q}$-groupe algébrique H_1 est par définition l'image de $H \subset B^\times$ dans $\mathscr{B}^\times$ par l'homomorphisme

$$\mathrm{Nm}_B : B^\times \to \mathscr{B}^\times.$$

L'homomorphisme $h_{\mathscr{B}}$ est la composition

$$\mathbb{S} \xrightarrow{h_B} H_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\mathrm{Nm}_{B,\mathbb{R}}} H_{1,\mathbb{R}} \ .$$

On note W_1 la représentation régulière de l'algèbre $\mathscr{B}$, vue comme représentation fidèle de H_1.

9.1.2. — Définissons $\psi : H_0 \to H_1$ comme la composée,

$$H_0 \longrightarrow H \xrightarrow{\mathrm{Nm}} H_1 \ .$$

Lemme 9.1. — *L'homomorphisme $\psi : H_0 \to H_1$ est une isogénie.*

Démonstration. — Notons que $H_0 \subset H$ est un sous-groupe distingué, l'application $\alpha \mapsto \alpha\alpha^*$ étant invariante par conjugaison. En effet, si $\alpha \in H_0$ et $\beta \in H$, on a

$$\beta\alpha\beta^{-1}(\beta\alpha\beta^{-1})^* = \beta\alpha\beta^{-1}(\beta^{-1})^*\alpha^*\beta^* = \beta\beta^{-1}(\beta^{-1})^*\beta^*\alpha\alpha^* = \alpha\alpha^*$$

les éléments de la forme $\gamma\gamma^*$ étant centraux (on a également utilisé l'identité $(\gamma^{-1})^* = (\gamma^*)^{-1} = (\mathrm{Nrd}(\gamma)^{-1}\gamma)^{\iota_{E/F}}$). Montrons que $\dim(H_1) =$

$\dim(H_0)$. D'après l'expression $H_0 = H \times_{F^\times,\mathrm{Nm}} \mathbb{G}_m$ et la suite exacte correspondante

$$1 \longrightarrow H_0 \longrightarrow H \times \mathbb{G}_m \xrightarrow{(a,b)\mapsto \nu(a)b^{-1}} F^\times \longrightarrow 1$$

on trouve $\dim(H_0) = 4d+1$, le groupe H étant de dimension $5d$ d'après la suite exacte le définissant comme produit amalgamé. L'expression $H_1 = H/N$ donne également $\dim(H_1) = 4d+1$. Considérons le diagramme commutatif suivant, à lignes exactes.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \cap H_0 \arrow[r] \arrow[d] & H_0 \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r] & H \arrow[r] & H_1 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont des inclusions de sous-groupes distingués et le lemme du serpent donne alors une suite exacte,

$$1 \longrightarrow N/(N\cap H_0) \longrightarrow H/H_0 \longrightarrow H_1/Q \longrightarrow 1\ .$$

Un élément de $N(\mathbb{C})$ est un d-uplet $(z_1,\dots,z_d) \in (\mathbb{C}^\times)^d$ vérifiant $z_1\cdots z_d = 1$. Si un tel élément est de plus dans $H_0(\mathbb{C})$, il vérifie $z_1^2 = \cdots = z_d^2$ et donc $(z_1,\dots,z_d) = (\pm z,\dots,\pm z)$ où z est une racine $2d$-ème de l'unité. Le $\mathbb{Q}$-groupe algébrique $N\cap H_0$ est donc fini, $\mathbb{Q}$-forme de $\mu_2 \times \mu_{2d}$. Par passage aux algèbres de Lie, on en conclut que $\dim(H_0) = \dim(Q)$ puis que $\dim(H_1/Q) = 0$. Or H_1/Q est connexe comme image de H_1, donc trivial. $\square$

Corollaire 9.2. — *La $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $(W_1, h_{\mathscr{B}})$ est un objet de $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$, pure de poids $-d$ et de nombres de Hodge donnés par*

$$h^{p,q} = 4^d \binom{n}{p},$$

où $p+q=-d$.

Démonstration. — Le premier point découle du diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(H_1) \arrow[rr, "\psi^\top"] \arrow[dr, "\mathscr{H}_{(H_1,h_{\mathscr{B}})}"'] & & \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(H_0) \arrow[dl, "\mathscr{H}_{(H_0,h_B)}"] \\
& \mathbb{Q}\mathbf{HS} &
\end{tikzcd}$$

puisque l'on sait déjà que les représentations de H_0 sont $\mathfrak{A}$-motiviques par le corollaire 8.8. Le second point se déduit de l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\mathscr{B} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq M_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}),$$

et du fait que la décomposition de Hodge $W \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = W^{-1,0} \oplus W^{0,-1}$ est aussi une décomposition en $(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$-sous-modules. $\square$

10. Amalgame II

10.1. L'algèbre $\mathscr{E}$. —

10.1.1. — On garde les notations de 8.2.2 et en particulier l'extension quadratique auxiliaire E/F.

Lemme 10.1. — *Les $\mathbb{Q}$-algèbres $\mathrm{Cor}_{F/\mathbb{Q}}(E)$ et $\mathscr{E}$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Ces deux algèbres étant finies étales sur $\mathbb{Q}$, il suffit d'après la correspondance de Galois, énoncée à la Grothendieck, de vérifier que leurs $\bar{\mathbb{Q}}$-points fournissent des $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-ensembles isomorphes. Or

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Cor}_{F/\mathbb{Q}}(E), \bar{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(E', \bar{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(\bigotimes_{\varphi \in \Phi} E_{\varphi^+}, \bar{\mathbb{Q}})$$

$$= \prod_{\varphi \in \Phi} \mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(E_{\varphi^+}, \bar{\mathbb{Q}}) = \prod_{\varphi \in \Phi} \{\varphi, \varphi^*\}.$$

Ce dernier ensemble, muni de son action galoisienne, s'identifie naturellement à l'ensemble des types CM de E. $\square$

10.1.2. — Nous noterons encore U_1 la représentation régulière de l'algèbre $\mathscr{E}$, vue comme représentation fidèle du tore $T_1 \subset \mathscr{E}^\times$ image de $E^\times$ par la norme $\mathrm{Nm}_E : E^\times \to \mathscr{E}^\times$. D'après le corollaire **??**, le couple $(U_1, h_{\mathscr{E}})$ est un objet de $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$. Une preuve identique à celle du corollaire 9.2 donne que $(U_1, h_{\mathscr{E}})$ est pure de poids $-(d-m)$ et que ses nombres de Hodge sont donnés par la formule

$$h^{p,q} = 2^m \binom{d-m}{p}$$

pour $p + q = -(d-m)$.

10.2. Diagramme de comparaison. — Le lemme suivant résume les liens entre les différents groupes algébriques introduits jusqu'ici.

Lemme 10.2. — *Il existe un unique* $\mathbb{Q}$*-homomorphisme*

$$\mathrm{Am}' : D^\times \times E^\times \to H$$

rendant commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} D^\times \times E^\times \arrow[r, "\mathrm{Am}"] \arrow[d, "\mathrm{Nm}_D \times \mathrm{Nm}_E"'] & H \arrow[d, "\mathrm{Nm}_B"] \\ G_1 \times T_1 \arrow[r, "\mathrm{Am}'"'] & H_1 \end{tikzcd} .$$

De plus Am' *induit un isomorphisme,*

$$G_1 *_{\mathbb{G}_m} T_1 \simeq H_1.$$

Démonstration. — L'unicité est claire en vertu de la surjectivité des flèches apparaissant dans le diagramme. D'après la propriété 7.1 on a un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres $\mathscr{D} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{E} \simeq \mathscr{B}$. Notons $\theta : (\mathscr{D} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{E})^\times \simeq \mathscr{B}^\times$ l'isomorphisme de $\mathbb{Q}$-groupes algébriques qu'il induit. D'après le lemme 8.1 on a également un $\mathbb{Q}$-homomorphisme

$$\mathrm{Am}' : \mathscr{D}^\times \times \mathscr{E}^\times \to (\mathscr{D} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{E})^\times$$

d'image le produit amalgamé $\mathscr{D}^\times *_{\mathbb{G}_m} \mathscr{E}^\times$. L'identité

$$\bigotimes_{\varphi \in \Phi} (d \otimes 1) \cdot \bigotimes_{\varphi \in \Phi} (1 \otimes e) = \bigotimes_{\varphi \in \Phi} (d \otimes e)$$

dans $\mathscr{B}^\times(\bar{\mathbb{Q}})$ exprime la commutativité du diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} D^\times \times E^\times \arrow[rr, "\mathrm{Am}"] \arrow[d, "\mathrm{Nm}_D \times \mathrm{Nm}_E"'] & & B^\times \arrow[d, "\mathrm{Nm}_B"] \\ \mathscr{D}^\times \times \mathscr{E}^\times \arrow[r, "\mathrm{Am}'"] & (\mathscr{D} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{E})^\times \arrow[r, "\sim", "\theta"'] & \mathscr{B}^\times \end{tikzcd}$$

En particulier θ identifie les images de $\mathrm{Am}' \circ (\mathrm{Nm}_D, \mathrm{Nm}_E)$ et de $\mathrm{Nm}_B \circ \mathrm{Am}$, autrement dit $G_1 *_{\mathbb{G}_m} T_1$ et H_1. La restriction de $\theta \circ \mathrm{Am}'$ au sous-groupe $G_1 \times T_1$, encore notée Am', est l'homomorphisme recherché. □

10.2.1. — On note désormais G le groupe multiplicatif $D^\times$ et P le produits $G \times T$.

Théorème 10.3. — *$(V_1, h_{\mathscr{D}})$ appartient à $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$.*

Démonstration. — Envisageons les diverses représentations introduites dans la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{Q}}(P)$. L'isomorphisme de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels

$$V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} U_1 \simeq W_1$$

déduit de la proposition 7.1 demeure un isomorphisme dans la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{Q}}(P)$ comme l'indique la démonstration précédente. Puisque $\psi : H_0 \to H_1$ est surjectif (et fidèlement plat) d'après 9.1, le foncteur

$$\psi^\top : \mathsf{Rep}_{\mathbb{Q}}(H_1) \to \mathsf{Rep}_{\mathbb{Q}}(H_0)$$

est pleinement fidèle. Puisque W est une représentation fidèle de H_0, il existe d'après Chevalley une construction tensorielle $W^\square$ et un idempotent $e : W^\square \to W^\square$ dans $\mathsf{Rep}_{\mathbb{Q}}(H_0)$ dont $\psi^\top W_1$ est l'image par semisimplicité de la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{Q}}(H_0)$ (H_0 étant réductif). Ainsi

$$\mathscr{H}_{(H_1, h_{\mathscr{B}})}(W_1) \simeq \mathscr{H}_{(H_0, h_B)}(\psi^\top W_1) \simeq \operatorname{Im} \mathscr{H}_{(H_0, h_B)}(e)$$

est un objet de $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$, comme sous-objet d'un objet de $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$ défini par un projecteur idempotent dans la catégorie $\mathbb{Q}\mathsf{HS}$ (la propriété d'être idempotent étant préservée par fonctorialité). Puisque $(U_1, h_{\mathscr{E}})$ est un objet de $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$, le produit tensoriel

$$(W_1 \otimes_{\mathbb{Q}} U_1^*, h_{\mathscr{B}} * h_{\mathscr{E}}^*) = \mathscr{H}_{(P, h_D \times h_E)}(\mathrm{pr}_1^\top W_1) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{H}_{(P, h_D \times h_E)}(\mathrm{pr}_2^\top U_1)$$

l'est également. Dans $\mathsf{Rep}_{\mathbb{Q}}(T_1)$ ou plus généralement $\mathsf{Rep}_{\mathbb{Q}}(P)$, on a une décomposition

$$U_1 \otimes_{\mathbb{Q}} U_1^* = \mathbb{Q} \oplus \mathfrak{sl}(U_1),$$

donnée par la trace. Après tensorisation par W_1, le facteur trivial $\mathbb{Q}$ découpe une copie de la représentation V_1 (toujours vue comme représentation de P). La $\mathbb{Q}$-structure de Hodge

$$(V_1, h_{\mathscr{D}}) = \mathscr{H}_{(P, h_D \times h_E)}(\mathrm{pr}_1^\top V_1)$$

est donc un sous-objet de $\mathscr{H}_{(P, h_D \times h_E)}(W_1 \otimes_{\mathbb{Q}} U_1^*)$ donc un objet de la catégorie $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$. $\square$

PARTIE III. ASPECTS GALOISIENS

11. Notations

11.1. Notations générales. —

11.1.1. — À l'exception de la section 16, les notations de cette partie sont indépendantes des parties précédentes. Notons en particulier que les notations $G, G_1, \ldots$ désignent des groupes algébriques arbitraires.

11.1.2. — Lorsque une donnée (G, X, K, ξ) est considérée, on sous-entendra que (G, X) est une donnée de Shimura, que $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe compact ouvert net et que ξ est un système compatible de $\bar{\mathbb{Q}}$-points de la tour

$$\mathrm{Sh}(G, X, K^{\downarrow}) = \varprojlim_{U \subset K} \mathrm{Sh}(G, X, U),$$

dont les composantes seront notées ξ^U pour $U \subset K$. Dans une donnée de la forme (G, X, K, ξ, x) l'élément x sera toujours un point de $\mathbf{Sh}(G, X, K)(L)$, relèvement des ξ^U sur un sous-corps $L \subset \bar{\mathbb{Q}}$ extension finie de $E(G, X)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}) \arrow[r, "\xi^U"] \arrow[d] \arrow[dr, "\xi^K"] & \mathbf{Sh}(G, X, U) \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(L) \arrow[r, "x"'] & \mathbf{Sh}(G, X, K)
\end{tikzcd}$$

11.1.3. — Soit $\varphi : (G_1, X_1) \to (G_2, X_2)$ un morphisme de données de Shimura, *i.e.* un $\mathbb{Q}$-homomorphisme de groupes algébriques $\varphi : G_1 \to G_2$ tel que $\varphi_{\mathbb{R}}$ induise une application $X_1 \to X_2$ (encore notée $\varphi_{\mathbb{R}}$). Si E_1 et E_2 désignent les corps réflex de ces donnés, E_1 est une extension finie de E_2. Soient $K_1 \subset G_1(\mathbb{A}_f)$ et $K_2 \subset G_2(\mathbb{A}_f)$ des sous-groupes ouverts compacts. Sous la condition $\varphi_{\mathbb{A}_f}(K_1) \subset K_2$, on a une application

$$\mathrm{Sh}(\varphi) : \mathrm{Sh}(G_1, X_1, K_1) \to \mathrm{Sh}(G_2, X_2, K_2),$$

$$[x, gK_1] \longmapsto [\varphi_{\mathbb{R}}(x), \varphi_{\mathbb{A}_f}(g)K_2]$$

Celle-ci provient d'un morphisme de E_1-schémas uniquement déterminé (par les axiomes des modèles canoniques)

$$\mathbf{Sh}(G_1, X_1, K_1) \to \mathbf{Sh}(G_2, X_2, K_2)_{E_1},$$

noté $\mathrm{Sh}(\varphi, K_1, K_2)$ ou simplement $\mathrm{Sh}(\varphi)$.

12. Action de Hecke

12.1. Revêtements galoisiens. — Soit (G, X) une donnée de Shimura. Les revêtements galoisiens sont au sens de [**Gro71**, V.2.8], en particulier on ne les suppose pas connexes.

Théorème 12.1. — *Soit $K_0 \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe net et $K \subset K_0$ un sous-groupe distingué. Le stabilisateur dans K_0 d'un point arbitraire de $\mathrm{Sh}(G, X, K)$ est le sous-groupe distingué*

$$KZ(\mathbb{Q}) \cap K_0 \subset K_0$$

Démonstration. — Soit $s = [x, \bar{g}]$ un point de $\mathrm{Sh}(G, X, K)$ et $k_0 \in K_0$ fixant s, autrement dit : $[x, \overline{gk_0}] = [x, \bar{g}]$. Il existe donc un élement $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ et un élément $k \in K$ tels que

$$\gamma \cdot x = x, \ \gamma g k_0 = gk.$$

La première condition signifie que γ est dans le sous-groupe $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$, stabilisateur de x sous l'action de conjugaison. La seconde condition donne $\gamma = gkk_0^{-1}g^{-1}$ et donc que γ est élément de $gKK_0g^{-1} = gK_0g^{-1}$. La propriété d'être net étant invariante par conjugaison, le sous-groupe gK_0g^{-1}, et en particulier l'élément γ, est net. Considérons alors l'élément $\gamma^{\mathrm{ad}} \in G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$, il s'agit encore d'un élément net par fonctorialité de cette propriété. De plus γ^{ad} appartient à K_∞^{ad} qui est un sous-groupe compact de $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ d'après la théorie générale des espaces symétriques. Un élément net de $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ contenu dans un compact de $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ est trivial par le lemme suivant et l'on en déduit $\gamma^{\mathrm{ad}} = 1$, autrement dit $\gamma \in Z(\mathbb{Q})$. On obtient alors $gk_0 = gk\gamma^{-1}$ puis $k_0 = k\gamma^{-1} \in KZ(\mathbb{Q})$, par simplification à gauche. Finalement k_0 est un élément de $KZ(\mathbb{Q}) \cap K_0$. Réciproquement, si $kz \in KZ(\mathbb{Q})$, on a

$$[x, \bar{g}] \cdot kz = [x, \overline{gkz}] = [z^{-1} \cdot x, \bar{g}] = [x, \bar{g}],$$

puisque $Z(\mathbb{Q})$ agit trivialement sur X. $\square$

Lemme 12.2. — *Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ et $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ un élément net contenu dans un groupe sous-groupe ouvert compact $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ et dans sous-groupe compact A de $G(\mathbb{R})$. Alors γ est trivial.*

Démonstration. — Fixons une représentation fidèle $G \subset \mathrm{GL}_n$. Puisque le sous-groupe $\langle\gamma\rangle$ est encore contenu dans A, les valeurs propres de γ sont de module 1. Par ailleurs K stabilise un $\widehat{\mathbb{Z}}$-réseau de $\mathbb{A}_f^n$ et le polynôme caractéristique P de γ est donc un élément de $\widehat{\mathbb{Z}}[T]$. On a donc $P \in (\widehat{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Q})[T]$ donc $P \in \mathbb{Z}[T]$. Les valeurs propres de γ sont ainsi entiers algébriques et donc des racines de l'unité puisque elles sont de module 1. Puisque γ est net, ses valeurs propres sont donc toutes égales à 1 et γ est unipotent. Choisissant un produit scalaire A-invariant, on peut supposer que γ est orthogonal donc semi-simple. Sa seule valeur propre étant 1, on a $\gamma = \mathrm{id}$. □

Corollaire 12.3. — *Sous les hypothèses du théorème 12.1, le morphisme*

$$\mathrm{Sh}(G, X, K) \to \mathrm{Sh}(G, X, K_0)$$

est un revêtement étale fini galoisien de groupe

$$[K_0/K] := K_0/(K_0 \cap KZ(\mathbb{Q})).$$

Démonstration. — Pour tout sous-groupe ouvert compact net $U \subset G(\mathbb{A}_f)$, la flèche $\mathrm{Sh}(G, X) \to \mathrm{Sh}(G, X, U)$ est pro-étale, l'action de U sur $\mathrm{Sh}(G, X)$ étant propre et discontinue. Puisque K et K_0 sont nets, on en déduit que la flèche $\mathrm{Sh}(G, X, K) \to \mathrm{Sh}(G, X, K_0)$ par la commutativité du diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}(G, X) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Sh}(G, X, K) \arrow[d] \\
& \mathrm{Sh}(G, X, K_0)
\end{tikzcd}$$

Comme vu précédemment le groupe $[K_0/K]$ opère simplement transitivement sur chaque fibre (de la flèche verticale). □

12.2. Passage à la limite. —

12.2.1. — Dans la suite de ce texte, si $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe, on notera

$$[K] = K/(K \cap \overline{Z(\mathbb{Q})}),$$

où $(-)^-$ désigne l'adhérence adélique. Remarquons que $K \cap \overline{Z(\mathbb{Q})} = \overline{K \cap Z(\mathbb{Q})}$. On notera Δ_K le sous-groupe $K \cap Z(\mathbb{Q})$ de Z. Dans la suite de ce paragraphe on garde les notations du théorème 12.1.

Lemme 12.4. — *$KZ(\mathbb{Q}) = K\overline{Z(\mathbb{Q})}$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $KZ(\mathbb{Q})$ est fermé. En écrivant

$$KZ(\mathbb{Q}) = \bigcup_{z\in Z(\mathbb{Q})} Kz$$

on constate que $KZ(\mathbb{Q})$ est ouvert. C'est aussi un sous-groupe de $G(\mathbb{A}_f)$ puisque $Z(\mathbb{Q})$ est central. Comme sous-groupe ouvert du groupe topologique $G(\mathbb{A}_f)$, il est par conséquent fermé. $\square$

Lemme 12.5. — *Soit G un groupe topologique. Si X est un sous-ensemble compact et $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un système filtrant de sous-groupes fermés dont l'intersection est triviale. Alors $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda X = X$.*

Démonstration. — Soit $y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda X$ et choisissons pour tout λ, des éléments $g_\lambda \in G_\lambda$ et $x_\lambda \in X$ tels que $y = g_\lambda x_\lambda$. Alors, quitte à extraire un sous-filet, on peut supposer que le filet $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers un élément $x \in X$ par compacité. D'autre part, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, on a $x_\lambda = g_\lambda^{-1} y$ donc $x_\lambda \in G_\lambda y$. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$, le sous-filet $(x_\lambda)_{\lambda\geqslant\lambda_0}$ est encore contenu dans $G_{\lambda_0} y$ qui est fermé et donc sa limite x l'est aussi. Finalement x est un élément de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda y = \{y\}$. On a donc $x = y$, prouvant en particulier que y est un élément de X. $\square$

Proposition 12.6. — *On a*

$$\varprojlim K_0/(KZ(\mathbb{Q}) \cap K_0) = K_0/(K_0 \cap \overline{Z(\mathbb{Q})}) = [K_0],$$

la limite portant sur les sous-groupes compacts ouverts K contenus et distingués dans K_0.

Démonstration. — La flèche canonique

$$K/\left(\bigcap_K (KZ(\mathbb{Q}) \cap K_0)\right) \to \varprojlim K_0/(KZ(\mathbb{Q}) \cap K_0),$$

est un isomorphisme de groupes topologiques, le groupe de gauche étant profini. On a $KZ(\mathbb{Q}) = K\overline{Z(\mathbb{Q})}$ donc

$$KZ(\mathbb{Q}) \cap K_0 = K\overline{Z(\mathbb{Q})} \cap K_0 = K(\overline{Z(\mathbb{Q})} \cap K_0).$$

Or $\overline{Z(\mathbb{Q})} \cap K_0$ est fermé dans K_0 donc compact puisque K_0 l'est. On peut ainsi appliquer le lemme précédent avec $X = \overline{Z(\mathbb{Q})} \cap K_0$ et $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ la famille des sous-groupes ouverts compacts de $G(\mathbb{A}_f)$ contenus et distingués dans K_0 (cette famille est bien d'intersection triviale, K_0 étant un groupe profini). $\square$

12.3. L'homomorphisme α. —

12.3.1. — Si G et H sont deux groupes, un (G, H)-torseur est un H-torseur à droite X muni d'une action à gauche de G commutant à l'action de H, *i.e.*

$$\forall (g, x, h) \in G \times X \times H,\ g \cdot (x \cdot h) = (g \cdot x) \cdot h.$$

Lemme 12.7. — [**UY13**, lemma 2.4]

(i) Soit X un (G, H)-torseur. Étant donné un élément $x \in X$, il existe un unique homomorphisme $\alpha_x : G \to H$ tel que pour tout $g \in G$, on ait

$$g \cdot x = x \cdot \alpha_x(g).$$

(ii) Si $x' = x \cdot h$ est un autre élément de S, on a $\alpha_{x'} = h^{-1}\alpha_x h$.

(iii) Si $f : X \to Y$ est une application (G, H)-équivariante entre (G, H)-torseurs alors les homomorphismes α_x et $\alpha_{f(x)}$ coïncident.

(iv) Si X_1 est un (G_1, H_1)-torseur, X_2 un (G_2, H_2)-torseur, $\varphi : G_1 \to G_2$, $\psi : H_1 \to H_2$ des homomorphismes, $f : X_1 \to X_2$ une application équivariante au sens où

$$f(g \cdot x \cdot h) = \varphi(g) \cdot f(x) \cdot \psi(h),$$

et si $x_1 \in X_1$, alors le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\alpha_{x_1}"] \arrow[d, "\varphi"'] & H_1 \arrow[d, "\psi"] \\ G_2 \arrow[r, "\alpha_{f(x_1)}"'] & H_2 \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Démontrons *(i)*, les autres assertions découlant toutes facilement de l'unicité de α_x. Soit $g \in G$. Puisque X est un H-torseur, il existe un unique élément $\alpha_x(g) \in H$ tel que $g \cdot x = x \cdot \alpha_x(g)$. Si g' est un autre élément de G, on a

$$(gg')\dot{x} = g \cdot (x \cdot \alpha_x(g')) = (g \cdot x) \cdot \alpha_x(g') = (x \cdot \alpha_x(g)) \cdot \alpha_x(g'),$$

prouvant que α_x est bien un homomorphisme. $\square$

12.3.2. — Soit $K_0 \subset G(\mathbb{A}_f)$ net. Fixons une composante géométriquement connexe $\mathrm{Sh}^+_{K_0} \subset \mathbf{Sh}(G, X, K_0)$, définie sur une extension finie $E(G,X)^+$ de $E(G,X)$. Un point géométrique $\xi^{K_0} \in \mathrm{Sh}^+_{K_0}(\bar{\mathbb{Q}})$ étant choisi, on considère $\mathrm{Sh}^+_{K_0}$ comme un schéma pointé. Notons

$$\omega_0 : \textbf{Ét}(\mathrm{Sh}^+_{K_0}) \to \pi_1(\mathrm{Sh}^+_{K_0})\textbf{-Ens}$$

le foncteur fibre associé au point ξ^{K_0}.

12.3.3. — Soit $K \subset K_0$ un sous-groupe distingué. L'action de Hecke de K_0 s'effectue par automorphisme du revêtement $\mathrm{Sh}^+_K \to \mathrm{Sh}^+_{K_0}$, égale à $[K_0/K]$, où Sh^+_K est l'image réciproque (non connexe *a priori*) de $\mathrm{Sh}^+_{K_0}$ dans $\mathrm{Sh}(G,X,K)$. Elle induit ainsi une action sur le $\pi_1(\mathrm{Sh}^+_{K_0})$-ensemble $X_K = \omega_0(\mathrm{Sh}^+_K)$, fibre au-dessus de ξ^{K_0}. Appliquant le lemme 12.7 pour un point géométrique fixé $\xi^K \in X_K$, l'action de $\pi_1(\mathrm{Sh}^+_{K_0})$ sur X_K est alors décrite, d'après le lemme 12.7, par un homomorphisme

$$\alpha_{\xi^K} : \pi_1(\mathrm{Sh}^+_{K_0}) \to [K_0/K],$$

qu'on nommera *représentation abstraite en niveau* K (associée à ξ^K).

12.3.4. — Si $K_2 \subset K_1$ et si $\xi^{K_1} \in X_{K_1}(\bar{\mathbb{Q}}), \xi^{K_2} \in X_{K_2}(\bar{\mathbb{Q}})$ sont choisis de sorte que $\xi^{K_2} \mapsto \xi^{K_1}$ via le morphisme $\mathrm{Sh}^+_{K_2} \to \mathrm{Sh}^+_{K_1}$ induit par la flèche de transition, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & {[K_0/K_2]} \arrow[dd, "\mathrm{mod}\, K_1"] \\
\pi_1(\mathrm{Sh}^+_{K_0}) \arrow[ur, "\alpha_{\xi^{K_2}}"] \arrow[dr, "\alpha_{\xi^{K_1}}"'] & \\
 & {[K_0/K_1]}
\end{tikzcd}$$

en vertu du point *(iv)* du lemme 12.7. Soit $\xi = (\xi^K)_{K \subset K_0}$ un système compatible de points géométriques au-dessus de ξ^{K_0}. Passant à la limite projective, on obtient un homomorphisme continu,

$$\alpha_\xi : \pi_1(\mathrm{Sh}^+_{K_0}) \to [K_0],$$

d'après la proposition 12.6. La flèche α_ξ décrit en fait l'action de $\pi_1(\mathrm{Sh}^+_{K_0})$ sur le $[K_0]$-torseur profini X limite projective des X_K, canoniquement identifié à la fibre de $\mathrm{Sh}(G,X) \twoheadrightarrow \mathrm{Sh}(G,X,K_0)$ au-dessus de ξ^{K_0}. L'homomorphisme α_ξ ne dépend du système ξ qu'à conjugaison par $[K_0]$

près d'après le point (ii) du lemme 12.7.

12.4. Propriétés formelles. —

12.4.1. — Pour une donnée de type (G, X, K_0, ξ) nous avons construit un homomorphisme continu de groupes profinis

$$\alpha_\xi : \pi_1(\mathrm{Sh}^+(G, X, K_0), \xi^{K_0}) \to [K_0],$$

où $\mathrm{Sh}^+(G, X, K_0) \subset \mathrm{Sh}(G, X, K_0)$ est la composante géométriquement connexe déterminée par le point $\xi^{K_0} \in \mathrm{Sh}(G, X, K_0)$.

12.4.2. *Extension des scalaires.* — Soit $E/E(G, X)^+$ une extension finie contenue dans $\bar{\mathbb{Q}}$. La même méthode permet de construire

$$\alpha_{\xi|E} : \pi_1(\mathrm{Sh}^+(G, X, K_0)_E, \xi_E^{K_0}) \to [K_0].$$

On a alors le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathrm{Sh}^+(G, X, K_0)_E, \xi_E^{K_0}) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\alpha_{\xi|E}"'] & & \pi_1(\mathrm{Sh}^+(G, X, K_0), \xi^{K_0}) \arrow[dl, "\alpha_\xi"] \\
& {[K_0]} &
\end{tikzcd}$$

Nous noterons $\alpha_\xi|_E$ cet homomorphisme par la suite.

12.4.3. *Fonctorialité.* — Soit $\varphi : (G_1, X_1, K_{1,0}, \xi_1) \to (G_2, X_2, K_{2,0}, \xi_2)$ un morphisme de données de Shimura. Le corps réflex $E_1 = E(G_1, X_1)$ est dans ce cas une extension finie de $E(G_2, X_2)$. On note $\Delta_{i,0} = K_{i,0} \cap Z_i(\mathbb{Q})$ pour $i = 1, 2$. On suppose en outre que φ satisfait la *condition d'admissibilité*

$$(\mathrm{Adm}) : \varphi_{\mathbb{A}_f}(\Delta_{1,0}) \subset \overline{\Delta_{2,0}},$$

de sorte que $\varphi_{\mathbb{A}_f}$ induise un homomorphisme $[\varphi] : [K_{1,0}] \to [K_{2,0}]$. Le diagramme suivant est alors commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathrm{Sh}^+(G_1, X_1, K_{1,0}), \xi_1^{K_{1,0}}) \arrow[r, "\alpha_{\xi_1}"] \arrow[d, "\mathrm{Sh}(\varphi)_*"'] & {[K_{1,0}]} \arrow[d, "{[\varphi]}"] \\
\pi_1(\mathrm{Sh}^+(G_2, X_2, K_{2,0})_{E_1}, \xi_{2,E_1}^{K_{2,0}}) \arrow[r, "\alpha_{\xi_2}|_{E_1}"'] & {[K_{2,0}]}
\end{tikzcd}$$

12.4.4. — Supposons donné un point $x_1 : \mathrm{Spec}(L) \to \mathrm{Sh}(G_1, X, 1, K_{1,0})$, $E(G_1, X_1) \subset L \subset \bar{\mathbb{Q}}$, relevant $\xi_1^{K_{1,0}}$. Notons x_2 son image par $\mathrm{Sh}(\varphi)$, encore définie sur L. En faisant les identifications naturelles,

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/L) \simeq \pi_1(x_1, \xi_1^{K_{1,0}}) \simeq \pi_1(x_2, \xi_2^{K_{0,2}}),$$

et en notant α_{ξ_1,x_1} et α_{ξ_2,x_2} les restrictions de α_{ξ_1} et α_{ξ_2} à $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/L)$, on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & {[K_{0,1}]} \arrow[dd, "{[\varphi]}"] \\
\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/L) \arrow[ur, "\alpha_{\xi_1,x_1}"] \arrow[dr, "\alpha_{\xi_2,x_2}"'] & \\
 & {[K_{0,2}]}
\end{tikzcd}$$

12.5. Réalisations ponctuelles. —

12.5.1. — Soit (G, X) une donnée de Shimura et $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact net. On se donne un couple $\xi = (\xi_{\mathrm{dR}}, \xi_{\text{ét}})$ où $\xi_{\text{ét}}$ est un système compatible de points géométrique dans la tour $\mathrm{Sh}(G, X, K^{\downarrow})$ et $\xi_{\mathrm{dR}} \in X$ un point tel que $\xi_{\text{ét}} = [\xi_{\mathrm{dR}}, \bar{g}]$ pour un certain $\bar{g} \in G(\mathbb{A}_f)/\overline{Z(\mathbb{Q})}$ selon l'uniformisation

$$\mathrm{Sh}(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \setminus X \times (G(\mathbb{A}_f)/\overline{Z(\mathbb{Q})}).$$

Supposons également donné un L-point de $\mathbf{Sh}(G, X, K)$ relevant le point géométrique ξ^K. On suppose que le poids de la composition

$$\mathbb{S} \xrightarrow{\xi_{\mathrm{dR}}} G_{\mathbb{R}} \longrightarrow (G/\Delta_K^{\mathrm{zar}})_{\mathbb{R}}$$

est défini sur $\mathbb{Q}$. Si V est une $\mathbb{Q}$-représentation du groupe algébrique $G/\Delta_K^{\mathrm{zar}}$ on définit la $\mathscr{R}$-structure $\mathfrak{sh}_{\xi,x}(V)$ sur L comme suit.

- $\mathfrak{sh}_{\xi,x}(V)_{\mathrm{B}} = V$,
- $\mathfrak{sh}_{\xi,x}(V)_{\mathrm{dR}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ muni de la filtration de Hodge induite par

$$\mathbb{S} \xrightarrow{\xi_{\mathrm{dR}}} (G/\Delta_K^{\mathrm{zar}})_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$$

- $\mathfrak{sh}_{\xi,x}(V)_{\text{ét}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f$ muni de l'action galoisienne donnée par

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/L) \xrightarrow{\alpha_{\xi_{\text{ét}},x}} [K] \xrightarrow{\mathrm{Inn}(\rho_{\mathbb{A}_f}(g))\circ\rho_{\mathbb{A}_f}} \mathrm{Aut}_{\mathbb{A}_f}(V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f)$$

• les identification i_{dR} et $i_{\text{ét}}$ sont les isomorphismes tautologiques.

L'association $V \mapsto \mathfrak{sh}_{\xi,x}(V)$ définit un $\otimes$-foncteur exact

$$\mathfrak{sh}_{\xi,x} : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G/\Delta_K^{\mathrm{zar}}) \to \mathscr{R}(L).$$

Lorsque G est un tore, on retrouve la construction donnée à la section 3.2.2.

12.5.2. — Si (G', X', K', ξ', x') est une seconde donnée et $\varphi : G \to G'$ un $\mathbb{Q}$-homomorphisme admissible envoyant ξ sur ξ' et x sur x' alors le triangle suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G/\Delta_K^{\mathrm{zar}}) \arrow[dr, "\mathfrak{sh}_{\xi,x}"] & \\
& \mathscr{R}(L) \\
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G'/\Delta_{K'}^{\mathrm{zar}}) \arrow[uu, "\varphi^{\top}"] \arrow[ur, "\mathfrak{sh}_{\xi',x'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ceci résulte immédiatement de la fonctorialité énoncée en 12.4.4 pour la composante étale, la fonctorialité des autres composantes étant évidente.

13. Familles de motifs abéliens

13.1. Module de Tate. —

13.1.1. — Soit S un schéma sur un corps de nombres, localement noethérien, connexe et muni d'un point géométrique $\bar{s}$. Notons $\omega_{\bar{s}} : \textbf{Ét}(S) \to \pi_1(S, \bar{s})\text{-}\mathbf{Ens}$ le foncteur fibre associé. Soit A un schéma abélien de dimension relative g sur S. Pour tout entier N, le S-schéma en groupes $A[N]$ est fini étale, localement isomorphe à $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S^{2g}$ pour la topologie étale. Le *module de Tate* est la limite projective

$$V_f(A)_{\bar{s}} = \mathbb{A}_f \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \left(\varprojlim \omega_{\bar{s}}(A[N]) \right),$$

dans la catégorie des $\pi_1(S, \bar{s})$-ensembles. Il s'agit d'un $\mathbb{A}_f$-module libre de rang $2g$. Nous noterons

$$\rho_{\bar{s}} : \pi_1(S, \bar{s}) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{A}_f}(V_f(A)_{\bar{s}}),$$

la représentation du groupe fondamental associée.

13.1.2. — Si $s : \mathrm{Spec}(L) \to S$ est un point défini sur un sous-corps $L \subset \bar{\mathbb{Q}}$ relevant le point géométrique $\bar{s}$, on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/L) \arrow[r, "\rho_s"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Aut}_{\mathbb{A}_f}(V_f(s^*A)) \arrow[d, equal] \\
\pi_1(S, \bar{s}) \arrow[r, "\rho_{\bar{s}}"'] & \mathrm{Aut}_{\mathbb{A}_f}(V_f(A)_{\bar{s}})
\end{tikzcd}$$

selon l'identification $(s^*A)_{\bar{\mathbb{Q}}} \simeq A_{\bar{s}}$. Notons l'isomorphisme de représentations galoisiennes,

$$V_f(s^*A) \simeq \mathrm{H}^1_{\text{ét}}((s^*A)_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{A}_f)^\vee,$$

justifiant le caractère motivique de la représentation ρ_s.

13.2. Familles de systèmes de réalisations. —

13.2.1. — Soit $k \subset \mathbb{C}$ un corps et soit $S \to \mathrm{Spec}(k)$ une variété algébrique lisse géométriquement connexe munie d'un point géométrique $\bar{s}$. Une $\mathscr{R}$-structure $\mathscr{V}$ sur S est un quintuplet $(\mathscr{V}_{\mathrm{B}}, \mathscr{V}_{\mathrm{dR}}, \mathscr{V}_{\text{ét}}, i_{\mathrm{dR}}, i_{\text{ét}})$ où,

- $\mathscr{V}_{\mathrm{B}}$ est un $\mathbb{Q}$-système local sur $S^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}$ que l'on interprétera comme un homomorphisme

$$\phi^{\mathrm{top}} : \pi_1^{\mathrm{top}}(S^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}, \bar{s}_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_B),$$

  V_{B} étant un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel,

- $(\mathscr{V}_{\mathrm{dR}}, \nabla_{\mathrm{dR}})$ est un fibré vectoriel plat sur $S^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}$ muni d'une filtration holomorphe,

- $\mathscr{V}_{\text{ét}}$ est un $\mathbb{A}_f$-faisceau étale lisse sur S, que l'on interprétera comme un homomorphisme continu,

$$\phi^{\mathrm{alg}} : \pi_1^{\mathrm{alg}}(S, \bar{s}) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{A}_f}(V_{\text{ét}}),$$

  $V_{\text{ét}}$ étant un $\mathbb{A}_f$-module libre de rang fini.

- $i_{\mathrm{dR}} : \mathscr{V}_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{O}_{S^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}} \simeq \mathscr{V}_{\mathrm{dR}}$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-fibrés vectoriels telle que la filtration sur $\mathscr{V}_{\mathrm{dR}}$ induise une variation de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge polarisable sur $S^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}$,

- $i_{\text{ét}} : \mathscr{V}_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \simeq \mathscr{V}_{\text{ét}}$ est un isomorphisme de systèmes locaux au sens où le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^{\mathrm{top}}(S_{\mathbb{C}}^{\mathrm{an}}, \bar{s}_{\mathbb{C}}) \arrow[r, "\phi^{\mathrm{top}}\otimes 1"] \arrow[d] & \mathrm{Aut}_{\mathbb{A}_f}(V_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f) \arrow[d, "i_{\text{ét}}^{-1}\circ(-)\circ i_{\text{ét}}"] \\
\pi_1^{\mathrm{alg}}(S_{\mathbb{C}}, \bar{s}_{\mathbb{C}}) \arrow[r, "\phi^{\mathrm{alg}}|_{S_{\mathbb{C}}}"'] & \mathrm{Aut}_{\mathbb{A}_f}(V_{\text{ét}})
\end{tikzcd}$$

13.2.2. — Si $f : (S', \bar{s}') \to (S, \bar{s})$ est un morphisme lisse de variétés algébriques pointées lisse sur $k \subset \mathbb{C}$ on définit le foncteur

$$f^* : \mathscr{R}(S) \to \mathscr{R}(S')$$

comme $f^*\mathscr{V} = ((f_{\mathbb{C}}^{\mathrm{an}})^*\mathscr{V}_{\mathrm{B}}, f_{\mathbb{C}}^*\mathscr{V}_{\mathrm{dR}}, f^*\mathscr{V}_{\text{ét}}, f^*i_{\mathrm{dR}}, f^*i_{\text{ét}})$. Nous envisagerons ce changement de base aux niveau des composantes $\mathscr{V}_{\mathrm{B}}$ et $\mathscr{V}_{\text{ét}}$ comme induit par la fonctorialité covariante des groupes fondamentaux topologiques et algébriques. On obtient un $\otimes$-foncteur exact.

13.2.3. — Soit une variété algébrique lisse et géométriquement connexe sur un corps $k \subset \mathbb{C}$ munie d'un point géométrique $\bar{s}$. Soit $f : A \to S$ un schéma abélien de section unifère $e : S \to A$. On définit une $\mathscr{R}$-structure $\mathfrak{h}_1(A)$ sur S de la façon suivante. La réalisation de Betti est définie comme le système local $R_1 f_*^{\mathrm{an}}\mathbb{Q} = (R^1 f_*^{\mathrm{an}}\mathbb{Q})^\vee$. L'extension vectorielle universelle de A est de la forme

$$0 \to (e^*\mathrm{Lie}(A^t/S))^\vee \to E(A) \to A \to 0$$

où $A^t \to S$ est le schéma abélien dual. On définit la réalisation de de Rham comme le fibré vectoriel $(e^*\mathrm{Lie}(E(A)/S))_{\mathbb{C}}^{\mathrm{an}}$ muni de la filtration déduite de

$$0 \subset (e^*\mathrm{Lie}(A^t/S))^\vee \subset e^*\mathrm{Lie}(E(A)/S),$$

par extension à $\mathbb{C}$ et analytification. Cette filtration est isomorphe fibre à fibre à la filtration

$$0 \subset H^{0,-1}(A_s) \subset H_1(A_s, \mathbb{C}),$$

sur $R_1 f_*^{\mathrm{an}}\mathbb{C}$. On obtient ainsi une variation de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge polarisables sur le système local $R_1 f_*^{\mathrm{an}}\mathbb{Q}$ (voir [**Mil11**, th.7.13] pour une autre approche). La réalisation étale est donnée par la représentation du groupe fondamental $\pi_1(S, \bar{s})$ sur le module de Tate $V_f(A_{\bar{s}}) \simeq H^1_{\text{ét}}(A_{\bar{s}}, \mathbb{A}_f)$ définie en 13.1.1.

13.2.4. — Un objet de $\mathscr{R}(S)$ est dit $\mathscr{A}$-motivique lorsque c'est l'image d'un endomorphisme idempotent d'une construction tensorielle $\mathfrak{h}_1(A)^{\square}$ dans $\mathscr{R}(S)$. On dit que $\mathscr{V}$ est *localement* $\mathfrak{A}$*-motivique* s'il existe un revêtement fini étale $f : S' \to S$ tel que $f^*\mathscr{V} \in \mathscr{R}(S')$ soit $\mathfrak{A}$-motivique.

13.3. Réalisations globales associées aux variétés de Shimura. —

13.3.1. — Soit (G, X) une donnée de Shimura vérifiant les deux axiomes suivants :

i) le poids w_X est défini sur $\mathbb{Q}$;

ii) $Z(\mathbb{Q})$ est discret dans $Z(\mathbb{A}_f)$, Z étant le centre de G.

Notons $\mathrm{Sh} = \mathrm{Sh}(G, X)$ et $\mathrm{Sh}_K = \mathrm{Sh}(G, X, K)$ pour tout sous-groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbb{A}_f)$. Sous les hypothèses précédentes,

- l'application canonique
$$\mathrm{Sh} \to G(\mathbb{Q}) \setminus X \times G(\mathbb{A}_f)$$
est un isomorphisme $G(\mathbb{A}_f)$-équivariant ;
- la flèche $K \twoheadrightarrow [K]$ est injective pour tout sous-groupe compact ouvert net $K \subset G(\mathbb{A}_f)$, l'intersection $Z(\mathbb{Q}) \cap K$ étant alors triviale.
- En particulier la projection $\mathrm{Sh} \to \mathrm{Sh}_K$ est un K-torseur pro-étale.

13.3.2. — Considérons les projections,

$$X \xleftarrow{\mathrm{pr}_{\mathrm{dR}}} X \times G(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\text{ét}}} \mathrm{Sh}$$

et fixons un point $\xi = (x_0, g)$ de $X \times G(\mathbb{A}_f)$. Nous noterons $\xi_{\mathrm{dR}} = \mathrm{pr}_{\mathrm{dR}}(\xi)$ et $\xi_{\text{ét}} = \mathrm{pr}_{\text{ét}}(\xi)$. La composante ξ_{dR} détermine une composante connexe $X^+ \subset X$ (vue comme ensemble pointé). Fixons un sous-groupe ouvert compact net $K \subset G(\mathbb{A}_f)$. L'élément $\xi_{\text{ét}}$ détermine un système compatible $(\xi^U)_{U \subset K}$ de points dans la tour

$$(\mathrm{Sh}_U \to \mathrm{Sh}_K)_{U \subset K}$$

par la formule $\xi^U = [x, g]_U$ et en particulier une composante géométriquement connexe Sh_K^+ de Sh_K, définie sur une extension finie $E(G, X) \hookrightarrow E(\xi)$, pointée par le point ξ^K. L'application $x \mapsto [x, g]$ induit un isomorphisme pointé

$$\iota_g : X^+/\Gamma_g \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_K^+$$

où Γ_g est l'image dans $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ du groupe $\Gamma'_g = gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})_+$, le groupe $G(\mathbb{Q})_+$ étant l'image réciproque dans $G(\mathbb{Q})$ du stabilisateur de la composante X^+ dans $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$. L'espace topologique X^+ étant simplement connexe, le groupe fondamental $\pi_1(X^+/\Gamma_g)$ s'identifie à $\Gamma_g \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ agissant fidèlement sur X^+.

13.3.3. — Nous allons à présent définir un foncteur

$$\mathfrak{sh}_\xi : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \to \mathscr{R}(\mathrm{Sh}_K^+).$$

Fixons (V, ρ) une représentation algébrique de G sur un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V de dimension finie.

13.3.4. *Réalisation de Betti.* — Considérons les flèches,

$$\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathrm{Sh}_K^+) \xleftarrow[\sim]{(\iota_g)_*} \pi_1(X^+/\Gamma_g) \simeq \Gamma_g \twoheadleftarrow \Gamma'_g \xrightarrow{\rho|_{\Gamma'_g}} \mathrm{Aut}(V)\ .$$

Lemme 13.1. — *La flèche $\Gamma'_g \twoheadrightarrow \Gamma_g$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Le noyau de la flèche $\Gamma'_g \twoheadrightarrow \Gamma_g$ est contenu dans $Z(\mathbb{Q})$. Or,

$$Z(\mathbb{Q}) \cap \Gamma'_g = (Z(\mathbb{Q}) \cap K) \cap G(\mathbb{Q})_+ = \{1\}\,,$$

et l'on peut alors identifier Γ_g à Γ'_g. □

On obtient ainsi un homomorphisme

$$\alpha^\rho_{\xi,\mathrm{B}} : \pi_1^{\mathrm{top}}(\mathrm{Sh}_K^+) \to \mathrm{Aut}(V),$$

définissant la composante de Betti de $\mathfrak{sh}_\xi(V)$.

13.3.5. *Réalisation de de Rham.* — Voyons $\mathfrak{sh}_\xi(V)_{\mathrm{B}}$ comme un système local en $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\mathscr{V}_{\mathrm{B}}$ sur $\mathrm{Sh}_K^{+,\mathrm{an}}$. On définit le fibré vectoriel holomorphe

$$\mathscr{V}_{\mathrm{dR}} = \mathscr{V}_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{O}_{\mathrm{Sh}_K^{+,\mathrm{an}}}$$

muni de la connexion plate $\nabla = 1 \otimes d$; de sorte que

$$\mathscr{V}_{\mathrm{dR}}^{\nabla=0} = \mathscr{V}_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

Pour $x \in X^+$, l'homormophisme

$$h_x : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Aut}(V_{\mathbb{R}})$$

définit une bigraduation $\bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} V_x^{p,q}$ sur $V \simeq V \times \{x\} \subset V \times X^+$ (sous-espaces propres pour l'action de $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ sur $V_{\mathbb{C}}$). On définit la filtration

$F^\bullet(V \times X^+)$ fibre à fibre comme

$$F^j(V \times \{x\}) = \bigoplus_{p \geqslant j} V_x^{p,q}.$$

D'après [**Del79**, 1.1.14], cette filtration est une variation de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge polarisables sur le système local constant associée au fibré vectoriel trivial $V \times X^+$. On montre que cette filtration définie fibre à fibre est $G(\mathbb{Q})$-invariante et descend ainsi au système local $\mathscr{V}_\mathrm{B} \otimes \mathbb{C}$. Le couple $(\mathscr{V}_\mathrm{dR}, F^\bullet\mathscr{V}_\mathrm{dR})$ constitue la composante de de Rham de $\mathfrak{sh}_\xi(V)$.

13.3.6. *Réalisation étale.* — Comme décrit en 12.3.4, la tour de revêtements galoisiens (algébriques) $(\mathrm{Sh}_U \to \mathrm{Sh}_K)_{U \trianglelefteq K}$ définit l'homomorphisme continu

$$\alpha_{\xi_\text{ét}} : \pi_1^\mathrm{alg}(\mathrm{Sh}_K^+) \to K.$$

Par composition on obtient une variante topologique

$$\begin{tikzcd} & \pi_1^\mathrm{alg}(\mathrm{Sh}_K^+) \arrow[r, "\alpha_{\xi_\text{ét}}"] & K \\ \pi_1^\mathrm{top}(\mathrm{Sh}_K^+) \arrow[ur] \arrow[urr, dotted, "\alpha_{\xi_\text{ét}}^\mathrm{top}"'] & & \end{tikzcd}$$

décrivant l'action de monodromie sur les fibres de la même tour de revêvements, vue dans la catégorie topologique. D'autre part, on a un diagramme commutatif d'applications continues,

$$\begin{tikzcd} X^+ \arrow[r, "x \mapsto {[x,g]}"] \arrow[d] & \mathrm{Sh}^+ \arrow[d] \\ X^+/\Gamma_g \arrow[r, "\iota_g"'] & \mathrm{Sh}_K^+ \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont respectivement un Γ_g-torseur et un K-torseur, Sh^+ étant l'image réciproque (non connexe *a priori*) dans Sh de Sh_K^+. Désignons par $\mathrm{Inn}(s)$ l'automorphisme intérieur d'un groupe S donné par un élément $s \in S$. On obtient finalement le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} \pi_1^\mathrm{top}(\mathrm{Sh}_K^+) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_g \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{Inn}(g)^{-1}"] & \mathrm{Aut}(V) \arrow[d] \\ \pi_1^\mathrm{alg}(\mathrm{Sh}_K^+) \arrow[r, "\alpha_{\xi_\text{ét}}"'] & K \arrow[r, "\mathrm{Inn}(\rho_{\mathbb{A}_f}(g)) \circ \rho_{\mathbb{A}_f}"'] & \mathrm{Aut}(V_{\mathbb{A}_f}) \end{tikzcd}$$

La flèche horizontale supérieure est la composante de Betti définie précédemment et l'on définit la composante étale comme la flèche inférieure,

$$\alpha^{\rho}_{\xi,\text{ét}} = \mathrm{Inn}(\rho_{\mathbb{A}_f}(g)) \circ \rho_{\mathbb{A}_f} \circ \alpha_{\xi_{\text{ét}}}.$$

13.3.7. — Choississant i_{dR} et $i_{\text{ét}}$ les isomorphismes canoniques, les données $\mathfrak{sh}_\xi(V)_{\mathrm{B}}, \mathfrak{sh}_\xi(V)_{\mathrm{dR}}$ et $\mathfrak{sh}_\xi(V)_{\text{ét}}$ sont compatibles par construction. Supposons un autre point ξ' donné, de la forme (x, g') tel que les images de ξ et ξ' dans Sh soient les mêmes, autrement dit $\xi_{\text{ét}} = \xi'_{\text{ét}}$. L'élément $\gamma = g^{-1}g'$ est alors dans $G(\mathbb{Q})$ et la conjugaison par γ induit un isomorphisme de systèmes de réalisations $\mathfrak{sh}_\xi(V) \simeq \mathfrak{sh}_{\xi'}(V)$ fonctoriel en V. D'après le lemme 12.7, le foncteur $\mathfrak{sh}_\xi$ ne dépend que de ξ^K) conjugaison près.

13.3.8. — La construction précédente est fonctorielle en la donnée de Shimura (pointée) au sens de l'énoncé suivant.

Proposition 13.2. — *Soit $f : (G_1, X_1, K_1) \to (G_2, X_2, K_2)$ un morphisme de données de Shimura et $\xi_1 = (x_1, g_1) \in X_1 \times G_1(\mathbb{A}_f)$, $\xi_2 = (x_2, g_2) \in X_2 \times G_2(\mathbb{A}_f)$ tels que $(f_{\mathbb{R}} \times f_{\mathbb{A}_f})(\xi_1) = \xi_2$. Alors le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_2) \arrow[r, "\mathfrak{sh}_{\xi_2}"] \arrow[d, "f^{\top}"'] & \mathscr{R}(\mathrm{Sh}^+(G_2, X_2, K_2)) \arrow[d, "\mathrm{Sh}(f)^*"] \\
\boldsymbol{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_1) \arrow[r, "\mathfrak{sh}_{\xi_1}"'] & \mathscr{R}(\mathrm{Sh}^+(G_1, X_1, K_1)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit (V_2, ρ_2) une représentation algébrique de G_2. Au niveau des réalisations de Betti, il s'agit de vérifier la commutativité du diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathrm{Sh}^+(G_1, X_1, K_1) \arrow[r, "\mathrm{Sh}(f)_*"] \arrow[drr, "\alpha^{\rho_2 \circ f}_{\xi_1,\mathrm{B}}"'] & \pi_1^{\mathrm{top}}(\mathrm{Sh}^+(G_2, X_2, K_2) \arrow[dr, "\alpha^{\rho_2}_{\xi_2,\mathrm{B}}"] & \\
 & & \mathrm{Aut}(V_2)
\end{tikzcd}$$

Celle-ci résulte du diagramme commutatif d'espaces topologiques,

$$\begin{tikzcd} X_1^+/\Gamma_{g_1} \arrow[r, "\iota_{g_1}", "\sim"'] \arrow[d, "f_{\mathbb{R}}"'] & \mathrm{Sh}^+(G_1, X_1, K_1) \arrow[d, "\mathrm{Sh}(f)"] \\ X_2^+/\Gamma_{g_2} \arrow[r, "\sim", "\iota_{g_2}"'] & \mathrm{Sh}^+(G_2, X_2, K_2) \end{tikzcd}$$

la flèche $\mathrm{Sh}(f)$ étant équivariante pour l'action de Hecke. La fonctorialité de la réalisation de de Rham se vérifie aisément fibre à fibre et celle de la réalisation étale résulte immédiatement de la fonctorialité de l'homomorphisme $\alpha_{\xi_{\text{ét}}}$ énoncée en 12.4.3. □

14. Interprétation modulaire

14.1. $(B, *)$-schémas abéliens polarisés. —

14.1.1. — Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre (semi-simple, de dimension finie) munie d'une anti-involution $* : B \to B$. Un $(B, *)$-*schéma abélien polarisé (à isogénie près)*[5] sur un schéma noethérien[6] S est la donnée,

- d'un schéma abélien A sur S (considéré à isogénie près),
- d'un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres $\iota : B \to \mathrm{End}_S(A) \otimes \mathbb{Q}$,
- d'une $\mathbb{Q}$-droite $\mathbb{Q} \cdot \lambda \subset \mathrm{Hom}_S(A, A^t)$ engendré par une polarisation B-linéaire (l'action de B sur A^t étant donnée par l'action naturelle de B^{op} et l'isomorphisme $* : B \simeq B^{\mathrm{op}}$).

14.1.2. — Si $\alpha : T \to S$ est un morphisme de schémas, le foncteur

$$\alpha^* : (A \to S) \mapsto (A \times_{S,\alpha} T \to T)$$

s'étend à isogénie près par $\mathbb{Q}$-linéarité. Un $(B, *)$-schéma abélien polarisée $(A, \iota, \mathbb{Q} \cdot \lambda)$ sur S induit ainsi un $(B, *)$-schéma abélien polarisé $(\alpha^* A, \alpha^* \iota, \alpha^*(\mathbb{Q} \cdot \lambda))$ sur T.

5. Le qualificatif *à isogénie près* étant implicitement supposé par la mention de la $\mathbb{Q}$-algèbre B (et non d'un ordre de celle-ci), nous le passerons sous silence.

6. L'hypothèse noethérienne n'est mentionnée que pour assurer la finitude de $\pi_0(S)$ sans laquelle la notion de schéma abélien à isogénie près est plus subtile.

14.1.3. — Une isogénie $\phi : A_1 \to A_2$ entre $(B,*)$-schémas abéliens polarisés $(A_1, \iota_1, \mathbb{Q}\cdot\lambda_1)$ et $(A_2, \iota_2, \mathbb{Q}\cdot\lambda_2)$ est dite *admissible* si,

(i) $\phi \circ \iota_1(b) = \iota_2(b) \circ \phi$ pour tout $b \in B$,

(ii) $\mathbb{Q}\cdot(\phi^t \circ \lambda_2 \circ \phi) = \mathbb{Q}\cdot\lambda_1$.

Un *isomorphisme de* $(B,*)$*-schémas abéliens polarisés* est un morphisme (à isogénies près) dont un multiple entier est une isogénie admissible.

14.1.4. — Soit R une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative. Une structure de $(B,*)$-*module symplectique* sur un R-module libre de rang fini V est la donnée d'une structure de B-module à gauche sur V (commutant à l'action de R) et d'une forme antisymétrique non dégénérée $\psi : V \times V \to \Lambda$ où Λ est un R-module libre de rang 1 telle que $\psi(bx, y) = \psi(x, b^*y)$ pour tout $b \in B$ et tous $x, y \in V$. Une $(B,*)$-*similitude* $(V_1, \psi_1) \to (V_2, \psi_2)$ entre deux $(B,*)$-modules symplectiques est un isomorphisme $B \otimes_{\mathbb{Q}} R$-linéaire $\eta : V_1 \to V_2$ pour lequel il existe un isomorphisme de R-modules $\theta : \Lambda_1 \simeq \Lambda_2$ tel que

$$\psi_2 \circ (\eta, \eta) = \theta \circ \psi_1.$$

14.1.5. — Lorsque (A, ι, λ) est un $(B,*)$-schéma abélien polarisé sur un schéma S et $\bar{s}$ un point géométrique de S, le $\mathbb{A}_f$-module $V_f(A)_{\bar{s}}$ sera toujours muni de sa structure de $(B,*)$-module symplectique fournie par l'accouplement de Weil

$$e_\lambda : V_f(A)_{\bar{s}} \times V_f(A)_{\bar{s}} \to \mathbb{A}_f(1).$$

14.2. Structures de niveaux. —

14.2.1. — Soit (V, ψ) un $(B,*)$-module symplectique sur $\mathbb{Q}$ et soit G le $\mathbb{Q}$-groupe algébrique de ses $(B,*)$-similitudes, *i.e.* le groupe algébrique dont les points sur une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative R sont les $(B,*)$-similitudes $V \otimes_{\mathbb{Q}} R \to V \otimes_{\mathbb{Q}} R$ définies en 14.1.4. Soit A un $(B,*)$-schéma abélien polarisé sur un $\mathbb{Q}$-schéma localement noethérien connexe S muni d'un point géométrique $\bar{s}$. On notera $L(V,A)_{\bar{s}}$ l'ensemble des similitudes $\mathbb{A}_f$-linéaires de $(B,*)$-modules symplectiques (sur $\mathbb{A}_f$)

$$V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \xrightarrow{\sim} V_f(A)_{\bar{s}}.$$

Le groupe $G(\mathbb{A}_f)$ agit à droite sur $L(V,A)_{\bar{s}}$ par précomposition et $\pi_1(S, \bar{s})$ agit à gauche via son action sur $V_f(A)_{\bar{s}}$. Ces deux actions commutent. On notera $L_K(V,A)_{\bar{s}}$ le quotient de $L(V,A)_{\bar{s}}$ sous l'action d'un sous-groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbb{A}_f)$. Une *structure de niveau* K sur A est un élément $\pi_1(S, \bar{s})$-invariant $\eta K \in L_K(V,A)_{\bar{s}}$.

14.2.2. — Soit $\alpha : T \to S$ un morphisme de schémas et supposons donnés $\bar{t}$ et $\bar{s}$ des points géométriques de T et S tels que $\alpha(\bar{t}) = \bar{s}$. Si $(A, \eta K)$ est un $(B, *)$-schéma abélien polarisé sur S muni d'une structure de niveau ηK, on définit la structure de niveau $\alpha^*(\eta K)$ sur $\alpha^* A$ par la procédure suivante. On a un isomorphisme canonique de schémas abéliens $\tau : (\alpha^* A)_{\bar{t}} \simeq A_{\bar{s}}$ et on définit alors

$$\alpha^*(\eta K) = (V(\tau)^{-1} \circ \eta)K.$$

14.2.3. — Fixons une structure complexe h sur $V_{\mathbb{R}}$, vue comme $\mathbb{Q}$-structure de Hodge de poids 1 et de type $\{(-1,0),(0,-1)\}$, compatible à la $(B,*)$-structure. Notons $E/\mathbb{Q}$ le corps de définition de la classe d'isomorphisme du $(B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$-module $V_{\mathbb{C}}/F_h^0$ défini comme l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les traces $\mathrm{Tr}(b|V_{\mathbb{C}}/F_h^0)$ pour $b \in B$. Soit S un E-schéma localement noethérien connexe. Le groupoïde $\mathfrak{M}_K(S)$ est défini comme celui dont les objets sont les couples $(A, \eta K)$, où A est un $(B,*)$-schéma abélien polarisé et ηK une structure de niveau K, vérifiant en outre la condition que les applications de B dans $\mathbb{C}$,

$$\alpha \mapsto \mathrm{Tr}(\alpha|V_{\mathbb{C}}/F_h^0),\ \alpha \mapsto \mathrm{Tr}(\alpha|\mathrm{Lie}(A_s)),$$

soient égales pour tout point complexe $s : \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \to S$. Les flèches étant les isomorhismes $\phi : A \to A_1$ de $(B,*)$-schémas abéliens polarisé respectant la structure de niveau au sens où $(V(\phi) \circ \eta)K \subset \eta_1 K$. On étend cette définition aux schémas non connexes en posant $\mathfrak{M}_K(S) = \coprod_{S^+ \in \pi_0(S)} \mathfrak{M}_K(S^+)$. Si $K_1 \subset K$, le morphisme de transition $\mathfrak{M}_{K_1} \to \mathfrak{M}_K$ est défini par $(A, \eta K_1) \mapsto (A, \eta K)$. On définit de manière analogue l'action de Hecke sur le système $\{\mathfrak{M}_K\}_K$.

Théorème 14.1. — *Si K est net, la catégorie fibrée en groupoïdes*

$$\mathfrak{M}_K \to \textbf{\textit{Sch}}_{/E}$$

est représentable par un schéma quasi-projectif $\mathfrak{M}_K \to \mathrm{Spec}(E)$. Lorsque (G,X) définit une donnée de Shimura, X étant la classe de conjugaison de h, on a l'égalité $E(G,X) = E$ et il existe une immersion fermée et ouverte $\mathbf{Sh}(G,X,K) \to \mathfrak{M}_K$ de E-schémas respectant l'action de Hecke et les morphismes de transitions pour K variable.

Démonstration. — Voir le paragraphe 5 de [**Kot92**]. □

Remarque 14.2. — Nous appliquerons ce théorème uniquement pour la donnée de Shimura (H_0, Z_0) définie en 8.2.6, Z_0 étant la classe de conjugaison de $h_B : \mathbb{S} \to H_{0,\mathbb{R}}$.

14.3. Comparaison des représentations. —

14.3.1. — Considérons un sous-groupe net $K_0 \subset G(\mathbb{A}_f)$, choisissons $\mathrm{Sh}^+_{K_0}$ une composante géométriquement connexe de $\mathrm{Sh}(G, X, K_0)$ et un élément ξ^{K_0} de $\mathrm{Sh}^+_{K_0}(\bar{\mathbb{Q}})$. On notera $(A_0, \eta_0 K_0)$ l'objet de $\mathfrak{M}_{K_0}(\mathrm{Sh}^+_{K_0})$ correspondant à l'inclusion de $\mathrm{Sh}^+_{K_0}$ dans $\mathfrak{M}_{K_0}$ dont on suppose la structure de niveau supportée au point ξ^{K_0}. Il s'agit de la restriction au schéma $\mathrm{Sh}^+_{K_0}$ du $(B, *)$-schéma abélien polarisé universel muni d'une structure de niveau K_0.

14.3.2. — Soit maintenant $K \subset K_0$ un sous-groupe distingué, $\mathrm{Sh}^+_K \subset \mathrm{Sh}(G, X, K)$ l'image réciproque (non nécessairement connexe) de $\mathrm{Sh}^+_{K_0}$ et $f : \mathrm{Sh}^+_K \to \mathrm{Sh}^+_{K_0}$ le morphisme induit. D'après le corollaire 12.3, il s'agit d'un K_0/K-torseur étale. Notons en effet que dans le cadre d'une donnée de type Hodge on a $[K_0/K] = K_0/K$, le groupe $Z(\mathbb{Q})$ étant discret dans $Z(\mathbb{A}_f)$ d'après la suite exacte

$$1\mathbb{G}_m \xrightarrow{w} Z \longrightarrow Z' \longrightarrow 1$$

où Z' est $\mathbb{R}$-anisotrope. Pour chaque composante géométriquement connexe $i_C : C \hookrightarrow \mathrm{Sh}^+_K$, on choisit un point ξ^K_C au-dessus de ξ^{K_1}. L'objet $(A_K, \eta_K K)$ de $\mathfrak{M}_K(\mathrm{Sh}^+_K)$ est défini comme celui correspondant à l'inclusion $\mathrm{Sh}^+_K \hookrightarrow \mathfrak{M}_K$. Il s'agit de la collection, pour chaque composante connexe C de Sh^+_K, d'un objet $(A_C, \eta_C K)$ de $\mathfrak{M}_K(C)$. On suppose également que la structure de niveau $\eta_C K$ est supportée au point ξ^K_C.

Lemme 14.3. — *Pour chaque composante géométriquement connexe $C \subset \mathrm{Sh}^+_K$, on a un isomorphisme canonique*

$$(A_C, \eta_C K) \bmod K_0 \simeq (f \circ i_C)^*(A_0, \eta_0 K_0),$$

dans $\mathfrak{M}_{K_0}(C)$.

Démonstration. — L'objet $(A_C, \eta_C K)$ correspond par définition à la composée

$$C \hookrightarrow \mathrm{Sh}^+_K \hookrightarrow \mathfrak{M}_K,$$

et l'objet $(A_C, \eta_C K) \bmod K_0$ à la composée

$$C \hookrightarrow \mathfrak{M}_K \to \mathfrak{M}_{K_0}.$$

Quant à l'objet $(f \circ i_C)^*(A_0, \eta_0 K_0)$, il correspond à la flèche

$$C \hookrightarrow \mathrm{Sh}_K^+ \to \mathrm{Sh}_{K_0}^+ \hookrightarrow \mathfrak{M}_{K_0}.$$

La commutativité du diagramme,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i_C"] & \mathrm{Sh}_K^+ \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathfrak{M}_K \arrow[d, "f"] \\ & \mathrm{Sh}_{K_0}^+ \arrow[r] & \mathfrak{M}_{K_0} \end{tikzcd}$$

donne ainsi l'isomorphisme recherché. □

14.3.3. — Notons $\mathscr{S}_K$ l'ensemble des $\bar{\mathbb{Q}}$-points de la fibre de ξ^{K_0} dans Sh_K^+. Si $C(s)$ est la composante de $s \in \mathscr{S}_K$, on a d'après le lemme précédent un isomorphisme dans $\mathfrak{M}_{K_0}(\bar{\mathbb{Q}})$,

$$s^*(A_{C(s)}, \eta_{C(s)} K) \bmod K_0 \simeq s^*((A_{C(s)}, \eta_{C(s)} K) \bmod K_0)$$

$$\simeq s^*(f \circ i_{C(s)})^*(A_0, \eta_0 K_0) \simeq \bar{s}_0^*(A_0, \eta_0 K_0),$$

dont on notera $\varphi_s : (A_K)_s \simeq (A_0)_{\xi^{K_0}}$ l'isomorphisme sous-jacent de variétés abéliennes sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{Sh}_K^+)$ opère sur l'ensemble

$$\mathscr{L}_K = \left\{ \eta K \in L_K(V, A_0)_{\xi^{K_0}} : \eta K_0 = \eta_0 K_0 \right\}$$

via son action sur le module de Tate du schéma abélien universel sur ${}_K^+$. On définit une application $\theta_K : \mathscr{S}_K \to \mathscr{L}_K$ par la formule

$$\theta_K(s) = V(\varphi_s) \circ \eta_{C(s)} K.$$

Puisque l'action de $\pi_1(\mathrm{Sh}_{K_0}^+)$ sur $\mathscr{S}_K$ factorise celle du groupe d'automorphisme $\mathrm{Aut}(\mathrm{Sh}_K^+/\mathrm{Sh}_{K_0}^+)$, on constate que θ_K est une application $\pi_1(\mathrm{Sh}_{K_0}^+)$-équivariante. De même θ_K est K_0-équivariante comme il résulte de l'interprétation modulaire de l'action de Hecke. On conclut alors que $\theta_K : \mathscr{S}_K \to \mathscr{L}_K$ est un (iso)morphisme $\pi_1(\mathrm{Sh}_{K_0}^+)$-équivariant de K_0/K-torseurs (ensemblistes).

14.3.4. — Pour une chaîne d'inclusions $K_2 \subset K_1 \subset K_0$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}_{K_2} \arrow[r, "\theta_{K_2}"] \arrow[d, "f_{21}"'] & \mathscr{L}_{K_2} \arrow[d, "(-)\,\mathrm{mod}\,K_1"] \\ \mathscr{S}_{K_1} \arrow[r, "\theta_{K_1}"'] & \mathscr{L}_{K_1} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Ceci se vérifie facilement en ayant choisi les points géométriques de références $\xi_C^K \in \mathscr{S}_K$ de façon compatible, *i.e.* en fixant un point de référence dans chaque composante connexe de la limite projective des Sh_K^+. En passant à la limite, on obtient un isomorphisme $\pi_1(\mathrm{Sh}_{K_0}^+)$-équivariant de K_0-torseurs

$$\theta : \mathscr{S} \to \mathscr{L}.$$

D'une part, la limite projective $\mathscr{S}$ des $\mathscr{S}_K$ s'identifie à la fibre de $\mathrm{Sh}(G, X) \to \mathrm{Sh}(G, X, K_0)$ au-dessus de ξ^{K_0}, ce de façon compatible aux action de Hecke et du groupe fondamental. D'autre part, la limite $\mathscr{L}$ des $\mathscr{L}_K$ s'identifie à l'ensemble des $(B, *)$-similitudes symplectiques

$$\eta : V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \xrightarrow{\sim} V_f(A_0)_{\xi^{K_0}},$$

dont la réduction modulo K_0 est $\eta_0 K_0$, les actions de Hecke et du groupe fondamental ayant lieu respectivement à la source et au but.

14.3.5. — Choisissons à présent un point $\xi \in \mathscr{S}$, autrement dit un système compatible de points $(\xi^K)_K$ prolongeant ξ^{K_0}. D'après le lemme 12.7 l'homomorphisme $\alpha_\xi : \pi_1(\mathrm{Sh}_{K_0}^+) \to K_0$ construit en 12.3.4 est donc aussi l'unique homomorphisme tel que

$$\forall \sigma \in \pi_1(\mathrm{Sh}_{K_0}^+),\ \sigma \cdot \eta = \eta \cdot \alpha_\xi(\sigma),$$

où $\eta = \theta(\xi)$. Finalement l'homomorphisme α_ξ est égal à la composée

$$\eta \circ \rho_\xi : \pi_1(\mathrm{Sh}_{K_0}^+) \to \mathrm{Aut}(V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f),$$

où ρ_ξ est la représentaion de $\pi_1(\mathrm{Sh}_{K_0}^+)$ sur le module de Tate $V_f(A_0)_{\xi^{K_0}}$. On a donc obtenu le théorème suivant.

Théorème 14.4. — *On a un isomorphisme*

$$\mathfrak{sh}_\xi(V)_{\text{ét}} \simeq \mathfrak{h}_1(A_0)_{\text{ét}}.$$

14.3.6. — Dans cette section nous voulons surtout donner une interprétation modulaire de l'homomorphisme α_ξ. On a en fait un isomorphisme (que nous utiliserons) de $\mathscr{R}$-structures

$$\mathfrak{s}\mathfrak{h}_\xi(V) \simeq \mathfrak{h}_1(A_0)$$

comme on peut le déduire de la démonstration de [**Yan23**, lemma 4.2.4].

15. Géométrie

15.1. Revêtements localement finis. —

15.1.1. — On adopte la définition de [**Bou16**] des revêtements topologiques, notons en particulier qu'on ne les suppose pas surjectifs.

Lemme 15.1. — *Soit $\varphi : (G_1, X_1, K_1) \to (G_2, X_2, K_2)$ un morphisme de données de Shimura en niveaux finis. On suppose vérifiés :*

(i) $\varphi(Z_1) \subset Z_2$ où Z_1 et Z_2 sont les centres de G_1 et G_2,

(ii) φ induit un isomorphisme $\varphi^{\mathrm{ad}} : G_1^{\mathrm{ad}} \simeq G_2^{\mathrm{ad}}$,

(iii) les sous-groupes K_1 et K_2 sont nets,

(iv) $\mathrm{Sh}(G_1, X_1, K_1)$ *est compacte.*

Alors le morphisme

$$\varphi_{(K_1,K_2)} : \mathrm{Sh}(G_1, X_1, K_1) \to \mathrm{Sh}(G_2, X_2, K_2)$$

est un revêtement (topologique) localement fini.

Démonstration. — D'après [**Bou16**, th.1, p.75], il s'agit de vérifier que l'application $\varphi_{(K_1,K_2)}$ est étale, propre et séparée. Elle est bien propre et séparée car sa source $\mathrm{Sh}(G_1, X_1, K_1)$ est compacte. Puisque K_1 et K_2 sont nets, les flèches verticales du diagramme suivant sont étales et surjectives.

$$\begin{tikzcd} X_1 \times (G_1(\mathbb{A}_f)/K_1) \arrow[r, "\varphi_{\mathbb{R}} \times \varphi_{\mathbb{A}_f}"] \arrow[d] & X_2 \times (G_2(\mathbb{A}_f)/K_2) \arrow[d] \\ \mathrm{Sh}(G_1, X_1, K_1) \arrow[r, "\varphi_{(K_1,K_2)}"'] & \mathrm{Sh}(G_2, X_2, K_2) \end{tikzcd}$$

D'après [**Bou16**, prop.6,d), p.29], il suffit donc de montrer que $\varphi_{\mathbb{R}} \times \varphi_{\mathbb{A}_f}$ est étale. Puisque $G_1(\mathbb{A}_f)/K_1$ est discret chaque $X_1 \times \{gK_1\}$ est ouvert. La restriction de $\varphi_{\mathbb{R}} \times \varphi_{\mathbb{A}_f}$ à cet ouvert s'identifie à l'application $\varphi_{\mathbb{R}}$ et on est donc réduit à démontrer que $\varphi_{\mathbb{R}}$ est étale. Considérons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\varphi_{\mathbb{R}}"'] & X_1^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\varphi_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}"] \\ X_2 \arrow[r, "i_2"'] & X_2^{\mathrm{ad}} \end{tikzcd}$$

Les flèches i_1 et i_2 sont des immersions ouvertes et en particulier des applications étales. Elles sont ouvertes car les applications $G_i(\mathbb{R}) \to G_i^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ le sont [7]. L'injectivité provient du lemme qui suit appliqué à l'isogénie $G_{i,\mathbb{R}} \to G_{i,\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}} \times G_{i,\mathbb{R}}^{\mathrm{ab}}$, la composée $\mathbb{S} \to G_{i,\mathbb{R}} \to G_{i,\mathbb{R}}^{\mathrm{ab}}$ étant indépendante du point $x \in X_i$. Puisque $\varphi_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$ est un homéomorphisme (donc étale), en appliquant deux fois [**Bou16**, prop.6,c), p.29] on en déduit que $i_2 \circ \varphi_{\mathbb{R}}$ puis $\varphi_{\mathbb{R}}$ sont étales. □

Lemme 15.2. — *Soit $\varphi : G \to G'$ une isogénie centrale de $\mathbb{R}$-groupes algébriques. Alors l'application*

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{S}, G) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{S}, G')$$

est injective.

Démonstration. — Considérons la suite exacte

$$1 \to Z' \to G \to G' \to 1$$

avec Z' fini. Soient h_1 et h_2 deux morphisms $\mathrm{S} \to G_{\mathbb{R}}$ ayant même projection sur $G'_{\mathbb{R}}$. L'homomorphisme $h_1 h_2^{-1} : \mathbb{S} \to Z'$ est alors trivial, $\mathbb{S}$ étant connexe. □

15.2. Groupes de congruences. —

15.2.1. — D'après [**Oes84**, 3.1], l'adélisation $G(\mathbb{A}_f)$ d'un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique peut se décrire de la façon suivante. Fixons un modèle $\mathscr{G}$ de G sur un ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Alors les groupes $G(\mathbb{Z}_\ell) = \mathscr{G}(\mathbb{Z}_\ell)$ sont définis pour presque tout ℓ et ne dépendent du modèle $\mathscr{G}$ que pour un nombre fini de nombres premiers ℓ. On définit alors $G(\mathbb{A}_f)$ comme le produit des

7. En effet l'application tangente $\mathfrak{g}_{i,\mathbb{R}} \to \mathfrak{g}_{i,\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$ est surjective donc $G_i(\mathbb{R}) \to G_i^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ est une submersion.

$G(\mathbb{Q}_\ell)$ restreint par rapports aux sous-groupes $G(\mathbb{Z}_\ell)$. Les ouverts de la forme

$$\prod_{\ell\in S} U_\ell \times \prod_{\ell\notin S} G(\mathbb{Z}_\ell),$$

où S est un ensemble fini de nombres premiers et où chaque $U_\ell \subset G(\mathbb{Q}_\ell)$ est un ouvert ℓ-adique, forment une base de la topologie.

Lemme 15.3. — *Soit $\alpha : G \twoheadrightarrow G_1$ un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Q}$-groupes algébriques. Si α est à noyau connexe alors l'application*

$$\alpha_{\mathbb{A}_f} : G(\mathbb{A}_g) \to G_1(\mathbb{A}_f)$$

est ouverte. En particulier $\alpha_{\mathbb{A}_f}$ envoie un sous-groupe ouvert compact sur un sous-groupe ouvert compact.

Démonstration. — [8] L'application $\alpha_{\mathbb{A}_f}$ est induite par la famille des applications $\alpha_\ell : G(\mathbb{Q}_\ell) \to G_1(\mathbb{Q}_\ell)$. Puisque α est lisse, chaque α_ℓ est ouvert pour la topologie analytique ℓ-adique d'après [**Con12**, p.11]. Il s'agit alors de montrer que α_ℓ envoie surjectivement $G(\mathbb{Z}_\ell)$ sur $G_1(\mathbb{Z}_\ell)$ pour presque tout ℓ. Fixons un modèle

$$1 \longrightarrow \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{G} \xrightarrow{\alpha_\ell} \mathscr{G}_1 \longrightarrow 1\ ,$$

défini sur un ouvert U de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, de la suite exacte

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{\alpha_\ell} G_1 \longrightarrow 1\ ,$$

de sorte que $\mathscr{N}, \mathscr{G}, \mathscr{G}_1$ soient des groupes réductifs (lisses) connexes sur U et que α_U soit lisse. Si $\ell \notin U$, on a une suite exacte

$$1 \to \mathscr{N}_\ell \to \mathscr{G}_\ell \to \mathscr{G}_{1,\ell} \to 1$$

de groupes réductifs connexes sur $\mathbb{Z}_\ell$. Notons $\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_\ell)$ la fibre de $\alpha_{\mathbb{Z}_\ell}$ au dessus d'une section donnée $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_\ell) \to \mathscr{G}_{1,\ell}$. Puisque $\alpha_{\mathbb{Z}_\ell}$ est lisse, $\mathscr{X}$ l'est aussi. En particulier $(\mathscr{N}_\ell)_{\mathbb{F}_\ell}$ est un groupe algébrique lisse et connexe sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\ell)$. D'après le théorème de Lang, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{F}_\ell, (\mathscr{N}_\ell)_{\mathbb{F}_\ell}) = 0$$

et ainsi $\mathscr{G}_\ell(\mathbb{F}_\ell) \to \mathscr{G}_{1,\ell}(\mathbb{F}_\ell)$ est surjective d'après la suite exacte longue en cohomologie. L'ensemble $\mathscr{X}(\mathbb{F}_\ell)$ est donc non vide. Par le lemme de Hensel $\mathscr{X}(\mathbb{Z}_\ell)$ est également non vide. $\square$

8. Preuve suggérée par la remarque d'Oesterlé [**Oes84**, 3.6]

16. Motivicité de $\mathrm{Sh}(\mathscr{D})$

16.1. Réseaux et cofinalité. —

16.1.1. — Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ muni d'une représentation fidèle V. Choisissons un $\widehat{\mathbb{Z}}$-réseau $\widehat{\Lambda}$ de $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f$; son stabilisater dans $G(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe ouvert compact maximal K^*. Définissons le sous-groupe U_n par la suite exacte

$$1 \to U_n \to \mathrm{Aut}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(\widehat{\Lambda}) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\widehat{\Lambda}/n\widehat{\Lambda}).$$

Le sous-groupe $K_n = U_n \cap K^*$ est alors un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f)$.

Lemme 16.1. — *Si $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ est ouvert-compact, il existe un entier n tel que $K_n \subset K$.*

Démonstration. — Par l'absurde construisons un filet $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K^*$ ($\mathbb{N}$ étant muni de l'ordre de divisibilité) avec

$$g_n \in K_n - K$$

pour tout n. Après une extration, le filet (g_n) converge vers un élément g du compact $K^* - K$: plus précisement, il existe un ensemble filtrant X et une application $\phi : X \to \mathbb{N}$ vérifiant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in X$ tel que $n|\phi(y)$ dès que $y \geqslant x$ et telle que sous le sous-filet $(g'_x)_{x\in X} = (g_{\phi(x)})_{x\in X}$ converge vers $g \in K^* - K$. Si $n_0 \in \mathbb{N}$, on peut par cofinalité de ϕ, extraire un sous-filet $(g''_y)_{y\in Y}$ contenu dan K_{n_0} (qui est fermé comme sous-groupe ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$) prouvant que la limite g est élément de K_{n_0}. On a ainsi $g \in K_{n_0}$ pour tout n_0 donc g agit trivialement sur la limite projective

$$\varprojlim \widehat{\Lambda}/n\widehat{\Lambda} = \widehat{\Lambda}.$$

Or K^* agit fidèlement sur $\widehat{\Lambda}$ donc $g = 1$ ce qui est absurde. $\square$

16.1.2. — Nous dirons qu'un homomorphisme $f : G \to G'$ est *cofinal* lorsque d'une part $f_{\mathbb{A}_f}$ envoie sous-groupes ouverts-compacts sur des parties de même type et que le système $f_{\mathbb{A}_f}(K)$, pour $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ ouvert compact, est cofinal dans le système des sous-groupes ouverts-compacts de $G'(\mathbb{A}_f)$.

16.1.3. — À partir de maintenant, on retourne aux données étranges de 10.2. On s'intéresse aux homomomorphismes formant le diagramme

$$\begin{tikzcd} G \times T \arrow[rr, "\mathrm{Am}"] \arrow[d, "\mathrm{Nm}_D"'] & & H \arrow[d, "\mathrm{Nm}_B"] \\ G_1 \times T_1 \arrow[rr, "\mathrm{Am}_1"'] & & H_1 \end{tikzcd}$$

(avec $\mathrm{Nm}_E : T \to T_1$)

construit en 10.2.

Lemme 16.2. — *Les morphismes* $\mathrm{Nm}_D, \mathrm{Nm}_E$ *et* Nm_B *sont cofinaux.*

Démonstration. — Considérons A l'une des F-algèbres D, E ou B et choisissons un ordre $\mathfrak{o}$ de A sur $\mathscr{O}_F$. Fixons une clôture galoisienne L de F. Puisque tout plongement $\sigma : F \to L$ préserve les anneaux d'entiers, l'action de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ sur $A' = \bigotimes_\sigma A_\sigma$ (notations du paragraphe 7.1) induit une action sur la $\mathscr{O}_L$-algèbre

$$\mathfrak{o}' = \bigotimes_{\sigma} (\mathfrak{o} \otimes_{\mathscr{O}_F,\sigma} \mathscr{O}_L)$$

et par suite la corestriction $\mathfrak{O} = \mathrm{Cor}_{\mathscr{O}_F/\mathbb{Z}}(\mathfrak{o})$ est bien définie ; c'est un ordre de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathscr{A} = \mathrm{Cor}_{F/\mathbb{Q}}(A)$ puisque

$$\mathfrak{o}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \bigotimes_{\sigma} (\mathfrak{o} \otimes_{\mathscr{O}_F,\sigma} \mathscr{O}_L) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \bigotimes_{\sigma} A_\sigma = A'.$$

Un calcul direct donne l'inclusion

$$\mathrm{Nm}_A(1 + m\widehat{\mathfrak{o}})^\times \subset (1 + m\widehat{\mathfrak{O}})^\times$$

pour tout m, où l'on a noté $\widehat{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$ et $\widehat{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$. Si K' est un sous-groupe ouvert compact adélique de $\mathrm{Nm}_A(A^\times)$, on peut choisir d'après le lemme précédent un entier m tel que $(1 + m\widehat{\mathfrak{O}})^\times \subset K'$ et donc K' contient le sous-groupe $\mathrm{Nm}_A(1 + m\widehat{\mathfrak{o}})^\times$ (ouvert d'après 15.3). □

Lemme 16.3. — *Les homomorphismes* Am *et* Am_1 *sont cofinaux.*

Démonstration. — Soit (A, B, C) l'un des triplets (D, E, F) ou $(\mathscr{D}, \mathscr{E}, \mathbb{Q})$. On fixe des $\mathfrak{o}_C$-ordres $\mathfrak{o}_A$ et $\mathfrak{o}_B$ de A et B. On conclut comme dans la preuve précédente en considérant l'ordre $\mathfrak{o}_A \otimes_{\mathfrak{o}_C} \mathfrak{o}_B$ de $A \otimes_C B$. □

16.2. Systèmes compatibles. —

16.2.1. — Nous avons construit en 10.2 le diagramme commutatif de données de Shimura comme suit.

$$\begin{tikzcd}
(G,X) \arrow[d, "\mathrm{Nm}"'] & \times & (T,Y) \arrow[d, "\mathrm{Nm}"] \arrow[r, "\mathrm{Am}"] & (H,Z) \arrow[d, "\mathrm{Nm}"] & (H_0,Z_0) \arrow[l] \arrow[dl, bend left, "\psi"] \\
(G_1,X_1) & \times & (T_1,Y_1) \arrow[r, "\mathrm{Am}_1"'] & (H_1,Z_1) &
\end{tikzcd}$$

Dans la suite, nous supposons toutes les variétés de Shimura considérées étendues au corps réflex $E_0 = E(G \times T, X \times Y)$.

16.2.2. — Fixons un sous-groupe compact ouvert $M_0 \subset H(\mathbb{A}_f)$ tel que pour tout $M \subset M_0$, il existe $M^\flat \subset H_0(\mathbb{A}_f)$ tel que le morphisme de variétés de Shimura

$$\iota_{(M^\flat, M)} : \mathrm{Sh}(H_0, Z_0, M^\flat) \to \mathrm{Sh}(H, Z, M)$$

soit défini. On fixe également pour chaque $M \subset M_0$ un tel sous-groupe $M^\flat \subset H_0(\mathbb{A}_f)$ de sorte que le système $(M_0^\downarrow)^\flat$ soit cofinal dans $(M_0^\flat)^\downarrow$.

16.2.3. — Pour $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ et $L \subset T(\mathbb{A}_f)$, nous notons $K * L$ l'image de $K \times L$ dans $H(\mathbb{A}_f)$, il s'agit d'un sous-groupe compact ouvert en vertu du lemme 15.3. Quitte à rétrécir M_0, on peut choisir K_0 et L_0 de sorte que $K_0 * L_0 = M_0$ et que le système $K_0^\downarrow * L_0^\downarrow$ soit cofinal dans $M_0^\downarrow$. On obtient un morphisme surjectif,

$$\mathrm{Sh}(G \times T, X \times Y, K_0^\downarrow \times L_0^\downarrow) \twoheadrightarrow \mathrm{Sh}(H, Z, K_0^\downarrow * L_0^\downarrow) \simeq \mathrm{Sh}(H, Z, M_0^\downarrow).$$

Le système $K_0^\downarrow \times L_0^\downarrow$ est cofinal dans $(K_0 \times L_0)^\downarrow$ en vertu du lemme 16.3. On a de plus un isomorphisme canonique,

$$\mathrm{Sh}(G \times T, X \times Y, K_0^\downarrow \times L_0^\downarrow) \simeq \mathrm{Sh}(G, X, K_0^\downarrow) \times \mathrm{Sh}(T, Y, L_0^\downarrow).$$

16.2.4. — Pour $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ (*resp.* $L \subset T(\mathbb{A}_f)$, *resp.* $M \subset H(\mathbb{A}_f)$), l'image dans $G_1(\mathbb{A}_f)$ (*resp.* $T_1(\mathbb{A}_f)$, *resp.* $H_1(\mathbb{A}_f)$) est notée $K^\sharp$ (*resp.* $L^\sharp$, *resp.* $M^\sharp$). Il s'agit d'un sous-groupe compact ouvert d'après le lemme 15.3. Pour un sous-groupe $K_0 \subset G(\mathbb{A}_f)$ donné, le système $(K_0^\downarrow)^\sharp$ est cofinal dans $(K_0^\sharp)^\downarrow$ d'après le lemme 16.2. Les énoncés analogues sont valables également pour $T_1(\mathbb{A}_f)$ et $H_1(\mathbb{A}_f)$. On obtient finalement un diagramme commutatif de E_0-schémas comme suit.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Sh}(H_0, Z_0, (K_0^{\downarrow} * L_0^{\downarrow})^{\flat}) \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
\mathrm{Sh}(G, X, K_0^{\downarrow}) \times \mathrm{Sh}(T, Y, L_0^{\downarrow}) \arrow[r, two heads, "\mathrm{Sh}(\mathrm{Am})"] \arrow[d] & \mathrm{Sh}(H, Z, K_0^{\downarrow} * L_0^{\downarrow}) \arrow[d] \\
\mathrm{Sh}(G_1, X_1, (K_0^{\downarrow})^{\sharp}) \times \mathrm{Sh}(T_1, Y_1, (L_0^{\downarrow})^{\sharp}) \arrow[r, two heads, "\mathrm{Sh}(\mathrm{Am}_1)"'] & \mathrm{Sh}(H_1, Z_1, (K_0^{\downarrow} * L_0^{\downarrow})^{\sharp})
\end{tikzcd}$$

Faisons le choix d'un système compatible $\zeta^{\flat}$ de points dans $\mathrm{Sh}(H_0, Z_0, (K_0^{\downarrow} * L_0^{\downarrow})^{\flat})$ et d'un point $z^{\flat} \in \mathbf{Sh}(H_0, Z_0, M_0^{\flat})(k)$, k étant une extension finie de E_0, de sorte que $z^{\flat}$ relève $\zeta^{\flat}$ en niveau $M_0^{\flat}$. La surjectivité de la flèche $\mathrm{Sh}(\mathrm{Am})$ permet de relèver ces données au reste du diagramme comme suit.

$$\begin{tikzcd}
 & \zeta^{\flat} \arrow[d, mapsto] & & z^{\flat} \arrow[d, mapsto] \\
(\xi, \upsilon) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \zeta \arrow[d, mapsto] & (x, y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & z \arrow[d, mapsto] \\
(\xi^{\sharp}, \upsilon^{\sharp}) \arrow[r, mapsto] & \zeta^{\sharp} & (x^{\sharp}, y^{\sharp}) \arrow[r, mapsto] & z^{\sharp}
\end{tikzcd}$$

16.3. Démonstration. —

16.3.1. — Dans ce paragraphe, toutes les variétés de Shimura sont étendues à une extension finie suffisamment large Ω du corps réflex de la donnée $(G \times T, X \times Y)$. En particulier, les points $x, x^{\sharp}, y, y^{\sharp}, z^{\flat}, z$ et $z^{\sharp}$ de 16.2.4 sont définis sur Ω Nous noterons P_1 le produit direct $G_1 \times T_1$ et ferons l'identification abusive $X_1 \simeq X_1 \times Y_1$.

16.3.2. — Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 16.4. — *Pour toute représentation algébrique ρ de G_1, le système de réalisations $\mathfrak{sh}_{\xi^{\sharp}}(\rho)$ est localement $\mathfrak{A}$-motivique.*

Il suffit de traiter le cas de la représentation fidèle V_1 provenant de la représentation régulière à gauche de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathscr{D}$.

16.3.3. — D'après [**Mil04**], la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G, X, K)$ est compacte, le groupe $G(\mathbb{Q}) = D^\times$ n'ayant pas d'idempotent non trivial puisque D est une algèbre à division. Le même argument (ou le lemme 15.1) montre que les variétés $\mathrm{Sh}(G_1, X_1, K^\sharp), \mathrm{Sh}(H_0, Z_0, M^\flat)$ et $\mathrm{Sh}(H_1, Z_1, M^\sharp)$ sont également compactes.

16.3.4. — On rappelle que l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Sh}(P_1, X_1, K_0^\sharp \times L_0^\sharp) \simeq \mathrm{Sh}(G_1, X_1, K_0^\sharp) \times \mathrm{Sh}(T_1, Y_1, L_0^\sharp),$$

induit par les projections $\mathrm{pr}_1 : P_1 \to G_1$ et $\mathrm{pr}_2 : P_1 \to T_1$. Le morphisme $\mathrm{Sh}(\mathrm{pr}_1)$ induit également un isomorphisme

$$\mathrm{Sh}(\mathrm{pr}_1) : \mathrm{Sh}^+(P_1, X_1, K_0^\sharp \times L_0^\sharp) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}^+(G_1, X_1, K_0^\sharp).$$

En effet, la variété $\mathrm{Sh}(T_1, Y_1, L_0^\sharp)$ est un schéma fini étale sur le spectre de Ω et sa composante connexe $\mathrm{Sh}^+(T_1, Y_1, L_0^\sharp)$ est ainsi réduite au point Ω-rationnel $\upsilon_0^\sharp$. En particulier, dans le diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(P_1) \arrow[r, "\mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp, \upsilon^\sharp)}"] & \mathscr{R}(\mathrm{Sh}^+(P_1, X_1, K_0^\sharp \times L_0^\sharp)) \\
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_1) \arrow[u, "\mathrm{pr}_1^\top"] \arrow[r, "\mathfrak{sh}_{\xi^\sharp}"] & \mathscr{R}(\mathrm{Sh}^+(G_1, X_1, K_0^\sharp)) \arrow[u, "\mathrm{Sh}(\mathrm{pr}_1)^*"']
\end{tikzcd}$$

le foncteur $\mathrm{Sh}(\mathrm{pr}_1)^*$ est une équivalence de catégories. On est donc ramené à démontrer que $\mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp, \upsilon^\sharp)}(V_1)$ est $\mathfrak{A}$-motivique, où V_1 est considérée comme représentation de $G_1 \times T_1$ en faisant agir T_1 trivialement.

16.3.5. — Considérons à présent la seconde projection $\mathrm{pr}_2 : P_1 \to T_1$. Le morphisme $\mathrm{Sh}(\mathrm{pr}_2)$ s'identifie à la flèche structurale

$$\mathrm{Sh}^+(P_1, X_1, K_0^\sharp \times L_0^\sharp) \to \mathrm{Spec}(\Omega),$$

et il s'agit d'un morphisme propre (par compacité de $\mathrm{Sh}(G_1, X_1, K^\sharp)$) et lisse. On a alors le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(P_1) \arrow[r, "\mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp, \upsilon^\sharp)}"] & \mathscr{R}(\mathrm{Sh}^+(P_1, X_1, K_0^\sharp \times L_0^\sharp)) \\
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(T_1) \arrow[u, "\mathrm{pr}_2^\top"] \arrow[r, "\mathfrak{sh}_{\upsilon^\sharp}"'] & \mathscr{R}(\Omega) \arrow[u, "\mathrm{Sh}(\mathrm{pr}_2)^*"']
\end{tikzcd}$$

On rappelle que U_1 est la représentation fidèle de T_1 issue de la représentation régulière de la $\mathbb{Q}$-algèbre commutative $\mathscr{E}$. Sachant que U_1 est

$\mathfrak{A}$-motivique d'après le corollaire 4.6, il existe une variété abélienne A définie sur Ω et un idempotent $e_{\upsilon^\sharp} : \mathfrak{h}_1(A)^\square \to \mathfrak{h}_1(A)^\square$, où $\mathfrak{h}_1(A)^\square$ est une certaine construction formée à partir de $\mathfrak{h}_1(A)$ par produit tensoriels, duaux et sommes directes, telle que $\mathfrak{sh}_{\upsilon^\sharp}(U_1) \simeq \mathrm{Im}(e_{\upsilon^\sharp})$. D'après le diagramme précédent et l'exactitude du foncteur $\mathrm{Sh}(\mathrm{pr}_2)^*$ (provenant de la lissité de $\mathrm{Sh}(\mathrm{pr}_2)$), on a

$$\mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}(U_1) = \mathrm{Sh}(\mathrm{pr}_2)^*\mathrm{Im}(e_{\upsilon^\sharp}) \simeq \mathrm{Im}(\mathrm{Sh}(\mathrm{pr}_2)^* e_{\upsilon^\sharp}).$$

Or $\mathrm{Sh}(\mathrm{pr}_2)^* e_{\upsilon^\sharp}$ est maintenant un idempotent de la même construction tensorielle sur le système de réalisations du schéma abélien constant

$$\mathrm{Sh}(\mathrm{pr}_2)^* A = A \times \mathrm{Sh}^+(P_1, X_1, K_0^\sharp \times L_0^\sharp),$$

donc $\mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}(U_1)$ est bien $\mathfrak{A}$-motivique. Notons que le résultat demeure vrai pour le système dual

$$\mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}(U_1)^\vee = \mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}(U_1^\vee)$$

par la structure tannakienne.

16.3.6. — Montrons à présent que $\mathfrak{sh}_{\zeta^\sharp}(W_1)$ est $\mathfrak{A}$-motivique où W_1 est la représentation régulière de l'algèbre $\mathscr{B}$ vue comme représentation fidèle du groupe algébrique H_1. Considérons l'isogénie $H_0 \to H_1$, encore notée Nm. Elle induit un revêtement fini étale (d'après le lemme 15.1)

$$\mathrm{Sh}(\mathrm{Nm}) : \mathrm{Sh}^+(H_0, Z_0, M_0^\flat) \to \mathrm{Sh}^+(H_1, Z_1, M_0^\sharp),$$

et un diagramme commutatif de foncteurs comme suit.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(H_0) & \xrightarrow{\mathfrak{sh}_{\zeta^\flat}} & \mathscr{R}(\mathrm{Sh}^+(H_0, Z_0, M_0^\flat)) \\ {\scriptstyle \mathrm{Nm}^\top}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Sh}(\mathrm{Nm})^*} \\ \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(H_1) & \xrightarrow[\mathfrak{sh}_{\zeta^\sharp}]{} & \mathscr{R}(\mathrm{Sh}^+(H_1, Z_1, M_0^\sharp)) \end{array}$$

Puisque la représentation régulière W de l'algèbre B est une représentation fidèle du groupe algébrique H_0, il existe une construction tensorielle $W^\square$ et un idempotent $\varepsilon : W^\square \to W^\square$ dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(H_0)$ tels que $\mathrm{Nm}^\top W_1 \simeq \mathrm{Im}(\varepsilon)$. Or $\mathfrak{sh}_{\zeta^\flat}(W)$ est $\mathfrak{A}$-motivique d'après l'interprétation modulaire de la variété $\mathrm{Sh}(H_0, Z_0, M_0^\flat)$ donnée au théorème 14.4, il s'ensuit que la restriction

$$\mathrm{Sh}(\mathrm{Nm})^*\mathfrak{sh}_{\zeta^\sharp}(W_1) = \mathfrak{sh}_{\zeta^\flat}(\mathrm{Nm}^\perp W_1) \simeq \mathrm{Im}(\mathfrak{sh}_{\zeta^\flat}(\varepsilon),$$

est $\mathfrak{A}$-motivique et par suite que $\mathfrak{sh}_{\zeta^\sharp}(W_1)$ est localement $\mathfrak{A}$-motivique puisque Sh(Nm) est un revêtement fini étale (d'après le lemme 15.1).

16.3.7. — L'argument utilisé pour la flèche pr_2 s'applique sans changement à l'homomophisme $\mathrm{Am}_1 : P_1 \to H_1$. En effet la flèche

$$\mathrm{Sh}(\mathrm{Am}_1) : \mathrm{Sh}^+(P_1, X_1, K_0^\sharp \times L_0^\sharp) \to \mathrm{Sh}^+(H_1, Y_1, M_0^\sharp),$$

est finie étale (lemme 15.1). On obtient ainsi que le système

$$\mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}(\mathrm{Am}_1^\top W_1) \simeq \mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}(\mathrm{pr}_1^\top V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{pr}_2^\top U_1),$$

est localement $\mathfrak{A}$-motivique.

16.3.8. — Puisque $\mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}$ est un $\otimes$-foncteur et que l'image de $U_1^\vee$ est localement $\mathfrak{A}$-motivique, le système

$$\begin{aligned}&\mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}(\mathrm{pr}_1^\top V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{pr}_2^\top U_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{pr}_2^\top U_1^\vee)\\ &= \mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}(\mathrm{pr}_1^\top V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{pr}_2^\top U_1) \otimes \mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}(\mathrm{pr}_2^\top U_1^\vee),\end{aligned}$$

est également localement $\mathfrak{A}$-motivique. Considérons la décomposition

$$U_1 \otimes_{\mathbb{Q}} U_1^\vee = \mathbb{Q} \oplus \mathfrak{sl}(U_1),$$

donnée par la trace. Cette décomposition est T_1-invariante et même P_1-invariante puisque ces actions sont définies par conjugaison sur l'espace $U_1 \otimes_{\mathbb{Q}} U_1^\vee \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(U_1)$. La représentation triviale $\mathbb{Q}$ est donc l'image du projecteur correspondant $e_{\mathrm{tr}} : U_1 \otimes_{\mathbb{Q}} U_1^\vee \to U_1 \otimes_{\mathbb{Q}} U_1^\vee$. L'idempotent

$$1 \otimes e_{\mathrm{tr}} : V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} U_1 \otimes_{\mathbb{Q}} U_1^\vee \to V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} U_1 \otimes_{\mathbb{Q}} U_1^\vee$$

est encore P_1-invariant et son image s'identifie à la représentation V_1. Ainsi

$$\mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}(\mathrm{pr}_1^\top V_1) = \mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}(\mathrm{Im}(1 \otimes e_{\mathrm{tr}})) = \mathrm{Im}(\mathfrak{sh}_{(\xi^\sharp,\upsilon^\sharp)}(1 \otimes e_{\mathrm{tr}}))$$

est localement $\mathfrak{A}$-motivique.

16.3.9. — Comme indiqué en début de démonstration, le système $\mathfrak{sh}_{\xi^\sharp}(V_1)$ est également localement $\mathfrak{A}$-motivique. Puisque V_1 est une représentation fidèle de G_1, on en déduit que le foncteur $\mathfrak{sh}_{\xi^\sharp}$ admet la factorisation,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_1) \arrow[rr, "\mathfrak{sh}_{\xi^\sharp}"] \arrow[dr] & & \mathscr{R}(\mathrm{Sh}^+(G_1, X_1, K_0^\sharp)) \\ & \mathfrak{A}(\mathrm{Sh}^+(G_1, X_1, K_0^\sharp))_{\mathrm{loc}} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

démontrant le théorème 16.4.

16.3.10. — On obtient finalement la $\mathfrak{A}$-motivicité des représentations étranges de Shimura.

Corollaire 16.5. — *Le foncteur $\mathfrak{sh}_{\xi,x}$ est à valeurs dans la catégorie des réalisations localement $\mathfrak{A}$-motiviques.*

Démonstration. — D'après 12.5.2, on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G/\Delta_K^{\mathrm{zar}}) \arrow[dr, "\mathfrak{sh}_{\xi,x}"] & \\
& \mathscr{R}(\Omega) \\
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_1) \arrow[uu, "\mathrm{Nm}_D^{\top}"] \arrow[ur, "\mathfrak{sh}_{\xi^\sharp,x^\sharp}"'] &
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme 2.2, le foncteur $\mathrm{Nm}_D^{\top}$ est une équivalence de catégories et il suffit de montrer que le foncteur $\mathfrak{sh}_{\xi^\sharp,x^\sharp}$ est à valeurs localement $\mathfrak{A}$-motiviques. Dans le diagramme,

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{R}(\mathrm{Sh}^+(G_1, X_1, K^\sharp)) \arrow[dd, "\mathrm{sp}_{x^\sharp}"] \\
\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}}(G_1) \arrow[ur, "\mathfrak{sh}_{\xi^\sharp}"] \arrow[dr, "\mathfrak{sh}_{\xi^\sharp,x^\sharp}"'] & \\
& \mathscr{R}(\Omega)
\end{tikzcd}$$

la flèche $\mathrm{sp}_{x^\sharp}$, définie comme $(x^\sharp)^*$, est exacte. D'après le théorème 16.4, il existe un schéma abélien A sur un revêtement étale fini $f : S \to \mathbf{Sh}^+(G_1, X_1, K^\sharp)_\Omega$ et un idempotent $e \in \mathrm{End}(\mathfrak{h}_1(A)^\square)$ d'une certaine construction tensorielle sur $\mathfrak{h}_1(A)$ tel que $f^*\mathfrak{sh}_{\xi^\sharp}(V_1) = \mathrm{Im}(e)$. Considérons un point $s : \mathrm{Spec}(\Omega') \to S$ au-dessus de $x^\sharp$, défini sur une extension finie Ω'/Ω. On a alors

$$\mathfrak{sh}_{\xi^\sharp,x^\sharp}(V_1) \otimes_\Omega \Omega' = s^* f^* \mathfrak{sh}_{\xi^\sharp}(V_1) = s^*\mathrm{Im}(e) = \mathrm{Im}(s^*e),$$

où s^*e est un idempotent de $\mathfrak{h}_1(A_s)^{\square}$. Puisque V_1 est un générateur de la catégorie $\mathsf{\textbf{Rep}}_{\mathbb{Q}}(G_1)$ par le théorème de Chevalley, le résultat en découle.

$\square$

Références

[Bor63] Armand Borel. Some finiteness properties of adele groups over number fields. *Publications mathématiques de l'IHES*, 1963.

[Bou71] N. Bourbaki. *Topologie générale : Chapitres 1 à 4*. Springer Berlin Heidelberg, 1971.

[Bou16] N. Bourbaki. *Topologie algébrique : Chapitres 1 à 4*. Springer Berlin Heidelberg, 2016.

[Car86] Henri Carayol. Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura. *Compositio Mathematica*, 59(2) :151–230, 1986.

[CCO14] Ching-Li Chai, Brian Conrad, and Frans Oort. *Complex multiplication and lifting problems*. Mathematical surveys and monographs ; volume 195. American Mathematical Society, 2014.

[CM18] Anna Cadoret and Ben Moonen. Integral and adelic aspects of the mumford-tate conjecture. *Journal de l'I.M.J*, 2018.

[Con12] Brian Conrad. Weil and Grothendieck approaches to adelic points. *Enseign. Math. 58*, 2012.

[Del71] Pierre Deligne. Travaux de shimura. *Séminaire Bourbaki 389*, 1971.

[Del79] Pierre Deligne. Variétés de shimura : interprétation modulaire et techniques de construction de modèles canoniques. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (AMS)*, 1979.

[Del80] Pierre Deligne. Cycles de Hodge absolus et périodes des intégrales des variétés abéliennes. (Rédigé par J. L. Brylinski). (2) :23–33, 1980.

[Del82] Pierre Deligne. Motifs et groupes de taniyama. *Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, Lectures Notes Volume 900, Springer*, 1982.

[Del89] Par P. Deligne. Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points. In Y. Ihara, K. Ribet, and J.-P. Serre, editors, *Galois Groups over â*, pages 79–297, New York, NY, 1989. Springer US.

[Del94] Pierre Deligne. À quoi servent les motifs ? In *Motives. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 143–161. AMS, 1994.

[DM82] P. Deligne and J. S. Milne. Tannakian categories. pages 101–228, 1982.

[Dra83] P.K. Draxl. *Skew Fields*. Lecture note series / London mathematical society. Cambridge University Press, 1983.

[FM22] Lie Fu and Ben Moonen. The Tate conjecture for even dimensional Gushel-Mukai varieties in characteristic $p \geq 5$, 2022.

[Gro71] Alexandre Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, volume 224 of *Lecture notes in mathematics*. Springer-Verlag, 1971.

[Jan90] Uwe Jannsen. *Mixed motives and algebraic K-theory*, volume 1400 of *Lecture notes in mathematics*. Springer, first edition, 1990.

[KMRT20] M.A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, and J.P. Tignol. *The Book of Involutions*. American mathematical society. Gao deng jiao yu chu ban she, 2020.

[Kot92] Robert Kottwitz. Points on som Shimura varieties over finite fields. *Journal of the American Mathematical society*, Vol.5, No.2 :373–444, 1992.

[Lan83] S. Lang. *Complex Multiplication*. Grundleheren der math. Wiss,255. Springer-Verlag, 1983.

[Mil04] J.S. Milne. Introduction to Shimura varieties. 2004.

[Mil11] J.S. Milne. Shimura varieties and moduli. 2011.

[Mum69] David Mumford. A note of Shimura's paper Discontinuous groups and abelian varieties. *Mathematische Annalen*, 181 :345–352, 1969.

[Oes84] Joseph Oesterlé. Nombres de Tamagawa et groupes unipotentes en caractéristique p. *Inventiones mathematicae*, 78 :13–88, 1984.

[Pin88] Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties. 1988.

[Sch88] Norbert Schappacher. *Periods of Hecke Characters*. Springer Berlin Heidelberg, 1988.

[Ser68] Jean-Pierre Serre. *Abelian ℓ-Adic Representations*. W.A. Benjamin, Inc, first edition, 1968.

[Shi63] Goro Shimura. On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions. *Ann. Math. (2)*, 78 :149–192, 1963.

[Shi65] Goro Shimura. On the field of definition for a field of automorphic functions. II. *Ann. Math. (2)*, 81 :124–165, 1965.

[Shi67] Goro Shimura. Algebraic number fields and symplectic discrete groups. *Annals of Mathematics 85, no. 1*, 1967.

[UY13] Emmanuel Ullmo and Andrei Yafaev. Generalised Tate, Mumford-Tate and Shafarevich conjectures. *Annales scientifiques du Quebec. 37*, 2013.

[Wat79] William C. Waterhouse. *Introduction to Affine Group Schemes*, volume 66 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, first edition, 1979.

[Yan23] Ziquan Yang. A note on systems of realizations on Shimura varieties. 2023.

Antoine Szabo

Université de Strasbourg

Antoine SZABO

Sur les représentations galoisiennes associées aux modèles étranges de Shimura

École doctorale Mathématiques, sciences de l'information et de l'ingénieur | ED 269 Université de Strasbourg

Résumé

Le but de cette thèse est de montrer que les représentations galoisiennes provenant de certaines variétés de Shimura, dites étranges, sont associées à des motifs abéliens. Les structures de Hodge définies par les données de Shimura en question ont un poids non rationnel et ainsi aucune interprétation modulaire en terme de variétés abéliennes ou de motifs abéliens. Notre stratégie est de modifier la donnée de Shimura initiale de sorte à réaliser les variétés étranges comme revêtements galoisiens de nouvelles variétés de Shimura dont le poids est rationnel et de comparer ces dernières à des variétés de Shimura de type Hodge. En passant, on étudie une classe de variétés de Shimura étranges définies par des tores algébriques et l'on obtient des résultats similaires. Notre méthode montre la motivicité des systèmes de réalisations vivant sur les variétés de Shimura étranges.

Motifs, Variétés de Shimura, Représentations galoisiennes.

Résumé en anglais

The aim of this thesis is to show that the Galois representations coming from some Shimura variety, so called strange Shimura variety, are abelian motivic. The Hodge structures defined by theses Shimura varieties have non-rational weight, hence no moduli interpretation in term of abelian varieties or even abelian motives. Our strategy is to modify the initial Shimura data to realise strange models as Galois covers of Shimura varieties with rational weight and compare thoses whith Shimura varieties of Hodge type. In passing, we study strange Shimura varieties defined by algebraic tori and obtain the same results. We eventually show the motivicity of the system of realisations lying over the strange Shimura variety.

Motives, Shimura varieties, Galois representations.